专题 8 函数中的隐圆和隐距离

函数当中涉及一些求最值,求值域,除了传统方法外,数形结合发挥了巨大的作用,在之前我们介绍了绝对值函数的“正方形控制”和“曼哈顿距离”问题，以及津津乐道到的“平底锅函数”，在根式下的函数又有哪些隐藏的树形结合规律和套路呢？考试当中的那些给定函数判断图像，或者给了图像，判断是哪个函数解析式，然，这里经常要用到高二的求导甚至同构知识.

第一讲隐圆和隐距离问题

类型一 隐半圆类型

隐半圆 常常出现的结构为:(1) $\sqrt{a^2-x^2}$；(2) $\sqrt{a^2-(x-b)^2}$

隐半圆的结构特点：根式下为二次代数式，且二次项系数为-1. 如 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 表示以原点为圆心, $|a|$为半径的圆的上半圆, $y=\sqrt{a^2-(x-b)^2}$ 表示以 $(b,0)$ 为圆心, $|a|$为半径的圆的上半圆, 必要的时候可以进行三角换元, $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 上的任意一点可以表示为$(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$, $y=\sqrt{a^2-(x-b)^2}$ 上的任意一点可以表示为$(b+a\cos\alpha, a\sin\alpha)$, 此时 α 的范围为$[0,\pi]$.

例 1.（2019•开福区校级期中）函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$ 的最小值为____.

解析：令 $x=\cos\alpha(0\le\alpha\le\pi)$, 则函数 $y=f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha-2}(0\le\alpha\le\pi)$, 它表示 $B(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 与 $A(2,0)$ 连线的斜率，如图 8-1-1 所示，由图可得：当 AB 与半圆相切时，函数 y 取最小值，此时 $\angle OAB=30^\circ$, $k_{AB}=\tan\left(180^\circ-30^\circ\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 故答案为$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

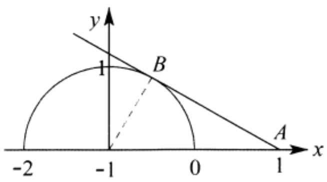


图 8-1-1

例 2.（2018•湖北期中）若直线 $y=kx-1$ 与曲线 $y=\sqrt{-x^2+6x-8}$ 有两个公共点，则 k 的取值范围是____.

解析：由题知曲线 $y=\sqrt{-x^2+6x-8}$ 表示的是圆心在 $(3,0)$, 半径 1 的圆的一半, 直线 $y=kx-1$ 恒过点 $(0,1)$, 当直线 $y=kx-1$ 与圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 相切时, 由 $\dfrac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$, 得 $k=0$（舍）, $k=\dfrac{3}{4}$, 点 (0, -1) 与点

$(2,0)$连线的斜率为$\frac{1}{2}$,所以k得取值范围是$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$.故答案为$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$.

例 3.（2019•天河区校级期中）若方程$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+a}-1=0$仅有一解，则实数$a$的取值范围是__.

解析：方程$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+a}-1=0$等价于$\sqrt{1-x^2}=x+a$.方程$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+a}-1=0$仅有一解,即方程$\sqrt{1-x^2}=x+a$仅有一解,所以函数$y=\sqrt{1-x^2}$与函数$y=x+a$的图象有且只有一个零点.如图 8-1-2 所示,当$a=\sqrt{2}$时,直线与半圆相切，满足要求,当$a\in(-1,1]$时，直线与半圆相交但只有一个交点，满足要求,所以实数a的取值范围为$\{\sqrt{2}\}\cup(-1,1]$.故答案为$\{\sqrt{2}\}\cup(-1,1]$.

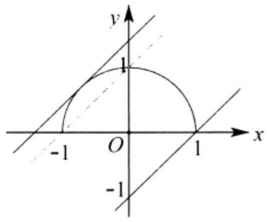


图 8-1-2

例 4.（2018•浙江模拟）记$M=|x-1|+\sqrt{4-x^2}$，则M的最大值为(　　)

A. 4　　　　B. $1+2\sqrt{2}$　　　　C. 3　　　　D. $1+\sqrt{2}$

解析：设$x=2\sin\theta,\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,所以$M=|x-1|+\sqrt{4-x^2}=|2\sin\theta-1|+2\cos\theta|$;　当$\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$时，$M=1-2\sin\theta+2\cos\theta=1-2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$,　因为$\theta-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{12}\right]$,　所以当$\theta=-\frac{\pi}{2}$时，$M$的最大值为$1+2\sqrt{2}$;当$\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$时，$M=2\sin\theta+1+2\cos\theta=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1$,因为$\theta+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{5\pi}{12},\frac{3\pi}{4}\right]$,所以当$\theta=\frac{\pi}{2}$时,$M$的最大值为$1+2\sqrt{2}$,综上所述$M$的最大值为$1+2\sqrt{2}$,故选 B.

例 5.（2018•龙凤区校级期末）已知函数$f(x)=ax-a^2-4$，若$p^2+q^2=8$，则$\frac{f(p)}{f(q)}$的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,2-\sqrt{3})$　　B. $[2+\sqrt{3},+\infty)$　　C. $(2-\sqrt{3}，2+\sqrt{3})$　D. $[2-\sqrt{3}，2+\sqrt{3}]$

解析：由 $\dfrac{f(p)}{f(q)}=\dfrac{ap-a^2-4}{aq-a^2-4}=\dfrac{p-\left(a+\dfrac{4}{a}\right)}{q-\left(a+\dfrac{4}{a}\right)}$，表示点 $A(q,p)$ 与 $B\left(a+\dfrac{4}{a},a+\dfrac{4}{a}\right)$ 连线的斜率．如图 8-1-3，又 $a+\dfrac{4}{a}\geq 4$，故取，点 $E(4,4)$， 当 AB 与圆的切线 EC 重合时取最小值，可求 $k_{EC}=\tan 15^{\circ}=2-\sqrt{3}$，所 以 $\dfrac{f(p)}{f(q)}$ 的最小值为 $2-\sqrt{3}$；当 AB 与圆的切线 ED 重合时取最大值，可求 $k_{ED}=\tan 75^{\circ}=2+\sqrt{3}$，则 $\dfrac{f(p)}{f(q)}$ 的最大值为 $2+\sqrt{3}$；故 $\dfrac{f(p)}{f(q)}$ 的取值范围是 $[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$，故选 D．

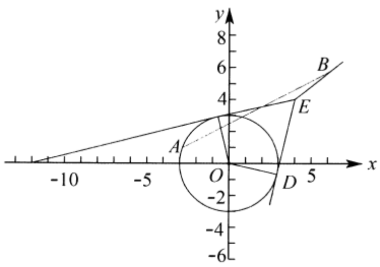


图 8-1-3

例 6．（2019•岳麓区校级月考）已知函数 $f(x)=|\sqrt{1-x^2}-ax-b|(a,b\in R)$，当 $x\in[0，1]$时，$f(x)$ 的最大值为 $M(a,b)$，则 $M(a,b)$ 的最小值等于____．

解析：

(平口单峰函数) 令 $x=\cos\alpha\left(0\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha, M(a,b)_{\min}=\max|\sin\alpha-a\cos\alpha-b|_{\min}$

根据平口单峰函数性质，易知函数水平跨度只有周期的 $\dfrac{1}{4}$，故平口单峰函数最佳控制为一个对称轴的左右两边相等，且最大值和最小值的和为零（参考秒 2），令 $g(\alpha)=\sin\alpha-a\cos\alpha-b$， $g(0)=g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，故 $a=-1$， $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\in[1,\sqrt{2}]$， $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 时取得最大值，故只需 $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，

即 $b=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，即 $M(a,b)_{\min}=g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$．

例 7．（2009•上海）将函数 $y=\sqrt{4+6x-x^2}-2(x\in[0,6])$ 的图象绕坐标原点逆时针方向旋转角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\alpha)$，得到曲线 C．若对于每一个旋转角 θ，曲线 C 都是一个函数的图象，则 α 的最大值为____．

解析：如图 $8-1-4$, 先画出函数 $y=\sqrt{4+6x-x^2}-2(x\in[0,6])$ 的图象, 这是一个圆弧, 且圆心为 $M(3,-2)$ 由图可知，当此圆弧绕坐标原, 点逆时针方向旋转角大于 $\angle MAB$ 时, 曲线 C 都不是一个函数的图象，所以 $\angle MAB$ 正切最大值为 $\angle MAB=\arctan\frac{2}{3}$, 即 α 的最大值为 $\arctan\frac{2}{3}$. 故答案为 $\arctan\frac{2}{3}$.

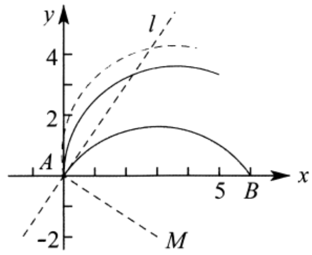


图 8-1-4

总结在关于函数旋转问题，一定要满足不能一个自变量 x 对应两个 y, 关于圆弧，就是不能出现平行于 y 轴的切线，那么其它任意函数也要满足此规律.

