专题 1 指数函数和对数函数

第一讲指数运算

1, 有理数指数幂的分类

（1）正整数指数幂 $a^n=\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n个}\left(n\in N^*\right)$；

（2）零指数幂 $a^0=1\left(a\neq 0\right)$；

（3）负整数指数幂 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}\left(a\neq 0,n\in N^*\right)$；

（4）0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义.

2. 有理数指数幂的性质

（1）$a^m a^n=a^{m+n}\left(a>0,m,n\in Q\right)$；

（2）$\left(a^m\right)^n=a^{mn}\left(a>0,m,n\in Q\right)$；

（3）$\left(ab\right)^m=a^m b^m\left(a>0,b>0,m\in Q\right)$；

（4）$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\left(a>0,m,n\in Q\right)$.

3. 根式的定义：

一般地，如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $\left(n>1,n\in N^*\right)$，$\sqrt[n]{a}$ 叫做根式，n 叫做根指数，a 叫做被开方数.

4. 对于根式记号 $\sqrt[n]{a}$，要注意以下几点：

（1）$n\in N$，且 $n>1$；

（2）当 n 是奇数，则 $\sqrt[n]{a^n}=a$；当 n 是偶数，则 $\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a & a\geq 0\\ -a & a<0\end{cases}$；

（3）负数没有偶次方根；

（4）零的任何次方根都是零.

5. 指数的运算和逆运算，遇到多重根问题，需要先写成指数形式：

例：$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{8}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=a^{\frac{7}{8}}$；$\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2}}=a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}}=a^{\frac{5}{12}}$；

6. 指数的逆运算过程：

$$\left(5\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^4\right]^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{9}.$$

例 1.（2018•河东区校级期中）化简 $\sqrt[3]{(-\frac{8a^{-3}}{27b^{3}})^{4}}$（其中 $a>0$， $b>0)$ 的结果是(　　)

A． $\frac{2a}{3b}$　　B． $-\frac{2a}{3b}$　　C． $\frac{16}{81b^4a^4}$　　D． $-\frac{1}{81b^4a^4}$

解析：由 $\sqrt[3]{\left(-\frac{8a^{-3}}{27b^{3}}\right)^{4}}=\sqrt[3]{\frac{8^4a^{-12}}{3^{12}b^{12}}}=\frac{2^4a^{-4}}{3^4b^4}=\frac{16}{81a^4b^4}$，故选 C.

例 2.（2019•宁德期中）下列根式、分数指数幂的互化中，正确的是(　　)

A． $-\sqrt{x}=(-x)^{\frac{1}{2}}$　　B． $x^{-\frac{1}{3}}=-\sqrt[3]{x}$

C． $(\frac{x}{y})^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{(\frac{y}{x})^{3}}(x,y\neq 0)$　　D． $\sqrt[6]{y^2}=y^{\frac{1}{3}}$

解析：由 $-\sqrt{x}=-x^{\frac{1}{2}}(x\geq 0)$，因此 A 选项不正确；由 $x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}(x\neq 0)$，因此 B 选项不正确；由 $\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{\left(\frac{x}{y}\right)^{3}}}=\sqrt[4]{\left(\frac{y}{x}\right)^{3}}(xy>0)$，　因此 C 选项正确；　由 $\sqrt[6]{y^2}=|y|^{\frac{1}{3}}$，　因此 D 选项不正确，故选 C.

例 3.（2019•红岗区月考）$(-x)^2\sqrt{-\frac{1}{x}}$ 等于(　　)

A． $\sqrt{x}$　　B． $-x\sqrt{-x}$　　C． $x\sqrt{x}$　　D． $x\sqrt{-x}$

解析：由 $-\frac{1}{x}\geq 0$，　可得 $x<0$.　所以原式 $=-x\sqrt{x^2\times\left(-\frac{1}{x}\right)}=-x\sqrt{-x}$，故选 B

例 4.（2019•岳麓区期中）已知 $a+a^{-1}=3$，下列各式中正确的个数是(　　)

① $a^2+a^{-2}=7$；② $a^3+a^{-3}=18$；③ $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{5}$；④ $a\sqrt{a}+\frac{1}{a\sqrt{a}}=2\sqrt{5}$.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

解析：在①中，因为 $a+a^{-1}=3$，所以 $a^2+a^{-2}=\left(a+a^{-1}\right)^2-2=9-2=7$，故①正确；在②中，因为 $a+a^{-1}=3$，所以 $a^3+a^{-3}=\left(a+a^{-1}\right)\left(a^2-1+a^{-2}\right)=3\times 6=18$，故②正确；在③中，因为 $a+a^{-1}=3$，所以 $\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=a+a^{-1}+2=5$，且 $a>0$，所以 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$，故③错误：在④中，因为 $a^3+a^{-3}=18$，且

$a>0$, 所以 $\left(a\sqrt{a}+\frac{1}{a\sqrt{a}}\right)^2=a^3+a^{-3}+2=20$, 即 $a\sqrt{a}+\frac{1}{a\sqrt{a}}=2\sqrt{5}$, 故④正确，所以①②④正确，故选 C.

第二讲对数运算

对数的定义：一般地，如果 $a^x=N\left(a>0,且a\neq 0\right)$，那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $x=\log_a N$，读作以 a 为底 N 的对数，其中 a 叫做对数的底数，N 叫做真数.

（一）对数运算法则：

（1）外和内乘原理：$\log_a\left(MN\right)=\log_a M+\log_a N$；

（2）外差内除原理：$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

（3）提公次方法：$\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b\left(m,n\in R\right)$；

（4）特殊对数：$\log_a 1=0$；

（5）指中有对，没心没肺：$a^{\log_a b}=b$ 和 $\log_a a^b=b$ 如：$\log_3 81=\log_3 3^4=4$，$2^{\log_2 5}=5$.

(三)换底公式和对数运算的一些方法:

(1)常用换底: $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$　如：$\log_5 7=\frac{\log_2 7}{\log_2 5}=\frac{\lg 7}{\lg 5}=\frac{\ln 7}{\ln 7}$

(2)倒数原理: $\log_a b=\frac{1}{\log_h a}$　如：$\log_3 2=\frac{1}{\log_2 3}$.

(3)约分法则: $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$

如: $\log_2 3\cdot\log_3 4=\log_2 4=2;\log_3 15\cdot\log_5 7\cdot\log_{15} 5\cdot\log_7 3=1.$

(4)归一法则: $\lg 2+\lg 5=1\Rightarrow \lg 2\cdot\lg 5+\lg^2 2+\lg 5=\lg 2(\lg 5+\lg 2)+\lg 5=\lg 5+\lg 2=1$.

例 5：设 N＝$\frac{1}{\log_2 3}$＋$\frac{1}{\log_5 3}$，则（　　）

A、N＝2　　B、N＝2　　C、N＜－2　　D、N＞2

解析：由 $N=\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_5 3}=\log_3 2+\log_3 5=\log_3 10>\log_3 9=2$, 故选 A .

例 6.（2019•肇庆三模）设 $a=\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_3\pi}+\frac{1}{\log_4\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}$，$y=|x-a|$，$x\in N$，当 y 取最小值时的 x 的值为(　　)

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

解析： 由 $a=\dfrac{1}{\log_2\pi}+\dfrac{1}{\log_3\pi}+\dfrac{1}{\log_4\pi}+\dfrac{1}{\log_5\pi}=\log_\pi 2+\log_\pi 3+\log_\pi 4+\log_\pi 5=\log_\pi 120$, 因为 $\pi^4=97.41$, $\pi^5=306.02$, 所以 $y=|x-a|$, $x\in N$, 当 y 取最小值时的 x 的值为4, 故选C.

例7：$\log_3 2=t$，则 $\log_4 3=$.

解析：原式$=\log_4 3=\dfrac{1}{\log_3 4}=\dfrac{1}{2\log_3 2}=\dfrac{1}{2t}$.

例8：化简计算：$\log_2\dfrac{1}{25}\cdot\log_3\dfrac{1}{8}\cdot\log_5\dfrac{1}{9}$

解析：原式$=\log_2(5)^{-2}\cdot\log_3(2)^{-3}\cdot\log_5(3)^{-2}=(-2)\times(-3)\times(-2)\log_2 5\log_3 2\log_5 3=-12$.

例9：求 $\lg^2 5+\lg 2\cdot\lg 25+\lg^2 2$ 的值

解析：原式$=\lg^2 5+\lg 2\cdot\lg 5^2+\lg^2 2=\lg^2 5+2\lg 2\cdot\lg 5+\lg^2 2=(\lg 5+\lg 2)^2=1$

例10：已知 $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$，试以 a、b 的式子表示 $\log_{42}56$.

解析：原式$=\log_{42}56=\dfrac{\log_2 56}{\log_2 42}=\dfrac{\log_2 7+\log_2 2^3}{\log_2 7+\log_2 3+\log_2 2}=\dfrac{\log_2 7+3}{\log_2 7+\log_2 3+1}=\dfrac{ab+3}{ab+a+1}$.

例11:计算：$3^{1+\log_3 5}-2^{4+\log_2 3}+10^{3\lg 3}+2^{-\log_2 5}$

解析：法一原式$=3\cdot 3^{\log_3 5}-2^4\cdot 2^{\log_2 3}+10^{\lg 3^3}+2^{\log_2\frac{1}{5}}=3\times 5-16\times 3+27+\dfrac{1}{5}=-\dfrac{29}{5}$

法二原式

$=3^{1+\log_3 5}-2^{4+\log_2 3}+10^{3\lg 3}+2^{-\log_2 5}=3^{\log_3 3+\log_3 5}-2^{\log_2 2^4+\log_2 3}+10^{\lg 3^3}+2^{\log_2 5^{-1}}=3^{\log_3 15}-2^{\log_2 48}+$

$10^{\lg 27}+2^{\log_2\frac{1}{5}}=15-48+27+\dfrac{1}{5}=-\dfrac{29}{5}$.

1．下列式子成立的是(　　)

A．$a\sqrt{-a}=\sqrt{-a^3}$　　B．$a\sqrt{-a}=-\sqrt{-a^3}$　　C．$a\sqrt{-a}=\sqrt{a^3}$　　D．$a\sqrt{-a}=-\sqrt{a^3}$

2．（2019•河东区校级期中）化简 $\sqrt[3]{(-\dfrac{8a^{-3}}{27b^3})^4}$（其中 $a>0$，$b>0$)的结果是(　　)

A．$\dfrac{2a}{3b}$　　B．$-\dfrac{2a}{3b}$　　C．$\dfrac{16}{81b^4a^4}$　　D．$-\dfrac{1}{81b^4a^4}$

3.（2019•岳阳县期末）设 $x\in R$ 且 $x\neq 0$，若 $x+x^{-1}=3$，猜想 $x^{2n}+x^{-2n}(n\in N^*)$ 的个位数字是(　　)

A．2　　B．5　　C．6　　D．7

4.（2019•宁德期中）下列根式、分数指数幂的互化中，正确的是(　　)

A．$-\sqrt{x}=(-x)^{\frac{1}{2}}$ B．$x^{-\frac{1}{3}}=-\sqrt[3]{x}$ C．$(\frac{x}{y})^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{(\frac{y}{x})^3}(x,y\neq 0)$　D．$\sqrt[6]{y^2}=y^{\frac{1}{3}}$

C．$(\frac{x}{y})^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(\frac{x}{y})^3}}=\sqrt[4]{(\frac{y}{x})^3}(xy>0)$，因此正确；$D$．$\sqrt[6]{y^2}=|y|^{\frac{1}{3}}$，因此不正确．故选：$C$．

5.（2018•马山县期中）$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ 的值为(　　)

A．$a^{\frac{1}{4}}$　B．$a^{\frac{2}{5}}$　C．$a^{\frac{7}{8}}$　D．$a^{\frac{5}{8}}$

6.（2019•河南月考）$(3\sqrt{5})^2\bullet(-\frac{8}{27})^{\frac{2}{3}}+(0.002)^{-\frac{1}{2}}-10(\sqrt{5}-2)^{-1}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^0=($　　$)$

A．$-39-20\sqrt{5}$　B．0　C．1　D．-39

7.（2019•湖州期末）式子$(2a^{\frac{2}{3}}\bullet b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}\bullet b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}\bullet b^{\frac{5}{6}})$ 的值等于(　　)

A．$4a$　B．$-4a^2$　C．$-4ab^{\frac{1}{5}}$　D．$-4a^2b^{\frac{1}{5}}$

8.（2019•兴庆区校级月考）$lg^25+lg2\bullet lg50=($　　$)$

A．1　B．2　C．10　D．100

9.（2019•珠海期末）已知$a_n=\log_{(n+1)}(n+2)(n\in N^*)$，我们把使乘积$a_1\bullet a_2\bullet\ldots\bullet a_n$为整数的数$n$叫做“劣数”，则在$n\in(1,2018)$内的所有“劣数”的和为(　　)

A．1016　B．2018　C．2024　D．2026

10.（2019•安徽期末）已知$a>b>1$，若$\log_a b+\log_b a=\frac{10}{3}$，$a^{3b}=b^a$，则$b=($　　$)$

A．$\frac{3}{2}$　B．2　C．3　D．27

11.（2018•浙江期中）已知$\log_4 3=p$，$\log_3 25=q$，则$lg5$（用p，q表示）等于(　　)

A．$\frac{pq}{p+q}$　B．$\frac{p+q}{pq}$　C．$\frac{1+pq}{p+q}$　D．$\frac{pq}{1+pq}$

12.（2017•杭州期中）已知x，y为正实数，则下列各关系式正确的是(　　)

A．$3^{lnx+lny}=3^{lnx}+3^{lny}$　B．$3^{ln(x+y)}=3^{lnx}\bullet 3^{lny}$

C．$3^{lnx\bullet lny}=3^{lnx}+3^{lny}$　D．$3^{ln(xy)}=3^{lnx}\bullet 3^{lny}$

13.（2019•岳麓区校级期中）设$lg2=a$，$lg3=b$，则$\log_{12}10=($　　$)$

A. $\dfrac{1}{2a+b}$　　B. $\dfrac{1}{a+2b}$　　C. $2a+b$　　D. $a+2b$

14（2019•重庆期中）已知x，y，z都是大于 1 的实数，$m>0$，且$2\log_x m=1$，$2\log_y m=3$，$7\log_{xyz} m=2$，

则$\log_z m=($　　$)$

A. $\dfrac{5}{6}$　　B. $\dfrac{6}{5}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{4}{3}$

15.（2019•安徽期中）若$a\log_3 2=1$，$b=\log_3 8•\log_4 4•\log_8 2$，则$($　　$)$

A. $a<b$　　B. $a<1$，$b>1$　　C. $a=b$　　D. $ab=1$

16. （2019•安康期中）若$10^m=\sqrt{2}$，$10^n=6$，则$n-2m=($　　$)$

A. $-lg2$　　B. $lg2$　　C. $-lg3$　　D. $lg3$

17. （2019•马鞍山期中）化简$\dfrac{lg(lga^{100})}{2+lg(lga)}=($　　$)$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

18.（2019•杭州月考）设x，y为非零实数，$a>0$，且$a\neq 1$，给出下列式子或运算：

①$\log_a x^2=3\log_a x$；②$\log_a|xy|=\log_a|x|•\log_a|y|$；③若$e=lnx$，则$x=e^2$；④若$lg(lny)=0$，则$y=e$；

⑤若$2^{1+\log_4 x}=16$，则$x=64$．

其中正确的个数为$($　　$)$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

19（2018•定远县期中）若x，$y\in R$，且$2^x=18^y=6^{xy}$，则$x+y$为$($　　$)$

A. 0　　B. 1　　C. 1 或 2　　D. 0 或 2

20.（2019 秋•和平区校级月考）求值：$0.064^{\frac{-1}{3}}-(-\frac{5}{9})^0+[(-2)^3]^{\frac{-4}{3}}+16^{-0.75}+0.01^{\frac{1}{2}}=$____．

21. （2019•梁园区校级月考）$1.5^{-\frac{1}{3}}\times(-\frac{7}{6})^0+8^{\frac{1}{4}}\times\sqrt[4]{2}+(\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3})^6-\sqrt{(-\frac{2}{3})^{\frac{2}{3}}}=$____．

22. （2019•正定县校级月考）化简$\sqrt{11-6\sqrt{2}}$的结果是__$3-\sqrt{2}$__．

23. （2019•奉新县校级月考）化简：$\sqrt[3]{a^{\frac{5}{2}}\sqrt{a^{-2}}}\div\sqrt{\sqrt[3]{a^{-5}}\sqrt[3]{a}}=$__$\sqrt[6]{a^7}$（或$a^{\frac{7}{6}}$或$a\sqrt[6]{a}$）__．

24.（2019•老河口市校级月考）设p是给定的奇质数，正整数k使得$\sqrt{k^2-pk}$也是一个正整数，则$k=$____．

25.（2018•大庆二模）已知$x>0$，$y>0$，若$2^x•8^y=16$，则$2^{-1+\log_2 2x}+\log_9 27^y=$____．

26．（2019•兴庆区期中）已知 $3^x=4^y=6$，则 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=$____．

27．（2018 秋•玉田县期中）若实数 x，y 满足：$2^x=6^{2y}=A$ 且 $x+y=2xy$，则 $A=$____．

28．（2019•红塔区校级期末）设 $2^a=3^b=6$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的值为____．

29．（2019•魏都区校级月考）若 $4^x=6^y=9^z$，则 $\frac{1}{x}-\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=$____．

30．（2019•西湖区校级月考）已知 $a_n=\log_{n+1}(n+2)\,(n\in N^*)$，观察下列算式：

$a_1\cdot a_2=\log_2 3\cdot\log_3 4=2$； $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_6=\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\ldots\cdot\log_7 8=3$； …

若 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_m=2016$，则 m 的值为__．

31．（2019•青阳县校级期中）若 $\log_2(3a+4b)=\log_2 a+\log_2 b$，则 $a+b$ 的最小值是____．

32．（2019•绍兴期中）若正数 a，b 满足 $3+\log_2 a=1+\log_4 b=\log_8(a+b)$，则 $a=$____，$b=$____．

33．（2019•邢台期末）若 $\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\sqrt{3}} y=2$，则 $3x+2y$ 的最小值为____．

34．（2019•盐湖区校级期中）已知 $2^a=3$，$3^b=7$，则 $\log_7 56=$____．（结果用 a，b 表示）

35．（2019•邹平县校级月考）定义"正对数"：$ln^+x=\begin{cases}0,(0<x<1)\\ lnx,(x\geqslant 1)\end{cases}$，现有四个命题：

①若 $a>0$，$b>0$，则 $ln^+(a^b)=bln^+a$；②若 $a>0$，$b>0$，则 $ln^+(ab)=ln^+a+ln^+b$；

③若 $a>0$，$b>0$，则 $ln^+(\frac{a}{b})=ln^+a-ln^+b$；④若 $a>0$，$b>0$，则 $ln^+(a+b)\leqslant ln^+a+ln^+b+ln2$；

其中的真命题有____（写出所有真命题的序号）

36．解下列方程

（1）$\log_{x+2}(4x+5)-\log_{4x+5}(x^2+4x+4)-1=0$；

（2）$3^{2x+5}=5\cdot 3^{x+2}+2$；

37．（2019•历下区校级期中）求下列各式的值：

（Ⅰ）$(\sqrt{2\sqrt{2}})^{\frac{4}{3}}-4\times(\frac{16}{49})^{-\frac{1}{2}}-\sqrt[4]{2}\times 8^{0.25}+(-2015)^0$ （Ⅱ）$\log_3\frac{\sqrt[4]{27}}{3}+lg25+lg4+7^{\log_7 2}-ln1$．

38．（2019•浦东新区期末）解下列方程：

（1）$9^x-4\cdot 3^x+3=0$； （2）$\log_3(x^2-10)=1+\log_3 x$．

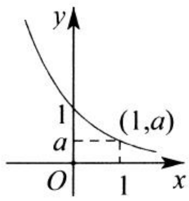
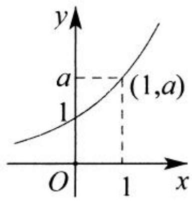
39．（2019•菏泽期中）不用计算器求下列各式的值．

（1）设 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，求 $x+x^{-1}$ 的值；（2）若 $x\log_3 4=1$，求 4^x+4^{-x} 的值；

（3）$[(1-\log_6 3)^2+\log_6 2\cdot\log_6 18]\div\log_6 4$；（4）$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-(\dfrac{3}{5})^0+(\dfrac{9}{4})^{-0.5}+\sqrt[4]{(\sqrt{2}-e)^4}$.

40．（2019 秋•西湖区校级期中）x，y，z 都是不小于 1 的实数，$xyz=10$，且 $x^{\log x}y^{\log y}z^{\log z}=10$，求 x，y，z 的值.

第三讲指数函数图像及其性质

<table>
<tr><td colspan="3">$y=a^x$</td></tr>
<tr><td></td><td>$0<a<1$</td><td>$a>1$</td></tr>
<tr><td>图象</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">性质</td><td colspan="2">①定义域 R，值域 $(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">② $a^0=1$，即时 $x=0$，$y=1$，图象都经过 $(0,1)$ 点</td></tr>
<tr><td colspan="2">③ $a^x=a$，即 $x=1$ 时，y 等于底数 a</td></tr>
<tr><td>④在定义域上是单调减函数</td><td>④在定义域上是单调增函数</td></tr>
<tr><td>⑤ $x<0$ 时，$a^x>1$；$x>0$ 时，$0<a^x<1$</td><td>⑤ $x<0$ 时，$0<a^x<1$；$x>0$ 时，$a^x>1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">⑥ 既不是奇函数，也不是偶函数</td></tr>
</table>

(1) 当底数大小不定时，必须分“$a>1$”和“$0<a<1$”两种情形讨论.

(2) 当 $0<a<1$ 时，$x\to+\infty, y\to 0$; 当 $a>1$ 时 $x\to-\infty, y\to 0$.

当 $a>1$ 时，a 的值越大，图象越靠近 y 轴，逆增速度越快.

当 $0<a<1$ 时，a 的值越小，图象越靠近 y 轴，递减的速度越快.

(3) 指数函数 $y=a^x$ 与 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ 的图象关于 y 轴对称.

函数 (1) $y=a^x$; (2) $y=b^x$; (3) $y=c^x$; (4) $y=d^x$ 的图象如图 $1-3-1$ 所示, 则 $0<b<a<1<d<c$;

即 $x\in(0,+\infty)$ 时，　$b^x<a^x<d^x<c^x$（底大绵大）; $x\in(-\infty,0)$ 时，　$b^x>a^x>d^x>c^x$.

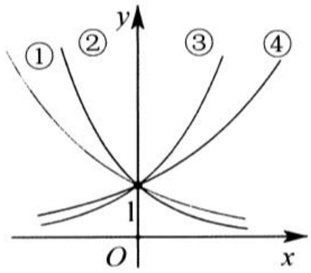


图 1-3-1

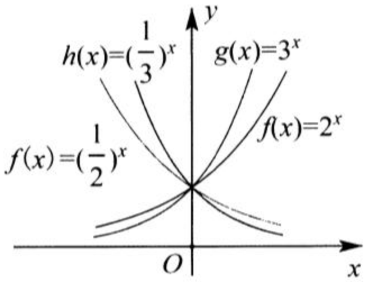


图 1-3-2

(4)特殊函数:函数 $y=2^x$, $y=3^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象如图1−3−2 所示.

指数式大小比较方法

(1)单调性法：化为同底数指数式，利用指数函数的单调性进行比较。.

(2)中间量法:当指数式的底数和指数各不相同时，需要借助中间量“0”和“1”作比较.

(3)分类讨讲法:指数式的底数不定时，需要分类讨论底数的情况，在利用指数函数的单调性进行比较。

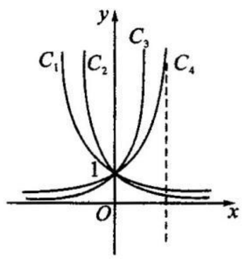
(4)比较法:有作差比较与作商比较两种，其原理分别为:

①若 $A-B>0\Leftrightarrow A>B$: $A-B<0\Leftrightarrow A<B$: $A-B=0\Leftrightarrow A=B$:

②当两个式子均为正值的情况下,可用作商法，判断 $\frac{A}{B}>1$,或 $\frac{A}{B}<1$ 即可.

例 12.如图的曲线 C_1、C_2、C_3、C_4 是指数函数 $y=a^x$ 的图象,而 $a\in\left\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3},\pi\right\}$,

则图象 C_1、C_2、C_3、C_4 对应的函数的底数依次是________、________、________、________.



答案　$\frac{\sqrt{2}}{2}$　$\frac{1}{2}$　π　$\sqrt{3}$

解析：由底数变化引起指数函数图象的变化规律可知, C_2 的底数 $<C_1$ 的底数 $<C_4$ 的底数 $<C_3$ 的底数. 总结升华：利用底数与指数函数图象之间的关系可以快速地解答像本题这样的有关问题，同时还可以解决有关不同底的幂的大小比较的问题,因此我们必须熟练掌握这一性质,这一性质可简单地记作:在 y 轴的右边“底大图高″,在 y 轴的左边“底大图低”.

例 13.比较下列两个值的大小：

（1）. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{5}}$ 和 $4^{-\frac{3}{2}}$ （2）. π^{-2} 和 3.14^{-2} （3）. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 和 $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

解析：(1)因为 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{5}}>1, 4^{-\frac{3}{2}}<1$, 所以 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{5}}>4^{-\frac{3}{2}}$；

(2)在 π^{-2} 和 3.14^{-2} 中, 因为指数 $-2<0$, 底数 $\pi>3.14$, 所以 $\pi^{-2}<3.14^{-2}$；

(3)在 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 和 $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 中, 因为 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}>1, \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}<1$, 所以 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}>\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

例 14. 比较 $1.5^{-0.2}$，$1.3^{0.7}$，$(\frac{2}{3})^{\frac{1}{3}}$ 的大小.

解析：先比较 $1.5^{-0.2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-0.2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$ 与 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ 的大小. 由于底数 $\frac{2}{3}\in(0,1)$, 所以 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ 在 R 上是减函数，因为 $\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>0$, 所以 $0<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}}<\left(\frac{2}{3}\right)^{0}=1$, 再考虑指数函数 $y=1.3^{x}$, 由于 $1.3>1$, 所以 $y=1.3^{x}$ 在 R 上为增函数, 即 $1.3^{0.7}>1.3^{0}=1$, 所以 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}<1.5^{-0.2}<1.3^{0.7}$.

例 15. (2019 年河南郑州月考) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^{x}, & x\geq 2\\ (3-a)x+2, & x<2\end{cases}$ 为 R 上的增函数，则实数 a 取值的范围是.

解析：由于函数 $f(x)=\begin{cases}a^{x}, & x\geq 2\\ (3-a)x+2, & x<2\end{cases}$ 为 R 上的增函数, 可得 $\begin{cases}a>1\\ 3-a>0\\ a^{2}\geq(3-a)\cdot 2+2\end{cases}$, 解得

$2\leq a<3$. 故答案为 $[2,3)$.

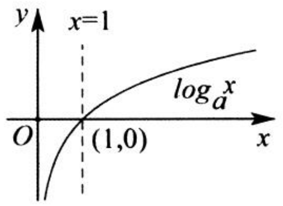
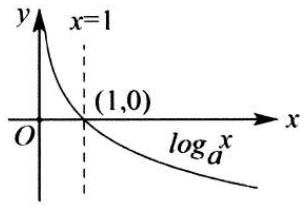
第四讲对数函数图像及其性质

对数函数的定义：函数 $y=\log_{a}x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 叫做对数函数，它是指数函数 $y=a^{x}(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的

反函数.

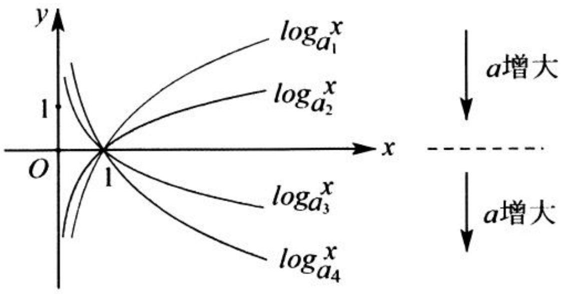
$y=x$ 的对称图形，即可获得. 同样也分 $a>1$ 与 $0<a<1$ 两种情况归纳：

以 $y=\log_{2}x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 为例

	$a>1$	$0<a<1$
图象		
性质	定义域：$(0,+\infty)$	
	值域：R	
	过定点 $(1,0)$，即 $x=1$ 时，$y=0$	
	在 $(0,+\infty)$ 上增函数	在 $(0,+\infty)$ 上是减函数
	当 $0<x<1$ 时，$y<0$，当 $x\geq 1$ 时，$y\geq 0$	当 $0<x<1$ 时，$y>0$，当 $x\geq 1$ 时，$y\leq 0$

底数变化与图象变化的规律

在同一坐标系内，当 $a>1$ 时，随 a 的增大，对数函数的图象煎靠近 x 轴：当 $0<a<1$ 时，对数函数的图象随 a 的增大而远离 x 轴.（见下图）



反函数的定义

设 A,B 分别为函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域，如果由函数 $y=f(x)$ 所解得的 $x=\varphi(y)$ 也是一个函数（即对任意的一个 $y\in B$，都有唯一的 $x\in A$ 与之对应），那么就称函数 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，在 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 是自变量，x 是 y 的函数，习惯上改写成 $y=f^{-1}(x)\quad(x\in B,y\in A)$ 的形式. 函数 $x=f^{-1}(y)\quad(y\in B,x\in A)$ 与函数 $y=f^{-1}(x)(x\in B,y\in A)$ 为同一函数，因为自变量的取值范围即定义域都是 B，对应法则都为 f^{-1}.

由定义可以看出，函数 $y=f(x)$ 的定义域 A 正好是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域；函数 $y=f(x)$ 的值域 B 正好是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域.

注意：并不是每个函数都有反函数，有些函数没有反函数，如 $y=x^2$. 一般说来，单调函数有反函数.

(1) 互为反函数的两个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称.

(2) 若函数 $y=f(x)$ 图象上有一点 (a,b), 则 (b,a) 文在其反函数图象上; 反之，若 (b,a) 在反函数图象上，则 (a,b) 文在原函数图象上.