例 8.（2018•沙坪坝区校级月考）已知函数 $f(x)=\sqrt{3}lnx(x\geqslant 1)$，若将其图象绕原点逆时针旋转 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$ 角后，所得图象仍是某函数的图象，则当角 θ 取最大值 θ_0 时， $\tan\theta_0=($　　$)$

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{e}$　　D. $\frac{e}{\sqrt{3}}$

解析：如图 8-1-5 所示，画出函数图象，易知函数图象过点 $A(1,0)$, 点 $A(1,0)$ 处的切线 m 转动到直线 n 的位置(即和 x 轴垂直）时就是转动的最大角度，此后若再旋转，图象的一个 x 值将对应 2 个 y, 那样就不是函数的图象了. 因此只要求出初始位置时切线和终了位置时的切线的夹角 θ 即为转动的最大角度 θ_0. 设切线 m 的倾斜角为 α, 所以 $\tan\alpha=f'(1)$, 因为 $f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{x}$, 所以 $\tan\alpha=f'(1)=\sqrt{3}$, 所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, 所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$, 所以 $\theta_0=\frac{\pi}{6}$, 所以 $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故选 B .

注意：此题要验证其它, 点不会出现与 y 轴平行的切线，设图象上一点 (x,y) 绕 $(1,0)$ 逆时针旋转 a 角后变成 (x_1,y_1), 则 $x_1=(x-1)\cos a-y\sin a+1$, $y_1=(x-1)\sin a+y\cos a$, 绕原点逆时针旋转 a 角后变成 (x_2,y_2), 则 $x_2=x\cos a-y\sin a$, $y_2=x\sin a+y\cos a$, 所以 (x_1,y_1) 是 (x_2,y_2) 按照向量 $(-\cos a+1,-\sin a)$ 平移后得到的，所以绕 $(1,0)$ 旋转 a 后的图象是绕原点旋转后的图象按照向量 $(-\cos a+1,-\sin a)$ 平移后得到的，而平移是不改变图形形状的. 所以绕原点的最大角度和绕 $(1,0)$ 点旋转的

最大角度相等.

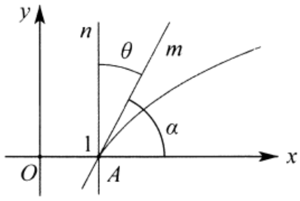


图 8-1-5

例 9.（2018•浦东新区校级期中）已知正实数 p 、q 满足 $p+2q=pq$，则 $p+q+\sqrt{p^2+q^2}$ 的最小值是____

解析因为 $p>0,\quad q>0$, 又知 $p+2q=pq(p>0,q>0)$, 故 $\dfrac{1}{q}+\dfrac{2}{p}=1$, 该式可以看作恒过定点 $P(2,1)$ 的直线在 x 轴，y 轴上的截距分别为 p,q, 设 $A(p,0),\quad B(0,q)$, 过 p 分别作 $PC\perp x$ 轴，$PD\perp y$ 轴，则 $p+q+\sqrt{p^2+q^2}$ 即表示 OAB 的周长.

解析：法一（万能公式）如图 $8-1-6$, 设 $\angle BAC=\theta,\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),t=\tan\dfrac{\theta}{2},t\in(0,1)$, 所以 $OA=2+\dfrac{1}{\tan\theta}=2+\dfrac{1-t^2}{2t}$,

$OB=1+2\tan\theta=1+\dfrac{4t}{1-t^2}, AB=PA+PB=\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{2}{\cos\theta}=\dfrac{1+t^2}{2t}+\dfrac{2\left(1+t^2\right)}{1-t^2}$, 所以

$p+q+\sqrt{p^2+q^2}=OA+OB+AB=3+\dfrac{1-t^2}{2t}+\dfrac{4t}{1-t^2}+\dfrac{1+t^2}{2t}+\dfrac{2\left(1+t^2\right)}{1-t^2}=3+\dfrac{1}{t}+\dfrac{2(t+1)^2}{1-t^2}=$

$3+\dfrac{1}{t}+\dfrac{2(1+t)}{1-t}=1+\dfrac{1}{t}+\dfrac{4}{1-t}=1+\left(\dfrac{1}{t}+\dfrac{4}{1-t}\right)[t+(1-t)]=6+\dfrac{1-t}{t}+\dfrac{4t}{1-t}\geq 6+4=10$,

当且仅当 $\dfrac{1-t}{t}=\dfrac{4t}{1-t}$, 即 $t=\dfrac{1}{3}$ 时取等号, 此时 $p+q+\sqrt{p^2+q^2}$ 取得最小值 10. 故答案为 10.

法二（构造隐圆），根据题意, 如图 8-1-7, 作 $Rt\triangle OAB$ 的旁切圆 C, 与 OA 和 OB 延长线切手点 N、M,

易知 $OA+OB+AB=CM+CN=2r$, 由手 $PC\geq CN$, 即 $(r-2)^2+(r-1)^2\geq r^2$, 解得 : $r\geq 5$ 或者 $r\leq 1$（舍）, 故当切点是点. P 时，周长最小, 此时 $p+q+\sqrt{p^2+q^2}$ 取得最小值 10. 故答案为 10.

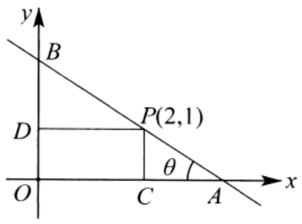


图 8-1-6

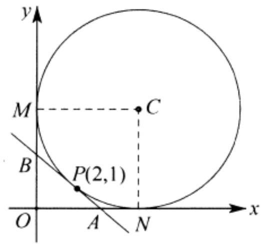


图 8-1-7

注意此题被改编多次，包括在解三角形领域当中多次出现，成为一道网红考题，解答方法很多，篇幅受限，不一一列举，一旦遇到三角形周长问题，构造“旁切圆”很容易达到“高观点，低运算”的效岸。

类型二二次函数类型

形如 $f(x)=mx+n\pm\sqrt{ax+b}$ 模型，可以通过换元转化为二次函数 $ax^2+bx+c=0$ 的类型来处理. 这种类型

的特点就是根号下的式子和根号外式子相似，这样换元构造一个二次函数。

例 10.（2019•西山区校级期中）函数 $f(x)=2x-1+\sqrt{x-2}$ 的最小值是(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

解析：设 $\sqrt{x-2}=t$, $t\geq 0$, 则 $x=t^2+2$, 则函数 $f(x)=2x-1+\sqrt{x-2}$ 等价于 $y=2t^2+t+3$, $t\geq 0$, 因为 $y=2t^2+t+3$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数, $y_{\min}=2\times 0^2+0+3=3$. 所以函数 $f(x)=2x-1+\sqrt{x-2}$ 的最小值是 3, 故选 A.

例 11. 已知函数 $y=2x-3-\sqrt{a-4x}$ 的值域为 $(-\infty$，$\frac{7}{2}]$，则实数 a 的值为____.

解析：由题意可得 $a-4x\geq 0$ 可得 $x\leq\frac{a}{4}$, 令 $\sqrt{a-4x}=t(t\geq 0)$, 则 $2x=\frac{a-t^2}{2}$, $y=-\frac{t^2}{2}-t+\frac{a}{2}-3$, 所以当 $t=-1$ 时取得最大值，但由于 $t\geq 0$, 故当 $t=0$, 即 $x=\frac{a}{4}$ 时, $y=\frac{a}{2}-3=\frac{7}{2}$, 解得 $a=13$. 故答案为13.

类型三隐距离类型

隐距离问题常常出现的结构如下:

1. $\sqrt{(x-a)^2+b^2}$ 表示 x 轴上的一点 $(x,0)$ 到点 (a,b) 的距离。

2. $\sqrt{(x-a)^2+b^2}+\sqrt{(x-c)^2+d^2}$ 表示 x 轴上的一点 $(x,0)$ 到点 (a,b) 和点 (c,d) 的距离之和.

3. $\sqrt{(x-a)^2+b^2}-\sqrt{(x-c)^2+d^2}$ 表示 x 轴上的一点 $(x,0)$ 到点 (a,b) 和点 (c,d) 的距离之差.

4. $\sqrt{(x-a)^2+b^2}+(x-c)$ 表示：当 $x\geq c$ 时，x 轴上的一点 $(x,0)$ 到点 (a,b) 和点 $x=c$ 的距离之和，当 $x<c$

时，x 轴上的一点 $(x,0)$ 到点 (a,b) 和点 $x=c$ 的距离之差，显然当 $x\to-\infty$ 时，距离之差无限靠近 $a-c$.

例 12. 求函数 $y=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2x+2}$ 的最小值.

解析：函数 $y=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{(x-0)^2+(0-2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(0-1)^2}$ 表示点 $P(x,0)$ 到，点 $A(0,2)$ 和 $B(1,1)$ 的距离之和．如图 8-1-8 所示作出 A 关于 x 轴的对称，点 A'，连接 $A'B$．由 $|PA|+|PB|=|PA'|+|PB|\geq|P'A|+|P'B|=|P'A'|+|P'B|=|A'B|$，而 $A'(0,-2),|A'B|=\sqrt{(1-0)^2+(1+2)^2}=\sqrt{10}$. 即有函数 y 的最小值为 $\sqrt{10}$.