例 16. 比较下列各组数中的两个值大小：

(1) $\log_3 3.6, \log_3 8.9$；(2) $\log_{0.2} 1.9, \log_{0.2} 3.5$；(3) $\log_2 5$ 与 $\log_7 5$；

(4) $\log_3 5$ 与 $\log_6 4$．(5) $\log_a 4.2, \log_a 4.8$（$a>0$且$a\neq 1$）．

解析：(1) 由函数 $y=\log_3 x$ 在 R^+ 上是单调增函数, 且 $3.6<8.9$, 所以 $\log_3 3.6<\log_3 8.9$；

(2) 与第 (1) 小题类似, $y=\log_{0.2} x$ 在 R^+ 上是单调减函数, 且 $1.9<3.5$, 所以 $\log_{0.2} 1.9>\log_{0.2} 3.5$；

(3) 函数 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_7 x$ 的图象如图 1-4-1 所示. 当 $x>1$ 时, $y=\log_2 x$ 的图象在 $y=\log_7 x$ 图象上方，这里 $x=5$, 所以 $\log_2 5>\log_7 5$；

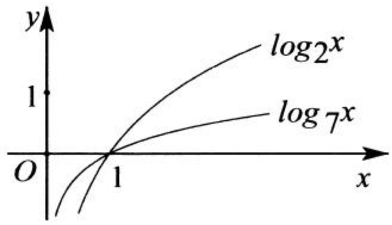


图 1-4-1

(4) 因为 $\log_3 5>\log_3 3=1=\log_6 6>\log_6 4$, 所以 $\log_3 5>\log_6 4$；

(5) 注: 底数是常数, 但要分类讨论 a 的范围，再由函数单调性判断大小；

法一当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数, 且 $4.2<4.8$, 所以, $\log_a 4.2<\log_a 4.8$, 当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数, 且 $4.2<4.8$, 所以 $\log_a 4.2>\log_a 4.8$;

法二转化为指数函数，再由指数函数的单调性判断大小, 令 $b_1=\log_a 4.2$, 则 $a^{b_1=4.2,}$ 令 $b_2=\log_a 4.8$, 则 $a^{b_2}=4.8$, 当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 在 R 上是增函数, 且 $4.2<4.8$, 所以 $b_1<b_2$, 即 $\log_a 4.2<\log_a 4.8$；当时 $0<a<1$，$y=a^x$ 在 R 上是减函数, 且 $4.2<4.8$, 所以 $b_1>b_2$, 即 $\log_a 4.2>\log_a 4.8$.

总结: 比较两个对数值的大小的基本方法是:

（1）比较同底的两个对数值的大小，常利用对数函数的单调性.

（2）比较同真数的两个对数值的大小，常有两种方法:

①先利用对数换底公式化为區底的对数，再利用对数函数的单调性和倒数关系比较大小：；

②利用对数函数图象的互相位置关系比较大小.

（3）若底数与真数都不同，则通过一个恰当的中间量来比较大小.

例 17.（2019 年三明月考）设 $a=\log_{\frac{1}{3}}2$，$b=\log_{\frac{1}{2}}3$，$c=(\frac{1}{3})^{0.3}$，则（）

A. $a<b<c$ B. $a<c<b$ C. $b<c<a$ D. $b<a<c$

解析：因为 $a=\log_{\frac{1}{3}}2<0,\quad b=\log_{\frac{1}{2}}3<0,\log_{\frac{1}{3}}2<\log_{\frac{1}{2}}2<\log_{\frac{1}{3}}2<\log_{\frac{1}{2}}3,\quad c=\left(\frac{1}{3}\right)^{0.3}>0,$ 所以 $b<a<c$，故选 D.

例 18：已知 $f(x)=1+\log_x 3$，$g(x)=2\log_x 2$ 试比较 $f(x)和g(x)$ 的大小。

解析：因为 $f(x)=1+\log_x 3,\quad g(x)=2\log_x 2,$ 所以 $f(x)-g(x)=\log_x\frac{3x}{4},$ 分类讨论如下：

(1) 当 $\begin{cases}x>1\\ \frac{3x}{4}>1\end{cases}\Rightarrow x>\frac{4}{3}$ 或 $\begin{cases}0<x<1\\ 0<\frac{3x}{4}<1\end{cases}\Rightarrow 0<x<1$ 时，$f(x)>g(x)$；

(2) 当 $\frac{3x}{4}=1$ 即 $x=\frac{4}{3}$ 时，$f(x)=g(x)$；

(3) 当 $\begin{cases}x>1\\ 0<\frac{3x}{4}<1\end{cases}\Rightarrow 1<x<\frac{4}{3}$ 或 $\begin{cases}0<x<1\\ \frac{3x}{4}>1\end{cases}\Rightarrow x\in\phi$ 时，$f(x)<g(x)$；

综上所述：$x\in(0,1)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$ 时，$f(x)>g(x);$ $x=\frac{4}{3}$ 时，$f(x)=g(x);$ $x\in\left(1,\frac{4}{3}\right)$ 时，$f(x)<g(x)$.

例 19：若 $\log_m 3<\log_n 3$，求 $m和n$ 的关系.

解析：(1) 当 $\log_3 m>0$ 且 $\log_3 n>0$ 时，即 $0<\log_3 n<\log_3 m,$ 因为底数 $3>1,$ 所以 $m>n>1;$ (2) 当 $\log_3 m<0$，且 $\log_3 n<0$ 时，即 $\log_3 n<\log_3 m<0,$ 因为底数 $3>1,$ 所以 $0<n<m<1$；(3) 当 $\log_3 m<0$ 且 $\log_3 n>0$ 时，$0<m<1<n$. 综上所述 m,n 的关系为 $m>n>1$ 或 $0<n<m<1$ 或 $0<m<1<n.$ 如图 $1-4-2,\quad 1-4-3,\quad 1-4-4$ 所示，实际上三种情况可用图形来表示.

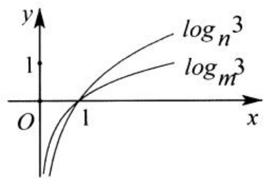


图 1-4-2

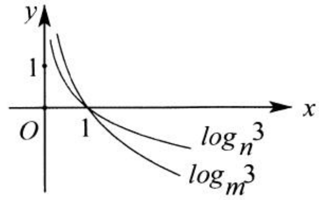


图 1-4-3

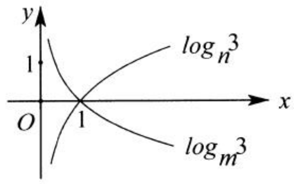


图 1-4-4

例 20：设 $x\in[2,8]$，函数 $f(x)=\frac{1}{2}\log_a(ax)\cdot\log_a(a^2x)$ 的最大值是 1，最小值是 $-\frac{1}{8}$，求 a 的值。

解析：由 $f(x)=\frac{1}{2}(\log_a x+1)(\log_a x+2)=\frac{1}{2}(\log_a^2 x+3\log_a x+2)=\frac{1}{2}\left(\log_a x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$，由题意可知，因为 $[f(x)]_{\min}=-\frac{1}{8}$，这时 $\log_a x=-\frac{3}{2}$，又因为 $x\in[2,8]$，所以 $a\in(0,1)$，因为 $f(x)$ 是关于 $\log_a x$ 的二次函数，所以函数最大值或最小值必在 $x=2$ 或 $x=8$ 时取得，若 $\frac{1}{2}\left(\log_a 2+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{8}=1$ 则 $a=2^{-\frac{1}{3}}$，因为取得最小值时 $x=\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{2}<2$，这时 $x\notin[2,8]$ 舍，若 $\frac{1}{2}\left(\log_a 8+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{8}=1$，则 $a=\frac{1}{2}$，此时取得最小值时 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}\in[2,8]$，所　以 $a=\frac{1}{2}$.

第五讲关于指数和对数比大小问题

指数和对数的比大小问题成为了高考和模拟题的一些拉档题，这里我们重点介绍几种比大小方法，让一些指数对数不同底数，不同真数，不同呆的函数进行大小比较。.

秒杀秘籍：对数等比定理

$\log_a x=\log_b y=\log_{a^m b^n} z\Leftrightarrow x^m y^n=z$（特别的当 $m=n=1$ 时，$\log_a x=\log_b y=\log_{ab} z\Leftrightarrow xy=z$）

证明因为 $\log_a x=\log_b y=\log_{a^m b^n} z$，所以 $\frac{\lg x}{\lg a}=\frac{\lg y}{\lg b}=\frac{m\lg x+n\lg y}{m\lg a+n\lg b}=\frac{z}{m\lg a+n\lg b}$，即 $x^m y^n=z$.

例 21.（2019•绍兴期中）若正数 a，b 满足 $3+\log_2 a=1+\log_4 b=\log_8(a+b)$，则 $a=$____，$b=$____.

解析：因为正数 a，b 满足 $3+\log_2 a=1+\log_4 b=\log_8(a+b)$，所以 $\log_2(8a)=\log_4(4b)=\log_8(a+b)$，所以 $8a=\sqrt{4b}$，$32ab=a+b$，解得 $a=\frac{1}{16}=b$. 故答案为 $\frac{1}{16}$，$\frac{1}{16}$.

例 22.（2019•岳麓区期末）已知 $a>0$，$b>0$，且 $2-\log_2 a=3-\log_3 b=\log_6\frac{1}{a+b}$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$____.

解析：因为正数 a，b 满足 $2-\log_2 a=3-\log_3 b=\log_6\frac{1}{a+b}$，所以 $\log_2\frac{4}{a}=\log_3\frac{27}{b}=\log_6\frac{1}{a+b}$，所以 $\frac{4}{a}\cdot\frac{27}{b}=\frac{1}{a+b}$，$ab=108(a+b)$，故 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{108}$．故答案为 $\frac{1}{108}$．

秒杀秘籍：同步升（降）次法

根据 $\log_a b=\log_{a^m} b^m$ 可知，$\log_2 3=\log_4 9=\log_8 27=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$

注意：一般出现在以2或者3为底数的对数比大小当中，底数真数次方一起同升同降.

例 23.（2019•大连二模）设 $a=\log_4 3$，$b=\log_5 2$，$c=\log_8 5$，则(　　)

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$b<a<c$　　D．$c<a<b$

解析：因为 $\log_4 3=\log_{64}27,\log_8 5=\log_{64}25$，所以 $a>c$，又 $2\log_8 5=\log_8 25>1$，$2\log_5 2=\log_5 4<1$，故 $2c>2b$，即 $a>c>b$，故选 B.

秒杀秘籍：去常数再比

当底数和真数出现了倍数关系时候，需要将对数进行分离常数在比较。

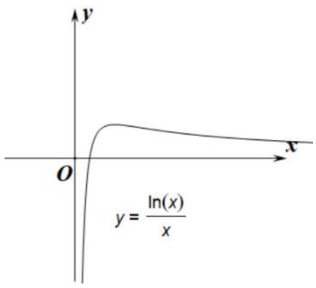
例如：$\log_a ma=\log_a m+1;\log_a ma^n=\log_a m+n$．

例 24.（2019•开福区校级月考）设 $a=\log_3 18$，$b=\log_4 24$，$c=2^{\frac{3}{4}}$，则 a、b、c 的大小关系是(　　)

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$b<c<a$　　D．$c<b<a$

解析：由 $a=\log_3 18=\log_3 6+\log_3 3=1+\log_3 6$，$b=\log_4 24=\log_4 6+\log_4 4=1+\log_4 6$，显然 $a>2$，$b>2$，$c=2^{\frac{3}{4}}<2$，又由于 $\log_3 6=\frac{\lg 6}{\lg 3}>\frac{\lg 6}{\lg 4}=\log_4 6$，故 $a>b>c$，故选 D．

秒杀秘籍：由 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 引出的大小比较问题



如图1－5－1

如图$1-5-1$所示，根据函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$的图象性质，有以下结论：

(1) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$在区间$(0,e)$上单调递增，在区间$(e,+\infty)$单调递减；当$x=e$时，取得最大值$\frac{1}{e}$；

(2)极大值左偏，且$f(2)=f(4)$；

(3)关于a^b与$b^a(a>b)$，当$e>a>b>0$时，$a^b>b^a$，当$a>b>e$时，$a^b<b^a$；口认：大指小底.（大于e看指数大，小于e看底数大）.

证明：(1)函数的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$时，$x=e,f(e)=\frac{1}{e}$，故$f(x)$在$(0,e)$上差调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减.

(2) $f(2)=\frac{\ln 2}{2}=\frac{2\ln 2}{4}=f(4)$，注意：只能比较$f(3),f(4),f(5)$，或者$f(0.7),f(0.8),f(2)$之类属于$e$的左边或者右边，$f(2)=f(4)$涉及左右互换.

比较a^b与$b^a(a>b)$，即比较$b\ln a$与$a\ln b$的大小，同除以ab得到$\frac{\ln a}{a}$与$\frac{\ln b}{b}$，根据函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$的单调性，即可判断.

(3)关于函数$x^{\frac{1}{x}}$和函数x^x比大小问题，都可以按照构造对数来比较，例如在比较$2^{\frac{1}{2}},e^{\frac{1}{e}},3^{\frac{1}{3}}$大小时，即比较$\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln e}{e},\frac{\ln 3}{3}$大小，在比较$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}},\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}},\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$，即构造$2^{-\frac{1}{2}},3^{-\frac{1}{3}},5^{-\frac{1}{5}}$，即比较$-\frac{\ln 2}{2},-\frac{\ln 3}{3},-\frac{\ln 5}{5}$大小.

例25：（2017•新课标Ⅰ）设x、y、z为正数，且$2^x=3^y=5^z$，则(　　)

A. $2x<3y<5z$　　B. $5z<2x<3y$　　C. $3y<5z<2x$　　D. $3y<2x<5z$

解析：因为x、y、z为正数，令$2^x=3^y=5^z=k>1.\lg k>0$. 则$x=\frac{\ln k}{\ln 2}$，$y=\frac{\ln k}{\ln 3}$，$z=\frac{\ln k}{\ln 5}$. 所以$3y=\frac{3\ln k}{\ln 3}$，$2x=\frac{2\ln k}{\ln 2}$，$5z=\frac{5\ln k}{\ln 5}$. 又$\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 4}{4}$，且$\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln 4}{4}>\frac{\ln 5}{5}$，故$\frac{5}{\ln 5}>\frac{4}{\ln 4}=\frac{2}{\ln 2}>\frac{3}{\ln 3}$，即$3y<2x<5z$，故选D.

例26. 利用函数的性质比较$2^{\frac{1}{2}}$，$3^{\frac{1}{3}}$，$6^{\frac{1}{6}}$

解析：法一$2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{6}}=\left(2^3\right)^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}},3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{6}}=\left(3^2\right)^{\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{6}}$，作出$y=8^x$，$y=9^x$，$y=6^x$的图象如图$1-5-2$所示，由图象知：$y=9^x>y=8^x>y=6^x$，所以$3^{\frac{1}{3}}>2^{\frac{1}{2}}>6^{\frac{1}{6}}$

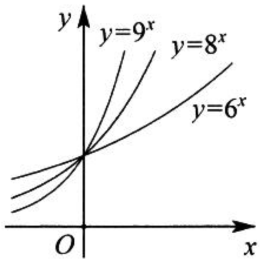


图 1-5-2

法二　三个数取对数得，即比较 $\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln 3}{3},\frac{\ln 6}{6}$ 大小，由于函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在区间 $(e,+\infty)$ 单调递减，故 $\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}>\frac{\ln 6}{6}$，所以 $3^{\frac{1}{3}}>2^{\frac{1}{2}}>6^{\frac{1}{6}}$.

例 27.（2019•洛阳三模）若 m，n，$p\in(0,1)$，且 $\log_3 m=\log_5 n=lgp$，则(　　)

A. $m^{\frac{1}{3}}<n^{\frac{1}{5}}<p^{\frac{1}{10}}$ B. $n^{\frac{1}{3}}<m^{\frac{1}{5}}<p^{\frac{1}{10}}$　C. $p^{\frac{1}{10}}<m^{\frac{1}{3}}<n^{\frac{1}{5}}$　D. $m^{\frac{1}{3}}<p^{\frac{1}{10}}<n^{\frac{1}{5}}$

解析：令 $\log_3 m=\log_5 n=\lg p=t(t<0)$，$\frac{\ln m}{\ln 3}=\frac{\ln n}{\ln 5}=\frac{\ln p}{\ln 10}=t(t<0)$，$\ln m^{\frac{1}{3}}=\frac{t\ln 3}{3}$，　$\ln n^{\frac{1}{5}}=\frac{t\ln 5}{5}$，$\ln p^{\frac{1}{10}}=\frac{t\ln 10}{10}(t<0)$，　由于 $\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln 5}{5}>\frac{\ln 10}{10}$，故 $m^{\frac{1}{3}}<n^{\frac{1}{5}}<p^{\frac{1}{10}}$，故选 A

【例 28】（2018•衡水金卷）下列四个命题：① $\ln 5<\sqrt{5}\ln 2$；② $\ln\pi>\sqrt{\frac{\pi}{e}}$；③ $2^{\sqrt{11}}<11$；④ $3e\ln 2>4\sqrt{2}$；其中真命题的个数是（）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解析：由 $\frac{\ln 5}{\sqrt{5}}<\ln 2\Rightarrow\frac{\ln\sqrt{5}}{\sqrt{5}}<\ln\sqrt{2}=\frac{2\ln\sqrt{2}}{2}=\frac{\ln 2}{2}$，由手 $2<\sqrt{5}<e$ 时，与 $\frac{\ln\sqrt{5}}{\sqrt{5}}>\frac{\ln 2}{2}$ 矛盾，故①不正确；因为 $\frac{\ln\pi}{\sqrt{\pi}}=\frac{2\ln\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}>\frac{2\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}}(e>\sqrt{\pi}>\sqrt{e})$，所以 $\ln\pi>\sqrt{\frac{\pi}{e}}$，故②正确；针对命题③，要比较 $2^{\sqrt{11}}$ 与 $(\sqrt{11})^2$，即比较 $\sqrt{11}\ln 2$ 与 $2\ln\sqrt{11}$，即比较 $\frac{\ln 2}{2}$ 与 $\frac{\ln\sqrt{11}}{\sqrt{11}}$，而 $2<e<\sqrt{11}$ 不好比较，故要进行 $f(2)=f(4)$ 转换，$\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 4}{4}<\frac{\ln\sqrt{11}}{\sqrt{11}}$，即 $2^{\sqrt{11}}<11$，所以③正确；针对命题④，要比较 $3e\ln 2$ 与 $4\sqrt{2}$ 的大小，即比较 $2e\cdot\frac{3}{2}\ln 2=2e\ln\sqrt{8}$ 与 $2\sqrt{8}$，即比较 $\frac{\ln\sqrt{8}}{\sqrt{8}}$ 与 $\frac{1}{e}$ 的大小，根据 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 最大值 $\frac{1}{e}$，故 $\frac{\ln\sqrt{8}}{\sqrt{8}}<\frac{1}{e}$，与命题矛盾，④不正确；综上可得，故选 B.

秒杀秘籍：糖水不等式解决对数比大小

若 $a>b>0,\quad m>0,\quad$ 则一定有 $\dfrac{b+m}{a+m}>\dfrac{b}{a},\quad$ 或者 $\dfrac{a+m}{b+m}<\dfrac{a}{b}$

通俗的理解就是 a 克的不饱和糖水里含有 b 克糖，往糖水里面加入 m 克糖，则糖水更甜。.

$$\frac{b+m}{a+m}-\frac{b}{a}=\frac{ab+am-ab-bm}{a^2+am}=\frac{(a-b)m}{a^2+am}>0;\quad \frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{ab+bm-ab-am}{b^2+bm}=-\frac{(a-b)m}{b^2+bm}<0$$

在对数比大小中，遇到底数和真数成等差数列类型的，可以采用糖水不等式放缩法。

【例 29】比较 $\log_9 10$ 和 $\log_{10}11$ 大小.

解析：根据糖水不等式 $\log_9 10=\dfrac{\ln 10}{\ln 9}>\dfrac{\ln 10+m}{\ln 9+m}(m>0)$, 只需令 $m=\ln\dfrac{10}{9}$,

即 $\dfrac{\ln 10}{\ln 9}>\dfrac{\ln 10+\ln\frac{10}{9}}{\ln 9+\ln\frac{10}{9}}=\dfrac{\ln\frac{100}{9}}{\ln 10}$，显然 $\dfrac{\ln\frac{100}{9}}{\ln 10}>\dfrac{\ln 11}{\ln 10}=\log_{10}11$, 故 $\log_9 10>\log_{10}11$

【例 30】利用对数函数的性质比较 $3^{0.2}$、$\log_3 2$、$\log_5 4$ 的大小.

解析：因为 $3^{0.2}>1,\quad \log_3 2<1,\quad \log_5 4<1$, 所以只需比较 $\log_3 2$ 与 $\log_5 4$ 的大小即可:

$$\log_3 2=\frac{\ln 2}{\ln 3}<\frac{\ln 2+\ln\frac{5}{3}}{\ln 3+\ln\frac{5}{3}}=\frac{\ln\frac{10}{3}}{\ln 5}<\frac{\ln 4}{\ln 5}=\log_5 4,$$ 所以 $\log_3 2<\log_5 4$, 所以 $3^{0.2}>\log_5 4>\log_3 2$.

【例 31】比较 $\log_4\dfrac{1}{3}$ 和 $\log_{4.1}\dfrac{1}{\pi}$

解析：由 $\log_4\dfrac{1}{3}=-\dfrac{\ln 3}{\ln 4},\log_{4.1}\dfrac{1}{\pi}=-\dfrac{\ln\pi}{\ln 4.1}$，又 $\dfrac{\ln 3}{\ln 4}<\dfrac{\ln 3+\ln\frac{4.1}{4}}{\ln 4+\ln\frac{4.1}{4}}=\dfrac{\ln 3.075}{\ln 4.1}<\dfrac{\ln\pi}{\ln 4.1}$，故 $\log_4\dfrac{1}{3}>\log_{4.1}\dfrac{1}{\pi}$

【例 32】（1）比较 $\log_3 2$ 和 $\log_2\dfrac{3}{2}$ 的大小；（2）比较 $\log_2 3$ 与 $\log_{0.3}0.2$.

解析：(1) 由于 $\log_3 2=\dfrac{\ln 2}{\ln 3},\log_2\dfrac{3}{2}=\dfrac{\ln\frac{3}{2}}{\ln 2}<\dfrac{\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{3}{2}}{\ln 2+\ln\frac{3}{2}}=\dfrac{\ln\frac{9}{4}}{\ln 3}>\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$, 放缩不对, 故需要将底数和真数同时放大次方，$\log_3 2=\log_9 4=\dfrac{\ln 4}{\ln 9}$, $\log_2\dfrac{3}{2}=\dfrac{\ln\frac{27}{8}}{\ln 8}$, $\log_3 2=\dfrac{\ln 4}{\ln 9}>\dfrac{\ln\frac{27}{8}+\ln\frac{9}{8}}{\ln 8+\ln\frac{9}{8}}=\dfrac{\ln\frac{243}{64}}{\ln 9}>$

$\dfrac{\ln\dfrac{27}{8}}{\ln 8}=\log_2\dfrac{3}{2}$; 故 $\log_3 2>\log_2\dfrac{3}{2}$:

(2) 同理, 先把 $\log_{0.3}0.2$ 换成正数,

$$\log_{0.3}0.2=\log_{\frac{10}{3}}\frac{10}{2}=\frac{\ln 5}{\ln\frac{10}{3}},\log_2 3=\frac{\ln 3}{\ln 2}>\frac{\ln 3+\ln\frac{10}{6}}{\ln 2+\ln\frac{10}{6}}=\frac{\ln 5}{\ln\frac{10}{3}}=\log_{0.3}0.2.$$

故 $\log_2 3>\log_{0.3}0.2$.

1. (2019•仙游县校级月考) 记 $a=e^e$ ， $b=\pi^\pi$ ， $c=e^\pi$ ， $d=\pi^e$ ，则 a ， b ， c ， d 的大小关系为(　　)

A. $a<d<c<b$　　B. $a<c<d<b$　　C. $b<a<d<c$　　D. $b<c<d<a$

2. (2019•镜湖区校级月考) 设 x ， y ， z 均大于 1，且 $\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{x}=\log_{\sqrt[3]{3}}\frac{1}{y}=\log_{\sqrt[6]{6}}\frac{1}{z}$ ，令 $a=x^{\frac{1}{2}},b=y^{\frac{1}{3}},c=z^{\frac{1}{6}}$ ，则 a ， b ， c 的大小关系是(　　)

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$　　C. $c>a>b$　　D. $b>a>c$

3. (2019•山东模拟) 已知正实数 a ， b ， c 满足 $\log_2 a=\log_3 b=\log_6 c$ ，则(　　)

A. $a=bc$　　B. $b^2=ac$　　C. $c=ab$　　D. $c^2=ab$

4. (2019•河南模拟) 设 $a=\log_3 21,b=\log_5 35,c=4^{\frac{2}{5}}$ ，则(　　)

A. $b>c>a$　　B. $b>a>c$　　C. $a>b>c$　　D. $a>c>b$

5. (2019•西湖区校级模拟) 正数 a ， b 满足 $1+\log_2 a=2+\log_3 b=3+\log_6(a+b)$ ，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的值是(　　)

A. $\frac{1}{12}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

6. (2019•吉安期末) 若 $a=ln\sqrt[3]{3}$ ， $b=e^{-1}$ ， $c=\frac{\sqrt{5}ln\sqrt{20}}{10}$ (e 为自然对数的底数)，则实数 a ， b ， c 的大小关系为(　　)

A. $b<a<c$　　B. $c<a<b$　　C. $c<b<a$　　D. $b<c<a$

7. (2019 春•南平期末) 已知 $a=\log_3 4$ ， $b=(\frac{1}{2})^{-2}$ ， $c=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{6}$ ，则 a ， b ， c 的大小关系为(　　)

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$　　C. $c>a>b$　　D. $b>a>c$

8. (2019•安徽二模) 已知 $a=ln\frac{11}{4}$ ， $b=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{e}}$ ， $c=\log_{\frac{1}{e}}\frac{1}{3}$ ，则 a 、 b 、 c 的大小关系为(　　)

A． $c>a>b$　　B． $c>b>a$　　C． $b>a>c$　　D． $a>b>c$

9.（2018•湖北模拟）已知 $a=2.1^{2.2}$， $b=2.2^{2.1}$， $c=\log_{2.2}2.1$，则 $($　　$)$

A． $c<b<a$　　B． $c<a<b$　　C． $a<b<c$　　D． $a<c<b$

10.（2018•肇庆二模）已知 $t>1$， $x=\log_2 t$， $y=\log_3 t$， $z=\log_5 t$，则 $($　　$)$

A． $2x<3y<5z$　　B． $5z<2x<3y$　　C． $3y<5z<2x$　　D． $3y<2x<5z$

11.（2016 秋•怀化期中）若正数 a， b 满足 $3+\log_2 a=2+\log_3 b=\log_6(a+b)$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 等于 $($　　$)$

A． 18　　B． 36　　C． 72　　D． 144

12.（2019•长沙县模拟）已知函数 $f(x)=|lnx|$，若存在三个不相等的正数 a、b、c 使得 $\frac{f(a)}{a}=\frac{f(b)}{b}=\frac{f(c)}{c}=k$，则 k 的取值范围为 $($　　$)$

A． $(e,+\infty)$　　B． $(\frac{1}{e}，+\infty)$　　C． $(0,e)$　　D． $(0,\frac{1}{e})$

13.（2019•株洲校级模拟）已知实数 a， b 满足 $\log_{\frac{1}{2}}a=\log_{\frac{1}{3}}b$，下列五个关系式：

①$a>b>1$；②$0<b<a<1$；③$b>a>1$；④$0<a<b<1$；⑤$a=b$

其中不可能成立的关系有 $($　　$)$

A． 1 个　　B． 2 个　　C． 3 个　　D． 4 个

14.（2019•南昌模拟）已知 a， $b\in R$ 且 $a\neq b$，若 $ae^a=be^b$（e 为自然对数的底数），则下列正确的是 $($　　$)$

A． $lna-lnb=b-a$　　B． $lna-lnb=a-b$

C． $ln(-a)-ln(-b)=b-a$　　D． $ln(-a)-ln(-b)=a-b$

15.（2019•天津模拟）设 $a>b>0$， $a+b=1$ 且 $x=(\frac{1}{a})^b$， $y=\log_{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}a$， $z=\log_{\frac{1}{b}}a$，则 x， y， z 的大小关系是 $($　　$)$

A． $y<x<z$　　B． $z<y<x$　　C． $y<z<x$　　D． $x<y<z$

16.（2019•天津）已知 $a=\log_2 7$， $b=\log_3 8$， $c=0.3^{0.2}$，则 a， b， c 的大小关系为 $($　　$)$

A． $c<b<a$　　B． $a<b<c$　　C． $b<c<a$　　D． $c<a<b$

17.（2019•南宁一模）设 $a=\log_2 3$， $b=\log_3 4$， $c=\log_5 8$，则 $($　　$)$

A． $c>a>b$　　B． $c>b>a$　　C． $a>b>c$　　D． $a>c>b$

18. 比较 $\log_5 65$ 与 $\log_2 7$ 大小

19. 比较 $\log_3 2$ 与 $\log_{11} 5$ 的大小

20. （2019•安阳期末）设函数 $f(x)=\log_{3a}(10x-ax^{2})(a>0$，$a\neq\frac{1}{3})$ 在区间 $(1,2)$ 上是减函数，则 a 的取值范围是____.

专题 2 参变分离与定海神针

传统的函数模型重难点，无非不就是恒成立和零点分布问题，现在说到二次函数，涉及参数和变量的问题，参与变到底分还是不分呢？什么情况下分离好？什么情况下不分离好呢？先看一个问题，就是参数的位置，到底是在二次项、一次项还是在常数项？是一次出现还是多处出现，这个问题值得探讨.

第一讲 轴动区间定和轴定区间动

口诀：轴在区间内，顶点定；轴在区间外，单调定.

例 1.若函数 $f(x)=8x^2-2kx-7$ 在[1，5]上为单调函数，则实数 k 的取值范围是（　　）

A.（-∞，8］　　　　B.［40，+∞）

C.（-∞，8］∪［40，+∞）　　　　D.［8，40］

解析：由于对称轴为直线 $x=\frac{k}{8}$，区间为[1,5]，故根据口认：轴在区间外，单调定，则可知道 $\frac{k}{8}\le 1$ 或者 $\frac{k}{8}\ge 5$，故选 C.