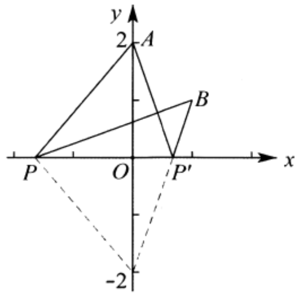


图 8-1-8

例 13. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x^2-4x+10}-\sqrt{x^2-2x+3}$，求 $f(x)$ 的最大值及相应的 x 值.

解析：因为函数 $f(x)=\sqrt{x^2-4x+10}-\sqrt{x^2-2x+3}$，所以 $f(x)=\sqrt{(x-2)^2+6}-\sqrt{(x-1)^2+2}$．所以记 $P(x,0)$，$A(2,\sqrt{6}),B(1,\sqrt{2})$，则点 P 在 x 轴上，点 A、B 在 x 轴上方，因为 $|AB|=\sqrt{(2-1)^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{9-4\sqrt{3}}$．所以 $f(x)=|PA|-|PA|\leq|AB|=\sqrt{9-4\sqrt{3}}$. 三点 P、A、B 共线时，取最大值. 由 $A(2,\sqrt{6}),B(1,\sqrt{2})$，得直线 AB 的方程 $y-\sqrt{2}=(\sqrt{6}-\sqrt{2})(x-1)$，令 $y=0$，得 $x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$. 所以 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{9-4\sqrt{3}}$，此时 $x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

例 14. （2019•西湖区校级模拟）函数 $y=x+\sqrt{x^2-2x+3}$ 的值域为(　　)

A. $[1+\sqrt{2}，+\infty)$　　B. $(\sqrt{2}，+\infty)$　　C. $[\sqrt{3}，+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

解析：法一(判别式法) 函数 $y=x+\sqrt{x^2-2x+3}=x+\sqrt{(x-1)^2+2}$，可知函数的定义域为 R．当 $x\geq1$ 时，可知函数 y 是递增函数，可得 $y\geq1+\sqrt{2}$，当 $x\leq1$ 时，可得 $y-x=\sqrt{x^2-2x+3}\geq0$，两边平方，因为 $y-x\geq0$，即 $y>1$；所以 $(y-x)^2=\sqrt{x^2-2x+3}$，可得 $x^2-2xy+y^2=x^2-2x+3(y\neq1)$，所以

$x=\dfrac{y^2-3}{2y-2}\le 1$. 得 $y\in R$. 由 $y-x=y-\dfrac{y^2-3}{2(y-1)}=\dfrac{y^2-2y+3}{2y-2}\ge 0$, 因为 $y>1$. 所以 $y^2-2y+3\ge 0$, 可得 $y\in R$ 综上可得 $y>1$. 所以函数 $y=x+\sqrt{x^2-2x+3}$ 的值域为 $(1,\infty)$, 故选 D.

法二（对称对偶式构造）当 $x\ge 1$ 时, 可知函数 y 是递增函数, 可得 $y\ge 1+\sqrt{2}$, 当 $x\le 1$ 时, 可得 $y-1=\sqrt{x^2-2x+3}+x-1=\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-2x+1}$, 令 $t=(x-1)^2+1$, （构造对称对偶式），则 $y-1=\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}(t\ge 1)$, $y=1+\dfrac{2}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}$, 显然 $0<\dfrac{2}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}\le\sqrt{2}$, 故 $1<y\le\sqrt{2}$, 故选 D.

法三（隐距离构造）$y=x+\sqrt{x^2-2x+3}=\begin{cases}x+\sqrt{(x-1)^2+2}(x\ge 0)\\-x+\sqrt{(x-1)^2+2}(x\le 0)\end{cases}$, 如图 8-1-9, 令 $A(1,\sqrt{2})$, 易知当 $x\ge 0$

时, x 轴非负半轴上任意一点 P, 满足 $|PA|+|PO|\ge|OA|=\sqrt{3}$, 故 $x\ge 0$ 时, $y\ge\sqrt{3}$; 当 $x\le 0$ 时, x 轴非正半轴上任意一点 Q, 满足 $|QA|-|QA|\le|OA|=\sqrt{3}$, 作 $AA_1\perp x$ 轴于 A_1, 当 $x\to-\infty$ 时, $|QA|\to|QA_1|$, $|QA|-|QO|\to|QA|-|QA_1|=1$, 故 $x\le 0$ 时, $1<y\le\sqrt{3}$, 故选 D.

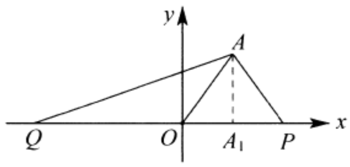


图 8-1-9

秒杀秘籍： **距离之差定理：**

已知 A,B 为直线 l 外的两点, 点 A 、点 B 在直线 l 上的射影为点 A_1 、点 B_1, 点. P 在直线 l 上，如图 $8-1-10$ 和图 8-1-11 所示。

①$|PA|-|PB|\le|AB|$, 当且仅当 A、B 、P 三点共线时等号成立.

② 当 $|PA|\ge|PB|$ 时，记为 P_1, 当 P_1 在无穷远处时，根据极限原理，距离之差 $|P_1A|-|P_1B|\to|P_1A_1|-|P_1B_1|=|A_1B_1|$.

③同理当 $|PA|\le|PB|$ 时, 记为 P_2, 当 P_2 在无穷远处时, 距离之差 $|P_2A|-|P_2B|\to|P_2A_1|-|P_2B_1|=-|A_1B_1|$.

综上可得: $-|A_1B_1|<|PA|-|PB|\le|AB|$.

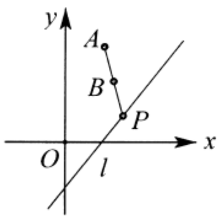


图 8-1-10

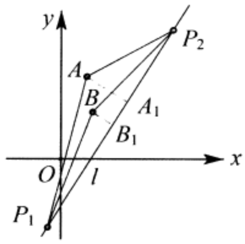


图 8-1-11

例 15. 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4-3x^2+9}-\sqrt{x^4-4x^2+9}}{x}(x>0)$

（1）将 $f(x)$ 化成 $\dfrac{1}{\sqrt{g^2(x)+a}+\sqrt{g^2(x)+b}}(a$，$b$ 是不同的整数）的形式；

（2）求 $f(x)$ 的最大值及相应的 x 值.

解析：(1) 由题意的, 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4-3x^2+9}-\sqrt{x^4-4x^2+9}}{x^2}=\dfrac{x^4-3x^2+9-x^4+4x^2-9}{x^2\cdot\frac{1}{x}\left(\sqrt{x^4-3x^2+9}+\sqrt{x^4-4x^2+9}\right)}$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{9}{x^2}-3}+\sqrt{x^2+\frac{9}{x^2}-4}}=\frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{x}\right)^2+3}+\sqrt{\left(x-\frac{3}{x}\right)^2+2}};$$

(2) 设 $h(x)=\left(x-\dfrac{3}{x}\right)^2$，　$x>0$,　当 $x=\dfrac{3}{x}$ 时, 即 $x=\sqrt{3}$ 时, $h(x)$ 有最小值, 则 $f(x)$ 有最大值, 所以

$f(x)_{\max}=f(\sqrt{3})=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

注意此题可以令 $x-\dfrac{3}{x}=t$, 即可转化为 $f(t)=\sqrt{t^2+3}-\sqrt{t^2+2}$, 转化为距离形式, 同样利用三点共线来算出距离之差最大值，当然最小值时取不到的，在无穷远处，这里不再详述.

例 16. 求 $s=\sqrt{x^4-5x^2-8x+25}-\sqrt{x^4-3x^2+4}$ 的最大值.

解析：如图 8-1-12，在函数 $y=x^2$ 的图象上求, 点 $N\left(x,x^2\right)$, 使得 $s=\sqrt{x^4-5x^2-8x+25}-\sqrt{x^4-3x^2+4}$ 有最大值，$y=\sqrt{\left(x^2-3\right)^2+(x-4)^2}+\sqrt{\left(x^2-2\right)^2+x^2}$ 表示, 点 $N\left(x,x^2\right)$, 分别到 $P(4,3),Q(0,2)$ 的距离差，则 PQ 的延长线与 $y=x^2$ 的交, 点 N 为所求, $|PQ|=|PN-QN|$.　下面证明 $y_{\max}=|PQ|$, 在 $y=x^2$ 上找一点不同于 N 点的 M 点. 在 $\triangle MPQ$ 中，$PQ\geq QM-PM|$. 即 $y_{\max}=|PQ|=\sqrt{(4-0)^2+(3-2)^2}=\sqrt{17}$, 因此最大值为 $\sqrt{17}$.