例 2.已知函数 $y=x^2-4x+5$ 在闭区间[0，m]上有最大值 5，最小值 1，则 m 的取值范围是（　　）

A.［0，1］　　B.［1，2］　　C.［0，2］　　D.［2，4］

解析：如图 2-1-1 所示，这是一道“卡根法”类型的题，关键在于找到取得最大值和最小值的 x 的对应值，易知当 $y=1$ 时，$x=2$，当 $y=5$ 时，$x=0$ 或 $x=4$，故根据草图的卡根可知 $2\le m\le 4$ 时，满足题意，故选 D.

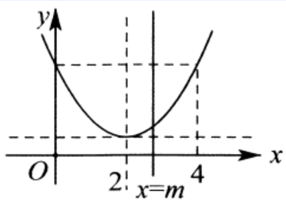


图 2-1-1

例 3.已知 $f(x)=x^2-tx+9$，若对任意 $x\in[1,5]$，不等式 $f(x)\ge 0$ 恒成立，则实数 t 的最大值为____.

解析：法一 二次函数的轴动区间定类型，根据轴在区间内，顶点定，轴在区间外，单调定的法则，进行分类讨论，即 $x=\frac{t}{2}$ 是否在区间[1,5]内：如图 2-1-2 所示：

①当 $\frac{t}{2}<1$ 时，　$f(x)_{\min}=f(1)=10-t\ge 0$，故 $t<2$；

②当 $1\le\frac{t}{2}\le 5$ 时，　$f(x)_{\min}=f\left(\frac{t}{2}\right)=-\frac{t^2}{4}+9\ge 0$，故 $2\le t\le 6$；

③当 $\frac{t}{2}>5$ 时，　$f(x)_{\min}=f(5)=34-5t\ge 0$，此时为 $\varnothing$ ；综上可得：$t\le 6$.

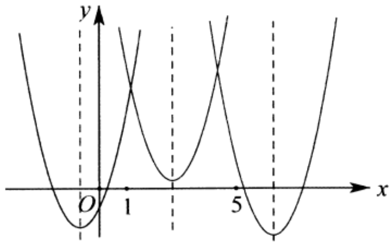


图 2-1-2

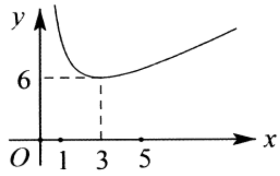


图 2-1-3

法二参变分离, 由于 $x\in[1,5]$, 故 $x^2-tx+9\ge 0\Rightarrow t\le x+\frac{9}{x}$ 恒成立，如图 $2-1-3$ 所示，根据对勾函数图象性质, 则只需 $\left(x+\frac{9}{x}\right)_{\min}=6\ge t$, 当且仅当 $x=3$ 时等号成立.

归纳总结： 在关于二次函数轴动区间定的题型时，若只考查单调性，显然直接法更简单，遇到恒成立或者零点分布类型题目时，显然参变分离更简单. 轴定区间动显然还是直接讨论并卡根更加直截了当. 关于零点分布，进行区间端点和对称轴一起来“卡根”, 端点值往往形成一种“定海神针″感觉，接下来我们通过题目分析这类方法.

例 4（2020•宝安区校级月考）：设函数 $f(x)=x^2+ax+1$.

（1）已知函数 $g(x)=\log_2 f(x)$ 的定义域为 R，求实数 a 的取值范围.

（2）已知方程 $f(x)=0$ 有两个实数根 x_1，x_2，且 x_1，$x_2\in(0,2)$，求实数 a 的取值范围.

解析：(1) 根据题意可得 $f(x)>0$ 对 R 恒成立，即 $\Delta=a^2-4<0,\quad -2<a<2$；

(2) 法一（定海神针卡根）如图 2-1-4 所示, $\begin{cases}2\\ f\left(-\frac{a}{)}\right)\le 0\Rightarrow a\ge 2, a\le -2\end{cases}$, 综上可得 $-\frac{5}{2}<a\le -2.$

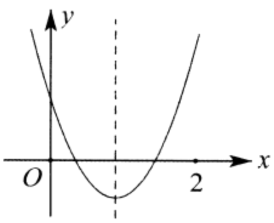


图 2-1-4

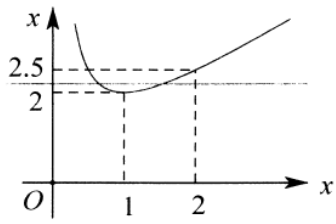


图 2-1-5

法二（参变分离）根据题意得: $-a=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,2)$ 有两根，其几何意义是 $y=-a$ 与 $y=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,2)$ 有两个交点, 如图 $2-1-5$ 所示，当 $2\le -a<\frac{5}{2}$ 时，满足题意，注意到 $-a=2$ 时, 原方程有两个相等的实根，故 $-\frac{5}{2}<a\le -2$.

归纳总结: 此题明显参变分离解题更为简单，下面我们将系统分析参变分离和定海神针方法各自的

适用范围.

第二讲 参变分离型

第一类：恒成立与能成立类型之同号型

我们规定，当决定抛物线开口符号的与恒成立（能成立）的符号一致时，即 $ax^2+bx+c\geq 0(a>0)$，此类型题目基本上都是分类讨论复杂，参变分离简单，还要说明一点就是参数尽量为一次.

例 5：（2020•长沙市月考）已知不等式 $1-2^{x+1}+a\cdot 4^x<0$ 对一切 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是____.

解析：由 $1-2^{x+1}+4^x\cdot a<0$ 可化为 $a<\dfrac{2^{x+1}-1}{4^x}=\dfrac{2}{2^x}-\left(\dfrac{1}{2^x}\right)^2$，令 $t=2^{-x}$，由 $x\in[1,+\infty)$，得 $t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，

则 $a<-t^2+2t$，$-t^2+2t=-(t-1)^2+1$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上递增，当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，$-t^2+2t$ 取得最大值为 $\dfrac{3}{4}$，当 $t=0$ 时，函数取得最小值为 0，所以 $a\leq 0$. 实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0]$. 故答案为 $(-\infty,0]$.

例 6：（2019•嘉兴期末）已知函数 $f(x)=x^2+ax+2$.

（Ⅰ）当 $a=3$ 时，解不等式 $f(x)<0$；

（Ⅱ）当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解析：(1) 当 $a=3$ 时，一元二次不等式 $x^2+3x+2<0$ 的解为 $-2<x<-1$；

(2) 当 $x\in[1,2]$ 时，$x^2+ax+2\geq 0$ 恒成立，即 $a\geq -\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$ 恒成立，令 $g(x)=-\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$，因为 $g(x)=-\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$ 在 $x\in[1,2]$ 上的最大值为 $-2\sqrt{2}$，故 $a\geq -2\sqrt{2}$.

例 7：（2019•浙江期中）已知函数 $f(x)=ax^2+x+1+a$.

（Ⅰ）若函数 $y=f(x)+x$ 有唯一的零点，求 a 的值；

（Ⅱ）设 $a>0$，若对任意的 $x\in[1,2]$，不等式 $2x\leqslant f(x)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解析：(1) 若函数 $y=f(x)+x$ 有唯一的零，点，等价于 $ax^2+2x+a+1=0$ 有唯一实根；

①若 $a=0$，则方程为 $2x+1=0$，方程根为 $-\dfrac{1}{2}$，满足题意；

②若 $a\neq 0$，则 $\Delta=2^2-4\cdot a\cdot(a+1)=-4a^2-4a+4=0$，得 $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$；

综上所述： $a=0$ 或 $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$；

（2）法一（直接讨论）由 $2x\le f(x)$ 等价于 $ax^2-x+a+1\ge 0$, 记 $g(x)=ax^2-x+a+1$，

①若 $\dfrac{1}{2a}\le 1$, 即 $a\ge\dfrac{1}{2}$, 则 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上递增，所以 $g(x)_{\min}=g(1)=2a\ge 0$, 即 $a\ge\dfrac{1}{2}$；

②若 $1<\dfrac{1}{2a}<2$, 即 $\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{2}$, 则 $g(x)$ 在 $\left[1,\dfrac{1}{2a}\right]$ 上递减，在 $\left[\dfrac{1}{2a},2\right]$ 上递增，

所以 $g(x)_{\min}=g\left(\dfrac{1}{2a}\right)\ge 0\Rightarrow\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{2}$；

③若 $\dfrac{1}{2a}\ge 2$, 即 $a\le\dfrac{1}{4}$, 则 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上递减，所以 $g(x)_{\min}=g(2)=5a-1\ge 0\Rightarrow\dfrac{1}{5}\le a\le\dfrac{1}{4}$.

综上所述 $a\ge\dfrac{1}{5}$.

法二（转化为对幻函数）止 $2x\le f(x)$ 等价于 $2\le ax+\dfrac{a+1}{x}+1$, 记 $g(x)=ax+\dfrac{a+1}{x}+1$, 可知 $g(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{1+\dfrac{1}{a}}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{a}},+\infty\right)$ 上单调递增：

① 若 $0<a\le\dfrac{1}{3}$, 此时 $\sqrt{1+\dfrac{1}{a}}\ge 2$, 所以 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上递减，所以 $g(x)_{\min}=g(2)=\dfrac{5}{2}a+\dfrac{3}{2}\ge 2\Rightarrow\dfrac{1}{5}\le a\le\dfrac{1}{3}$;

②若 $a>\dfrac{1}{3}$, 此时 $\sqrt{1+\dfrac{1}{a}}<2$, 所以 $g(x)$ 在 $\left[1,\sqrt{1+\dfrac{1}{a}}\right]$ 上递减, 在 $\left[\sqrt{1+\dfrac{1}{a}},2\right]$ 上递增：

所以 $g(x)_{\min}=g\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{a}}\right)=2\sqrt{a(a+1)}+1\ge 2\Rightarrow a>\dfrac{1}{3}$. 综上所述： $a\ge\dfrac{1}{5}$.

法三(参变分离)由 $f(x)\ge 2x\Rightarrow a\ge\dfrac{x-1}{x^2+1}$ 对 $x\in[1,2]$ 恒成立, 令 $x-1=t$ 则 $t\in[0,1]$, 则 $a\ge\dfrac{t}{t^2+2t+2}$ 恒成立. 当 $t=0$ 时, $a\ge 0$; 当 $t\ne 0$ 时, $a\ge\dfrac{1}{t+2+\dfrac{2}{t}}$ 对 $t\in(0,1]$ 恒成立, 而 $t+\dfrac{2}{t}\ge 3$, 当且仅当 $t=1$ 时等号成立. 综上所述: $a\ge\dfrac{1}{5}$.

例 8：（2019•定州市期中）已知函数 $f(x)=x^2-mx+2m-4(m\in R)$.

（1）当 $m=1$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant 0$ 的解集；

（2）当 $x>2$ 时，不等式 $f(x)\geqslant -1$ 恒成立，求 m 的取值范围.

解析：(1) 因为 $m=1$, 所以 $f(x)=x^2-x-2$. 所以 $x^2-x-2\geq 0$, 即 $(x-2)(x+1)\geq 0$, 解得 $x\leq -1$ 或 $x\geq 2$.

故不等式 $f(x)\geq 0$ 的解集为 $\{x|\ x\leq -1$ 或 $x\geq 2\}$.

(2) 当 $x>2$ 时, 不等式 $f(x)\geq -1$ 恒成立等价于 $m\leq \dfrac{x^2-3}{x-2}$ 在 $(2,+\infty)$ 上恒成立. 因为 $x>2$, 所以 $x-2>0$,

令 $x-2=t(t>0)$, 则 $m\leq \dfrac{t^2+4t+1}{t}=t+\dfrac{1}{t}+4$, 根据对勾函数性质知, 当 $t=1$ 时, m 取得最小值 6, 故 m 的取值范围为 $(-\infty,6]$.

例 9：（2020•顺德区期末）设二次函数 $f(x)=x^2+mx$.

（Ⅰ）若对任意实数 $m\in[0，1]$，$f(x)>0$ 恒成立，求实数 x 的取值范围；

（Ⅱ）若存在 $x_0\in[-3，4]$，使得 $f(x_0)\leqslant -4$ 成立，求实数 m 的取值范围.

解析：(1) 由题意, $xm+x^2>0$ 对于 $m\in[0,1]$ 恒成立, 令 $g(m)=xm+x^2$.

①当 $x<0$ 时, $g(m)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减, 所以只需要 $g(1)=x+x^2>0$, 解得 $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$;

②当 $x=0$ 时, $g(m)=0$, 所以不成立;

③当 $x>0$ 时, $g(m)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增, 所以只需要 $g(0)=x^2>0$, 解得 $x\neq 0$. 综上 $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

(2) 法一 (直接讨论) 二次函数 $f(x)$ 开口向上, 对称轴为 $x=-\dfrac{m}{2}$.

①当 $m>6$ 时, $-\dfrac{m}{2}<-3$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[-3,4]$ 上单调递增. 存在 $x_0\in[-3,4]$, 使得 $f\left(x_0\right)\leq -4$, 只需要 $f(-3)=9-3m\leq -4$, 解得 $m\geq \dfrac{13}{3}$, 又 $m>6$, 所以 $m>6$:

②当 $-8\leq m\leq 6$ 时, $-3\leq -\dfrac{m}{2}\leq 4$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[-3,4]$ 上得最小值为 $f\left(-\dfrac{m}{2}\right)$. 存在 $x_0\in[-3,4]$, 使得

$f\left(x_0\right)\leq -4$, 只需要 $f\left(-\dfrac{m}{2}\right)=-\dfrac{m^2}{4}\leq -4$, 解得 $m\leq -4$ 或 $m\geq 4$, 又 $-8\leq m\leq 6$,

所以 $m\in[-8,-4]\cup[4,6]$;

③当 $m<-8$ 时，$-\frac{m}{2}>4$，所以 $f(x)$ 在区间[-3, 4]上单调递减. 存在 $x_0\in[-3,4]$，使得 $f\left(x_0\right)\le -4$，只需要 $f(4)=16+4m\le -4$，解得 $m\le -5$， 又 $m<-8$，所以 $m<-8$. 综上， $m\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$.

法二（参变分离）由 $x_0^2+mx_0+4\le 0$ 对 $x_0\in[-3,4]$ 能成立，参变分离得到 $x_0+\frac{4}{x_0}\le -m$ 对 $x_0\in(0,4]$ 或者 $x_0+\frac{4}{x_0}\ge -m$ 对 $x_0\in[-3,0)$ 能成立，即当 $x_0\in(0,4]$ 时， $-m\ge\left(x_0+\frac{4}{x_0}\right)_{\min}=4$ 或者当 $x_0\in[-3,0)$ 时，$\left(x_0+\frac{4}{x_0}\right)_{\max}=-4\ge -m$. 综上所述：$m$ 的取值范围为 $(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$.

第二类：零点分布之两零点分布在同一区间型

二次函数的两个零点位于同一区间或者在某个区间存在零点时，参变分离转化为区间的值域或者交点问题，显然事半功倍。

例 10（2019•丰城市校级月考）：已知 $f(x)=x^2+2mx+3m+4$.

（1）若 $m=-1$ 且 $x\in[0，3]$，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 m 为何值时， $f(x)$ 有 2 个零点，且均比 -1 大.

解析（1）由题意知，可知当 $m=-1$ 时， $f(x)=x^2-2x+1$. 此时，二次函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=1$，且开口朝上. 所以当 $x\in[0,3]$ 时， $f(x)$ 在[0, 1]上单调递减；在[1，3]上单调递增.

(2)法一（直接讨论）由题意，可知因为函数的两个零点均大于-1，且函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=-m$，且开口朝上. 所以 $\begin{cases}\Delta>0\\-m>-1\\1-2m+3m+4>0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}4m^2-4(3m+4)>0\\-m>-1\\f(-1)>0\end{cases}$ ，解得 $-5<m<-1$.

法二(参变分离)由题意知 $-m=\frac{x^2+4}{2x+3}$， 令 $t=2x+3(t>1)$， 则 $-4m+6=t+\frac{25}{t}$， 由于 $t\in(1,5)$ 时，$t+\frac{25}{t}\in(10,26)$，当 $t\in(5,+\infty)$，$t+\frac{25}{t}\in(10,+\infty)$，故当 $-4m+6\in(10,26)$ 时，即 $m\in(-5,-1)$ 时满足题意.

例 11.（2020•黄冈月考）若关于 x 的一元二次方程 $mx^2+(m-3)x+1=0$ 至少有一个正根，求 m 的取值范围.

解析：要使一元二次方程成立，首先 $m\ne 0$ （否则成了一元一次方程）.

法一（直接讨论）要使方程有解必须：$\Delta=(3-m)^2-4m\ge 0$，即 $m\ge 9$ 或 $m\le 1$.

(1) 当 $m \geq 9$ 时，要使 x 有正解, 则 $(3-m)+\sqrt{\Delta}>0$, 此时 m 无解：(2) 当 $m \leq 1$ 且 $m \neq 0$ 时分两种情况：

①当 $0<m \leq 1$ 时, $(3-m)+\sqrt{\Delta}>0$ 成立, 此时解得 $m>0$, 所以当 $0<m \leq 1$ 时, x 一定有正解

②当 $m<0$ 时, x 的解中分母 $2m<0$，那么分子至少有一个解为负数，同理可得当 $m<0$ 时，正好 x 只有一个正解. 综上所述: 当 $m \leq 1$ 且 $m \neq 0$ 时, 关手 x 的一元二次方程 $mx^2+(m-3)x+1=0$ 至少有一个正根.

法二（参变分离）易知 $m=\dfrac{3x-1}{x^2+x}(x>0)$, 此题转化为函数 $y=\dfrac{3x-1}{x^2+x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的值域问题, 令 $3x-1=t \Rightarrow x=\dfrac{t+1}{3}(t>-1)$, $y=\dfrac{9t}{t^2+5t+4}$, 当 $t \neq 0$ 时，$y=\dfrac{9}{t+\dfrac{4}{t}+5} \in(-\infty, 0) \cup(0,1]$.（如图 2-2-1 所示，请结合对勾函数图象分析）

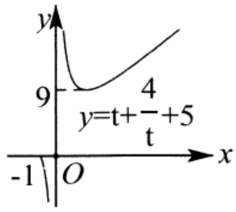


图 2-2-1

例 12．若函数 $f(x)=x^2-kx+4$ 在区间（1，6）内有零点，求 k 的取值范围.

解析：法一二次函数在区间 $\left(x_1, x_2\right)$ 上有零点, 分以下四种情况:

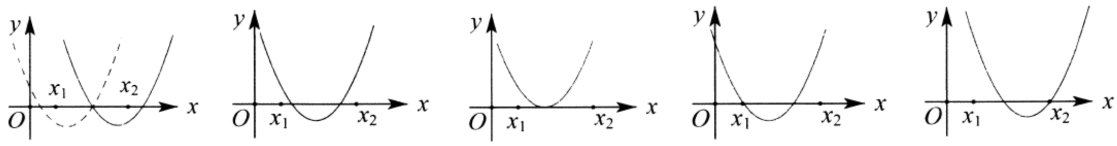


图 2-2-2　　图 2-2-3　　图 2-2-4　　图 2-2-5　　图 2-2-6

由 (1) $f(1) \cdot f(6)<0$, 解得 $5<k<\dfrac{20}{3}$, 如图 $2-2-2$；(2) $\begin{cases}\Delta>0 \\ f(1)>0 \\ f(6)>0 \\ 1<\dfrac{k}{2}<6\end{cases}$, 解得 $4<k<5$, 如图 $2-2-3$；

(3) $\begin{cases}\Delta=0 \\ 1<\dfrac{k}{2}<6\end{cases}$, 解得 $k=4$, 如图 $2-2-4$ (4) $\begin{cases}f(1)=0 \\ 1<\dfrac{k}{2}<\dfrac{7}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(6)=0 \\ \dfrac{7}{2}<\dfrac{k}{2}<6\end{cases}$, 解得 $k=5$, 如图 $2-2-5$ 或图 $2-2-6$；综上所述 k 的取值范围是 $\left[4, \dfrac{20}{3}\right)$.

总结：二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ （不妨设 $a>0$）在有限的开区间 $\left(x_1, x_2\right)$ 内有零点的条件是：

(1) $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$; (2) $\begin{cases}\Delta>0\\ f(x_1)>0\\ f(x_2)>0\\ x_1<-\dfrac{b}{2a}<x_2\end{cases}$; (3) $\begin{cases}\Delta=0\\ x_1<-\dfrac{b}{2a}<x_2\end{cases}$; (4) $\begin{cases}f(x_1)=0\\ x_1<-\dfrac{b}{2a}<\dfrac{x_1+x_2}{2}\end{cases}$

或 $\begin{cases}f(x_2)=0\\ \dfrac{x_1+x_2}{2}<-\dfrac{b}{2a}<x_2\end{cases}$.

法二参变分离得 $k=x+\dfrac{4}{x}$ 且 $x\in(1,6)$, 根据对勾函数性质可知当 $k\in\left[4,\dfrac{20}{3}\right)$ 时，$y=k$ 与 $y=x+\dfrac{4}{x}$ 有交点，

故 k 的取值范围是 $\left[4,\dfrac{20}{3}\right)$.（如图 $2-2-7$ 所示）

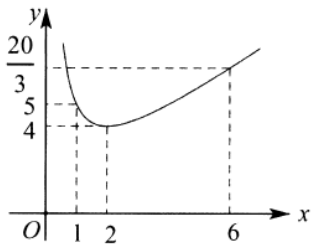


图 2-2-7

第三讲 定海神针卡根法

第一类：恒成立（能成立）的异号类

二次函数开口方向和不等号方向反向, 即 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 恒成立，或者 $ax^2+bx+c>0(a<0)$ 恒成立.

例 13（2019•青岛期末）：不等式 $x^2-2(a-2)x+a<0$ 对任意 $x\in(1,5)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为(　　)

A. $a>5$　　B. $a\geqslant5$　　C. $-5<a<5$　　D. $-5\leqslant a\leqslant5$

解析：根据题意，设 $f(x)=x^2-2(a-2)x+a$, 若 $x^2-2(a-2)x+a<0$ 对任意 $x\in(1,5)$ 恒成立，则 $f(x)<0$ 在区间 $(1,5)$ 上恒成立, 必有 $\begin{cases}f(1)\le0\\ f(5)\le0\end{cases}$, 即 $\begin{cases}1-2(a-2)+a\le0\\ 25-10(a-2)+a\le0\end{cases}$, 可得 $a\ge5$, 故选 B.

第二类：零点问题的分散或者范围内单个零点

如果两个零点在不同区间或者某个区间只有一个零点时，端点值的正负号将决定参数的取值范围.

例 14.（2019•历下区校级月考）若方程 $5x^2+(a-11)x+a-2=0$ 的一个根在（0，1）内，另一个根在

（1，2）内，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(\frac{4}{3},\ 2)$　　　　B．（2，+∞）　　　　C．$(\frac{4}{3},\ 4)$　　　　D．（2，4）

解析：设函数 $f(x)=5x^2+(a-11)x+a-2$，因为方程 $5x^2+(a-11)x+a-2=0$ 的一个根在区间 $(0,1)$ 上，另一根在区间 $(1,2)$，所以 $\begin{cases} f(0)>0 \\ f(1)<0 \\ f(2)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0)=a-2>0 \\ f(1)=5+a-11+a-2>0 \\ f(0)=20+2(a-11)+a-2>0 \end{cases}$，所以 $2<a<4$，即实数 a 的取值范围是 $(2,4)$，故选 D.

例 15.（2019•未央区校级期末）已知关于 x 的方程 $2kx^2-2x-5k-2=0$ 的两个实数根一个小于 1，另一个大于 1，则实数 k 的取值范围是____.

解析：分类讨论：①当 $k>0$，则 $f(1)<0$，得 $k>0$；②当 $k<0$，则 $f(1)>0$，得 $k<-\frac{4}{3}$. 综上：k 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)\bigcup(0,+\infty)$. 故答案为 $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)\cup(0,+\infty)$.

第四讲　综合问题

在轴动区间定的情况下，若参变分离出现正负号不确定时也需要分类讨论，不等号方向涉及改变，此时只需分两类，而常规的定海神针卡根法需分三类.

例 16（2019•思明区校级月考）. 已知函数 $f(x)=x^2+ax+3-a$，若 $x\in[-2，2]$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解析：法一要使 $f(x)\geq 0$ 恒成立，则函数在区间 $[-2,2]$ 上的最小值不小于 0，设 $f(x)$ 的最小值为 $g(x)$.

①当 $-\frac{a}{2}<-2$，即 $a>4$ 时，　$g(a)=f(-2)=7-3a\geq 0$，得 $a\leq\frac{7}{3}$，故此时 a 不存在；

②当 $-\frac{a}{2}\in[-2,2]$，即 $-4\leq a\leq 4$ 时，$g(a)=f\left(-\frac{a}{2}\right)=3-a-\frac{a^2}{4}\geq 0$，得 $-6\leq a\leq 2$，又 $-4\leq a\leq 4$，故 $-4\leq a\leq 2$

③当 $-\frac{a}{2}>2$，即 $a<-4$ 时，$g(a)=f(2)=7+a\geq 0$，得 $a\geq -7$，又 $a<-4$，故 $-7\leq a<-4$，综上得 $-7\leq a\leq 2$.

法二根据题意可得：$x^2+3\geq a(1-x)$ 在 $x\in[-2,2]$ 上恒成立，即 $(t+1)^2+3\geq -at$ 在 $t\in[-3,1]$ 上恒成立，

即$\begin{cases} t+\dfrac{4}{t}+2\ge -a(0<t\le 1) \\ t+\dfrac{4}{t}+2\le -a(-3\le t<0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7\ge -a(0<t\le 1) \\ -2\le -a(-3\le t<0) \end{cases} \Rightarrow -7\le a\le 2$.

例 17.（2007•广东）已知 a 是实数，函数 $f(x)=2ax^2+2x-3-a$，如果函数 $y=f(x)$ 在区间$[-1，1]$上有零点，求 a 的取值范围.

解析：由题意得：当 $a=0$ 时，不符合题意，所以 $a\ne 0$：又因为 $f(x)=2ax^2+2x-3-a=0$ 在$[-1,1]$上有解，所以 $\left(2x^2-1\right)a=3-2x$ 在$[-1,1]$上有解，则 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{2x^2-1}{3-2x}$ 在$[-1,1]$上有解，问题转化为找函数 $y=\dfrac{2x^2-1}{3-2x}$ 在 $[-1,1]$ 上的值域；设 $t=3-2x(x\in[-1,1])$，则 $2x=3-t(t\in[1,5])$，设 $y=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(t-3)^2-2}{t}=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{7}{t}-6\right)$，$g(t)=t+\dfrac{7}{t}$，则 $g'(t)=\dfrac{t^2-7}{t^2}$，当 $t\in[1,\sqrt{7})$ 时，$g'(t)<0$，此函数 $g(t)$ 单调递减：当 $t\in(\sqrt{7},5]$ 时，$g'(t)>0$，此函数 $g(t)$ 单调递增，所以 y 的取值范围是 $[\sqrt{7}-3,1]$，所以 $f(x)=2ax^2+2x-3-a=0$ 在$[-1,1]$上有解 $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a}\in[\sqrt{7}-3,1]\Leftrightarrow a\ge 1$ 或 $a\le -\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$. 故实数 a 的取值范围为 $a\ge 1$ 或 $a\le -\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$.

例 18：（2007•湖北）设二次函数 $f(x)=x^2+ax+a$，方程 $f(x)-x=0$ 的两根 x_1 和 x_2 满足 $0<x_1<x_2<1$.

（Ⅰ）求实数 a 的取值范围；

（Ⅱ）试比较 $f(0)\cdot f(1)-f(0)$ 与$\frac{1}{15}$的大小，并说明理由.

解析：(1)法一令 $g(x)=f(x)-x=x^2+(a-1)x+a$，

则由题意可得$\begin{cases} \Delta>0 \\ 0<\dfrac{1-a}{2}<1 \\ g(1)>0 \\ g(0)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ -1<a<1 \\ a<3-2\sqrt{2} \text{ 或} a>3+2\sqrt{2} \end{cases}$，故所求实数 a 的取值范围是 $(0,3-2\sqrt{2})$.

法二参变分离得：$-a=\dfrac{x^2-x}{x+1}(0<x<1)$，令 $t=x+1(1<t<2)$，则 $-a=\dfrac{t^2-3t+2}{t}=t+\dfrac{2}{t}-3$，

如图 $2-4-1$ 所示，当 $t=1$ 或 $t=2$ 时，$t+\dfrac{2}{t}-3=0$：当 $t=\sqrt{2}$ 时，$\left(t+\dfrac{2}{t}-3\right)_{\min}=2\sqrt{2}-3$，故所求实数 a

的取值范围是 $(0,3-2\sqrt{2})$.

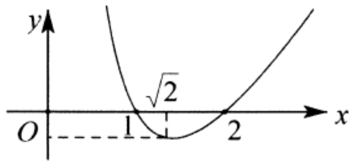


图 2-4-1

(2) 法一由题意得：$f(0)\cdot f(1)-f(0)=2a^2$，令 $h(a)=2a^2$. 因为 $h(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，所以当 $0<a<3-2\sqrt{2}$ 时，$0<h(a)<h(3-2\sqrt{2})=2(3-2\sqrt{2})^2=2(17-12\sqrt{2})=2\cdot\dfrac{1}{17+12\sqrt{2}}<\dfrac{1}{16}<\dfrac{1}{15}$，即 $f(0)\cdot f(1)-f(0)<\dfrac{1}{16}<\dfrac{1}{15}$.

法二因为 $f(0)\cdot f(1)-f(0)=2a^2$，由(1)知 $0<a<3-2\sqrt{2}$，$4\sqrt{2}a-1<12\sqrt{2}-17<0$. 又 $4\sqrt{2}a+1>0$，

于是 $2a^2-\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{16}\left(32a^2-1\right)=\dfrac{1}{16}(4\sqrt{2}a-1)(4\sqrt{2}a+1)<0$，即 $2a^2-\dfrac{1}{16}<0$，

故 $f(0)\cdot f(1)-f(0)<\dfrac{1}{16}<\dfrac{1}{15}$.