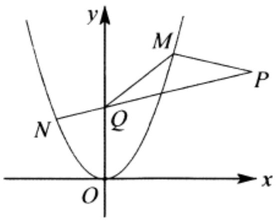


图 8-1-12

达标训练（高一预习三角函数和圆后使用）

1.（2019•枣庄校级月考）函数 $y=x+\sqrt{1-x^2}$ 的值域为(　　)

A．$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　　B．$[-1,\sqrt{2}]$　　C．$[-2，2]$　　D．$[1,\sqrt{2}]$

2.（2019•保定校级月考）对函数 $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ 作 $x=h(t)$ 的代换，则不改变函数 $f(x)$ 值域的代换是(　　)

A．$h(t)=\sin t,t\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$　　B．$h(t)=\sin t$，$t\in[0，\pi]$

C．$h(t)=\sin t$，$t\in[-\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{\pi}{2}]$　　D．$h(t)=\dfrac{1}{2}\sin t$，$t\in[0，2\pi]$

3.（2019•广东期末）函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x-2}$ 的值域是(　　)

A．$[-\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}]$　　B．$[-\dfrac{4}{3},0]$　　C．$[0，1]$　　D．$[0,\dfrac{4}{3}]$

4.（2019•抚州校级期中）对于函数 $f(x)$，如果存在锐角 θ 使得 $f(x)$ 的图象绕坐标原点逆时针旋转角 θ，所得曲线仍是一函数，则称函数 $f(x)$ 具备角 θ 的旋转性，下列函数具有角 $\dfrac{\pi}{4}$ 的旋转性的是(　　)

A．$y=\sqrt{x^2-1}$　　B．$y=x^2$　　C．$y=2^x$　　D．$y=lnx$

5.（2018•浙江期中）设 I 是含数 π 的有限实数集，$f(x)$ 是定义在 I 上的函数，若 $f(x)$ 的图象绕坐标原点逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$ 后与原图象重合，则在以下各项中，$f(\pi)$ 的取值不可能是(　　)

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$　　B．$\sqrt{3}\pi$　　C．π　　D．$\sqrt{2}\pi$

6.（2018•沙坪坝区校级期末）函数 $f(x)=2x-3-\sqrt{-x^2+6x-8}$ 的值域是(　　)

A．$[3-\sqrt{5}，5]$　　B．$[1，5]$　　C．$[2，3+\sqrt{5}]$　　D．$[3-\sqrt{5}，3+\sqrt{5}]$

7.（2019•山西期中）若直线 $y=kx-1$ 与函数 $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{2x-x^2},0\leqslant x\leqslant 2\\ \sqrt{-x^2+6x-8},2<x\leqslant 4\end{cases}$ 的图象恰有 3 个不同的交点，则 k 的取值范围为(　　)

A．$[\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$　　B．$[\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4})$　　C．$[\frac{1}{4},\frac{3}{4})$　　D．$(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$

8．（2019•开福区校级模拟）方程$\frac{(1+x)^3}{\sqrt{4-x^2}}+x^2-4=0$的实根个数为（）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

9．（2018•濂溪区校级月考）设$f(x)=\frac{\sqrt{x^4-3x^2+9}-\sqrt{x^4-4x^2+9}}{x}(x>0)$，则$f(x)$的值域为$($　　$)$

A．$(0,\sqrt{3}-\sqrt{2}]$　　B．$(\sqrt{3}-\sqrt{2},1)$　　C．$(-1,\sqrt{3}-\sqrt{2})$　　D．$(\sqrt{3}-\sqrt{2},\sqrt{3}+\sqrt{2})$

10．（2018•晋城二模）若$f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-2x+4}$的最小值与$g(x)=\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}(a>0)$的最大值相等，则$a$的值为$($　　$)$

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

11．（2018•东宝区校级月考）若$(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})(y-1+\sqrt{y^2-2y+2})=1$，则$x+y=($　　$)$

A．0　　B．1　　C．$\frac{1}{2}$　　D．2

12．（2018•桥东区校级月考）已知点$M(x,y)$是抛物线$y^2=4x$上的动点，则$\sqrt{x^2-6x+y^2-2y+10}+\sqrt{x^2-2x+y^2+1}$的最小值为$($　　$)$

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

13．（2019•苏州校级期末）若函数$f(x)=\sqrt{9x^2+3x+1}-\sqrt{9x^2-3x+1}-a$存在零点，则实数$a$的取值范围是____．

14．（2018•杨浦区校级期末）若关于x的方程$\sqrt{1-x^2}=|x-a|-a$有两个不相等的实数根，则实数a的取值范围是____．

15．将函数$y=\sqrt{-x^2+2x+3}-\sqrt{3}(x\in[0,2])$的图象绕坐标原点逆时针旋转$\theta(\theta$为锐角），若所得曲线仍是一个函数的图象，则$\theta$的范围是____．

16．（2019•湛江月考）若曲线$y=\sqrt{1-x^2}$与直线$y=x+b$始终有交点，则b的取值范围是____；若有一个交点，则b的取值范围是____；若有两个交点，则b的取值范围是____．

17．函数$y=x-1+\sqrt{x^2+2x+3}$的值域为．

18．已知$x\leqslant-\frac{1}{2}$，则二元函数$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{y^2-2y+5}$的最小值是____．

19.（2019•嘉兴市校级月考）函数 $y=\sqrt{x^4+3x^2-6x+10}-\sqrt{x^4-3x^2+2x+5}$ 的最大值为____.

20. 过点 $(2\sqrt{2},0)$ 直线 l 与曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 交于 A， B 两点， O 为坐标原点，当 ΔABO 的面积取最大值时，直线 l 的斜率等于____.

21.（2018•宝应县校级月考）若关于 x 的方程 $\sqrt{4-x^2}-kx-4+2k=0$ 有且只有两个不同的实数根，则实数 k 的取值范围是____.

22. 关于 x 的方程 $\sqrt{|1-x^2|}+a=x$ 有两个不相等的实数根，试求实数 a 的取值范围.

第二讲和谐区间和倍值区间问题

类型一和谐区间：对于定义域为 D 的函数 $y=f(x)$，若存在区间 $[a，b]\subset D$，使得 $f(x)$ 同时满足：① $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上是单调函数，②当 $f(x)$ 的定义域为 $[a，b]$ 时， $f(x)$ 的值域也为 $[a，b]$，则称区间 $[a，b]$ 为该函数的一个“和谐区间”．和谐区间满足:① $y=f(x)$ 位于连续区间（不能出现无穷间断点），② $y=f(x)$ 单调递增， $\begin{cases}f(a)=a\\f(b)=b\end{cases}$； 或者 $y=f(x)$ 单调递减， $\begin{cases}f(a)=b\\f(b)=a\end{cases}$

例 17.（2018•徐汇区校级期末）对于定义域为 D 的函数 $y=f(x)$，若存在区间 $[a，b]\subset D$，使得 $f(x)$ 同时满足，① $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上是单调函数，②当 $f(x)$ 的定义域为 $[a，b]$ 时， $f(x)$ 的值域也为 $[a，b]$，则称区间 $[a，b]$ 为该函数的一个“和谐区间”．

（1）求出函数 $f(x)=x^3$ 的所有“和谐区间” $[a，b]$；

（2）函数 $f(x)=|\frac{4}{x}-3|$ 是否存在“和谐区间” $[a，b]$？若存在，求出实数 a， b 的值；若不存在，请说明理由；

（3）已知定义在 $(2,k)$ 上的函数 $f(x)=2m-\frac{4}{x-1}$ 有“和谐区间”，求正整数 k 取最小值时实数 m 的取值范围.

解析：(1) 因为函数 $f(x)=x^3$;所以 $f(x)$ 在 R 内单调递增：再令 $f(x)=x^3=x$, 所以 $x=-1,0,1$;

所以 $f(x)=x^3$ 的“和谐区间”为:$[-1,0]$、$[0,1]$、$[-1,1]$；

(2) 假设函数 $f(x)=\left|\frac{4}{x}-3\right|$ 存在和谐区间, 所以 $\left|\frac{4}{x}-3\right|=x$；所以 $x^2+3x-4=0$ 或 $x^2-3x+4=0$，①当 $x^2+3x-4=0$, 即 $x=-4$ 或 1; 在 $[-4, 1]$ 内 $f(x)$ 不单调，故不成立；②当 $x^2-3x+4=0$ 时， x 无解，故不

成立, 所以综上所述：函数 $f(x)=\left|\frac{4}{x}-3\right|$ 不存在和谐区间；

(3) 因为函数 $f(x)=2m-\frac{4}{x-1}$ 有“和谐区间”, 所以 $f(x)$ 在 $(2,k)$ 内单调逆增，且 $f(x)=x$ 在定义内有两个不等的实数根；所以 $2m-\frac{4}{x-1}=x$ 在定义内有两个不等的实数根；即 $2m=x+\frac{4}{x-1}=x-1+\frac{4}{x-1}+1$：因为 $x\in(2,k)$, 所以 $2m\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}+1=5$, 即 $m\geq\frac{5}{2}$；因为 $g(x)=x+\frac{4}{x-1}$ 在 $(2,3)$ 内单调递减, 在 $(3,+\infty)$ 内单调递增, 所以 $k>3$, 因为函数 $g(x)=x+\frac{4}{x-1}$ 与直线 $y=2m$ 在 $(2,k)$ 有两个交点, $g(2)=6$, 所以 $k+\frac{4}{k-1}=6$, 所认正整数 k 最小值为 5, 此时 $g(5)=6$，则 $2m=6$, 即 $m=3$, 此时 m 的取值范固为 $\left(\frac{5}{2},3\right)$.