法 3 依题意可设 $g(x)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$，则由 $0<x_1<x_2<1$ 得：$f(0)\cdot f(1)-f(0)=g(0)\cdot g(1)=x_1\cdot x_2\left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right)=\left[x_1\left(1-x_1\right]\left[x_2\left(1-x_2\right)\right]<\left(\dfrac{x_1+1-x_1}{2}\right)^2\left(\dfrac{x_2+1-x_2}{2}\right)^2=\dfrac{1}{16}\right.$，

故 $f(0)\cdot f(1)-f(0)<\dfrac{1}{16}<\dfrac{1}{15}$.

例 19：（2019•太和县校级月考）已知函数 $f(x)=a\cdot 2^x-x^2-\frac{4}{3}a(a\in R)$

（1）若函数 $f(x)$ 是偶函数，求实数 a 的值；

（2）若函数 $g(x)=\frac{4^x+1}{2^x}-x^2$，关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有且只有一个实数根，求实数 a 的取值范围.

解析：(1) 因为函数 $f(x)=a\cdot 2^x-x^2-\dfrac{4}{3}a(a\in R)$ 是偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$ 对任意 $x\in R$ 恒成立，所以 $a\cdot 2^{-x}-(-x)^2-\dfrac{4}{3}a=a\cdot 2^x-x^2-\dfrac{4}{3}a$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，所以 $a\cdot\left(2^{-x}-2^x\right)=0$ 对 $x\in R$ 成立，所以 $a=0$：

(2) 因为 $g(x)=\dfrac{4^x+1}{2^x}-x^2$，$f(x)=g(x)$，所以 $a\cdot 2^x-x^2-\dfrac{4}{3}a=\dfrac{4^x+1}{2^x}-x^2$，所以 $\begin{cases} a\cdot 2^x-\dfrac{4}{3}a>0 \\ \dfrac{4^x+1}{2^x}=a\cdot 2^x-\dfrac{4}{3}a \end{cases}$.

设 $t=2^x(t>0)$，则有关于 t 的方程 $(a-1)t^2-\dfrac{4}{3}at-1=0$.

①若 $a-1>0$，即 $a>1$ 时，则需关于 t 的方程 $(a-1)t^2-\dfrac{4}{3}at-1=0$ 有且只有一个大于 $\dfrac{4}{3}$ 的实数根，设 $h(t)=(a-1)t^2-\dfrac{4}{3}at-1$，则 $h\left(\dfrac{4}{3}\right)<0$，所以 $(a-1)\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^2-\dfrac{4}{3}a\times\dfrac{4}{3}-1<0$，所以 $-25<0$ 成立，所以 $a>1$ 满足题意.

②若 $a-1=0$，即 $a=1$ 时，解得 $t=-\dfrac{3}{4}$，不满足题意；

③若 $a-1<0$，即 $a<1$ 时，$\left(-\dfrac{4}{3}a\right)^2+4(a-1)=0$，　且 $-\dfrac{-\frac{4}{3}a}{2(a-1)}>0$，则 $a=-3$.

所以 $a=-3$ 时关于 t 的方程 $(a-1)t^2-\dfrac{4}{3}at-1=0$ 有且只有一个实数根 $\dfrac{1}{2}$. 综上所述，所求实数 a 的取值范围是 $\{a|\ a=-3$ 或 $a>1\}$.

1.（2019•宿州期中）不等式 $x^2-2ax+2-a\geqslant 0$，在 $x\in[-1,\ +\infty)$ 上恒成立，则 a 的取值范围是(　　)

A．$[-3,\ 1]$　　B．$[-2,\ 1]$　　C．$[-3,\ +\infty)$　　D．$[-3,\ -2]$

2.（2019•青岛期中）函数 $f(x)=x^2-(4a-1)x+2$ 在 $[-1,2]$ 上不单调，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,\ -\frac{1}{4})$　　B．$(-\frac{1}{4},\ \frac{5}{4})$　　C．$[-\frac{1}{4},\ \frac{5}{4}]$　　D．$(\frac{5}{4},\ +\infty)$

3.（2019•绿园区校级月考）一元二次方程 $x^2-4mx+2m+6=0$ 有两个负根，则实数 m 的范围为（　　）

A．$-3<m<0$　　B．$-3<m\leqslant -1$　　C．$m\geq\frac{3}{2}$　　D．$-1\leqslant m\leq\frac{3}{2}$

4.（2019 秋•大武口区校级月考）二次函数 $y=-x^2+bx+3$ 在区间 $(-\infty,\ 2]$ 上是增函数，则实数 b 的取值范围是（　　）

A．$b|b≥4}　　B．$4}　　C．$b|b≤4}　　D．$－4}

5.（2019•屯溪区校级月考）已知方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负根，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(0,\ 1]$　　B．$(-\infty,\ 1)$

C．（﹣∞，1]　　　　　　　　　　　D．（﹣∞，0）∪（0，1]

6．（2019•上城区校级月考）已知关于 x 的不等式 $ax^2-2x+3a<0$ 在（0，2]上有解，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,\frac{\sqrt{3}}{3})$　　B．$(-\infty,\frac{4}{7})$　　C．$(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$　　D．$(\frac{4}{7},+\infty)$

7．（2019•西湖区校级模拟）设函数 $f(x)=x^2+mx+n^2$，$g(x)=x^2+(m+4)x+n^2+2m+4$，其中 $x\in R$，若对任意的 $t\in R$，$f(t)$，$g(t)$ 至少有一个为非负值，则实数 m 的最大值是（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．$\sqrt{5}$

8．（2019•舒城县期末）若不等式 $x^2+Px>4x+P-3$ 当 $0\leqslant p\leqslant 4$ 时恒成立，则 x 的取值范围是（　　）

A．[﹣1，3]　　　　　　　　　　　B．（﹣∞，﹣1]

C．[3，+∞）　　　　　　　　　　D．（﹣∞，﹣1）∪（3，+∞）

9．（2019•成都期末）已知关于 x 的方程 $x^2-ax+3=0$ 有一根大于1，另一根小于1，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．（4，+∞）　　B．（﹣∞，4）　　C．（﹣∞，2）　　D．（2，+∞）

10．（2020•白水县期末）关于 x 的方程 $x^2-(a-1)x+4=0$ 在区间[1，3]内有两个不等实根，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．（4，5]　　B．[3，6]　　C．$(5,\frac{16}{3}]$　　D．$[\frac{16}{3},6)$

11．（2019春•重庆期末）当 $x>0$ 时，不等式 $x^2-mx+9>0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．（﹣∞，6）　　B．（﹣∞，6]　　C．[6，+∞）　　D．（6，+∞）

12．（2019•西湖区校级模拟）设 $a\in R$，若关于 x 的不等式 $x^2-ax+1\geqslant 0$ 在区间[1，2]上有解，则（　　）

A．$a\leqslant 2$　　B．$a\geqslant 2$　　C．$a\geqslant\frac{5}{2}$　　D．$a\leqslant\frac{5}{2}$

13．（2019•温州期中）设函数 $f(x)=mx^2-mx-1$．

（1）若对于一切实数 x，$f(x)<0$ 恒成立，则 m 的取值范围是____，

（2）若对于 $x\in[1,3]$，$f(x)<-m+5$ 恒成立，则 m 的取值范围是____．

14．（2019•镇江期中）已知 $f(x)=x^2-tx+9$，若对任意 $x\in[1,5]$，不等式 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则实数 t 的最大值为____．

15．（2019•慈溪市期中）关于 x 的不等式 $x^2-ax+a+3\geqslant 0$ 在区间[﹣2，0]上恒成立，则实数 a 的取值范围是____．

16．（2019•南昌期中）不等式 $(m-1)x^2+3(m-1)x-m<0$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，则 m 的取值范围为____．

17．（2018•菏泽期末）若不等式（a+2）x^2﹣2（a+2）x+4≥0对x∈R恒成立，则实数a的取值范围是____．

18．（2018•龙岗区期末）若关于x的不等式$x^2+mx+2>0$在区间[1，2]上有解，则实数m的取值范围为____

19．（2019•西湖区校级模拟）设方程$x^2-mx+2=0$的两根α，β，其中α∈（1，2），则实数m的取值范围是____．

20．（2019•西湖区校级模拟）已知f（x）＝$x^2-ax+2a$，且在（1，+∞）内有两个不同的零点，则实数a的取值范围是____．

21．（2018秋•无锡期末）若方程$7x^2$﹣（m+13）x﹣m﹣2＝0的一个根在区间（0，1）上，另一根在区间（1，2）上，则实数m的取值范围为____．

22．（2019•红岗区校级期末）已知f（x）＝$x^2-2ax+2$，当x∈[﹣1，+∞）时，f（x）≥a恒成立，则实数a的取值范围是____．

23．（2019•凉山州期末）设函数f（x）＝mx^2-mx-2．

（1）若对于一切实数x，f（x）＜0恒成立，求m的取值范围；

（2）若对于x∈[1，3]，f（x）＞﹣m+2（x﹣1）恒成立，求m的取值范围．

24．（2019•金安区校级期末）m为何值时，函数f（x）＝$x^2+2mx+3m+4$．

（1）在（﹣1，3）上有两个零点；

（2）有两个零点且均比﹣1大．

25．（2019•葫芦岛期末）已知函数f（x）＝$x^2-2ax+1$在区间[2，3]上最小值1，函数g（x）$=\frac{f(3^x)}{3^x}-k-3^x$

（1）求a的值．

（2）若存在x_0使得g（x）在x∈[﹣1，1]上为负数，求实数k的取值范围．

26．（2019•武汉期中）已知函数 $f(x)=mx^2-mx-1$．

（1）讨论不等式 $f(x)>1-2x$ 的解集；

（2）若对于任意 $x\in[1,3]$，$f(x)<-m+4$ 恒成立，求参数 m 的取值范围．

27．（2019•浙江期中）已知函数 $f(x)=ax^2-3ax+a^2-3$．

（Ⅰ）若不等式 $f(x)<0$ 的解集是$x|1<x<b}，求实数 a 与 b 的值；

（Ⅱ）若 $a<0$，且不等式 $f(x)<4$ 对任意 $x\in[-3,3]$恒成立，求实数 a 的取值范围．

28．（2020•宝山区校级期末）已知函数 $f(x-2)=ax^2-(a-3)x+a-2$（a 为负整数），$y=f(x)$ 的图象经过点（$m-2$，0）（$m\in R$）．

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）设函数 $g(x)=bx+2$，若 $g(x)\geqslant f(x)$ 在 $x\in[1,3]$上解集非空，求实数 b 的取值范围；

（3）证明：方程$\frac{1}{x}-f(x)=0$ 有且仅有一个解．

29.（2019•晋中期末）已知 $f(x)=ax^2-2x+1-a$，$a\in R$.

（1）求 $f(x)$ 在[0，2]上的最小值 $g(a)$；

（2）若关于 x 的方程 $f(2^x)=(a+1)\cdot 4^x-a\cdot(2^x+1)-2^{x+1}+3$ 有正实数根，求实数 a 的取值范围.

30.（2019•云浮期末）已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2-x)$，且 $f(1)=6$，$f(3)=2$.

（1）求 $f(x)$ 的解析式

（2）是否存在实数 m，使得在[－1，3]上 $f(x)$ 的图象恒在直线 $y=2mx+1$ 的上方？若存在，求 m 的取值范围；若不存在，说明理由.

31.（2019•西湖区校级模拟）已知二次函数 $f(x)=x^2-2ax+3$（$a\in R$）.

（1）若 $f(a+1)+f(a)=1$，求 a 的值；

（2）若对于任意的 $x\in[\frac{3}{2}, 3]$，$f(x)\geqslant 4x-2a-1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

32.（2019•张掖期末）已知二次函数 $y=(m+2)x^2-(2m+4)x+(3m+3)$ 有两个零点，一个大于 1，一个小于 1，求实数 m 的取值范围.

33.（2019•舒城县期末）已知二次函数 $f(x)=x^2+mx+1$（m 为整数）且关于 x 的方程 $f(x)-2=0$ 在区间 $(-3，\frac{1}{2})$ 内有两个不同的实根，

（1）求整数 m 的值；

（2）若对一切 $x\in[-\frac{1}{2}，\frac{1}{2}]$，不等式 $f(x+t)<f(\frac{x}{2})$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

34.（2019•迎泽区校级月考）已知函数 $g(x)=ax^2-2ax+1+b$（$a\neq0$，$b<1$）在 $x\in[2，3]$ 上有最大值 4，最小值 1，设 $f(x)=\frac{g(x)}{x}$.

（1）求 a，b 的值；

（2）在 $[-1，1]$ 上，都有 $f(2^x)-k\cdot2^x\geq0$ 成立，则 k 的取值范围.

35.（2006•浙江）设 $f(x)=3ax^2+2bx+c$．若 $a+b+c=0$，$f(0)>0$，$f(1)>0$，求证：

（Ⅰ）$a>0$ 且 $-2<\frac{b}{a}<-1$；

（Ⅱ）方程 $f(x)=0$ 在（0，1）内有两个实根．

专题 3 函数的定义域和值域

第一讲 函数定义域

类型一 基本的函数定义域限制

(1)分式中的分母不为 0;

(2)偶次方根下的数（或式）大于或等于 0;

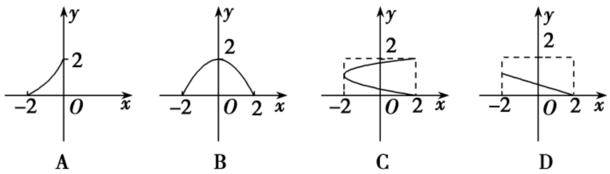
(3)零指数幂的底数不为 0;

(4)指数式的底数大于 0 且不等于 1;

(5)对数式的底数大于 0 且不等于 1，真数大于 0;

(6)正切函数 $y=\tan x\left(x\in R 且 x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right)$.

例 1.若函数 $y=f(x)$的定义域为 $M=\{x|-2\leq x\leq 2\}$，值域为 $N=\{y|0\leq y\leq 2\}$，则函数 $y=f(x)$的图象可能是(　　)



解析：A 不符合定义域当中的每一个元素都有象;B 满足函数定义，故符合;C 出现了定义域当中的一个元素对应值域当中的两个元素的情况，不符合函数的定义：对 D 值域当中有的元素没有原象，故选 B.

例 2.下列函数 $f(x)$与 $g(x)$表示同一函数的是(　　).

A．$f(x)=\sqrt{x^2-1}$与 $g(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$B．$f(x)=x$ 与 $g(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2+1}$

C．$y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$D．$f(x)=\sqrt{x^2}$与 $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$

解析：因为选项 A,C 中的函数定义域不同，选项 D 中的函数解析式不同，只有选项 B 正确，故选 B.

例 3.函数 $y=\dfrac{\sqrt{-x^2-x+2}}{\ln x}$的定义域为(　　)

A．$(-2,1)$　　B．$[-2,1]$

C．$(0,1)$　　D．$(0,1]$

解析：由题意得$\begin{cases}-x^2-x+2\geq 0\\x>0\\\ln x\neq 0\end{cases}$，解得$0<x<1$, 故选 C.

例 4：函数 $f(x)=\dfrac{1}{2-|x|}+\sqrt{x^2-1}+(x-4)^0$ 的定义域为__________.

解析：根据题意得$\begin{cases}2-|x|\neq 0\\x^2-1\geq 0,\\x-4\neq 0\end{cases}$ 解得函数定义域为$(-\infty,-2)\cup(-2,-1]\cup[1,2)\cup(2,4)\cup(4,+\infty)$.

类型二 能转化为二次函数定义域问题

例 5.若函数 $f(x)=\sqrt{2x^2+2ax-a}$的定义域为 R，则实数 a 的取值范围为______________.

解析：根据题意得 $2x^2+2ax-a\geq 0$ 恒成立,即 $\Delta=(2a)^2-4\times 2\times(-a)\leq 0$, 解得 $a\in[-2,0]$.故答案为[-2,0].

例 6：已知函数 $f(x)=\dfrac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域是 R，求实数 k 的取值范围。

解析：要使函数有意义,则 $kx^2+4kx+3\neq 0$ 恒成立,由于 $f(x)$ 的定义域为 R, 即 $kx^2+4kx+3=0$ 无实数解.

①当 $k\neq 0$ 时, $\Delta=16k^2-4\times 3k<0$ 恒成立,解得 $0<k<\dfrac{3}{4}$; ②当 $k=0$ 时,方程左边 $=3\neq 0$ 恒成立.上 k 的取值范围是 $0\leq k<\dfrac{3}{4}$.

归纳总结：在关于二次函数定义域为一切实数的时候，除了分析判别式以外,还要考虑二次项系数.

类型三 抽象函数的定义域求法

此类型题目最关键的就是法则下的定义域不变，若 $f(x)$ 的定义域为 (a,b), 求 $f[g(x)]$ 中 $a<g(x)<b$ 的解 x 的范围，即为 $f[g(x)]$ 的定义域.

1.已知 $f(x)$ 的定义域，求复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域

例 7：已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,5]$，求 $f(3x-5)$ 的定义域.

解析：因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,5]$, 则 $-1\leq 3x-5\leq 5$, 即 $\dfrac{4}{3}\leq x\leq\dfrac{10}{3}$.故函数 $f(3x-5)$ 的定义域为 $\left[\dfrac{4}{3},\dfrac{10}{3}\right]$.

2.已知复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域，求 $f(x)$ 的定义域

若 $f[g(x)]$ 的定义域为 $x\in(a,b)$, 则由 $a<x<b$ 确定 $g(x)$ 的范围即为 $f(x)$ 的定义域.

例 8:已知函数 $f(x^2-2x+2)$ 的定义域为 $[0,3]$，求函数 $f(x)$ 的定义域.

解析：由 $0\leq x\leq 3$, 得 $1\leq x^2-2x+2\leq 5$. 则令 $u=x^2-2x+2$, $f\left(x^2-2x+2\right)=f(u)$, $1\leq u\leq 5$. 故 $f(x)$ 的定义域为[1,5].

3.已知复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域，求 $f[h(x)]$ 的定义域

先由 $f[g(x)]$ 定义域求得 $f(x)$ 的定义域，再由 $f(x)$ 的定义域求得 $f[h(x)]$ 的定义域.

例 9:已知函数 $f(2x-3)$ 的定义域是 $(-1,3)$，求函数 $f(\frac{1}{2}x+6)$ 的定义域.

解析：已知函数 $f(2x-3)$ 的定义域是 $(-1,3)$, 所以 $-5<2x-3<3$, $-5<\frac{1}{2}x+6<3$, 解得 $-22<x<-6$，所以函数 $f\left(\frac{1}{2}x+6\right)$ 的定义域为(-22,-6).

4.已知 $f(x)$ 的定义域，求四则运算型函数的定义域

若函数是由一些基本函数通过四则运算结合而成的，其定义域为各基本函数定义域的交集，即先求出各个函数的定义域，再求交集.

例 10:若 $f(x)$ 的定义域为 $[-3,5]$，求 $\varphi(x)=f(-x)+f(2x+5)$ 的定义域.

解析：由 $f(x)$ 的定义域为 $[-3,5]$, 则 $g(x)$ 必有 $\begin{cases}-3\le -x\le 5\\ -3\le 2x+5\le 5\end{cases}$, 解得 $-4\le x\le 0$.故函数 $g(x)$ 的定义域为 $[-4,0]$.

1.（2019•天山区期中）函数 $y=\sqrt{2x+6}-\dfrac{4}{\sqrt{9-3x}}$ 的定义域是 $($　　$)$

A．$x\in[-3，3)$　　B．$[-3，+\infty)$　　C．$(-\infty,3)$　　D．$[-3，3]$

2.（2019•南阳期中）函数 $y=ln(5-x)+\sqrt{2^x-8}$ 的定义域是 $($　　$)$

A．$[2，3)$　　B．$[3，5)$　　C．$(-\infty,3)$　　D．$(2,3)$

3.（2019•湖北期中）已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[1，8]$，则 $y=\dfrac{f(2x)}{x-3}$ 的定义域为 $($　　$)$

A．$[2，3)\cup(3，16]$　B．$[\frac{1}{2},3)\cup(3,4]$　　C．$[1，3)\cup(3，8]$　D．$[1，3)\cup(3，4]$

4.（2019•景德镇期中）若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-1，1]$，则 $y=f(|x|-1)$ 的定义域为 $($　　$)$

A．$[-1，1]$　　B．$[-1，0]$　　C．$[0，1]$　　D．$[-2，2]$

5.（2019•湖北期中）函数 $f(x)=\dfrac{1}{ln(x+2)}-\sqrt{9-x^2}$ 的定义域是 $($　　$)$

A．$[-3，-1)\cup(-1，3]$　　B．$[-2，-1)\cup(-1，3]$

C．$(-2，-1)\cup(-1，3]$　　D．$(-2，3]$

6.（2019•鲁山县校级月考）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(\frac{1}{2},3)$，则 $f(lgx+1)$ 的定义域为 $($　　$)$

A．$(0,+\infty)$　　B．$(\frac{1}{2},3)$　　C．$(\frac{1}{100},100)$　　D．$(\frac{\sqrt{10}}{10},100)$

7.（2019•辽宁期中）已知函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{ax^2+2ax+3}$ 的定义域是 R，则实数 a 的取值范围是 $($　　$)$

A．$(0,3)$　　B．$(-\infty ，\ 0)\cup (3 ，\ +\infty)$

C．$[0 ，\ 3)$　　D．$(-\infty ，\ 0]\bigcup [3 ，\ +\infty)$

8.（2019•崂山区校级期中）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{mx^{2}+mx+4}$ 的定义域是一切实数，则 m 的取值范围是(　　)

A．$0<m<16$　　B．$0<m<4$　　C．$0\leqslant m<16$　　D．$m\geqslant 16$

9.（2019•东台市期中）若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[1 ，\ 2020]$，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x+1)}{lnx}$ 的定义域是(　　)

A．$(1 ，\ 2019]$　　B．$(0 ，\ 1)\cup (1 ，\ 2019]$

C．$(1 ，\ 2021]$　　D．$[-1 ，\ 1)\cup (1 ，\ 2019]$

10.（2019•浙江期中）若函数 $y=f(3x+1)$ 的定义域为 $[-2 ，\ 4]$，则 $y=f(x)$ 的定义域是(　　)

A．$[-1 ，\ 1]$　　B．$[-5 ，\ 13]$　　C．$[-5 ，\ 1]$　　D．$[-1 ，\ 13]$

11.（2019•昌江区校级期中）设定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=2$，且对任意的 x，$y\in R$，都有 $f(xy+1)=f(x)\bullet f(y)-2f(y)-2x+3$，则 $y=\sqrt{f(x)}$ 的定义域为(　　)

A．$[-2 ，\ +\infty)$　　B．$[-1 ，\ +\infty)$　　C．$(-\infty ，\ 1]$　　D．$(-\infty ，\ 2]$

12.（2019•西湖区校级模拟）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，则函数 $g(x)=f(\dfrac{1}{x})-f(x-1)$ 的定义域为(　　)

A．$(1,2)$　　B．$(0,2)$　　C．$(0,1)$　　D．$(-1,1)$

13.（2019•黄州区校级月考）函数 $f(x-4\sqrt{x-2})$ 的定义域为 $[3 ，\ 27]$，则函数 $f(x)$ 的定义域为(　　)

A．$[-2 ，\ 7]$　　B．$[-1 ，\ 7]$　　C．$[-2 ，\ -1]$　　D．$[3 ，\ 27]$

14.（2019•镇海区校级期末）若函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^{2}\log_{2}\dfrac{4(a+1)}{a}+2x\log_{2}\dfrac{2a}{a+1}+\log_{2}\dfrac{(a+1)^{2}}{4a^{2}}}$ 的定义域为 R，则实数 a 的取值范围为(　　)

A．$(0,1)\bigcup (-\dfrac{32}{31},-1)$　　B．$(0,1)$

C．$(-\dfrac{32}{31},-1)$　　D．$(-1,0)$

15.（2020•谷城县校级期末）已知对数式 $\log_{(x-1)}(x+2)$ 有意义，则 x 的取值范围是(　　)

A．$x>-2$　　B．$x>1$　　C．$x>1$ 且 $x\neq 2$　　D．$x>-2$ 且 $x\neq 2$

16.（2020•宁远县校级期末）已知函数 $f(x)=lg[(m^{2}-3m+2)x^{2}+(m-1)x+1]$ 的定义域为 R，则实数 m 的取值范围是__.

17.（2020•罗湖区校级期中）已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(\frac{1}{2}$，$8]$，则 $f(2^x)$ 的定义域是____．

18.（2020•仙游县校级月考）已知函数 $y=f(x-1)$ 的定义域为 $[0$，$2]$，则 $f(ax)+f(\frac{x}{a})$，$(a\geqslant 1)$ 的定义域是____．

19.（2019•禅城区校级月考）函数 $f(x)=\sqrt{(1-a^2)x^2+3(1-a)x+6}$，

（1）若 $f(x)$ 的定义域为 $[-2$，$1]$，求实数 a 的值．

（2）若 $f(x)$ 的定义域为 R，求实数 a 的取值范围．

20.（2020•吉林校级月考）设函数 $f(x)=lg(x^2-1)$ 的定义域为 A，$g(x)=\sqrt{\frac{x-m-1}{2m-x}}(m<1)$ 的定义域为 B．若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围．

21.（2019•桂阳县校级期中）已知函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)=(\frac{1}{2})^x$ 互为反函数，

求：（1）函数 $f(2x-x^2)$ 的函数解析式及定义域．（2）当 $x\in[1$，$2)$ 时，函数 $f(2x-x^2)$ 的值域．

22.（1）若函数 $f(x)=\sqrt{(a^2-1)x^2+(a-1)x+\frac{2}{a+1}}$ 的定义域为 R，求实数 a 的取值范围；

（2）已知 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1)$，求 $f(x+1)$ 的定义域；

（3）已知 $f(x+1)$ 的定义域是 $[-2$，$3]$，求 $f(2-x)$ 的定义域．

23．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $x\in[-\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}]$，求 $g(x)=f(ax)+f(\frac{x}{a})(a>0)$ 的定义域．

24.（2019•浏阳市校级期中）设 $f(x)=lg(ax^2-2x+a)$，

（1）若 $f(x)$ 的定义域为 R，求实数 a 的取值范围．

（2）若 $f(x)$ 的值域为 R，求实数 a 的取值范围．

25.（2019•石花县校级期末）已知函数 $f(x)=\sqrt{(1-a^2)x^2+3(1-a)x+6}$．

（1）若 $f(x)$ 的定义域为 R，求实数 a 的取值范围；

（2）若 $f(x)$ 的值域为 $[0$，$+\infty)$，求实数 a 的取值范围．

第二讲函数解析式

类型一 待定系数法求函数解析式

已知函数解析式的类型时，可用待定系数法求其函数解析式.

例 11.求函数的解析式

(1)若一次函数 $f(x)$ 满足 $f[f(x)]=9x+1$,求 $f(x)$ 的函数解析式;

(2)已知 $f(x)$ 是二次函数，且 $f(0)=2, f(x+1)-f(x)=x-1$，求 $f(x)$；

解析：(1)令 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$, 则 $f[f(x)]=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b=9x+1$; 解得 $\begin{cases}a=3\\ b=\dfrac{1}{4}\end{cases}$ 或

$\begin{cases}a=-3\\ b=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 即 $f(x)=3x+\dfrac{1}{4}$ 或 $f(x)=-3x-\dfrac{1}{2}$；

(2) 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$, 由 $f(0)=2$ 得 $c=2$. 由 $f(x+1)-f(x)=x-1$, 得恒等式 $2ax+a+b=x-1$,得 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{3}{2}$, 函数的解析式为 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+2$.

注意 解析式类型已知的，一般用待定系数法，对于二次函数问题要注意对一般式 $y=ax^2+bx+c$, 顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 和两点式 $y=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ 的选择.

类型二 换元法求函数解析式

已知复合函数 $f[g(x)]$ 的表达式时，可用换元法，此时要注意“元”的取值范围.

例 12.(1)若函数 $f(x)$ 满足 $f(2x-1)=x^2$, 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1-2x)=\dfrac{1-x^2}{x^2}$, 求函数 $f(x)$ 的解析式.

解析：(1)因为 $f(2x-1)=x^2$, 令 $t=2x-1$, 则 $x=\dfrac{t+1}{2}$ 得 $f(t)=\left(\dfrac{t+1}{2}\right)^2 \Rightarrow f(x)=\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$.

(2)令 $t=1-2x(x\neq 0)$, 则 $x=\dfrac{1-t}{2}(t\neq 1)$, 得 $f(t)=\dfrac{1-\left(\dfrac{1-t}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{1-t}{2}\right)^2}=\dfrac{-t^2+2t+3}{(t-1)^2}(t\neq 1)$,

所以 $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{(x-1)^2}(x\neq 1)$.

类型三 配凑法求函数解析式

当出现大基团换元转换繁銷时，可考虑配奏法求解.

例 13.已知 $f(\dfrac{x+1}{x})=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}$，求 $f(x)$；

解析：由题意得 $f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2-\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+1$, 即 $f(x)=x^2-x+1(x\neq 1)$；

类型四 方程组法求函数解析式

若已知成对出现 $f(x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 或 $f(x)$, $f(-x)$, 类型的抽象函数表达式，则常用解方程组法构造另一个方程，消元的方法求出 $f(x)$.

例 14.(1)已知函数 $f(x)$ 满足 $3f(x)+2f(-x)=x+3$, 求 $f(x)$ 的解析式;

(2)已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=5x+9$, 求 $f(x)$ 的解析式;

(3) $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，并且 $f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$，求 $f(x)$、$g(x)$；

解析：(1)因为 $3f(x)+2f(-x)=x+3$ (1); x 用 $-x$ 代替得 $3f(-x)+2f(x)=-x+3$ (2)：由(1)(2)消去 $f(-x)$,得 $f(x)=x+\frac{3}{5}$.

(2)将已知式子中的 x 换成 $\frac{1}{x}$ 得: $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{5}{x}+9$, 消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$, 得 $f(x)=\frac{10}{3x}-\frac{5}{3}x+3$.

(3) 因为函数 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，且 $f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$ ①，所以 $f(-x)+g(-x)=-f(x)+g(x)=\frac{1}{-x-1}$ ②,即 $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$， $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$

注意函数方程的问题，需建立关于 $f(x)$ 的方程组，如本例 4, 若函数方程中同时出现 $f(x), f\left(\frac{1}{x}\right)$, 则一般 x 用 $\frac{1}{x}$ 代之,构造另一个方程.

类型五 迭代法求函数解析式

当出现类似“数列”类型的抽象函数表达式时，可采用递推迭代的方法求出 $f(x)$.

例 15.已知函数 $f(x)$ 的定义域是正整数集 N^*， $f(1)=1$, 且 $f(x+1)=f(x)+5$, 求 $f(x)$ 的函数解析式.

解析：因为 $f(x+1)=f(x)+5$，所以 $f(x+1)-f(x)=5$， $f(x)-f(x-1)=5$， $f(x-1)-f(x-2)=5$， • • • ， $f(3)-f(2)=5$， $f(2)-f(1)=5$, 将上边一系列式子左右两边相加得 $f(x)-f(1)=5(x-1)$， 又 $f(1)=1$, 所以 $f(x)=5x-4$.

类型六 分段函数解析式

分段函数问题往往需要进行分类讨论，根据分段函数在其定义域内每段的解析式不同，然后分别解决，

即分段函数问题，分段解决.

例 16.（2019•广西桂林期中）设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+2, & x\le 0\\ -x^2, x>0\end{cases}$，若 $f(f(a))=2$， 则 $a=$

解析：由题意，当 $x\le 0$ 时，$f(x)=x^2+2x+2$，则 $f(x)\ge 1$，又 $f(f(a))=2$，所以 $f(a)=0$（舍）或 $f(a)=-2$ 得 $f(a)=-a^2=-2$，所以 $a=\pm\sqrt{2}$（舍负），即 $a=\sqrt{2}$.

例 17.已知函数 $f(x)=2x^2-3x-25$， $g(x)=2x-5$. 求:

(1) $f(2), g(2)$；(2) $f(g(2))$， $g(f(2))$；(3) $f(g(x))$，$g(f(x))$.

思路 根据函数符号的意义,可以知道 $f(g(2))$ 表示的是函数 $f(x)$ 在 $x=g(2)$ 处的函数值，其它同理可得.

解析：(1)由题 $f(2)=2\times 2^2-3\times 2-25=-23$； $g(2)=2\times 2-5=-1$；

(2) $f(g(2))=f(-1)=2\times(-1)^2-3\times(-1)-25=-20$； $g(f(2))=g(-23)=2\times(-23)-5=-51$；

(3) $f(g(x))=f(2x-5)=2\times(2x-5)^2-3\times(2x-5)-25=8x^2-46x+40$；

$g(f(x))=g\left(2x^2-3x-25\right)=2\times\left(2x^2-3x-25\right)-5=4x^2-6x-55$.

总结求函数值时，遇到本例题中(2)(3)这种类型的函数称为复合函数，一般有里层函数与外层函数之分,如 $f(g(x))$，里层函数就是 $g(x)$,外层函数就是 $f(x)$,其对应关系可以理解为 $x\xrightarrow{g}g(x)\xrightarrow{f}f(g(x))$，类似的 $g(f(x))$ 为 $x\xrightarrow{g}g(x)\xrightarrow{f}f(g(x))$,类似的函数，需要先求出最里层的函数值，再求出倒数第二层，直到最后求出最终结果.

1．（2019•和平区校级期中）下列四组函数，表示同一函数的是(　　)

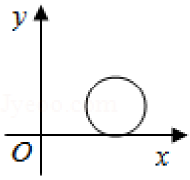
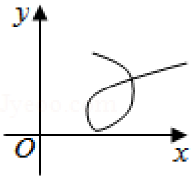
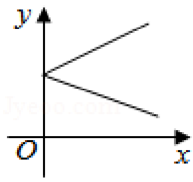
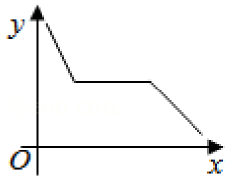
A． $f(x)=\sqrt{x^2}$， $g(x)=x$　　B． $f(x)=x$， $g(x)=\dfrac{x^2}{x}$

C． $f(x)=\sqrt{x^2-4}$， $g(x)=\dfrac{x^2}{x}$　　D． $f(x)=|x+1|$， $g(x)=\begin{cases}x+1, x\geqslant -1\\ -x-1, x<-1\end{cases}$

2．（2019•张家口月考）已知 $f(2x+3)=x^2$，则 $f(x)$(　　)

A． $\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{4}$　　B． $\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{4}$　　C． $4x^2+12x+9$　　D． $4x^2-12x+9$

3．（2019•成都期中）可作为函数 $y=f(x)$ 的图象的是(　　)

A.  B.  C.  D. 

4.（2019•任城区校级期中）设 $f(n)=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\ldots+\dfrac{1}{3n}(n\in N^{*})$，则 $f(n+1)-f(n)=($　　$)$

A. $\dfrac{1}{3n+1}$　　B. $\dfrac{1}{3n+2}$

C. $\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}-\dfrac{2}{3n+3}$　　D. $\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}$

5.（2019•中原区校级月考）已知函数 $f(x+1)=\log_{2}\dfrac{2x}{2-x}$，若 f（a）$=b$，则 $f(4-a)=($　　$)$

A. b　　B. $2-b$　　C. $-b$　　D. $4-b$

6.（2019•海州区校级月考）下列各组函数表示相同函数的是____.

（1）$y=x$ 与 $y=\sqrt{x^{2}}$（2）$y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^{2}$（3）$y=\sqrt[3]{x^{3}}$ 与 $y=\sqrt{x^{2}}$

（4）$y=\sqrt{x}+1$ 与 $y=\sqrt{x+2\sqrt{x}+1}$（5）$y=\sqrt{x^{2}-1}$ 与 $y=\sqrt{x-1}\bullet\sqrt{x+1}$.

7. 若一次函数 $f(x)$ 满足 $f[f(x)]=1+2x$，求函数 $f(x)=$____.

8. 已知 $f(x)=2x+a$， $g(x)=\dfrac{1}{4}(x^{2}+3)$，若 $g[f(x)]=x^{2}+x+1$，则 $a=$____.

9.（2019•盐田区期中）已知 $f(\dfrac{2}{x}+1)=lg\ x$，则 $f(x)=$____.

10.（2019•佛山校级月考）已知 $f(1-\cos x)=\sin^{2}x$，则 $f(x)=$____.

$f(t)=1-(1-t)^{2}=2t-t^{2}$， $t\in[0，2]\therefore f(x)=2x-x^{2}$， $x\in[0，2]$，故答案为： $2x-x^{2}$， $x\in[0，2]$

11.（2019•嘉定区校级期末）已知 $f(\cos x)=\cos 5x$，则 $f(\sin x)=$____.

12.（2019•平邑县校级期中）设 $f(n)=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}(n\in N)$，则 $f(n+1)-f(n)=$____.

13.（2019•高淳县校级期中）已知 f $(\dfrac{1-x}{1+x})=\dfrac{1-x^{2}}{1+x^{2}}$，则 f (x) 的解析式为____.

14.（2019•宁波校级期中）若 $f(1+\dfrac{1}{x})=\dfrac{1}{x^{2}}-1$，则 $f(x)=$____.

15.（2019•怀柔区期末）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^{2}+bx+c,x\leqslant 0\\-2,x>0\end{cases}$，若 $f(-1)=1$，$f(0)=-2$，则函数 $g(x)=f(x)+x$ 的零点个数为____.

16.（2019•广东模拟）设定义域为 R 的函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}1\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)\\2x-3\ \left(x<-1或x>1\right)\end{cases}$ 且 $f[f(x)]=1$，则 x 的值所组成

的集合为____．

17．（2019•泰安期中）判断下列各组函数是否为相等函数：

（1）$f(x)=f(x)=\dfrac{(x+3)(x-5)}{x+3}$，$g(x)=x-5$；

（2）$f(x)=2x+1(x\in Z)$，$g(x)=2x+1(x\in R)$；

（3）$f(x)=|x+1|$，$g(x)=\begin{cases}x+1,x\geqslant -1\\-x-1,x<-1\end{cases}$．

18．（2019秋•安宁区校级期中）已知函数$f(3^x-2)=x-1(x\in[0，2])$，函数$g(x)=f(x-2)+3$．

（1）求函数$y=f(x)$与$y=g(x)$的解析式，并求出$f(x)$，$g(x)$的定义域；

（2）设$h(x)=[g(x)]^2+g(x^2)$，试求函数$y=h(x)$的定义域，及最值．

19．（2019•夏津县月考）求下列函数的解析式．

（1）已知$f(x)=x^2+2x$，求$f(2x+1)$；

（2）已知$f(\sqrt{x}-1)=x+2\sqrt{x}$，求$f(x)$；

（3）已知$f(x)-2f(\dfrac{1}{x})=3x+2$，求$f(x)$．

20．（2019•龙凤区校级期中）已知函数$f(x)=x^2-1,g(x)=\begin{cases}x-1,x>0\\2-x,x<0\end{cases}$

（1）求$f(g$（2））、$g(f$（2））、$g(g(g(-2)))$的值

（2）求$f(g(x))$、$g(f(x))$的解析式．

21．（2020•呼和浩特校级月考）若$3f(x-1)+2f(1-x)=2x$，求$f(x)$．

22．（2019•潍坊校级期中）已知$f(x)$为定义在$[-1，1]$上的奇函数，当$x\in[-1，0]$时，函数解析式为

$f(x)=\dfrac{1}{4^x}-\dfrac{b}{2^x}(b\in R)$．

（1）求b的值，并求出$f(x)$在$[0，1]$上的解析式．

（2）求$f(x)$在$[-1，1]$上的值域．

23．（2019•通州区校级期中）已知函数$f(x)=\begin{cases}-x+2(x>1)\\x^2(-1\leqslant x\leqslant 1)\\x+2(x<-1)\end{cases}$．

（1）求$f(f(\dfrac{5}{2}))$的值；

（2）画出函数的图象，并根据图象写出函数的值域和单调区间；

（3）若方程 $f(x)=m$ 有四个根，求实数 m 的取值范围，并求出这四个根的和.

第三讲 函数值域

由函数的定义知，自变量 x 在对应法则 f 下取值的集合叫做函数的值域.

类型一 函数值域的常规求法

(1)与二次函数有关的函数，可用配方法（注意定义域);

(2)形如 $y=ax+b\pm\sqrt{cx+d}$ 的函数,可用换元法.即设 $t=\sqrt{cx+d}$,转化成二次函数再求值域(注意 $t\geq 0$;

(3)形如 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0)$ 的函数可借助反比例函数求其值域，若用变量分离法求值域，这种函数的值域为 $\left\{y|\ y\neq\dfrac{a}{c}\right\}$;

(4)形如 $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx+p}$ $(a$ 、m 中至少有一个不为零$)$ 的函数求值域，可用判别式求值域，也可以分离常数后换元.

例 18.求下列函数的值域：

（1） $y=\sqrt{x}+1$；（2） $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$；（3） $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；（4） $y=\sqrt{5+4x-x^2}$.

解析：(1)由 $\sqrt{x}\geq 0\Rightarrow\sqrt{x}+1\geq 1$，即所求函数的值域为 $[1,+\infty)$；

(2) 由 $y=\dfrac{2x+1}{x-3}=\dfrac{2x-6+7}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+7}{x-3}=2+\dfrac{7}{x-3}$, 因为 $\dfrac{7}{x-3}\neq 0$, 所以 $y\neq 2$, 即函数的值域为 $\{y|\ y\neq 2\}$；

(3) 由 $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=-1+\dfrac{2}{1+x^2}$, 所以函数的定义域为 $R, x^2+1\geq 1\Rightarrow 0<\dfrac{2}{1+x^2}\leq 2$, 即 $-1<-1+\dfrac{2}{1+x^2}\leq 1$,

所以 $y\in(-1,1]$, 即函数的值域为 $(-1,1]$；

(4)由 $y=\sqrt{5+4x-x^2}=\sqrt{-(x-2)^2+9}$, 得 $0\leq-(x-2)^2+9\leq 9$,所以所求函数的值域为[0,3].

例 19.（1）已知函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 $\dfrac{m}{M}$ 的值为（）

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：法一 函数的定义域为 $[-3,1]$. 又 $y^2=4+2\sqrt{(1-x)(x+3)}=4+2\sqrt{-x^2-2x+3}=4+\ 2\sqrt{4-(x+1)^2}$. 而 $0\le\sqrt{4-(x+1)^2}\le 2$, 所以 $4\le y^2\le 8$. 又 $y>0$, 得 $2\le y\le 2\sqrt{2}$. 即 $M=2\sqrt{2}, m=2$, 即 $\frac{m}{M}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故选 C.

法二（换元法）令 $\sqrt{1-x}=2\cos\alpha, \sqrt{x+3}=2\sin\alpha, \left(0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $y=2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $M=2\sqrt{2}, m=2$.

（2）求函数 $f(x)=\sqrt{b-x}+\sqrt{x-a}$ （$x\in[a,b]$，$a<b$）的值域.

解析：法一首先当 $x\in[a,b]$ 时, $f(x)\ge 0$; 其次 $f(x)$ 是函数 $f_1(x)=\sqrt{b-x}$ 与 $f_2(x)=\sqrt{x-a}$ 的和；最后 $f^2(x)=b-a+2\sqrt{(b-x)(x-a)}=b-a+2\sqrt{-x^2+(a+b)x-ab}$, 可见函数 $f(x)$ 满足了采用“平方开方法"的三个特征,于是对 $f(x)$ 平方开方得: $f(x)=\sqrt{b-a+2\sqrt{-x^2+(a+b)x-ab}}$ $(x\in[a,b])$, 这里函数 $g(x)=2\sqrt{-x^2+(a+b)x-ab}$ $(x\in[a,b])$, 对 $g(x)$ 根号下面的二次函数采用“配方法”,即可求得 $g(x)$ 的值域为 $[0,b-a]$, 于是 $f(x)$ 的值域为 $[\sqrt{b-a},\sqrt{2(b-a)}]$.

法二此题可以考虑三角换元，利用平方和为常数,由于 $(\sqrt{b-x})^2+(\sqrt{x-a})^2=b-a$,故令 $\sqrt{b-x}=$,

$\sqrt{b-a}\cos\alpha\sqrt{x-a}=\sqrt{b-a}\sin\alpha\left(0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)=\sqrt{2(b-a)}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\in[\sqrt{b-a},\sqrt{2(b-a)}]$.

(3)设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & |x|\ge 1\\ x, & |x|<1\end{cases}$, $g(x)$ 是二次函数，若 $f[g(x)]$ 的值域是 $[0,+\infty)$, 则 $g(x)$ 的值域是

A. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$

C. $[0,\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

解析：要使 $f[g(x)]$ 的值域是 $[0,+\infty)$, 则 $g(x)$ 可取 $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$. 又 $g(x)$ 是二次函数,定义域连续, 故 $g(x)$ 不可能同时取 $(-\infty,-1]$ 和 $[0,+\infty)$, 结合选项只能选 C 符合题意，故选 C.

总结函数的值域问题是每年高考文考内容，而且既有常规题型，也有创新题.解答这类问题，既要熟练掌握求函数值域的基本方法，更要根据具体问题情景，灵活地处理.如本例（3）中，其背景函数属常规函数（分段函数、二次函数、复合函数）,但给出 $f[g(x)]$ 的值域，要求 $g(x)$ 的值域，就在常规题型基础上有所创新，解答这类问题，应利用基本方法、基本知识来分析解决问题.

例 20.求函数的值域 $y=\dfrac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$

解析：因为 $x^2+x+1>0$ 恒成立，所以函数的定义域为 R，由 $y=\dfrac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$ 得 $(y-2)x^2+(y+1)x+y-2=0$.

① 当 $y-2=0$ 即 $y=2$ 时，$3x+0=0, x=0\in R$; ② 当 $y-2\neq 0$ 即 $y\neq 2$ 时，因为 $x\in R$ 时，方程 $(y-2)x^2+(y+1)x+y-2=0$ 恒有实根．所以 $\Delta=(y+1)^2-4\times(y-2)^2\geq 0$，所以 $1\leq y\leq 5$ 且 $y\neq 2$，所以原函数的值域为[1,5].

例 21.求函数 $y=\dfrac{\cos x}{\sin x-3}$ 的值域。

解析：由原函数式可得 $y\sin x-\cos x=3y$，可化为 $\sqrt{y^2+1}\cdot\sin(x+\beta)=3y$，即 $\sin(x+\beta)=\dfrac{3y}{\sqrt{y^2+1}}$．因为又 $x\in R$，所以 $\sin(x+\beta)\in[-1,1]$，即 $-1\leq\dfrac{3y}{\sqrt{y^2+1}}\leq 1$，解得 $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\leq y\leq\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，故函数的值域为 $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$.

类型二 函数值域的单调性求法

适用类型：一般能用于求复合函数的值域或最值.(原理：同增异减）

例 22.求函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(4x-x^2\right)$ 的值域.

解析：由于函数本身是由一个对数函数（外层函数）和二次函数（内层函数）复合而成，故可令 $f(x)=-x^2+4x(f(x)\geq 0)$，配方得 $f(x)=-(x-2)^2+4\Rightarrow f(x)\in(0,4)$ 由复合函数的单调性（同增异减）知 $y\in[-2,+\infty)$.

例 23.求函数 $y=2^{x-5}+\log_3\sqrt{x-1}(2\leq x\leq 10)$ 的值域

解析：令 $y_1=2^{x-5}$，$y_2=\log_3\sqrt{x-1}$，则 y_1，y_2 在[2,10]上都是增函数；所以 $y=y_1+y_2$ 在[2,10]上是

增函数.当 $x=2$ 时, $y_{\min}=2^{-3}+\log_3 1=\frac{1}{8}$, 当 $x=10$ 时, $y_{\max}=2^5+\log_3\sqrt{9}=33$,故所求函数的值域为 $\left[\frac{1}{8},33\right]$.

例 24.求函数 y= $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ 的值域。

解析：原函数可化为 $y=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$, 令 $y_1=\sqrt{x+1}$, $y_2=\sqrt{x-1}$, 显然 y_1, y_2 在 $[1,+\infty)$ 上为无上界的增函数,所以 $y=y_1+y_2$ 在 $[1,+\infty)$ 上也为无上界的增函数,所以当 $x=1$ 时, $y=y_1+y_2$ 有最小值 $\sqrt{2}$, 原函数有最大值 $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, 显然 $y>0$, 故原丞数的值域为 $(0,\sqrt{2}]$.

类型三 函数值域的换元求法

通过简单的换元把一个函数变为简单函数，其题型特征是函数解析式含有根式或三角函数公式模型，换元法是数学方法中几种最主要方法之一，在求函数的值域中同样发挥作用.

适用类型：无理函数、三角函数（用三角代换）等.

例 25.求函数 $y=x+\sqrt{x-1}$ 的值域.(注:此题可利用函数单调性直接求函数的值域）

解析：令 $\sqrt{x-1}=t(t\geq 0)$, 则 $x=t^2+1$, $y=t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, 又 $t\geq 0$, 由二次函数的性质可知，当 $t=0$ 时, $y_{\min}=1$, 当 $t\to+\infty$ 时, $y\to+\infty$, 故函数的值域为 $[1,+\infty)$.

例 26.求函数 $y=x+2+\sqrt{1-(x+1)^2}$ 的值域.

解析：因 $1-(x+1)^2\geq 0$, 即 $(x+1)^2\leq 1$, 故令 $x+1=\cos\alpha$, $\alpha\in[0,\pi]$, 所以 $y=\cos\alpha+1+\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\cos\alpha+\sin\alpha+1=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+1$, 因为 $0\leq\alpha\leq\pi$, 得 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\leq 1$, 即 $0\leq\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+1\leq 1+\sqrt{2}$ 故所求函数的值域为 $[0,1+\sqrt{2}]$.

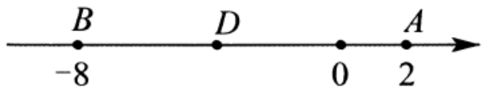
类型四 函数值域数形结合求法

其题型是函数解析式具有明显的某种几何意义，如两点的距离公式直线斜率等等，这类题目若运用数形结合法，往往会更加简单，一目了然，赏心悦目.

适用类型：函数本身可和其几何意义相联系的函数类型.

例 27.求函数 $y=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+8)^2}$ 的值域.

解析：原函数可化简得 $y=|x-2|+|x+8|$,此式可以看成数轴上,点 $P(x,0)$ 到定点 $A(2,0)$, $B(-8,0)$ 两点的距离之和，由图 3-3-1 可知：当,点 P 在线段 AB 上时, $y=|x-2|+|x+8|=|AB|=10$，当点 P 在线段 AB 的延长线或反向延长线上时， $y=|x-2|+|x+8|>|AB|=10$, 故所求函数的值域为 $[10,+\infty)$.



例 28.求函数 $y=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2+4x+5}$ 的值域.

解析：原函数可变升为 $y=\sqrt{(x-3)^2+(0-2)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(0+1)^2}$, 此式可看成 x 轴上的点 $P(x,0)$ 到两定点 $A(3,2),B(-2,-1)$ 的距离之和，由图 3－3－2 可知当点 P 为线段与 x 轴的交,点时, $y_{\min}=|AB|=\sqrt{(3+2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{34}$ 故所求函数的值域为 $[\sqrt{34},+\infty)$.

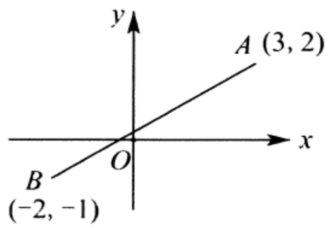


图 3-3-2

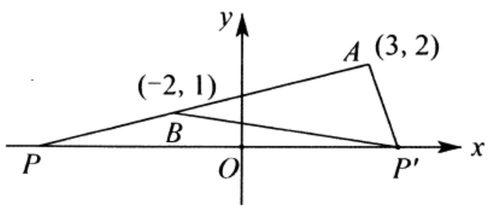


图 3-3-3

例 28.求函数 $y=\sqrt{x^2-6x+13}-\sqrt{x^2+4x+5}$ 的值域.

解析：将函数变形为 $y=\sqrt{(x-3)^2+(0-2)^2}-\sqrt{(x+2)^2+(0-1)^2}$, 此式可看成定点 $A(3,2)$ 到点 $P(x,0)$ 的距离与定点 $B(-2,1)$ 到,点 $P(x,0)$ 的距离之差.即 $y=|AP|-|BP|$.

由图 3-3-3 可知:(1)当,点 P 在 x 轴上且不是直线 AB 与 x 轴的交点时,如点 P', 则构成 $\Delta ABP'$, 根据三角形两边之差小于第三边,有 $\left||AP'|-|BP'|\right|<|AB|=\sqrt{(3+2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{26}$,即 $-\sqrt{26}<y<\sqrt{26}$.

(2)当点 P 恰好为直线 AB 与 x 轴的交点时,有 $\left||AP|-|BP|\right|=|AB|=\sqrt{26}$,综上所述，可知函数的值域为: $(-\sqrt{26},\sqrt{26}]$.

注意：由例 26，27 可知，求两距离之和时，要将函数式变形，使 A,B 两点在 x 轴的两侧，而求两距离之差时，则要使两点 A, B 在 x 轴的同侧.

例如例 26 的 A, B 两点坐标分别为: $(3,2)$, $(-2,-1)$, 在 x 轴的同侧;

例 27 的 A, B 两点坐标分别为: $(3,2)$, $(-2,1)$, 在 x 轴的同侧.

例 30 求函数 $y=\dfrac{3-\sin x}{2-\cos x}$ 的值域.

解析: 可联想直线中已知两,点求直线的斜率的公式 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, 将原函数视为定点(2,3)到动点 $(\cos x,\sin x)$ 的斜率，又知动点 $(\cos x,\sin x)$ 满足单位圆的方程，从而问题就转化为求,点(2,3)到单位圆连线的斜率问题，作出图形观察易得的最值在直线和圆上点的连线和圆相切时取得,从而解得: $y\in\left[\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3},\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}\right]$.

类型五 复合函数值域不变性（保值性）

形如(或化为) $f[g(x)]$ 的函数的值域，抓住最关键一点就是“内值外定”就是内函数看值域是否满足外函数定义域，如果内函数值域完全填满外函数定义域，那么外函数的值域即为整个函数的值域，我们将这个原理叫做复合函数“保值性”,这个问题我们在《秒 2》中关于同构式性质中已经阐述。

例 31.已知定义在 R 上的函数 $f(x)$的值域为[－2，3]，则函数 $f(x－2)$的值域为（）

A．[－4，1]B．[0，5]C.[－4，0]∪[1，5]D．[－2，3]

解析：因为函数 $y=f(x-2)$ 的图像是由函数 $y=f(x)$ 的图像平移得到，所以函数 $y=f(x)$ 的值域与函数 $f(x-2)$ 的值域相同,即为 $[-2,3]$, 故选 D.

例 32. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 值域为 $[1,2]$, 则函数 $f(x+2)$ 的定义域和值域分别是

解析：函数 $f(x+2)$ 是由函数 $f(x)$ 向左平移 2 个单位得到,因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 所以函数 $f(x+2)$ 的定义域为 $[-2,-1]$, 函数图像进行左右平移值域不变，故函数 $f(x+2)$ 的值域为[1,2].故答案为 $[-2,-1],[0,1]$.

例 33. (2014 ・重庆)函数 $f(x)=\log_2\sqrt{x}\cdot\log_{\sqrt{2}}(2x)$ 的最小值为

解析：由

$$f(x)=\log_2\sqrt{x}\cdot\log_{\sqrt{2}}(2x)=\frac{1}{2}\log_2 x\cdot 2\log_2(2x)=\log_2 x\cdot\left(1+\log_2 x\right)=\left(\log_2 x\right)^2+\log_2 x=$$

$\left(\log_2 x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$，所以当 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时,函数 $f(x)$ 取得最小值 $-\dfrac{1}{4}$.故答案为 $-\dfrac{1}{4}$.

例 34.已知函数 $y=\sqrt{kx^2+4kx+3}$ 的值域为 $[0,+\infty)$, 则 k 的取值范围是

解析：因为 $y=kx^2+4kx+3$ 的值域包含 $[0,+\infty)$, 所以 $k>0$, 且 $\Delta=16k^2-12k\geq 0$, 解得 $k\geq\frac{4}{3}$. 故答案为 $k\geq\frac{4}{3}$.

例 35.已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-2ax+3\right)$

(1)若函数 $f(x)$ 的定义域为 R ,求实数 a 的取值范围;

(2)若函数 $f(x)$ 的值域为 R ,求实数 a 的取值范围.

解析：(1)因为函数 $f(x)$ 的定义域为 R, 所以 $x^2-2ax+3>0$, 即 $\Delta=4a^2-12<0$, 解得 $-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$. 故实数 a 的取值范围为 $-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$;

(2)因为函数 $f(x)$ 的值域为 R, 所以二次函数 $y=x^2-2ax+3$ 的图象不能在 x 轴上方，一元二次方程 $x^2-2ax+3=0$ 有实数根,则 $\Delta=4a^2-12\geq 0$, 解得 $a\leq-\sqrt{3}$ 或 $a\geq\sqrt{3}$,实数 a 的取值范围为 $a\leq-\sqrt{3}$ 或 $a\geq\sqrt{3}$

类型六 值域与双变量函数不等式问题（包裹性定理）

定理一若 $y=f(x)$ 满足 $\forall x_1,x_2\in D,\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<m$ 恒成立,则在区间 $D\perp f(x)_{\max}-f(x)_{\min}<m$ 如图 $3-3-4$ 所示，令 $AB=m$, 则 $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<m$ 恒成立.

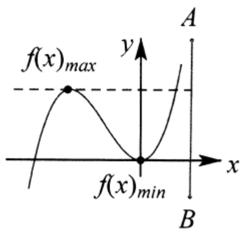


图 3-3-4

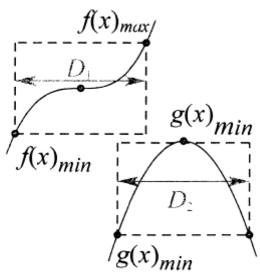


图 3-3-5

定理二若 $y=f(x),y=g(x)$ 满足 $\forall x_1\in D_1,x_2\in D_2,f\left(x_1\right)>g\left(x_2\right)$ 恒成立,则在各自区间上 $f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$; 如图 $3-3-5$ 所示, $f(x)$ 的区域始终在 $g(x)$ 区域上方才满足条件.

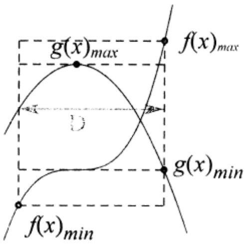


图 3-3-6

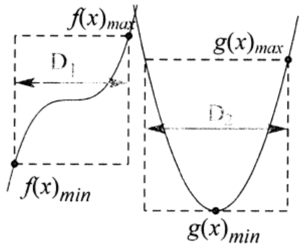


图 3-3-7

定理三 (包装性定理）若 $y=f(x), y=g(x)$ 满足若 $\forall x_1\in D$, 总 $\exists x_0\in D$, 使得 $f\left(x_0\right)=g\left(x_1\right)$ 成立,

则在区间 $D\begin{cases}f(x)_{\min}<g(x)_{\min}\\ f(x)_{\max}>g(x)_{\max}\end{cases}$; 如图 $3-3-6$, $y=f(x)$ 所在区域能包含 $y=g(x)$ 所在区域时,满足条件.

定理四 若 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 满足 $\forall x_1\in D_1$, 总 $\exists x_2\in D_2$ 使得 $f\left(x_1\right)>g\left(x_2\right)$ 能成立,则在区间 D 上 $f(x)_{\min}>g(x)_{\min}$; 如图 $3-3-7$, $y=f(x)$ 所在区域最小值大于 $y=g(x)$ 所在区域最小值时,满足条件.

注意 包裹性定理的关键在于区别符号 $\forall$ 与 $\exists$,还要看是否有两个区间与 $x_1\in D_1, x_2\in D_2$.