倍值区间：对于定义域为 D 的函数 $y=f(x)$，若存在区间 $[a，b]\subset D$，使得 $f(x)$ 同时满足，① $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上是单调函数，②当 $f(x)$ 的定义域为 $[a，b]$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[ka，kb]$，则称区间 $[a，b]$ 为该函数的一个“k 倍区间”．此函数也叫倍值函数.

倍值区间满足：① $y=f(x)$ 位于连续区间（无无穷间断点），② $y=f(x)$ 单调递增，$\begin{cases}f(a)=a\\f(b)=b\end{cases}$；或者 $y=f(x)$ 单调递减，$\begin{cases}f(a)=b\\f(b)=a\end{cases}$

例 18.（2019•庐阳区校级月考）已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-2x$.

（1）求函数 $f(x)$ 在 R 上的解析式；

（2）是否存在非负实数 a，$b(a<b)$，使得当 $x\in[a，b]$ 时，函数 $g(x)=f(x)$ 的值域为 $[-b，-a]$？若存在，求出所有 a，b 的值；若不存在，说明理由.

解析：(1) 设 $x<0$, 则 $-x>0$，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-2x$, 且 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)=x^2+2x=-f(x)$，

所以 $f(x)=-x^2-2x$, 因为 $f(0)=0$, 故 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x,x>0\\0,x=0\\-x^2-2x,x<0\end{cases}$

（2）假设存在满足题意的 $a,b(a<b)$, 且 $a\geq 0,b\geq 0$，由 (1) 可知, 当 $x\geq 0$ 时, $f(x)\geq -1$, 故 $-b\geq -1$,

即 $b \le 1$, 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减，从而有 $\begin{cases} f(a)=-a \\ f(b)=-b \end{cases}$, 即 $a=0$, $b=1$, 故存在 $a=0,b=1$ 满足题意.

例 19.（2020•南通期末）设 $a \in R$，函数 $f(x)=\dfrac{2^x+a}{2^x-a}$.

（1）若 $a=1$，求证：函数 $f(x)$ 为奇函数；

（2）若 $a<0$，判断并证明函数 $f(x)$ 的单调性；

（3）若 $a \ne 0$，函数 $f(x)$ 在区间 $[m$，$n](m<n)$ 上的取值范围是 $[\dfrac{k}{2^m}$，$\dfrac{k}{2^n}](k \in R)$，求 $\dfrac{k}{a}$ 的范围.

解析：(1) 由题意得, 当 $a=1$ 时, 函数 $f(x)=\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$, 因为 $2^x-1 \ne 0$, 所以 $x \ne 0$, 从而对任意的 $x \ne 0$,

都有 $f(-x)=\dfrac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1}=\dfrac{1+2^x}{1-2^x}=-f(x)$, 所以 $f(x)=\dfrac{2^x+1}{2^x-1}(x \ne 0)$ 为奇函数.

(2) 当 $a<0$ 时, 因为 $2^x>0$, 所以 $2^x-a>0$, 所以函数 $f(x)=\dfrac{2^x+a}{2^x-a}$ 的定义域为 R. 结论: 函数

$f(x)=\dfrac{2^x+a}{2^x-a}(a<0)$ 为 R 上的单调递增函数. 证明如下：设对任意的 $x_1,x_2 \in R$, 且 $x_1<x_2$, 则

$$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\frac{2^{x_1}+a}{2^{x_1}-a}-\frac{2^{x_2}+a}{2^{x_2}-a}=\frac{\left(2^{x_1}+a\right)\left(2^{x_2}-a\right)-\left(2^{x_2}+a\right)\left(2^{x_1}-a\right)}{\left(2^{x_1}-a\right)\left(2^{x_2}-a\right)}=\frac{2a\left(2^{x_2}-2^{x_1}\right)}{\left(2^{x_1}-a\right)\left(2^{x_2}-a\right)},$$

因为 $x_1<x_2$, 所以 $2^{x_2}>2^{x_1}$, 即 $2^{x_2}-2^{x_1}>0$, 又因为 $2^{x_1}-a>0$, $2^{x_2}-a>0$, $a<0$,

所以 $\dfrac{2a\left(2^{x_2}-2^{x_1}\right)}{\left(2^{x_1}-a\right)\left(2^{x_2}-a\right)}<0$, 于是 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$.

(3) 因为 $m<n$, 所以 $2^m<2^n$, 从而 $\dfrac{1}{2^m}>\dfrac{1}{2^n}$, 由 $\left[\dfrac{k}{2^m},\dfrac{k}{2^n}\right]$, 知 $\dfrac{k}{2^m}<\dfrac{k}{2^n}$, 所以 $k<0$, 因为 $a \ne 0$, 所以 $a<0$

或 $a>0$. ① 当 $a<0$ 时, 由 (2) 知, 函数 $f(x)=\dfrac{2^x+a}{2^x-a}$ 为 R 上单调递增函数. 因为函数 $f(x)$ 在区

间) $[m,n](m<n)$ 上的取值范围是 $\left[\dfrac{k}{2^m},\dfrac{k}{2^n}\right]$, $(k \in R)$ 所以 $\begin{cases} f(m)=\dfrac{k}{2^m} \\ f(n)=\dfrac{k}{2^n} \end{cases}$, 即 $\begin{cases} \dfrac{2^m+a}{2^m-a}=\dfrac{k}{2^m} \\ \dfrac{2^n+a}{2^n-a}=\dfrac{k}{2^n} \end{cases}$, 从而关于 x

的方程 $\underline{2^x+a}=\underline{k}$ 有两个互异实数根. 令 $t=2^x$. 则 $t>0$. 所以方程 $t^2+(a-k)t+ak=0$, $(a,k<0)$ 有两个

互异

实数根，则$\begin{cases}-\dfrac{a-k}{2}>0\\(a-k)^2-4ak>0,\\ak>0\end{cases}$ 从而 $0<\dfrac{k}{a}<3-2\sqrt{2}$. ②当 $a>0$ 时，函数 $f(x)=1+\dfrac{2a}{2^x-a}$ 在区间 $(-\infty,\log_2 a)$，$(\log_2 a,+\infty)$ 上均单调递减. 若 $[m,n]\subseteq(\log_2 a,+\infty)$，则 $f(x)>1$，于是 $\dfrac{k}{2^m}>0$，这与 $k<0$ 矛盾，故舍去.

若 $[m,n]\subseteq(-\infty,\log_2 a)$，则 $f(x)<1$，于是$\begin{cases}f(m)=\dfrac{k}{2^n}\\f(n)=\dfrac{k}{2^m}\end{cases}$，即$\begin{cases}\dfrac{2^m+a}{2^m-a}=\dfrac{k}{2^n}\ (1)\\\dfrac{2^n+a}{2^n-a}=\dfrac{k}{2^m}\ (2)\end{cases}$，

所以$\begin{cases}2^n\left(2^m+a\right)=k\left(2^m-a\right)\\2^m\left(2^n+a\right)=k\left(2^n-a\right)\end{cases}$，两式相减整理得 $(a-k)\left(2^n-2^m\right)=0$， 又 $2^m<2^n$，故 $2^n-2^m>0$， 从而 $a-k=0$， 因为 $a>0$， 所以 $\dfrac{k}{a}=-1$.

达标训练（适合高一）

23.（2019•延吉市校级期中）已知函数 $f(x)=|1-\dfrac{1}{x}|(x>0)$，

（1）是否存在实数 a，$b(a<b)$，使得函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域都是 $[a，b]$，若存在，求出 a，b 的值，若不存在，说明理由

（2）若存在实数 a，$b(a<b)$，使得函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[a，b]$ 时，值域为 $[ma，mb]$，$(m\neq 0)$，求 m 的取值范围.

24.（2018•射洪县校级期中）已知函数 $f(x)=kx(k\neq 0)$，且满足 $f(x+1)\bullet f(x)=x^2+x$，

(I) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(II) 若函数 $f(x)$ 为 R 上的增函数，$h(x)=\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1}(f(x)\neq 1)$，问是否存在实数 m 使得 $h(x)$ 的定义域和值域都为 $[m，m+1]$？若存在，求出 m 的值，若不存在，请说明理由.

25．（2018•虹口区校级期末）已知函数 $f(x)=2+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2x}$（实数 $a\neq 0$），

（1）若 $m<n<0$，请判断函数 $f(x)$ 在区间 $[m，n]$ 上的单调性并证明；

（2）若 $\dfrac{8}{7}\leqslant m<n$ 且 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 的定义域和值域都 $[m，n]$，求 $n-m$ 的最大值.