例 36.已知函数 $f(x)=e^x-1$，$g(x)=-x^2+4x-3$，若有 $f(a)=g(b)$，则 b 的取值范围为( )

A．$[2-\sqrt{2}，2+\sqrt{2}]$　　B．$(2-\sqrt{2}，2+\sqrt{2})$　　C．[1，3]　　D．(1，3)

解析： 由题可知 $f(x)=e^x-1>-1, g(x)=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1\le 1$, 若有 $f(a)=g(b)$, 则 $g(b)\in(-1,1]$,即 $-b^2+4b-3>-1$,解得 $2-\sqrt{2}<b<2+\sqrt{2}$, 故选 B

例 37.已知 $f(x)=\lg\left(x^2+3x+1\right), g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-m$, 若对任意 $x_1\in[0,3]$, 存在 $x_2\in[1,2]$,

使 $f\left(x_1\right)>g\left(x_2\right)$，则实数 m 的取值范围是

解析：问题等价于 $f(x)_{\min}>g(x)_{\min}$， $f(x)$ 为[0,3]上单调递增， 则 $f(x)_{\min}=f(0)=0$, 因为 $g(x)$ 为减函数,所以 $g(x)_{\min}=g(2)=\frac{1}{4}-m$, 由 $0>\frac{1}{4}-m$, 解得 $m>\frac{1}{4}$. 故 m 的取值范围为 $m>\frac{1}{4}$.

例 38.（2019•明山区校级期末）已知 $f(2^x)=x^2-2x+3$.

（1）求 $f(x)$ 的解析式;

（2）$g(x)=\dfrac{x^2+(a-2)x+5-a}{x-1}$，若对任意 $x_1\in[2，4]$，总存在 $x_2\in[2，4]$，使 $g(x_1)=f(x_2)$ 成立，求 a

取值范围.

解析：(1) 令 $2^x=t$, 得到 $x=\log_2 t$, 即 $f(t)=\left(\log_2 t\right)^2-2\log_2 t+3$, $f(x)=\left(\log_2 x\right)^2-2\log_2 x+3$；

(2) 令 $x-1=t$, 则 $y=\dfrac{t^2+at+4}{t}=t+\dfrac{4}{t}+a$, 在 [2,4] 内任取 t_1,t_2, 令 $\Delta t=t_2-t_1>0$, 则 $\Delta y=\left(t_2-t_1\right)\left(1-\dfrac{4}{t_1t_2}\right)>0$, 得到 $y=t+\dfrac{4}{t}+a$ 在[2,4]内单调递增，所以 $g(x)$ 值域为 $[4+a,5+a]$, 当 $x\in[2,4]$ 时, $\log_2 x\in[1,2]$, $f(x)\in[2,3]$, 因为 $g(x)$ 的值域是 $f(x)$ 值域的子集，所以 $\begin{cases}a+5\le 3\\ a+4\ge 2\end{cases}$, 解得 $a=-2$.

1．(2019•秦州区校级月考）若函数 $y=f(x)$ 的值域是[1，3]，则函数 $F(x)=1-f(x+3)$ 的值域是(　　)

A．$[-8，-3]$　　B．$[-5，-1]$　　C．$[-2，0]$　　D．$[1，3]$

2．(2019 秋运城期中）函数 $f(x)=-9^{-x}+(\frac{1}{3})^{x-1}+\frac{3}{4}$ 在 $[-1，+\infty)$ 上的值域为(　　)

A．$(\frac{3}{4},3)$　　B．$[-\frac{3}{4},3]$　　C．$[\frac{3}{4},3]$　　D．$(-\infty，3]$

3．(2019•东宝区校级期中）设函数 $f\left(x\right)=\dfrac{a^x}{a^x+1}(a>0且a\ne 1)$，$[m]$ 表示不超过实数 m 的最大整数，则函数 $[f(x)-\frac{1}{2}]+[f(-x)+\frac{1}{2}]$ 的值域是(　　)

A．$\{0，1，2\}$　　B．$\{-1，0\}$　　C．$\{-1，0，1\}$　　D．$\{0，1\}$

4．(2019•昌江区校级期中）函数 $f(x)=x^2+|x-2|-1$ 的值域是(　　)

A．$[\frac{3}{4},+\infty)$　　B．$(\frac{3}{4},+\infty)$　　C．$[-\frac{13}{4},+\infty)$　　D．$[3，+\infty)$

5．(2019•昌江区校级期中）已知 $f(\sqrt{x-3})=x+\sqrt{x-3}+1$，则函数 $f(x)$ 的值域为(　　)

A．$[0，+\infty)$　　B．$[4，+\infty)$　　C．$[\frac{15}{4},+\infty)$　　D．$[\frac{15}{4},4]$

6．(2019•黄岛区期中）$\forall x\in R$，用函数 $M(x)$ 表示函数 $f(x)=x$，$g(x)=x^2$ 中较大者，记为 $M(x)=max\{f(x)$，$g(x)\}$，则 $M(x)$ 的值域为(　　)

A．$(1,+\infty)$　　B．$(0,+\infty)$　　C．$[1，+\infty)$　　D．$[0，+\infty)$

8．(2019•迎泽区校级月考）函数 $f(x)=x-\sqrt{1-2x}$ 的值域为(　　)

A．$(0,\frac{1}{2})$　　B．$(0，\frac{1}{2}]$　　C．$(-\infty，\frac{1}{2}]$　　D．$(-\infty,\frac{1}{2})$

9．（2019•尧都区校级月考）已知实数x，y满足$y=\sqrt{1-x^2}$，则$x-y$的取值范围为$($　　$)$

A．$[-1$，$1]$　　B．$[-1$，$\sqrt{2}]$　　C．$[-\sqrt{2}$，$1]$　　D．$[-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}]$

10．（2019•重庆月考）已知函数$f(x)=\sqrt{12-x}-\sqrt{x-3}$，则函数$f(x)$的值域为$($　　$)$

A．$[-3$，$0]$　　B．$[0$，$3]$　　C．$[-3$，$3]$　　D．$[3$，$12]$

11．（2019•怀化三模）已知函数$f(x)=\dfrac{1}{x}(1\leqslant x\leqslant 2)$，则函数$g(x)=2f(x)+f(x^2)$的值域为$($　　$)$

A．$[3$，$2+2\sqrt{2}]$　　B．$[\dfrac{5}{4}$，$3]$　　C．$[\dfrac{9}{16}$，$3]$　　D．$[\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}$，$3]$

12．（2019•洛阳期末）函数$y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$的值域为$($　　$)$

A．$[1$，$\sqrt{2}]$　　B．$[1$，$2]$　　C．$[\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$，$2]$　　D．$[\sqrt{2}$，$2]$

13．（2019•桥东区校级月考）函数$f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$的值域为$($　　$)$

A．$(-1,1)$　　B．$(-2,2)$　　C．$(-3,3)$　　D．$(-4,4)$

14．（2019•惠农区校级期中）已知函数$y=\sin^2 x-2\sin x+3$，$x\in R$，则函数的值域为$($　　$)$

A．$[2$，$3]$　　B．$[2$，$4]$　　C．$[2$，$5]$　　D．$[2$，$6]$

15．（2019•城关区校级月考）高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号，用其名字命名的“高斯函数”为：设$x\in R$，用$[x]$表示不超过x的最大整数，则$y=[x]$称为高斯函数，例如：$[-2.1]=-3$，$[3.1]=3$，已知函数$f(x)=\dfrac{2^{x+1}}{1+2^x}-\dfrac{1}{3}$，则函数$y=[f(x)]$的值域是$($　　$)$

A．$\{0$，$1\}$　　B．$\{-1$，$1\}$　　C．$\{-1$，$0\}$　　D．$\{-1$，0，$1\}$

16．（2019•浉河区校级月考）已知函数$f(x)=\begin{cases}2^x,x<0\\2(x-1)^2+m,x\geqslant 0\end{cases}$，的值域为$[-2$，$+\infty)$，则实数$m$的取值应为$($　　$)$

A．$m\geqslant -2$　　B．$m\leqslant -2$　　C．$m=-2$　　D．$m=2$

17．（2019•宁乡市模拟）函数$f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{(x-4)^2+9}$的最小值是$($　　$)$

A．$1+3\sqrt{2}$　　B．$3+\sqrt{10}$　　C．4　　D．5

18．（2019•西湖区校级模拟）给出定义：若$m-\dfrac{1}{2}<x\leqslant m+\dfrac{1}{2}$（其中$m$为整数），则$m$叫做离实数$x$最近的整数，记作$\{x\}=m$．在此基础上给出下列关于函数$f(x)=|x-\{x\}|$的四个结论：

①函数$y=f(x)$的定义域为R，值域为$[0,\dfrac{1}{2}]$；②函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=\dfrac{k}{2}(k\in Z)$对称；③函

数 $y=f(x)$ 是偶函数；④函数 $y=f(x)$ 在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上是增函数．其中正确结论的个数为(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

19．（2019•西湖区校级模拟）函数 $y=x+\sqrt{x^2-2x+3}$ 的值域为(　　)

A．$[1+\sqrt{2}$，$+\infty)$　　B．$(\sqrt{2}$，$+\infty)$　　C．$[\sqrt{3}$，$+\infty)$　　D．$(1,+\infty)$

20．（2019•西湖区校级模拟）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-(\frac{1}{2})^x, a\leqslant x<0\\ -x^2+2x, 0\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$ 的值域是 $[-8$，$1]$，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty$，$-3]$　　B．$[-3$，$0)$　　C．$[-3$，$-1]$　　D．$\{-3\}$

21．（2019•西湖区校级模拟）函数 $y=\frac{x^2+2x+2}{x+1}$ 的值域是(　　)

A．$\{y\mid y<-2$ 或 $y>2\}$ B．$\{y\mid y\leqslant -2$ 或 $y\geqslant 2\}$ C．$\{y\mid -2\leqslant y\leqslant 2\}$　　D．$\left\{y\mid y\leqslant -2\sqrt{2}或y\geqslant 2\sqrt{2}\right\}$

22．（2020•濂溪区校级月考）设 $f(x)=\frac{\sqrt{x^4-3x^2+9}-\sqrt{x^4-4x^2+9}}{x}(x>0)$，则 $f(x)$ 的值域为(　　)

A．$(0,\sqrt{3}-\sqrt{2}]$　　B．$(\sqrt{3}-\sqrt{2},1)$　　C．$(-1,\sqrt{3}-\sqrt{2})$　　D．$(\sqrt{3}-\sqrt{2},\sqrt{3}+\sqrt{2})$

23．（2019•思南县校级期末）$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ 的最小值是(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

24．（2019•沙坪坝区校级期末）函数 $f(x)=2x-3-\sqrt{-x^2+6x-8}$ 的值域是(　　)

A．$[3-\sqrt{5}$，$5]$　　B．$[1$，$5]$　　C．$[2$，$3+\sqrt{5}]$　　D．$[3-\sqrt{5}$，$3+\sqrt{5}]$

25．（2019•临川区校级月考）已知函数 $f(x)=x^2-4x+10(x\in[m,n])$ 的值域为 $[3m$，$3n]$，则 $2m+n=$____．

26．（2019•鼓楼区校级月考）若函数 $y=\frac{ax+1}{x+2}(x\neq -2)$ 的值域为 $\{y\mid y\neq 2\}$，则实数 a 的值为____．

27．（2019•东湖区校级月考）函数 $f(x)=\frac{x^2+4x+1}{x^2+1}$ 的值域为__．

28．（2019•黄州区校级月考）函数 $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$ 的值域为__．

29．（2019•宁波期末）已知函数 $f(x)=\sqrt{ax^2-x+\frac{a}{16}}$，若 $f(x)$ 的定义域为 R，则实数 a 的取值范围是____；若 $f(x)$ 的值域为 $[0$，$+\infty)$．则实数 a 的取值范围是____．

30．（2019•小店区校级月考）设函数 $y=f(x)$ 定义域为 R，对给定正数 M，定义函数

$f_M(x)=\begin{cases}f(x),f(x)\leqslant M\\M,f(x)>M\end{cases}$ 则称函数 $f_M(x)$ 为 $f(x)$ 的“孪生函数”，若给定函数 $f(x)=\begin{cases}2-x^2,-2\leqslant x\leqslant 0\\2^x-1,x>0\end{cases}$, $M=1$，则 $y=f_M(x)$ 的值域为____.

31.（2019•杨浦区校级期中）函数 $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ 的值域____

32.（2019•西湖区校级模拟）设函数 $f(x)=\log_3\dfrac{x}{3}\bullet\log_3(9x)$，且 $\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 27$，则函数 $f(x)$ 的值域为____.

33.（2019•海曙区校级期末）已知函数 $f(x)=2\sqrt{x+2}-x$，$g(x)=x^2-2mx+5m-2(m\in R)$，对于任意的 $x_1\in[-2，2]$，总存在 $x_2\in[-2，2]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，则实数 m 的取值范围是__.

34.（2019•阿克苏市期末）设函数 $f(x)=2-\sqrt{2x+4}$ 和函数 $g(x)=ax+a-1$，若对任意 $x_1\in[0，+\infty)$ 都有 $x_2\in(-\infty，1]$ 使得 $f(x_1)=g(x_2)$，则实数 a 的取值范围为____.

35.（2019•广陵区校级月考）已知偶函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+b)}{x^2}$ 的定义域为 E，值域为 F.

（1）求实数 b 的值；

（2）若 $E=\{1，2，a\}$，$F=\{0，\dfrac{3}{4}\}$，求实数 a 的值

（3）若 $E=[\dfrac{1}{m},\dfrac{1}{n}]$，$F=[2-3m，2-3n]$，求 m，n 的值.

36.（2019•东海县期中）已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2-2x+2$.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）当 $x\in[m，n]$ 时，$f(x)$ 的取值范围为 $[2m，2n]$，试求实数 m，n 的值.

37.（2019•北镇市校级月考）（1）函数 $f(x)=\log_3(-x^2+6x-8)$ 的定义域为集合 A，求集合 A；

（2）函数 $g(x)=\log_4(2x)\log_{\sqrt{2}}(\dfrac{4}{x})x\in A$，求 $g(x)$ 的值域.

38.（2019•吉林校级期中）求函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+10}+|x-5|$ 的值域.

39.（2019•黄山校级月考）已知 $a>0$，设函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$，$x\in[0，1]$ 函数 $g(x)=ax+5-2a$，$x\in[0，1]$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的值域 M 和函数 $g(x)$ 的值域 N

（Ⅱ）若对于任意 $x_1\in[0，1]$，总存在 $x_2\in[0，1]$，使得 $g(x_2)=f(x_1)$ 成立，求实数 a 的取值范围.

40.（2019•沙坪坝区校级月考）若函数 $f(x)$，$g(x)$ 都在区间 I 上有定义，对任意 $x\in I$，都有 $|f(x)-g(x)|\leqslant 1$ 成立，则称函数 $f(x)$，$g(x)$ 为区间 I 上的“伙伴函数”.

（1）若 $f(x)=lgx$， $g(x)=lg(x+1)$ 为区间 $[m，+\infty)$ 上的“伙伴函数”，求 m 的范围.

（2）判断 $f(x)=4^{x}$， $g(x)=2^{x}-1$ 是否为区间 $(-\infty，0]$ 上的“伙伴函数”？

（3）若 $f(x)=x^{2}+\dfrac{1}{2}$， $g(x)=kx$ 为区间 $[1，2]$ 上的“伙伴函数”，求 k 的取值范围.

41.（综合复习）求下列函数的值域：

（1） $y=3x^{2}-x+2$；　（2） $y=\sqrt{-x^{2}-6x-5}$；　（3） $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$；

（4） $y=x+4\sqrt{1-x}$；　（5） $y=x+\sqrt{1-x^{2}}$；　（6） $y=|x-1|+|x+4|$；

（7） $y=\dfrac{2x^{2}-x+2}{x^{2}+x+1}$；　（8） $y=\dfrac{2x^{2}-x+1}{2x-1}(x>\dfrac{1}{2})$；（9） $y=\dfrac{1-\sin x}{2-\cos x}$

(10) $y=\dfrac{x^{2}-5x+6}{x^{2}+x-6}$；　(11) $y=2x+4\sqrt{1-x}$；　(12) $y=-\dfrac{x}{\sqrt{x^{2}+2x+2}}$

(13) $y=4-\sqrt{3+2x-x^{2}}$；　(14) $y=x-\sqrt{1-2x}$；　(15) $y=\dfrac{2x^{2}+2x+5}{x^{2}+x+1}$.

专题 4 函数基本性质

函数的性质,包含单调性、奇偶性、对称性、周期性，本节我们会重点阐述这些问题的同时，并系统将抽象函数的一些解题方法进行归纳，很多同学总认为函数有了导数的帮助就可以无敌，其实不是函数太需要扎实的基本功，至于秒杀，函数题能秒杀，那么导数题也不远了.

第一讲函数单调性

一 增函数与减函数的概念

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 A, 区间 $D \subseteq A$：

如果对于 D 内的任意两个自变量的值 x_1 、x_2, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$, 那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数.

如果对于 D 内的任意两个自变量的值 x_1 、x_2, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$, 那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数.

1. 属于定义域 A 内某个区间上;

2. 任意两个自变量 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$;

3. 都有 $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$ 或 $f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$;

4. 图象特征:在单调区间上增函数的图象从左向右是上升的，减函数的图象从左向右是下降的.

二 单调性与单调区间

1. 单调区间的定义:如果函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上具有单调性，D 称为函数 $f(x)$ 的单调区间.

2. 函数的单调性是函数在某个区间上的性质.

三 证明函数单调性的步骤

1. 取值:设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 定义域内一个区间上的任意两个量, 且 $x_1 < x_2$;

2. 变形:作差变形（变形方法：因式分解、配方、有理化等）或作商变形;

3. 定号：判断差的正负或商与 1 的大小关系;

4. 得出结论.

四 函数单调性的判断方法

1 定义法:根据增函数、减函数的定义，按照“取值—变形—判断符号—下结论”进行判断.

2 图象法：就是画出函数的图象，根据图象的上升或下降趋势，判断函数的单调性.

3 直接法：就是对我们所熟悉的函数，如一次函数、二次函数、反比例函数等，直接写出它们的单调区间.

4 记住几条常用的结论:

(1)若 $f(x)$ 是增函数,则 $-f(x)$ 为减函数;若 $f(x)$ 是减函数,则 $-f(x)$ 为增函数;

(2)若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为增(或减）函数,则在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公共定义域上 $f(x)+g(x)$ 为增(或减)函数;

(3)若 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 为增函数,则函数 $\sqrt{f(x)}$ 为增函数, $\frac{1}{f(x)}$ 为减函数;　若 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 为减函数,则函数 $\sqrt{f(x)}$ 为减函数, $\frac{1}{f(x)}$ 为增函数.

五 复合函数单调性的判断

讨论复合函数 $y=f[g(x)]$ 的单调性时要注意：既要把握复合过程，又要掌握基本函数的单调性. 一般需要先求定义域，再把复杂的函数正确地分解为两个简单的初等函数的复合，然后分别判断它们的单调性，再用复合法则，复合法则如下:

1. 若 $u=g(x), y=f(u)$ 在所讨论的区间上都是增函数或都是减函数,则 $y=f[g(x)]$ 为增函数;

2. 若 $u=g(x), y=f(u)$ 在所讨论的区间上一个是增函数，另一个是减函数,则 $y=f[g(x)]$ 为减函数.

列表如下:

$u=g(x)$	$y=f(u)$	$y=f[g(x)]$
增	增	增
增	减	减
减	增	减
减	减	增

复合函数单调性可简记为“同增异减”，即内外函数的单性相同时递增;单性相异时递减.

因此判断复合函数的单调性可按下列步骤操作:

1. 将复合函数分解成基本初等函数: $y=f(u)$,　$u=g(x)$;

2. 分别确定各个函数的定义域;

3. 分别确定分解成的两个基本初等函数的单调区间.

注意若两个基本初等函数在对应的区间上的单调性是同增或同减,则 $y=f[g(x)]$ 为增函数;若为一增一减或一减一增，则 $y=f[g(x)]$ 为减函数.

六 利用函数单调性求函数最值

利用函数单调性求函数最值时应先判断函数的单调性，再求最值. 常用到下面的结论:

1. 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上是增函数, 在区间 $[b,c)$ 上是减函数, 则函数 $y=f(x)(x\in a,c)$ 在 $x=b$ 处有最大值 $f(b)$.

2. 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上是减函数，在区间 $[b,c)$ 上是增函数，则函数 $y=f(x)(x\in a,c)$ 在 $x=b$ 处有最小值 $f(b)$.

3. 若函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是严格单调函数, 则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有最大、最小值.

4. 若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是单调递增函数, 则 $y=f(x)$ 的最大值是 $f(b)$, 最小值是 $f(a)$.

5. 若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是单调递减函数, 则 $y=f(x)$ 的最大值是 $f(a)$, 最小值是 $f(b)$.

七 利用函数单调性求参数取值范围

若已知函数的单调性，求参数 a 的取值范围问题，可利用函数单调性，先列出关于参数 a 的不等式, 利用下面的结论求解.

1. 若 $a>f(x)$ 在 $[m,n]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow a>f(x)$ 在 $[m,n]$ 上的最大值.

2. 若 $a<f(x)$ 在 $[m,n]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow a<f(x)$ 在 $[m,n]$ 上的最小值.

实际上将含参数问题转化成为恒成立问题，进而转化为求函数在其定义域上的最大值和最小值问题.

八 基本初等函数的单调性

1. 正比例函数: $y=kx(k\neq 0)$

当 $k>0$ 时, 函数 $y=kx$ 在定义域 R 上是增函数; 当 $k<0$ 时, 函数 $y=kx$ 在定义域 R 上是减函数.

2. 一次函数: $y=kx+b(k\neq 0)$

当 $k>0$ 时, 函数 $y=kx+b$ 在定义域 R 上是增函数; 当 $k<0$ 时, 函数 $y=kx+b$ 在定义域 R 上是减函数.

3. 反比例函数: $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$

当 $k>0$ 时, 函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的单调递减区间是 $(-\infty,0),(0,+\infty)$, 不存在单调增区间; 当 $k<0$ 时, 函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的单调递增区间是 $(-\infty,0),(0,+\infty)$, 不存在单调减区间.

4. 二次函数: $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

若 $a>0$, 在区间 $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$, 函数是减函数; 在区间 $\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$, 函数是增函数：若 $a<0$, 在区间 $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$, 函数是增函数; 在区间 $\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$, 函数是减函数.

例 1．已知：函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性.

（2）试作出 $f(x)$ 的图像.

解析　(1) 设 x_1,x_2 是 R 上的任意实数，且 $x_1<x_2$, 则 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=x_1+\dfrac{1}{x_1}-\left(x_2+\dfrac{1}{x_2}\right)=\left(x_1-x_2\right)+\left(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right)$

$$=\left(x_1-x_2\right)+\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}=\left(x_1-x_2\right)\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right)=\left(x_1-x_2\right)\left(\frac{x_1x_2-1}{x_1x_2}\right)$$

① 当 $x_1<x_2<-1$ 时，因为 $x_1-x_2<0,1<x_1x_2$, 所以 $\dfrac{x_1x_2-1}{x_1x_2}>0$, 故 $\left(x_1-x_2\right)\cdot\left(\dfrac{x_1x_2-1}{x_1x_2}\right)<0$, 即 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<0$, 所以 $x_1<x_2$ 时有 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$, 即 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上是增函数;

② 当 $-1<x_1<x_2<0$ 时，$x_1-x_2<0$, 即 $0<x_1x_2<1$, 因为 $0<x_1x_2<1$, 所以 $\dfrac{x_1x_2-1}{x_1x_2}<0$, 故 $\left(x_1-x_2\right)\cdot\left(\dfrac{x_1x_2-1}{x_1x_2}\right)>0$, 即 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)>0$, 所以 $x_1<x_2$, $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$, 则 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在区 $(-1,0)$ 上是减函数.

同理：函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在区间 (0, 1) 是减函数, 函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 是增函数.

(2) 函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 的图象如图 $4-1-1$:

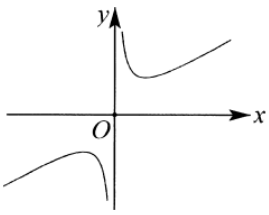


图 4-1-1

例 2. 判断下列函数的单调区间;

(1) $y=x^2-3|x|+2$；(2) $y=|x-1|+\sqrt{(x-2)^2}$

解析 （1）由图象对称性，画出草图如图 4-1-2 所示，所以 $f(x)$在$\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]$上递在$\left[-\dfrac{3}{2},0\right]$上递增，在$\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$上递减，在$\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right]$上递增.

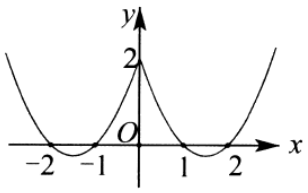


图 4-1-2

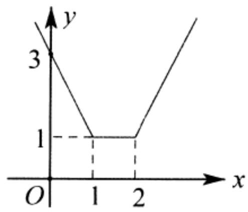


图 4-1-3

(2) 由 $y=|x-1|+|x-2|=\begin{cases}-2x+3,(x<1)\\1,(1\le x\le 2)\\2x-3,(x>2)\end{cases}$，画出图像如图 $4-1-3$，即 $f(x)$ 在$(-\infty,1]$上单调递减，在$[2,+\infty)$ 上单调递增.

例 3. 求下列函数的单调区间：

(1) y=|x+1|；(2) $y=\dfrac{1}{2x-1}$；(3) $y=\dfrac{1}{x^2}$；(4) y=|x²−2x−3|.

解析 (1) 因为 $y=\begin{cases}x+1(x\ge -1)\\-x-1(x<-1)\end{cases}$，画出函数图象如图 4-1-4 所示，所以函数的减区间为$(-\infty,-1]$，函数的增区间为$(-1,+\infty)$；

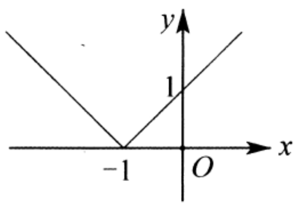


图 4-1-4

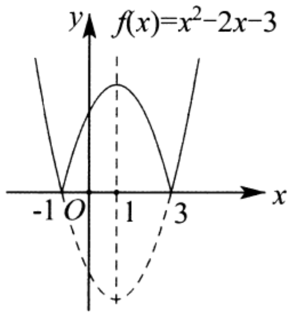


图 4-1-5

(2) 函数定义域为$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，设$u=2x-1,y=\dfrac{1}{u}$其中$u=2x-1$为增函数，$y=\dfrac{1}{u}$在$(-\infty,0)$

与 $(0,+\infty)$ 为减函数, 则 $y=\frac{1}{2x-1}$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上为减函数;

(3) 函数定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, 所以 $y=\frac{1}{x^2}$ 单调增区间为 $(-\infty,0)$, 单调减区间为 $(0,+\infty)$.

(4) 先画出 $y=x^2-2x-3$, 然后把 x 轴下方的部分关于 x 轴对称上去，就得到了所求函数的图象, 如图 4-1-5 所示，所以 $y=\left|x^2-2x-3\right|$ 的单调减区间是 $(-\infty,-1),(1,3)$; 单调增区间是 $(-1,1),(3,+\infty)$.

总结:

(1) 数形结合利用图象判断函数单调区间;

(2) 关于二次函数单调区间问题，单调性变化的点与对称轴相关.

(3) 复合函数的单调性分析：先求函数的定义域; 再将复合函数分解为内、外层函数：利用已知函数的单调性解决. 关注: 内外层函数同向变化?复合函数为增函数; 内外层函数反向变化 $\Rightarrow$ 复合函数为减函数.

例 4. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 R，且对任意的 x、$x^{'}\in R$ 均有 $f(x+x^{'})=f(x)+f(x^{'})$，且对任意的 $x>0$，都有 $f(x)<0, f(3)=-3$.

（1）试说明：函数 $y=f(x)$ 是 R 上的单调递减函数;

（2）试求函数 $y=f(x)$ 在 $[m,n]$（$m,n\in Z$ 且 $mn<0$）上的值域.

解 析 (1) 任取 $x_1,x_2\in R$, 且 $x_1<x_2$, $f(x_2)=f\left[x_1+(x_2-x_1)\right]$, 于是由题设条件 $f\left(x+x^{'}\right)=f(x)+f\left(x^{'}\right)$ 可知 $f(x_2)=f(x_1)+f(x_2-x_1)$. 因为 $x_1<x_2$, 所以 $x_2-x_1>0$, 又止对任意的 $x>0$ 都有 $f(x)<0$, 所以 $f(x_2-x_1)<0$. 即 $f(x_2)=f(x_1)+f(x_2-x_1)<f(x_1)$. 故函数 $y=f(x)$ 是 R 上的单调递减函数.

（2）由于函数 $y=f(x)$ 是 R 上的单调递减函数, 所以 $y=f(x)$ 在 $[m,n]$ 上也为单调递减函数, 即 $y=f(x)$ 在 $[m,n]$ 上的最大值为 $f(m)$, 最小值为 $f(n)$. 由于 $f(n)=f[1+(n-1)]=f(1)+f(n-1)=2f(1)+\quad f(n-2)=\cdots=nf(1)$, 同理 $f(m)=mf(1)$, 由 $f(3)=-3\Rightarrow f(3)=3f(1)=-3.\quad f(1)=-1, f(m)=-m$,

$f(n)=-n$. 因此函数 $y=f(x)$ 在 $[m,n]$ 上的值域为 $[-n,-m]$.

总结: 不知道解析式的函数，我们称为抽样函数. 研究抽象函数的单调性是依据定义和题设来进行论证的.

一般地，在高中数学中，主要有两种类型的抽象函数，一是“ $f(x+y)$ ”型，即给出 $f(x+y)$ 所具有的性质，如本例，二是“ $f(xy)$ ”型. 对于 $f(x+y)$ 型的函数，只需构造 $f\left(x_2\right)=f\left[x_1+\left(x_2-x_1\right)\right]$，再利用题设条件将它用 $f\left(x_1\right)$ 与 $f\left(x_2-x_1\right)$ 表示出来，然后利用题设条件确定 $f\left(x_2-x_1\right)$ 的范围，从而确定 $f\left(x_2\right)$ 与 $f\left(x_1\right)$ 的大小关系；对 $f(xy)$ 型的函数，则只需构造 $f\left(x_2\right)=f\left(x_1\cdot\dfrac{x_2}{x_1}\right)$ 即可.

例 5. 已知函数 $f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上为增函数，$f(2)=1$，且定义域上任意 x、y 都满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$，解不等式：$f(x)+f(x-2)\leqslant 3$.

解析　令 $x=2,y=2$，由题意得 $f(2\times 2)=f(2)+f(2)=2$，所以 $f(4)=2$，再令 $x=4,y=2$，得 $f(4\times 2)=f(4)+f(2)=2+1=3$，所以 $f(8)=3$ 即 $f(x)+f(x-2)\le 3$ 可转化为 $f[x(x-2)]\le f(8)$，可得 $\begin{cases}x(x-2)\le 8\\ x>0\\ x-2>0\end{cases}$，　即 $\begin{cases}-2\le x\le 4\\ x>2\end{cases}$，解得 $2<x\le 4$.

例 6. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 R 的单调增函数.

(1) 比较 $f\left(a^2+2\right)$ 与 $f(2a)$ 的大小

(2) 若 $f\left(a^2\right)>f(a+6)$，求实数 a 的取值范围.

解析　(1) 因为 $a^2+2-2a=(a-1)^2+1>0$，所以 $a^2+2>2a$，由已知，$f(x)$ 是单调增函数，所以 $f\left(a^2+2\right)>f(2a)$

(2) 因为 $f(x)$ 是单调增函数，且 $f\left(a^2\right)>f(a+6)$，所以 $a^2>a+6$，解得 $a>3$ 或 $a<-2$.

例 7. 求下列函数的值域：

$y=\dfrac{2x-1}{x+2}$；1) $x\in[5,10]$；2) $x\in(-3,-2)\cup(-2,1)$；

解析　因为 $y=\dfrac{2(x+2)-5}{x+2}=\dfrac{-5}{x+2}+2$ 可看作是由 $y=\dfrac{-5}{x}$ 左移 2 个单位，再上移 2 个单位得到，画出函数图象，如图 $4-1-6$ 所示：

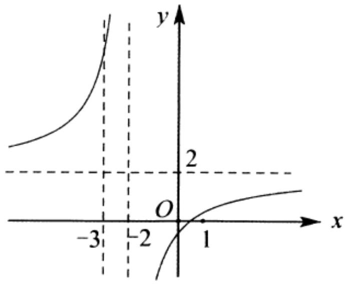


图 4-1-6

①由 $f(x)$ 在[5, 10]上单增， $y\in[f(5),f(10)]$，即 $y\in\left[\frac{9}{7},\frac{19}{12}\right]$；

② $y\in(-\infty,f(1))\cup(f(-3),+\infty)$，即 $y\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup(7,+\infty)$.

例 8. 已知函数 $f(x)=\frac{1+3x}{1-3x}$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $x\in[1,3]$时，求函数 $f(x)$ 的值域.

解析 (1) 由 $f(x)=\frac{1+3x}{1-3x}=-1-\frac{2}{3x-1}$，则 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$ 上单调递伯，在 $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ 上单调递增；

(2) 因为 $[1,3]\subseteq\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$，故函数 $f(x)$ 在[1, 3]上单调递伯，则当 $x=1$ 时， $f(x)$ 有最小值为 $f(1)=-2$；当 $x=3$ 时， $f(x)$ 有最大值 $f(3)=-\frac{5}{4}$；所以 $x\in[1,3]$ 时， $f(x)$ 的值域为 $\left[-2,-\frac{5}{4}\right]$.

例 9：已知函数 $f(x)=\frac{ax+1}{x+2}$ 在区间 $(-2,+\infty)$ 上是增函数，求 a 的取值范围.

解析 任取 $x_1,x_2\in(-2,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$， 则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{ax_1+1}{x_1+2}-\frac{ax_2+1}{x_2+2}=\frac{(x_1-x_2)(2a+1)}{(x_1+2)(x_2+2)}<0$，因为 $-2<x_1<x_2$，且 $f(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x_1-x_2<0,(x_1+2)(x_2+2)>0$，则 $2a-1>0$，即 $a>\frac{1}{2}$.

总结：关于分式函数 $g(x)=\frac{af(x)+b}{cf(x)+d}$，知 $f(x)$ 单调递增，$a>0$， $c>0$)，可以根据糖水不等式秒判断单调性，糖水不等式：$\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}(a>b,m>0)$， $\frac{a+m}{b+m}<\frac{b}{a}(a>b,m>0)$. 已知函数

$g(x)=\dfrac{af(x)+b}{cf(x)+d}=\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{f(x)+\frac{b}{a}}{f(x)+\frac{d}{c}}$，①当$\dfrac{d}{c}>\dfrac{b}{a}$时，$g(x)$在各自区间单调递增；②当$\dfrac{d}{c}<\dfrac{b}{a}$时，$g(x)$在各自区间单调递减. 如例 8 中，$f(x)=-\dfrac{x+\frac{1}{3}}{x-\frac{1}{3}}$，显然分子的$\dfrac{1}{3}>-\dfrac{1}{3}$，但由于提出了负号，故$f(x)$在$\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$

上单调递增；如例 9 中，因为$f(x)=\dfrac{ax+1}{x+2}=a\cdot\dfrac{x+\frac{1}{a}}{x+2}$，故$\dfrac{1}{a}<2$，即$a>\dfrac{1}{2}$时满足条件；当$a<0,\dfrac{1}{a}>2$时也满足条件，但此情况无解.

例 10.（2019•沙坪坝区校级期中）已知函数$f(x)=-a^{2x-1}+5a^{x}-8(a>0$且$a\neq1)$在$[2，+\infty)$上单调递减，则实数$a$的取值范围为(　　)

A. $(0,1)\bigcup[\frac{5}{2},+\infty)$　　B. $[\frac{4}{5},1)\bigcup(1,+\infty)$　　C. $(0,1)\cup(1,\frac{5}{2}]$　　D. $(1,\frac{5}{2}]$

解析　由$f(x)=-\dfrac{1}{a}\cdot a^{2x}+5a^{x}-8$，设$a^{x}=t$，则$y=-\dfrac{1}{a}\cdot t^{2}+5t-8$，①当$a>1$时，$t=a^{x}$在$[2,+\infty)$上单调递增，所以$t\geq a^{2}$. 据题意知$y=-\dfrac{1}{a}\cdot t^{2}+5t-8$在$\left[a^{2},+\infty\right)$上单调递减，所以$a^{2}\geq\dfrac{5a}{2}$，且$a>1$，解得$a\geq\dfrac{5}{2}$；②当$0<a<1$时，$t=a^{x}$在$[2,+\infty)$上单调递减，所以$0<t\leq a^{2}$，据题意知$y=-\dfrac{1}{a}\cdot t^{2}+5t-8$在$\left(0,a^{2}\right]$上单调递增，即$a^{2}\leq\dfrac{5a}{2}$，且$0<a<1$，解得$0<a<1$. 综上，实数$a$的取值范围为$(0,1)\cup\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$，故选 A.

例 11.（2019•香坊区校级期中）已知函数$f(x)=\begin{cases}(2-3a)x+1,x\leqslant 1\\ a^{x},x>1\end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减，则实数$a$的取值范围是(　　)

A. $(\frac{2}{3},1)$　　B. $[\frac{3}{4},1)$　　C. $(\frac{2}{3},\frac{3}{4}]$　　D. $(\frac{2}{3},+\infty)$

解析　由$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减，则$\begin{cases}2-3a<0\\0<a<1\\a\leq 2-3a+1\end{cases}$，解得$\dfrac{2}{3}<a\leq\dfrac{3}{4}$，即实数$a$的取值范围是$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4}\right]$，故选 C.

例 12.（2018•邯郸期末）已知函数$f(x)=\log_{2}(2-ax)$在区间$[0，1]$单调递减，那么实数a的取值范围是( )

A. $(0，1]$　　B. $(1,2)$　　C. $(0,2)$　　D. $(0,+\infty)$

解析 因为对数函数 $y=\log_2 t$ 是定义域内的增函数, 所以要使函数 $f(x)=\log_2(2-ax)$ 在区间[0, 1]上单调递减, 则内层函数 $t=2-ax$ 在区间[0, 1]上单调递减且恒大于 0, 即 $\begin{cases}a>0\\2-a>0\end{cases}$, 解得 $0<a<2$. 即实数 a 的取值范围是 $(0,2)$, 故选 C.

例 13.（2019•重庆月考）若函数 $f(x)=\log_a(x^2-2ax+a^2+4)(a>0$，且 $a\neq1)$ 有最大值，且最大值不小于 -1，则 a 的取值范围为(　　)

A. $(0,\frac{1}{4}]$　　B. $(0,\frac{1}{2}]$　　C. $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$　　D. $(0,\frac{1}{4}]\bigcup(1,+\infty)$

解析 因为 $g(x)=x^2-2ax+a^2+4=(x-a)^2+4$ 有最小值, 函数 $f(x)=\log_a\left(x^2-2ax+a^2+4\right)=\log_a g(x)\ (a>0,a\neq1)$ 有最大值, 且最大值不小于 -1, 则 $0<a<1$, 所以 $f(x)_{\max}=\log_a 4\geq-1$, 即 $\frac{1}{a}\geq4$. 因为 $a>0$, 所以 $0<a\leq\frac{1}{4}$, 故选 A.

例 14.（多选）已知函数 $f(x)=2x$， $g(x)=x^2-ax$，对于不相等的实数 x_1， x_2，设 $m=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$，$n=\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$ 现有如下命题中真命题是(　　)

A. 对于不相等的实数 x_1， x_2，都有 $m>0$

B. 对于任意实数 a 及不相等的实数 x_1， x_2，都有 $n>0$

C. 对于任意实数 a 及不相等的实数 x_1， x_2，都有 $m=n$

D. 存在实数 a，对任意不相等的实数 x_1， x_2，都有 $m=n$

解析 任取 $x_1\neq x_2$, 则 $m=\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}=\frac{2x_1-2x_2}{x_1-x_2}=2>0$,　A 正确; 由二次函数的单调性可得 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{a}{2}\right)$ 单调递减, 在 $\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$ 单调递增, 可取 $x_1=0,x_2=a$, 则

$n=\frac{g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)}{x_1-x_2}=\frac{g(0)-g(a)}{0-a}=\frac{0-0}{0-a}$,

$=0$， B 错

误; $m=2$,　$n=\frac{g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)}{x_1-x_2}=\frac{\left(x_1^2-ax_1\right)-\left(x_2^2-ax_2\right)}{x_1-x_2}=\frac{\left(x_1^2-x_2^2\right)-a\left(x_1-x_2\right)}{x_1-x_2}=x_1+x_2-a$, 则 $m=n$ 不恒成立, C 错误；止 $m=2$,　$n=x_1+x_2-a$, 若 $m=n$, 则 $x_1+x_2-a=2$,　只需 $x_1+x_2=a+2$ 即可, D

正确,故选 AD.

三角形函数：若对于 $\forall a$， b， $c\in D$， $f(a)$， $f(b)$， $f(c)$ 分别为某个三角形的三边长，则称 $f(x)$ 为三角形函数,若 $f(x)_{\max}$ 和 $f(x)_{\min}$ 均存在，则一定有 $f(x)_{\max}<2f(x)_{\min}$;若 $f(x)$ 处于单调开区间，且 $f(x)_{\max}$ 和 $f(x)_{\min}$ 不都存在,则一定有 $f(x)_{\max}\le 2f(x)_{\min}$.

例 14.（多选）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若对于 $\forall a$，b，$c\in D$，f（a），f（b），f（c）分别为某个三角形的三边长，则称 $f(x)$ 为“三角形函数”．下列四个函数中为“三角形函数”的是(　　)

A． $f(x)=lg(x+1)(x>0)$　　B． $f(x)=4-\cos x$

C． $f(x)=x^{\frac{1}{2}}(1\leqslant x\leqslant 16)$　　D． $f(x)=\dfrac{3^x+2}{3^x+1}$

解析　若 $f(x)=\lg(x+1)(x>0)$, 则 $f(x)\in(0,+\infty)$, A 不满足条件：　若 $f(x)=4-\cos x$, 则 $f(x)\in[3,5]$, B 满足条件：若 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}(1\le x\le 16)$, 则 $f(x)\in[1,4]$, C 不满足条件：若 $f(x)=\dfrac{3^x+2}{3^x+1}=1+\dfrac{1}{3^x+1}$, 则 $f(x)\in(1,2)$, D 满足条件，故选 BD.

达标训练（适合高一）

1．（2020•小店区校级月考）当 $x>0$ 时，$f(x)=x+\dfrac{2}{x}$，则 $f(x)$ 的单调递减区间是(　　)

A． $(2,+\infty)$　　B． $(\sqrt{2},+\infty)$　　C． $(0,\sqrt{2})$　　D． $(0,2)$

2．（2019•金凤区校级期中）下列函数在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是(　　)

A． $y=2|x|$　　B． $y=\dfrac{1}{x}$　　C． $y=(\dfrac{1}{2})^x$　　D． $y=x^2-x$

3．（2019•香坊区校级月考）已知函数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$，则函数 $y=f(x)$ 的单调增区间是(　　)

A． $(-\infty,+\infty)$　　B． $(-\infty,-2)$

C． $(-\infty，-2)\cup(2，+\infty)$　　D． $(-\infty,-2)$ 和 $(-2．+\infty)$

4．（2019•湖南模拟）定义在 R 的函数 $f(x)=-x^3+m$ 与函数 $g(x)=f(x)+x^3+x^2-kx$ 在 $[-1，1]$ 上具有相同的单调性，则 k 的取值范围是(　　)

A． $(-\infty，-2]$　　B． $[2，+\infty)$　　C． $[-2，2]$　　D． $(-\infty，-2]\bigcup[2，+\infty)$

5．（2019•金台区期中）函数 $y=(\dfrac{1}{2})^{-x^2+2x}$ 的单调递增区间是(　　)

A． $[-1，+\infty)$　　B． $(-\infty，-1]$　　C． $[1，+\infty)$　　D． $(-\infty，1]$

6．（2020•天津期中）函数 $y=\sqrt{x^2-5x+4}$ 的单调递增区间是(　　)

A．$[\frac{5}{2},+\infty)$　　B．$[\frac{5}{2},4)$　　C．$[4，+\infty)$　　D．$[1,\frac{5}{2}),[4,+\infty)$

7．（2020•福建期末）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+(4a-3)x+3a,x<0\\log_a(x+1)+1,x\geqslant 0\end{cases}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 在 R 上单调递减，则 a 的取值范围是(　　)

A．$[\frac{3}{4}，1)$　　B．$(0，\frac{3}{4}]$　　C．$[\frac{1}{3}，\frac{3}{4}]$　　D．$(0，\frac{1}{3}]$

8．（2019•新都区月考）已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(3-x)=f(3+x)$，且函数 $f(x)$ 在 $(0,3)$ 上为单调递减函数，若 $a=2^{-0.5},b=\log_2 3,c=e^{ln4}$，则下面结论正确的是(　　)

A．f（a）$<f$（b）$<f$（c）　　B．f（c）$<f$（a）$<f$（b）.

C．f（c）$<f$（b）$<f$（a）　　D．f（a）$<f$（c）$<f$（b）

9．（2019•滕州市校级月考）已知函数 $f(x)=\sqrt{x-2}$，若 $f(2a^2-5a+4)<f(a^2+a+4)$，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty，\frac{1}{2})\cup(2，+\infty)$ B．$[2，6)$　　C．$(0,\frac{1}{2}]\bigcup[2,6)$ D．$(0,6)$

10．（2019•葫芦岛月考）函数 $f(x)=(\frac{1}{2})^x+\frac{1}{x}$ 在区间 $[1，2]$ 上的最小值是(　　)

A．$\frac{3}{2}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{3}{4}$

11．（2019•重庆月考）已知定义在 $(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$ 上的函数 $f(x)$，且 f（1）$=1$，函数 $f(x+1)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 中心对称，对于任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，都有 $\frac{{x_1}^{2019}f(x_1)-{x_2}^{2019}f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立．则 $f(x)\leqslant\frac{1}{x^{2019}}$ 的解集为(　　)

A．$[-1，1]$　　B．$(-\infty，-1]\bigcup[1，+\infty)$ C．$(-\infty，-1]\cup(0，1]$　　D．$(-2019,2019)$

12．（2019•焦作月考）已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：$x_1\neq x_2$ 时，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，若 $a=\pi^{0.5}$，$b=\log_\pi e$，$c=\log_\pi\sin\frac{\pi}{5}$，则 f（a），f（b），f（c）的大小顺序为(　　)

A．f（a）$<f$（b）$<f$（c）　　B．f（c）$<f$（b）$<f$（a）

C．f（c）$<f$（a）$<f$（b）　　D．f（b）$<f$（c）$<f$（a）

13．（2019•青羊区校级月考）若 $f(x)=-x^2+2(a-1)x$ 与 $g(x)=\frac{ax-1}{x-1}$ 在区间 $(1,2)$ 上都是减函数，则 a 的取值范围(　　)

A．$(-2，-1)\cup(1，2)$　　B．$(-1，0)\cup(0，2]$

C. $(1，2]$ D. $[1，2)$

14.(2019•禅城区校级期中)设 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的函数，且 $f(2-x)=f(x)$，当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=2^x-1$，则 $f(\frac{2}{3})$，$f(\frac{3}{2})$，$f(\frac{1}{3})$ 的大小关系是(　　)

A. $f(\frac{2}{3})<f(\frac{3}{2})<f(\frac{1}{3})$ B. $f(\frac{1}{3})<f(\frac{2}{3})<f(\frac{3}{2})$

C. $f(\frac{1}{3})<f(\frac{3}{2})<f(\frac{2}{3})$ D. $f(\frac{3}{2})<f(\frac{1}{3})<f(\frac{2}{3})$

15.（2019•沙坡头区校级月考）已知函数 $f(x)=\begin{cases}(2a+3)x-4a+3(x\geqslant 1)\\ a^x(x<1)\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数，则 a 的取值范围是(　　)

A. $a>1$ B. $a<2$ C. $1<a<2$ D. $1<a\leqslant 2$

16.（2019•崇川区校级月考）已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-ax}}{a-1}(a\neq 1)$ 在 $[-1，0]$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $(-1,1)$ B. $(-\infty，1)\cup(1，+\infty)$

C. $(0,1)$ D. $(1,+\infty)$

17.（2019•聊城三模）已知定义在实数集 R 上的函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(-1,-2)$，且满足 $f(-x)=f(x)$，当 $0\leqslant a<b$ 时不等式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$ 恒成立，则不等式 $f(x-1)+2<0$ 的解集为(　　)

A. $(0,2)$ B. $(-2,0)$

C. $(-\infty，0)\cup(2，+\infty)$ D. $(-\infty，-2)\cup(0，+\infty)$

18.（2019•互助县模拟）若函数 $f(x)=\begin{cases}(2-a)\cdot 2^x,x\geqslant 1\\ ax+1,x<1\end{cases}$ 在 R 上是增函数，则 a 的取值范围为(　　)

A. $(-\infty，1]$ B. $(0,2)$ C. $(0，1]$ D. $[1，2)$

19.（2019•金牛区校级月考）已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3x^2-ax+8)$ 在 $[-1，+\infty)$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty，-6]$ B. $[-11，-6]$ C. $(-11，-6]$ D. $(-11,+\infty)$

20.（2019•武昌区校级期中）已知函数 $y=\log_a(8-ax)$（其中 $a>0$，$a\neq 1)$ 在区间 $[1，4]$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $(0,1)$ B. $(0,\frac{1}{2})$ C. $(\frac{1}{2},1)$ D. $(1,2)$

21.（2018•重庆期末）若函数 $f(x)=ln(x^2-ax+1)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty，4]$　　B. $(-\infty,\frac{5}{2})$　　C. $(-\infty,\frac{5}{2}]$　　D. $(\frac{5}{2},4]$

22.（2018•辽阳期末）已知函数 $f(x)=\log_a(\frac{1}{2}x^2-ax)(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 在 $[1，2]$ 上为减函数，则 a 的取值范围为(　　)

A. $(0,\frac{1}{2})$　　B. $(0，\frac{1}{2}]$　　C. $(\frac{1}{2}，1)$　　D. $[\frac{1}{2}，1)$

23.（2020•开福区期末）若函数 $f(x)$ 满足对于任意实数 a，b，c，都有 f（a），f（b），f（c）为某三角形的三边长，则成 $f(x)$ 为"可构造三角形函数"，已知 $f(x)=\frac{2^x-t}{2^x+1}$ 是"可构造三角形函数"，则实数 t 的取值范围是(　　)

A. $[-1，0]$　　B. $(-\infty，0]$　　C. $[-2，-1]$　　D. $[-2，-\frac{1}{2}]$

24.（多选）设 $f(x)$ 是定义在 D 上的函数，若存在两个不相等的实数 x_1，$x_2\in D$，使得 $f(\frac{x_1+x_2}{2})=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称函数 $f(x)$ 具有性质 P．那么下列函数中具有性质 P 的是(　　)

A. $f(x)=x^3$　　B. $f(x)=lnx$　　C. $f(x)=|x^2-1|$　　D. $f(x)=e^{|x|}-2$

25.（多选）下列关于函数 $y=ax+1$，$x\in[0，2]$ 的说法正确的是(　　)

A. 当 $a<0$ 时，此函数的最大值为 1，最小值为 $2a+1$

B. 当 $a<0$ 时，此函数的最大值为 $2a+1$，最小值为 1

C. 当 $a>0$ 时，此函数的最大值为 1，最小值为 $2a+1$

D. 当 $a>0$ 时，此函数的最大值为 $2a+1$，最小值为 1

26.（2019•湖北期中）如果函数 $f(x)$ 在区域 D 上满足：$\forall a$，b，$c\in D$，f（a），f（b），f（c）为一个三角形的三边长，则称 $f(x)$ 为"区域 D 上的三角形函数"．已知函数 $f(x)=kx+2$ 是"$[1，4]$ 上的三角形函数"，则实数 k 的取值范围是____．

27.（2019•兰州期中）设函数 $f(x)=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$，$g(x)=x^2f(x-1)$，则函数 $g(x)$ 的单调递减区间为__．

28.（2020•定远县期末）若函数 $f(x)=|x-2|(x-4)$ 在区间 $(5a,4a+1)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围是____．

29.（2019•南通模拟）已知函数 $f(x)=\log_a(2x-1)$，其中 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则关于实数 t 的不等式 $f(t-1)>f(\frac{12}{t})$ 的解集为__．

30.（2019•东阳市校级月考）若 $f(x)=|x^2+(1-m)x+m-3|$ 在 $x\in[-2，0]$ 上是减函数，则 m 的取值范围是____．

31.（2019•红塔区校级期中）已知函数 $f(x)=\sqrt{ax^2-2x-5a+5}$ 在 $[2，+\infty)$ 是增函数，则实数 a 的取值范围是____.

32.（2019•西湖区校级模拟）函数 $f(x)=a^{2-x}-1(a>0,a\neq1)$ 恒过定点，当 $a>1$ 时，$f(x^2)$ 的单调递增区间为____.

33.（2019•南岗区校级月考）函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}^{2}x+a\log_{\frac{1}{2}}x+1$ 在 $(\frac{1}{4},2)$ 上为增函数，则 a 的取值范围为____.

34.（2018•合肥期末）已知函数 $f(x)=2^x-\frac{1}{2^x}$.

（1）判断 $f(x)$ 在其定义域上的单调性，并用单调性的定义证明你的结论；

（2）解关于 x 的不等式 $f(\log_2 x)<f$（1）.

35.（2019•镜湖区校级月考）已知函数 $f(x)=\frac{3x+7}{x+2}$.

（1）求函数的单调区间

（2）当 $m\in(-2,2)$ 时，有 $f(-2m+3)>f(m^2)$，求 m 的范围.

36. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且当 $x>1$ 时 $f(x)>0$. 若对于任意两个正数 x 和 y 都有 $f(xy)=f(x)+f(y)$，试判断 $f(x)$ 的单调性.

37.（2020•徐汇区一模）设函数 $f(x)=x^2+|x-a|(x\in R，a$ 为实数).

（1）若 $f(x)$ 为偶函数，求实数 a 的值；

（2）设 $a>\frac{1}{2}$，求函数 $f(x)$ 的最小值（用 a 表示）.

第二讲函数的奇偶性

1. 函数奇偶性的定义及图像特点.

奇偶性	定义	图象特点
偶函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数	关于 y 轴对称
奇函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数	关于原点对称

判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系时，也可以使用如下结论:如果 $f(-x)-f(x)=0$ 或 $\frac{f(-x)}{f(x)}=1(f(x)\neq0)$, 则函数 $f(x)$ 为偶函数;如果 $f(-x)+f(x)=0$ 或 $\frac{f(-x)}{f(x)}=-1(f(x)\neq0)$, 则函数 $f(x)$ 为奇函数.

注意:由函数奇偶性的定义可知，函数具有奇偶性的一个前提条件是：对于定义域内的任意一个 $x,-x$ 也在定义域内（即定义域关于原点对称）.

2. 函数奇偶性的几个重要结论

(1) 奇函数在关于原点对称的区间上的单调性相同，偶函数在关于原点对称的区间上的单调性相反.

(2) $f(x),g(x)$ 在它们的公共定义域上有下面的结论:

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)+g(x)$	$f(x)-g(x)$	$f(x)g(x)$	$f(g(x))$
偶函数	偶函数	偶函数	偶函数	偶函数	偶函数
偶函数	奇函数	不能确定	不能确定	奇函数	偶函数
奇函数	偶函数	不能确定	不能确定	奇函数	偶函数
奇函数	奇函数	奇函数	奇函数	偶函数	奇函数

(3) 若奇函数的定义域包括 0, 则 $f(0)=0$.

(4) 若函数 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(-x)=f(x)=f(|x|)$.

(5) 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数 $f(x)$ 都可以唯一表示成一个奇函数与一个偶函数之和.

(6) 若函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，则 $f(x)+f(-x)$ 为偶函数，$f(x)-f(-x)$ 为奇，$f(x)\cdot f(-x)$ 为偶函数.

考题分类解密.

题型一：判断函数奇偶性

例 15. 判断下列函数的奇偶性：

（1）. $f(x)=(x-1)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ （2）. $f(x)=\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-x^2}$ （3）. $f(x)=\begin{cases}x^2+x & (x<0)\\ x-x^2 & (x>0)\end{cases}$

解析 (1) 由题知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\begin{cases}1-x\neq 0\\ \dfrac{1+x}{1-x}\geq 0\end{cases}\Rightarrow -1\leq x<1$, 定义域不关于原点对称, 所以此函数为非奇非偶函数;

(2) 由题知定义域为 $\begin{cases}x^2-1\geq 0\\ 1-x^2\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 1\ ?\text{ò}\ x\leq -1\\ -1\leq x\leq 1\end{cases}$, 所以定义域为 $x=\pm1$, $f(-x)=\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-x^2}=f(x)$,

且 $f(1)=0,\quad f(-1)=0$, 所以此函数为即奇且偶函数;

(3) 显然定义域关于原点对称, 当 $x>0$ 时, $-x<0$, $f(-x)=x^2-x=-\left(x-x^2\right)$, 当 $x<0$ 时, $-x>0$,

$f(-x)=-x-x^2=-\left(x^2+x\right)$, 即 $f(-x)=\begin{cases}-\left(x^2+x\right) & (x<0)\\ -\left(x-x^2\right) & (x>0)\end{cases}=-f(x)$, 所以此函数为奇函数.

注意: 具备奇偶性的函数一定满足定义域对称，还要考虑分段函数，关于分段函数的奇偶性，要在不同定义域区间是否满足: ①奇函数 $f(x)=-f(-x)$; ②偶函数 $f(x)=f(-x)$.

题型二：已知奇偶性，求函数解析式

秒杀秘籍：一些特殊的函数奇偶性

奇函数：“两指两对”；偶函数：“一指一对一绝”．

奇函数：

(1) 函数 $f(x)=m\left(\frac{a^x+1}{a^x-1}\right)(x\neq 0)$ 或函数 $f(x)=m\left(\frac{a^x-1}{a^x+1}\right)$.

(2) 函数 $f(x)=\pm\left(a^x-a^{-x}\right)$.

(3) 函数 $f(x)=\log_a\frac{x+m}{x-m}=\log_a\left(1+\frac{2m}{x-m}\right)$ 或函数 $f(x)=\log_a\frac{x-m}{x+m}=\log_a\left(1-\frac{2m}{x+m}\right)$.

(4) 函数 $f(x)=\log_a\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ 或函数 $f(x)=\log_a\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

注意：关于 (1) 式，可以写成函数 $f(x)=m+\frac{2m}{a^x-1}(x\neq 0)$ 或函数 $f(x)=m-\frac{2m}{a^x+1}(m\in R)$.

偶函数：

(1) 函数 $f(x)=\pm\left(a^x+a^{-x}\right)$.

(2) 函数 $f(x)=\log_a\left(a^{mx}+1\right)-\frac{mx}{2}$.

(3) 函数 $f(|x|)$ 类型的一切函数.

例 16. 设 $a\in R$， $f(x)=\frac{a\cdot 2^x+a-2}{2^x+1},(x\in R)$ 试确定 a 的值，使 $f(x)$ 为奇函数。

解析 法一由题意可得:函数 $f(x)+f(-x)=\frac{a\cdot 2^x+a-2}{2^x+1}+\frac{a\cdot 2^{-x}+a-2}{2^{-x}+1}=\frac{a\cdot 2^x+a-2}{2^x+1}+\frac{a+(a-2)\cdot 2^x}{2^x+1}$ $=\frac{2a-2+(2a-2)\cdot 2^x}{2^x+1}=\frac{(2a-2)\cdot\left(2^x+1\right)}{2^x+1}$, 因为函数 $f(x)$ 为奇函数，且 $2^x+1\neq 0$, 所以 $f(x)+f(-x)=0$, 即 $2a-2=0$, 所以 $a=1$.

法二根据奇函数模型 (1), 易知 $f(x)=\frac{a\cdot 2^x+a-2}{2^x+1}=\frac{a\cdot\left(2^x+\frac{a-2}{a}\right)}{2^x+1}$, 故 $\frac{a-2}{a}=-1$, 即 $a=1$ 时， $f(x)$ 为奇函数.

例 17. （2020•佛山一模）已知函数 $f(x)=2x+ln(x+\sqrt{a+x^2})(a\in R)$ 为奇函数，则 $a=($　　$)$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

解析 法一因为函数 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(-x)=-f(x)$, 即 $f(-x)+f(x)=0$, 即 $-2x+\ln\left(-x+\sqrt{a+x^2}\right)$ $+2x+\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)=0$, 得 $\ln\left(-x+\sqrt{a+x^2}\right)+\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)=0$,

即 $\ln\left(-x+\sqrt{a+x^2}\right)\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)=0$. 得 $\ln\left(a+x^2-x^2\right)=\ln a=0$, 得 $a=1$, 故选 C.