26．（2018•临川区校级期末）已知定义在区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)=|t(x+\dfrac{4}{x})-5|$，其中常函数 $t>0$

（1）若函数 $f(x)$ 分别在区间 $(0,2)$ ， $(2,+\infty)$ 上单调，试求 t 的取值范围；

（2）当 $t=1$ 时，方程 $f(x)=m$ 有四个不等实根 x_1 ， x_2 ， x_3 ， x_4

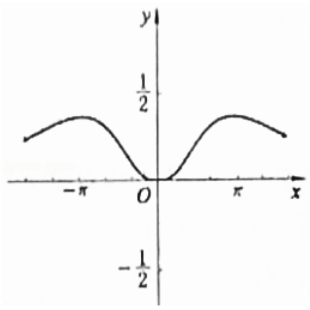
①证明： $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4=16$ ；

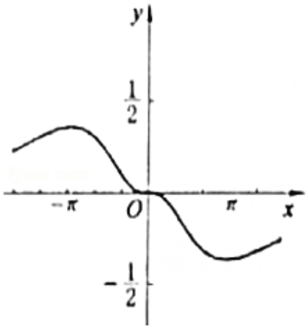
②是否存在实数 a ， b ，使得函数 $f(x)$ 在区间 $[a$ ， $b]$ 上单调，且 $f(x)$ 的取值范围为 $[ma$ ， $mb]$ ，若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，请说明理由.

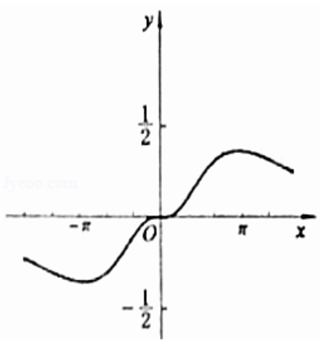
第三讲函数图像与解析式

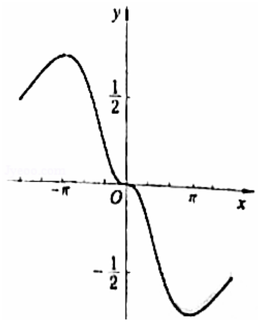
口诀：一奇偶，二特值，三单调，四极限.

例 20. （2020•淮北一模）函数 $f(x)=\frac{sinx-x}{cosx+x^2}$ 的部分图象是（　　）

A. 

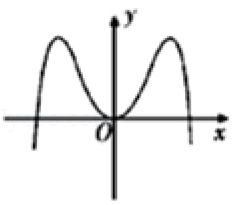
B. 

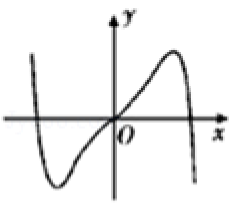
C. 

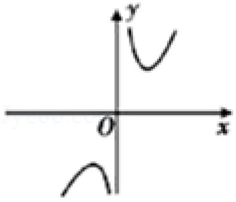
D. 

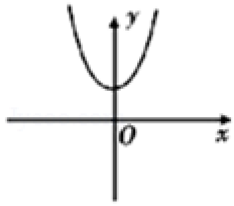
解析：因为 $f(-x)=\dfrac{-\sin x+x}{\cos x+x^2}=-f(x)$, 则函数 $f(x)$ 是奇函数, 图象关于原点对称, 排除 A. 当 $x=\pi$ 时, $f(\pi)=\dfrac{\sin\pi-\pi}{\cos\pi+\pi^2}=\dfrac{-\pi}{\pi^2-1}<0$, 排除 C, 　且 $-\dfrac{1}{2}<f(\pi)<0$, 排除 D, 故选 B.

例 21. （2020•乐山模拟）函数 $f(x)=(e^x+e^{-x})\cdot\sin x$ 的图象大致是（　　）

A. 

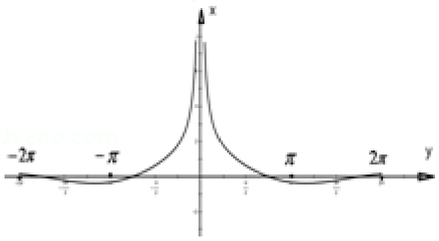
B. 

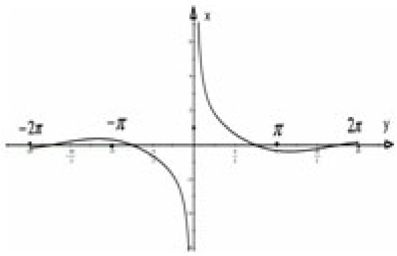
C. 

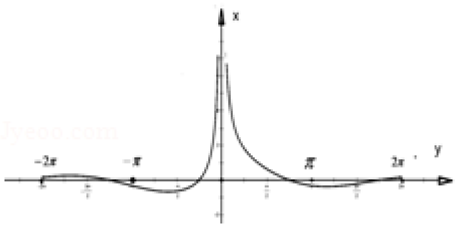
D. 

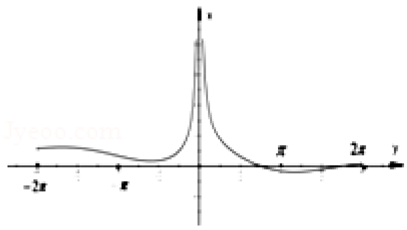
解析：因为 $f(-x)=\left(e^{-x}+e^{x}\right)\sin(-x)=-\left(e^{-x}+e^{x}\right)\sin x=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，其图象关于原点对称，故排除 A、D；又因为 $f(x)$ 的定义域是 R，排除 C，故选 B.

例 22. （2020•黄山一模）函数 $y=\dfrac{sinx+cosx}{|x|}$ 在区间[﹣2π，2π]的图象大致是（　　）

A. 

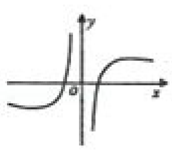
B. 

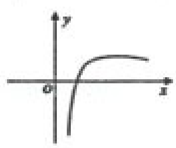
C. 

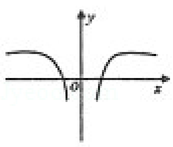
D. 

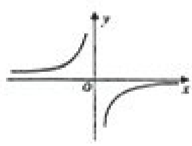
解析：由题得函数 $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{|x|}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{|x|}$，$x\in[-2\pi,2\pi]$，令 $f(x)=0$，解得 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 或 $x=-\dfrac{5\pi}{4}$，由图观察可知，只有选项 C 符合题意，故选 C.

例 23. （2020•曲靖一模）函数 $f(x)=\dfrac{lnx^4}{x}$ 的大致图象是（　　）

A. 

B. 

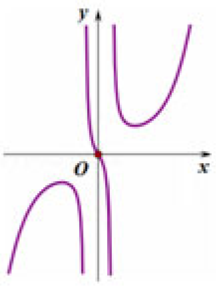
C. 

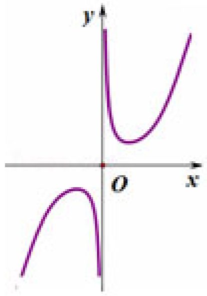
D. 

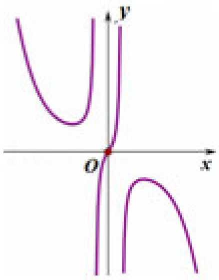
解析因为函数的定义域为 $\{x|\ x\neq 0\}$，且函数 $f(-x)=\dfrac{\ln(-x)^4}{-x}=-\dfrac{\ln x^4}{x}=-f(x)$ 为奇函数，排除 B 和 C，又

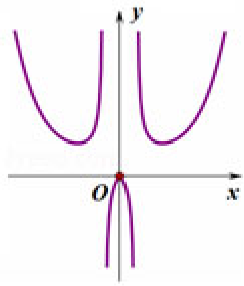
函数 $f(x)=\dfrac{\ln x^4}{x}$ 的零点为 -1 和 1，排除 D，故选 A .

例 24. （2020•合肥一模）函数 $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{|x|-cosx}$ 的图象大致为（　　）

A. 

B. 

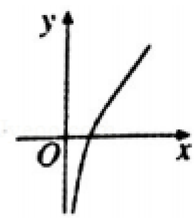
C. 

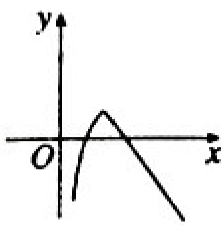
D. 

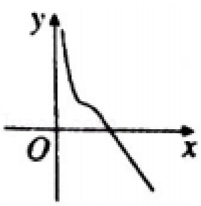
解析：由题得函数 $f(-x)=\dfrac{2^{-x}-2^{x}}{|-x|-\cos(-x)}=-\dfrac{2^{x}-2^{-x}}{|x|-\cos x}=-f(x)$，即函 $f(x)$ 在定义域上为奇函数，故排除 D，又因为 $f(0)=0$，$f(1)=\dfrac{2-2^{-1}}{1-\cos 1}>0$，故排除 B 和 C， 故选 A.

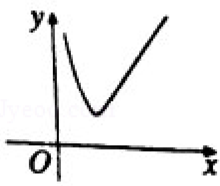
\end{aligned}

例 25. （2019•南阳期末）函数 $f(x)=|x-1|+e^{|lnx|}$ 的大致图象为（　　）


A.


B.


C.

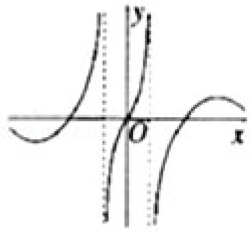

D.

解析：根据题意，函数 $f(x)=|x-1|+e^{\ln x|}$，其定义域为 $(0,+\infty)$，又由 $|x-1|\geq 0, e^{\ln x|}>0$，则必有 $f(x)>0$ 恒

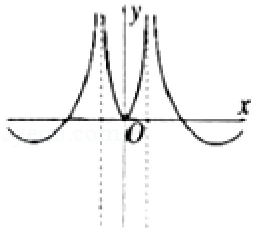
成立，故函数的图象在第一象限，只有 D 选项符合，故选 D.

达标训练（适合高一优等生或者高二）

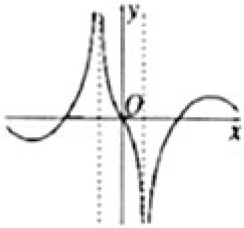
1．（2020•荆州一模）函数 $f(x)=\frac{2sinx}{1-|x|}$的图象大致是（　　）



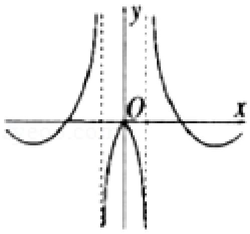
A.



B.

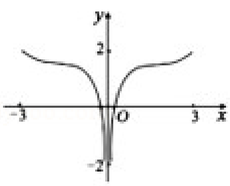


C.

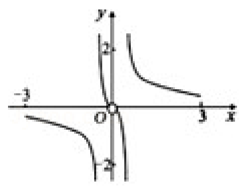


D.

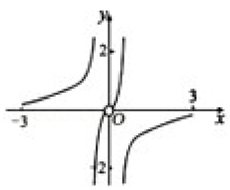
2．（2019•安庆期末）函数 $y=\frac{sinx}{log_{2019}|2^x-2^{-x}|}$在区间[﹣3，0）∪（0，3]上的图象为（　　）



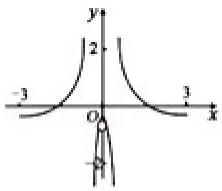
A.



B.

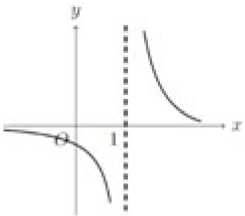


C.

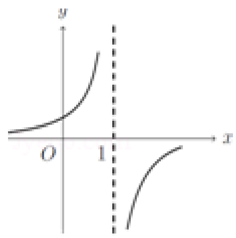


D.

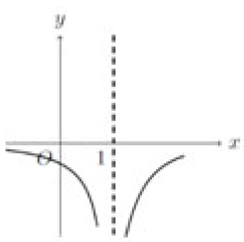
3．（2020•青羊区校级模拟）函数 f（x）$=\frac{1}{e^{x-1}-x}$的图象大致为（　　）



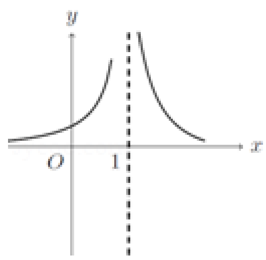
A.



B.

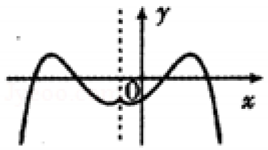


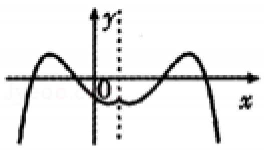
C.

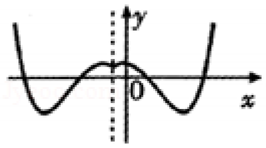


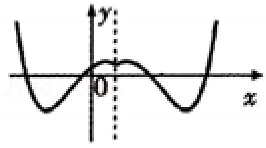
D.

4. （2020•内江模拟）函数 $f(x)=x^2-2x-2^{|x-1|}+1$ 的图象大致为（　　）

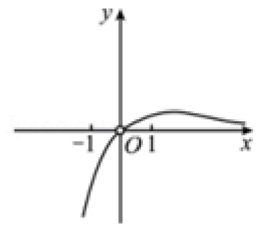
A. 

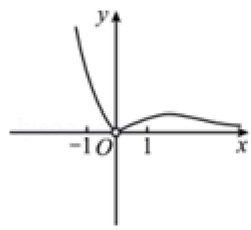
B. 

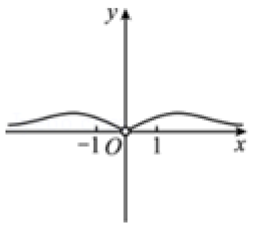
C. 

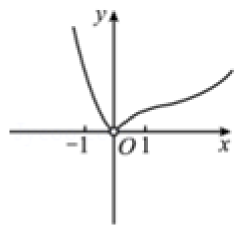
D. 

5. （2020•四川模拟）函数 $f(x)=\frac{x^2}{|e^x-1|}$的图象大致为（　　）

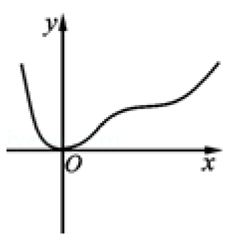
A. 

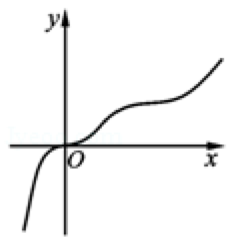
B. 

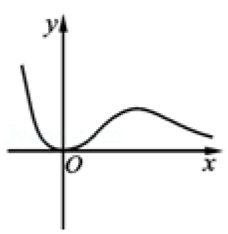
C. 

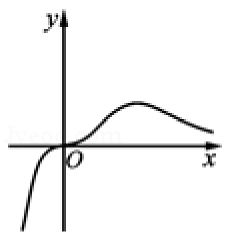
D. 

6. （2020•渭南一模）函数 $f(x)=\frac{x^3}{e^x+1}$的图象大致是（　　）

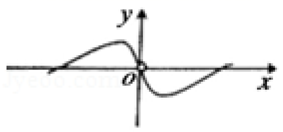
A. 

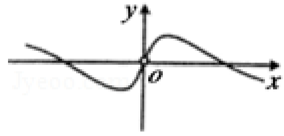
B. 

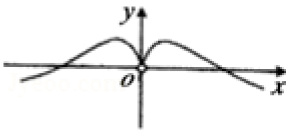
C. 

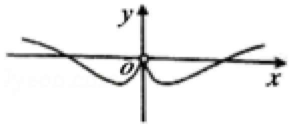
D. 

7. （2020•遂宁模拟）函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x\ln x}{x^2+1}，x>0\\ \frac{x\ln(-x)}{x^2+1}，x<0\end{cases}$ 的图象大致为（　　）

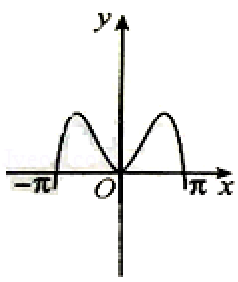
A. 

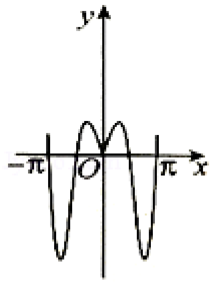
B. 

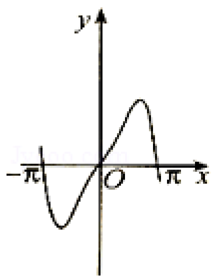
C. 

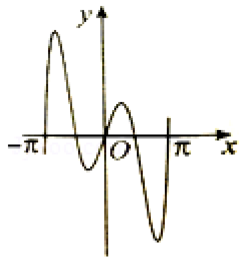
D. 

9. （2020•汉中一模）函数 $y=3^{|x|}\sin 2x$ 的图象可能是（　　）

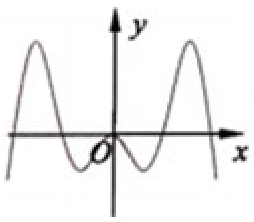
A. 

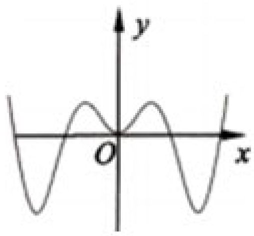
B. 

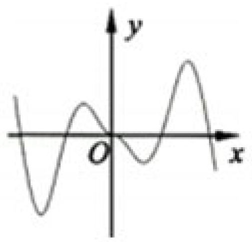
C. 

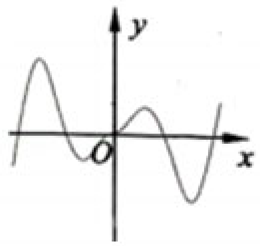
D. 

10. （2020•乐山模拟）函数 $f(x)=x\cdot ln\frac{2-sinx}{2+sinx}$的部分图象可能是（　　）

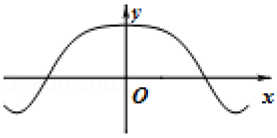
A. 

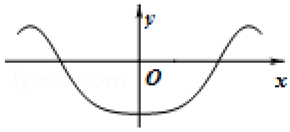
B. 

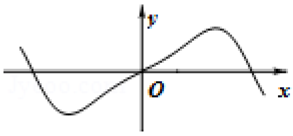
C. 

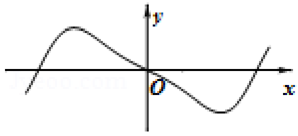
D. 

11. （2020•黄山一模）函数 $y=\frac{sinx}{2^{cosx}}$的图象大致是（　　）

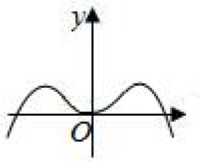
A. 

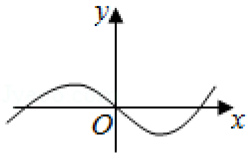
B. 

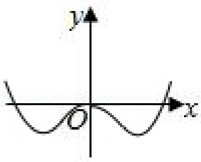
C. 

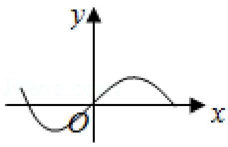
D. 

12. （2020•天河区一模）函数 $f(x)=(\frac{2}{1+e^{x}}-1)sinx$ 图象的大致形状是（　　）

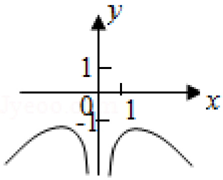
A. 

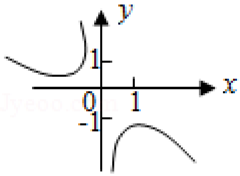
B. 

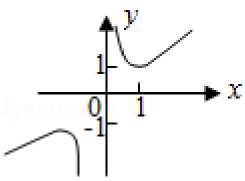
C. 

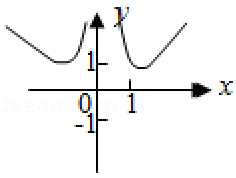
D. 

13. （2020•武侯区校级模拟）函数 $f（x）=\frac{x^{2}+cosx}{x}$的图象大致为（　　）

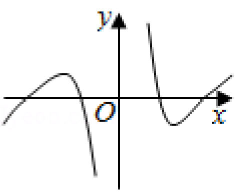
A. 

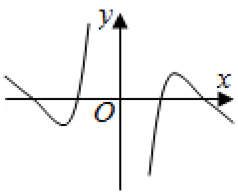
B. 

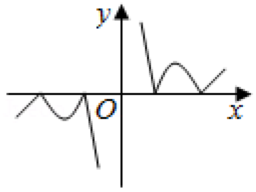
C. 

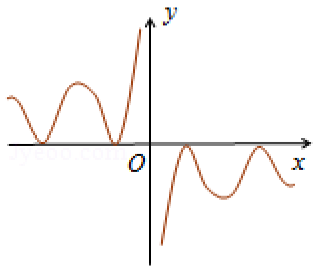
D. 

14. （2020•攀枝花一模）函数 $f（x）=\frac{3cosx+1}{x}$的部分图象大致是（　　）

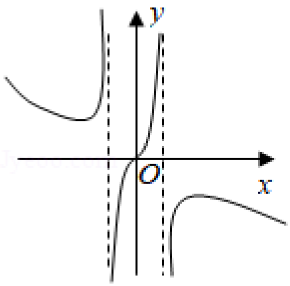
A. 

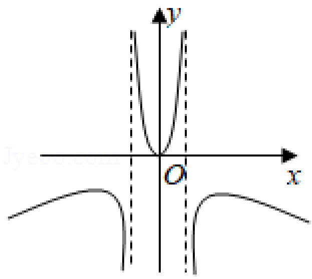
B. 

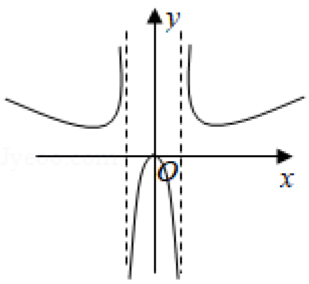
C. 

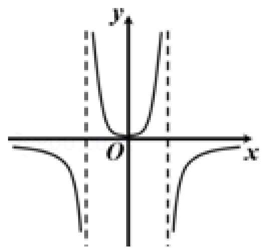
D. 

15. （2020•荆州一模）函数 $f(x)=\frac{x(e^{-x}-e^{x})}{4x^{2}-1}$的部分图象大致是（　　）

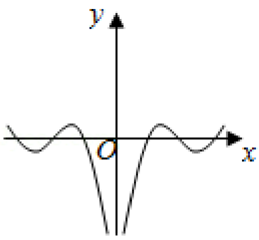
A. 

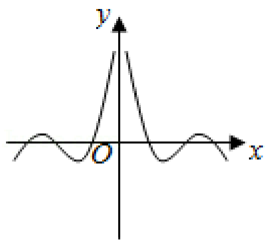
B. 

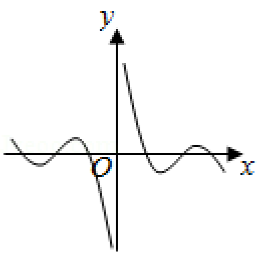
C. 

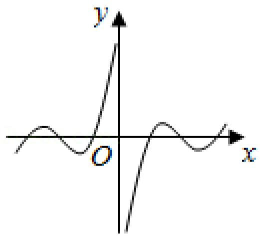
D. 

16. （2020•郑州一模）函数 $f(x)=\frac{2^{x}+1}{2^{x}-1}\cdot cosx$ 的图象大致是（　　）

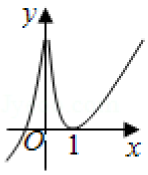
A. 

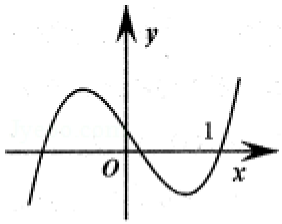
B. 

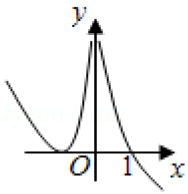
C. 

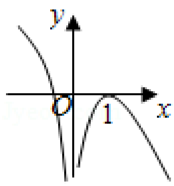
D. 

17. （2020•泸州模拟）函数 $f(x)=(x-1)ln|x|$的图象大致为（　　）

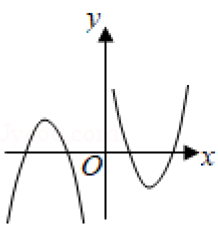
A. 

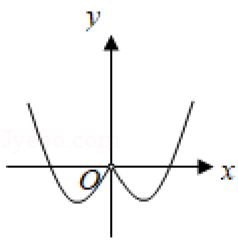
B. 

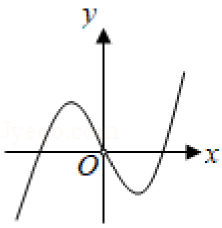
C. 

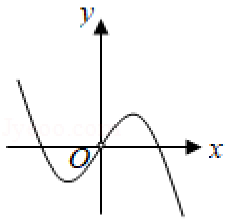
D. 

18. （2020•渭南一模）函数 $y=x\ln|x|$ 的大致图象是（　　）

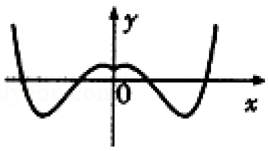
A. 

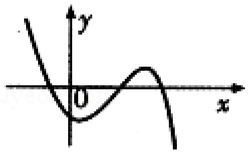
B. 

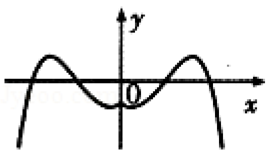
C. 

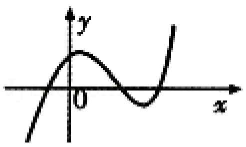
D. 

19. （2020•内江模拟）函数 $f(x)=x^2-2^{|x|}$ 的图象为（　　）

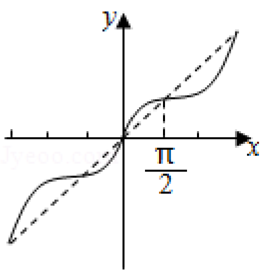
A. 

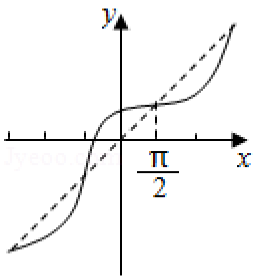
B. 

C. 

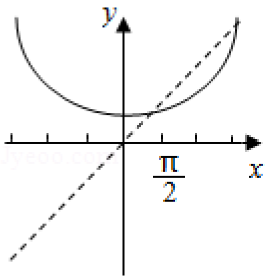
D. 

20. （2020•郴州一模）函数 $y=x+\cos x$ 的大致图象是（　　）

A. 

B. 

C.



D.