法二 函数 $f(x)=2x+\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)(a\in R)$ 为奇函数，由于 $g(x)=2x$ 为奇函数，故 $h(x)=\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)$ 也为奇函数，根据奇函数模型(4)可得，$a=1$，故选 C.

例 18.（2020•长沙市校级月考）函数 $f(x)=\frac{1}{x}\log_2(4^x+1)-1$ 的图象(　　)

A．关于 x 轴对称　　B．关于 y 轴对称　　C．关于原点对称　　D．关于 $y=x$ 对称

解析 由函数 $f(x)=\frac{1}{x}\log_2\left(4^x+1\right)-1=\frac{1}{x}\left[\log_2\left(2^{2x}+1\right)-x\right]$ 根据偶函数模型(2)，函数 $\log_2\left(2^{2x}+1\right)-x$ 为偶函数，则函数 $f(x)$ 是奇函数，图象关于原点对称，故选 C.

口诀：奇函数定奇变偶，偶函数定偶变奇，奇双负，偶单负.

定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上任意的函数 $f(x)$ 都可以唯一的表示成一个奇函数 $g(x)$ 与一个偶函数 $h(x)$ 之和. $f(x)$ 以分段函数形式出现奇偶性的时候，则函数一定满足：①奇函数 $f(x)=-f(-x)=g(x)-h(x)$；②偶函数 $f(x)=f(-x)=-g(x)+h(x)$，我们理解为奇函数定奇变偶，偶函数定偶变奇. 在 $f(x)$ 不好拆分出奇函数 $g(x)$ 与一个偶函数 $h(x)$ 之和时，则直接采用：①奇函数 $f(x)=-f(-x)$；②偶函数 $f(x)=f(-x)$，即口决：奇双负，偶单负. 其实通俗的说就是奇函数内外两层都为负，偶函数只有内层为负.

例 19.（2019•东湖区校级三模）若函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, x\geqslant 0\\ -x^2+ax, x<0\end{cases}$ 为奇函数，则实数 a 的值为(　　)

A．2　　B．-2　　C．1　　D．-1

解析 法一因为函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, x\geq 0\\ -x^2+ax, x<0\end{cases}$ 为奇函数，设 $x<0$，则 $-x>0$，因为 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x^2-2x$，所以 $f(-x)=-f(x)=(-x)^2-2(-x)=x^2+2x$，即 $f(x)=-\left(x^2+2x\right)$，所以 $a=-2$，故选 B.

法二分段奇函数满足定奇变偶，故 $x<0$ 时，则 $f(x)=-f(-x)=g(x)-h(x)=-2x-x^2$，所以 $a=-2$，故选 B.

例 20.（2020•兰州校级模拟）函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)=e^x+2$ 的图象关于原点对称，则 $f(x)$ 的表达式为(　　)

A．$f(x)=-e^x-2$　　B．$f(x)=e^{-x}+2$　　C．$f(x)=-e^{-x}-2$　　D．$f(x)=e^{-x}-2$

解析 由 $y=f(x)$ 与图象关 $y=-f(-x)$ 于坐标原点对称，若函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)=e^x+2$ 的图象关于原点对称则 $f(x)=-g(-x)=-\left(e^{-x}+2\right)=-e^{-x}-2$，故选 C.

题型三：对称中心平移和对称轴平移后求值问题

若 $f(x)$ 都可以唯一表示成一个奇函数 $g(x)$ 与一个偶函数 $h(x)$ 之和，当 $h(x)=m$ 时，则 $f(x)$ 关于点 $(0,m)$

中心对称，即可以理解为将奇函数 $g(x)$ 向上平移了 m 个单位，即 $f(x)+f(-x)=2f(0)=2m$；当 $h(x)\neq m$ 时，则有 $f(x)+f(-x)=2h(x)$.

推论若 $f(x)=g(x)+m$，则 $f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=2f(0)=2m$.

例 21：（1）已知 $f(x)=ax+\frac{b}{x}-2$，则 $f(\ln 3)+f(\ln\frac{1}{3})$=−4

（2）已知 $f(x)=ax+\frac{b}{x}-c\sin x+3$，则 $f(\ln 3)+f(\ln\frac{1}{3})$=6

（3）已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+2$，则 $f\left(\lg 5\right)+f\left(\lg\frac{1}{5}\right)=4$

（4）已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(\sqrt{1+9x^2}-3x\right)+1,$.则$f\left(\lg 2\right)+f\left(\lg\frac{1}{2}\right)=2$

注意辨别奇函数 $g(x)$ 和常数项 m 后直接用 $f(x)+f(-x)=2f(0)=2m$ 来秒杀.

例 22.（2019•杜集区校级期中）已知函数 $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}+ln\frac{2019+x}{2019-x}-1$，若定义在 R 上的奇函数 $g(x)$，有 g（1）$=f(\log_2 25)+f(\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{5})$，则 $g(-1)=($　　$)$

A. 2　　B. 0　　C. -1　　D. -2

解析 根据题意，函数 $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}+\ln\frac{2019+x}{2019-x}-1$，设 $h(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}+\ln\frac{2019+x}{2019-x}$，则 $h(-x)=\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}+\ln\frac{2019-x}{2019+x}=\frac{1-a^x}{1+a^x}-\ln\frac{2019+x}{2019-x}=-h(x)$，　则 $h(x)$ 是奇函数，$g(1)=f\left(\log_2 25\right)+f\left(\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{5}\right)=f\left(2\log_2 5\right)+f\left(-2\log_2 5\right)=h\left(2\log_2 5\right)-1+h\left(-2\log_2 5\right)-1=-2$，　又 $g(x)$ 是奇函数，

则 $g(-1)=-g(1)=2$，故选 A.

例 23.（2020•衡阳校级模拟）已知函数 $F(x)=f(x)+x^2$ 是奇函数，且 f（2）$=1$，则 $f(-2)=($　　$)$

A. 9　　B. -9　　C. -7　　D. 7

解析 因为函数 $F(x)=f(x)+x^2$ 是奇函数，所以 $F(-x)=-F(x)$，即 $f(-x)+x^2=-f(x)-x^2$，所以 $f(-x)+f(x)=-2x^2$，即 $f(-2)+f(2)=-2\times(-2)^2=-8$，所以 $f(-2)=-f(2)-8=-9$，故选 B.

例 24.（2019•西湖区校级模拟）已知函数 $f(x)$ 满足对任意的 m，n 都有 $f(m+n)=f(m)+f(n)-1$，设 $g(x)=f(x)+\frac{1}{a^x+1}(a>0,a\neq 1)$，$g(ln2018)=-2015$，则 $g(ln\frac{1}{2018})=$____.

解析 法一因为函数 $f(x)$ 满足对任意实数 m,n，都有 $f(m+n)=f(m)+f(n)-1$，令 $m=n=0$，则有 $f(0)=2f(0)-1$，解得 $f(0)=1$，令 $m=x$，$n=-x$，则 $f(0)=f(x)+f(-x)-1$，即

$f(x)+f(-x)=2$, 因为 $g(x)=f(x)+\frac{1}{1+a^{x}}(a>0,a\neq 0)$, 所以函数 $g(-x)=f(-x)+\frac{1}{1+a^{-x}}=$ $f(-x)+\frac{a^{x}}{1+a^{x}}$, 故 $g(x)+g(-x)=f(x)+f(-x)+1=3$, 所以 $g(\ln 2018)+g\left(\ln\frac{1}{2018}\right)=-2015+g(-\ln 2018)=3$, 即 $g\left(\ln\frac{1}{2018}\right)=2018$. 故答案为 2018.

法二构造模特函数 $f(x)=kx+b$, 易得 $b=1$, 由于函数 $g(x)=kx+\frac{1}{a^{x}+1}+1$, 所以可以构造成一个奇函数 $h(x)=kx+\frac{a^{x}-1}{a^{x}+1}$ 和一个常数 m 的和，故 $g(\ln 2018)+g\left(\ln\frac{1}{2018}\right)=2g(0)=2m=3$, 即 $g\left(\ln\frac{1}{2018}\right)=2018$. 故答案为 2018.

抽象函数的模特函数通常如下：

(1) 若 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 则 $f(x)=xf(1)$（正比例函数）

证明: 令 $x=y$, 则 $f(x+x)=f(x)+f(x)$, 所以 $f(\underbrace{x+x+x+\cdots+x}_{n\uparrow})=nf(x)$, 则 $f(nx)=nf(x)$, 再令 $x=1$, 故 $f(n)=nf(1)$, 即 $f(x)=xf(1)$. 例如: $f(x)=2x$, 即满足 $f(x)=xf(1)$.

(2) 若 $f(x+y)=f(x)f(y)$, 则 $f(x)=[f(1)]^{x}$（指数函数）

例如: $f(x)=2^{x}$, 既满足 $f(x)=[f(1)]^{x}$.

(3) 若 $f(xy)=f(x)+f(y)$, 则 $f(x)=\log_{b}x$ （对数函数）

(4) 若 $f(xy)=f(x)f(y)$, 则 $f(x)=x^{a}$ （幂函数）

(5) 若 $f(x+y)=f(x)+f(y)+m$, 则 $f(x)=xf(1)-m$（一次函数）

例 25. 若函数 $f(x)$ 对一切实数 x 都有 $f(x+8)=f(-2-x)$，且 $x\geq 3$ 时有 $f(x)=x^{2}-7x+4$. 求 $f(x)$ 解析式.

解析 若函数 $f(x)$ 对一切实数 x 都有 $f(x+8)=f(-2-x)$, 则有 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 成轴对称: 又 $x\geq 3$ 时有 $f(x)=x^{2}-7x+4$; 所以 $x<3$ 时, 有 $-x+6>3$, $f(x)=f(6-x)=(6-x)^{2}-7(6-x)+4$ $=x^{2}-5x-2$; 所以 $f(x)$ 解析式为 $f(x)=\begin{cases}x^{2}-7x+4(x\geq 3)\\x^{2}-5x-2(x<3)\end{cases}$.

注意: ①若 $f(x)$ 关于 $x=a$ 对称, 则 $f(x)=\begin{cases}g(x)(x\geq a)\\g(2a-x)(x<a)\end{cases}$.

②若函数 $f(x)$ 关于点 (a,b) 对称, 则 $f(x)=\begin{cases} g(x)(x>a) \\ b(x=a) \\ 2b-g(2a-x)(x<a) \end{cases}$.

例 26.（2020•崇文区校级模拟）若函数 $f(x)=\dfrac{3•e^{|x-1|}+\sin(x-1)}{e^{|x-1|}}$ 在区间 $[-3，5]$ 上的最大值、最小值分别为 p、q，则 $p+q$ 的值为(　　)

A. 2　　B. 1　　C. 6　　D. 3

解析 法一因为 $-3\le x\le 5$, 可得 $-4\le x-1\le 4$, 可令 $t=x-1$, 则 $f(x)=g(t)=\dfrac{3e^{|t|}+\sin t}{e^{|t|}}=3+\dfrac{\sin t}{e^{|t|}}$, 设 $h(t)=\dfrac{\sin t}{e^{|t|}}$, 即有 $h(-t)=-\dfrac{\sin t}{e^{|t|}}=-h(t)$, $h(t)$ 为奇函数, $h(t)$ 在 $[-4, 4]$ 的最大值 M 和 $f(x)$ 最小值 m 之和为 0, 可得 $f(x)$ 在 $[-3, 5]$ 的最值之和为 $p+q=(3+M)+(3+m)=6$, 故选 C.

法二由于 $f(1)=3$, 且 $f(x)+f(2-x)=\dfrac{3e^{|x-1|}+\sin(x-1)}{e^{|x-1|}}+\dfrac{3e^{|x-1|}-\sin(x-1)}{e^{|x-1|}}=6=2f(1)$, 故关于点 $(1, 3)$ 对称, $p+q=6$, 故选 C.

三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 关于点 $\left(-\dfrac{b}{3a}, f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ 对称, 即 $f(x)+f\left(-\dfrac{2b}{3a}-x\right)=2f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)$.

例 27. (1)三次函数都存在对称中心，某同学发现把函数 $f(x)=x^3-3x^2+5x-1$ 的图象平移，使其对称中心变成原点，则新图象对应函数就会变成奇函数，那么函数 $f(x)$ 图象的对称中心是___

(2)函数 $f(x)=(x+a)^3$ 对任意 $t\in R$, 总有 $f(1+t)=-f(1-t)$, 则 $f(2)+f(-2)$ 等于___

答案 (1) $(1,2)$; (2) -26 .

例 28.（2019•祁阳县校级模拟）设函数 $f(x)=x^3+3x^2+6x+14$ 且 f（a）$=1$，f（b）$=19$．则 $a+b=($ $)$

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. -2

解析法一因为 $f(x)=x^3+3x^2+6x+14$, 所以 $f(x)=(x+1)^3+3(x+1)+10$, 因为 $f(a)=1$, $f(b)=19$, 所以 $f(a)+f(b)=20$, 即 $(a+1)^3+3(a+1)+(b+1)^3+3(b+1)=0$ (1), 令 $F(x)=x^3+3x$, 则 $F(-x)=-F(x)$，即 $F(x)$ 为奇函数, 所以(1)式可变为 $F(a+1)=-F(b+1)$, 即 $F(a+1)=F(-b-1)$, 因为 $F(x)=x^3+3x$ 为单调递增函数, 所以 $a+1=-b-1$, 即 $a+b=-2$, 故选 D.

法二因为 $f(x)=x^3+3x^2+6x+14$, 所以 $f(x)$ 关于点 $(-1, f(-1))$ 对称, 即 $f(x)+f(-2-x)=2f(-1)=20$，由于 $f(a)=1$, $f(b)=19$, 所以 $f(a)+f(b)=20$, 即 $\dfrac{a+b}{2}=-1$, 故选 D.

题型四单调性和奇偶性综合求不等式范围问题

定理：

①奇函数单调性不改变，当 $f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数时, 若 $x\geq 0$ 时, $f(x)$ 单调递增，则 $x<0$ 时, $f(x)$ 也单调递增，即 $f(m)+f(n)>0\Leftrightarrow m+n>0$；同理，若 $x\geq 0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 则 $x<0$ 时, $f(x)$ 也单调递减, 即 $f(m)+f(n)>0\Leftrightarrow m+n<0$；

②偶函数单调性改变，当 $f(x)$ 为定义在 R 上的偶函数时, 若 $x\geq 0$ 时, $f(x)$ 单调递增，则 $x<0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 即 $f(m)>f(n)\Leftrightarrow |m|>|n|$; $f(x)+f(-x)>2f(m)\Leftrightarrow |x|>m$; 同理，若 $x\geq 0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 则 $x<0$ 时, $f(x)$ 单调递增，即 $f(m)>f(n)\Leftrightarrow |m|<|n|$; $f(x)+f(-x)>2f(m)\Leftrightarrow |x|<m$.

推论：

①当定义在 R 上函数 $f(x)$ 关于点 (a,b) 对称，且 $x\geq a$, 单调递增，则 $x<a$ 时， $f(x)$ 也单调递增，即 $f(m)+f(n)>2b\Leftrightarrow m+n>2a$, 反之亦然；

②当为定义在 R 上的函数 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称时, 若 $x\geq a$ 时, $f(x)$ 单调递增，则 $x<a$ 时, $f(x)$ 单调递减, 即 $f(m)>f(n)\Leftrightarrow |m-a|>|n-a|$; $f(a+x)+f(a-x)>2f(m)\Leftrightarrow |x-a|>m$, 反之亦然.

例 29.（2019•广西校级月考）已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0，+\infty)$ 单调递增，则满足 $f(\sqrt{x+2})<f(x)$ 的 x 取值范围是(　　)

A. $(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)$

C. $[-2，-1)\cup(2，+\infty)$　　D. $(-1,2)$

解析　因为函数 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f(x)=f(-x)=f(|x|)$, 即 $f(\sqrt{x+2})<f(|x|)$, 因为函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 单调递增，所以 $\sqrt{x+2}<|x|$, 解得 $x\in[-2,-1)\cup(2,+\infty)$, 故选 C.

例 30.（2019•枣庄期末）已知函数 $f(x)=\log_2(4^x+1)-x$，则使得 $f(2x-1)+1<\log_2 5$ 成立的 x 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,1)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $(0,1)$　　D. $(-\infty，0)\cup(1，+\infty)$

解析　由 $f(x)=\log_2\dfrac{4^x+1}{2^x}=\log_2\left(2^x+\dfrac{1}{2^x}\right)$, 易知 $f(-x)=f(x)$, 且 $x\geq 0$ 时， $f(x)$ 单调递增，因为 $f(1)=\log_2 5-1$, 所以 $f(2x-1)+1<\log_2 5\Leftrightarrow f(2x-1)<f(1)\Leftrightarrow |2x-1|<1$, 解得 $0<x<1$, 故选 C.

例 31.（2019•郑州期末）已知函数 $f(x)=\dfrac{-2^x+1}{2^{x+1}+2}$，如果对任意 $t\in R$， $f(3t^2+2t)+f(k^2-2t^2)<0$ 恒成立，则满足条件的 k 的取值范围是____.

解析　因为函数 $f(x)=\dfrac{-2^x+1}{2^{x+1}+2}$, 所以 $f(x)=\dfrac{1-2^x}{2\left(1+2^x\right)}$, 可得 $f(-x)=\dfrac{1-2^{-x}}{2\left(1+2^{-x}\right)}=-\dfrac{1-2^x}{2\left(1+2^x\right)}=-f(x)$, 可得 $f(x)$ 为奇函数; 且 $f(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^x+1}$, 可得 $f(x)$ 在 R 上递减, 则 $f\left(3t^2+2t\right)+f\left(k^2-2t^2\right)<0$,

即为 $f\left(3t^2+2t\right)<-f\left(k^2-2t^2\right)=f\left(2t^2-k^2\right)$，即有 $3t^2+2t>2t^2-k^2$，可得 $k^2>-t^2-2t$，由 $-t^2-2t=-(t+1)^2+1\le 1$ 则 $k^2>1$，解得 $k>1$ 或 $k<-1$．故答案为 $k>1$ 或 $k<-1$．

例 32．（2020•辽宁期末）已知函数 $f(x)$ 是定义域 R 上的偶函数，且在区间 $[0，+\infty)$ 单调递增，若实数 a 满足 $f(\log_2 a)+f(\log_2 \frac{1}{a})\leqslant 2f$（1），则 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty，2]$　　B．$(0，\frac{1}{2}]$　　C．$[\frac{1}{2},2]$　　D．$(0，2]$

解析　因为 $f(x)$ 是定义域 R 在上的偶函数，所以由 $f\left(\log_2 a\right)+f\left(\log_2\frac{1}{a}\right)\le 2f(1)$，得 $f\left(\log_2 a\right)+f\left(-\log_2 a\right)\le 2f(1)$，即 $f\left(\log_2 a\right)+f\left(\log_2 a\right)=2f\left(\log_2 a\right)\le 2f(1)$，则 $f\left(\log_2 a\right)\le f(1)$，因为在区间 $[0,+\infty)$ 单调递增，所以不等式等价为 $f\left(\left|\log_2 a\right|\right)\le f(1)$，即 $\left|\log_2 a\right|\le 1$，则 $-1\le\log_2 a\le 1$，得 $\frac{1}{2}\le a\le 2$，故选 C.

例 33．（2019•宜春月考）函数 $f(x)=-x^2+4x-2(e^{x-2}+e^{2-x})$，则不等式 $f(2x-1)<f(3x)$ 的解集为（　　）

A．$(-\infty，-1)\cup(1，+\infty)$　　B．$(-1,1)$

C．$(-1,+\infty)$　　D．$(-\infty,-1)$

解析　法一 $f(x)=-x^2+4x-2\left(e^{x-2}+e^{2-x}\right)=-(x-2)^2+4-\left(e^{x-2}+e^{2-x}\right)$，将 $f(x)$ 向左平移 2 个单位得到 $f(x+2)=-x^2+4-\left(e^x+e^{-x}\right)$，设 $g(x)=f(x+2)$，则 $g(x)$ 是偶函数，当 $x>0$ 时，$g'(x)=-2x-e^x+e^{-x}$ 减函数，则 $g'(x)<g'(0)=-1+1=0$，则 $g(x)$ 是减函数，则不等式 $f(2x-1)<f(3x)$ 等价为不等式 $f(2x-3+2)<f(3x-2+2)$，即 $g(2x-3)<g(3x-2)$，等价为 $g(|2x-3|)<g(|3x-2|)$，得 $|2x-3|>|3x-2|$，平方得 $4x^2-12x+9>9x^2-12x+4$，得 $5x^2<5$，即 $x^2<1$，得 $-1<x<1$，即不等式的解集为 $(-1,1)$，故选 B.

法二 易知 $-x^2+4x$ 关于直线 $x=2$ 对称，且 $x\ge 2$ 时单调递减，故构造函数 $f(x)-f(4-x)=-x^2+4x-2\left(e^{x-2}+e^{2-x}\right)+(4-x)^2-4(4-x)+2\left(e^{x-2}+e^{2-x}\right)=0$，显然 $x>2$ 时 $f(x)$ 单调递减，故 $|2x-3|>|3x-2|$，得 $5x^2<5$，即 $x^2<1$，得 $-1<x<1$，即不等式的解集为 $(-1,1)$，故选 B．

例 34．（2019•上城区校级月考）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}$，则不等式 $f(x+1-x^2)+f(x+2)+x^2-2x-3<0$ 的解集是____．

解析　法一因为 $f\left(x+1-x^2\right)+f(x+2)+x^2-2x-3<0$，即 $f\left(x+1-x^2\right)-\left(x+1-x^2\right)+f(x+2)-(x+2)<0$，即 $f(x+2)-(x+2)<-\left[f\left(x+1-x^2\right)-\left(x+1-x^2\right)\right]$，设 $g(x)=f(x)-x$，则

$g(x)=\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}-x=\frac{2-\left(2^x+1\right)}{2\left(2^x+1\right)}-x=\frac{1-2^x}{2\left(2^x+1\right)}-x,$ 则 $g(-x)=\frac{1-2^{-x}}{2\left(2^{-x}+1\right)}+x=\frac{2^x-1}{2\left(1+2^x\right)}+x=-g(x),$ 即 $g(x)$ 是奇函数，则不等式 $f(x+2)-(x+2)$ $f(x+2)-(x+2)<-\left[f\left(x+1-x^2\right)-\left(x+1-x^2\right)\right]$ 等价为 $g(x+2)<-g\left(x+1-x^2\right),$ 即 $g(x+2)<g\left(x^2-x-1\right),$ 因为 $y=\frac{1}{2^x+1}$ 和 $y=-\frac{1}{2}-x$ 在 R 上是减函数，所以 $g(x)=\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}-x$ 为减函数，则不等式等价为 $x+2>x^2-x-1,$ 即 $x^2-2x-3<0,$ 得 $-1<x<3$，即不等式的解集为 $\{x|-1<x<3\}$. 故答案为 $\{x|-1<x<3\}$.

法二函数 $f(x)=\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}$ 为奇函数且是减函数，故 $h(x)=f(x)-x=\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}-x$ 也是奇函数且是减函数，同构 $h\left(-x^2+x+1\right)+h(x+2)<0,$ 即 $-x^2+x+1+x+2<0,$ 得 $-1<x<3.$ 故答案为 $\{x|-1<x<3\}$.

例 35.（2019•宜春模拟）函数 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=x^3+2019^x-2019^{-x}+1$，若 $f(\sin\theta+\cos\theta)+f(\sin2\theta-t)<2$ 对∀θ∈恒成立，则实数 t 的取值范围是____.

解析 法一由函数 $f(x)=x^3+2019^x-2019^{-x}+1,$ 可得 $f(x)=-x^3+2019^{-x}-2019^x+1,$ 则 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)+$ $f\left(\frac{1}{2}-x\right)=2$，又因为 $f(\sin\theta+\cos\theta)+f(\sin2\theta-t)<2,$ 即为 $f(\sin\theta+\cos\theta)+f(\sin2\theta-t)<2=$ $f\left(\frac{1}{2}+x\right)+f\left(\frac{1}{2}-x\right)$，$f(\sin\theta+\cos\theta)+f(\sin2\theta-t)<2$ 对 $\forall\theta\in R$ 恒成立，可令 $x=\sin\theta+\cos\theta-\frac{1}{2},$ 则 $f(\sin\theta+\cos\theta)+f(\sin2\theta-t)$ $<f(\sin\theta+\cos\theta)+f(1-\sin\theta-\cos\theta),$ 可得 $f(2\sin\theta-t)<f(1-\sin\theta-\cos\theta)$ 恒成立，由于 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 在 R 上递增，$f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位可得 $f(x)$ 的图象，则 $f(x)$ 在 R 上递增，可得 $\sin2\theta-t<1-\sin\theta-\cos\theta$ 恒成立，即有 $t>\sin2\theta+\sin\theta+\cos\theta-1,$ 设 $g(\theta)=\sin2\theta+\sin\theta+\cos\theta-1=(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta+\cos\theta)-2,$ 再令 $\sin\theta+\cos\theta=m,$ 则 $m=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),$ $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2},$ 则 $g(m)=m^2+m-2,$ 其对称轴 $m=-\frac{1}{2},$ 故当 $m=\sqrt{2}$ 时，$g(m)$ 取的最大值，最大值为 $2+\sqrt{2}-2=\sqrt{2}$. 则 $t>\sqrt{2}$. 故答案为 $(\sqrt{2},+\infty)$.

法二因为奇函数 $20x^3+2019^x-19^{-x}$ 部分，且是增函数，所以函数 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)-1$ 关于原点对称，即 $f(x)$ 关

于点$\left(\frac{1}{2},1\right)$对称，又因为$f(\sin\theta+\cos\theta)+f(\sin 2\theta-t)<2=2f\left(\frac{1}{2}\right)$, 则$\sin\theta+\cos\theta+\sin 2\theta-t<1$恒成立，即有$t>\sin 2\theta+\sin\theta+\cos\theta-1$, 以下解法同法一. 故答案为$(\sqrt{2},+\infty)$.

例 36.（2018•成都月考）已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 在$[0，+\infty)$上递减，若不等式 $f(-ax+lnx+1)+f(ax-lnx-1)\geqslant 2f(1)$对$x\in[1，3)$恒成立，则实数 a 的取值范围是____.

解析 法一 因为定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上单调递减, 所以 $f(x)$ 在$(-\infty,0)$上单调递增, 若不等式 $f(-ax+\ln x+1)+f(ax-\ln x-1)\geq 2f(1)$ 对 $x\in[1,3]$ 恒成立, 则 $2f(ax-\ln x-1)\geq 2f(1)$ 对 $x\in[1,3]$ 恒成立，即 $f(ax-\ln x-1)\geq f(1)$ 对 $x\in[1,3]$ 恒成立, 所以 $-1\leq ax-\ln x-1\leq 1$ 对 $x\in[1,3]$ 恒成立, 即 $0\leq ax-\ln x\leq 2$ 对 $x\in[1,3]$ 恒成立. 令 $g(x)=ax-\ln x$, 则由 $g'(x)=a-\frac{1}{x}=0$, 求得 $x=\frac{1}{a}$.

①当$\frac{1}{a}\leq 1$, 即 $a\geq 1$ 时, $g'(x)\geq 0$ 在$[1,3]$上恒成立, $g(x)$ 为增函数, 因为最小值 $g(1)=a\geq 0$, 最大值 $g(3)=3a-\ln 3\leq 2$, 所以 $0\leq a\leq\frac{2+\ln 3}{3}$, 综合可得, $1\leq a\leq\frac{2+\ln 3}{3}$;

②当$\frac{1}{a}\geq 3$, 即 $0<a\leq\frac{1}{3}$ 时, $g'(x)\leq 0$ 在$[1,3]$上恒成立, $g(x)$ 为减函数, 因为最大值 $g(1)=a\leq 2$, 最小值 $g(3)=3a-\ln 3\geq 0$, 所以$\frac{\ln 3}{3}\leq a\leq 2$, 综合可得, a 无解; ③当 $1<\frac{1}{a}<3$, 即 $\frac{1}{3}<a<1$ 时, 在 $\left[1,\frac{1}{a}\right)$ 上, $g'(x)<0$ 恒成立, 所以函数 $g(x)$ 为减函数; 在 $\left(\frac{1}{a},3\right]$ 上, $g'(x)>0$ 恒成立, $g(x)$ 为增函数. 故函数的最小值为 $g\left(\frac{1}{a}\right)=1-\ln\frac{1}{a}$, 因为 $g(1)=a$, $g(3)=3a-\ln 3, g(3)-g(1)=2a-\ln 3$. 若 $2a-\ln 3>0$, 即 $\ln\sqrt{3}<a<1$, 因为 $g(3)-g(1)>0$, 则最大值为 $g(3)=3a-\ln 3$, 此时, 由 $1-\ln\frac{1}{a}\geq 0$, $g(3)=3a-\ln 3\leq 2$, 求得 $\frac{1}{e}\leq a\leq\frac{2+\ln 3}{3}$, 综合可得, $\ln\sqrt{3}<a<1$. 若 $2a-\ln 3\leq 0$, 即 $\frac{1}{3}<a\leq\frac{1}{2}\ln 3=\ln\sqrt{3}$, 因为 $g(3)-g(1)\leq 0$, 则最大值为 $g(1)=a$, 此时，最小值 $1-\ln\frac{1}{a}\geq 0$，最大值 $g(1)=a\leq 2$, 求得$\frac{1}{e}\leq a\leq 2$, 综合可得$\frac{1}{e}\leq a\leq\ln\sqrt{3}$. 综合①②③可得, $1\leq a\leq\frac{2+\ln 3}{3}$或$\ln\sqrt{3}<a<1$或$\frac{1}{e}\leq a\leq\ln\sqrt{3}$, 即$\frac{1}{e}\leq a\leq\frac{2+\ln 3}{3}$. 故答案为$\left[\frac{1}{e},\frac{2+\ln 3}{3}\right]$.

法二因为定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上递减, 所以 $f(-ax+\ln x+1)+f(ax-\ln x-1)\geq 2f(1)$ 等

价于 $|ax-\ln x-1|\leq 1$ 对 $x\in[1,3]$ 恒成立．即 $0\leq ax-\ln x\leq 2\Leftrightarrow\dfrac{\ln x}{x}\leq a\leq\dfrac{2+\ln x}{x}=e^2\cdot\dfrac{\ln e^2x}{e^2x}$，同构 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，显然函数 $h(x)$ 在区间 $(0,e)$ 上单调递增，在区间 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h(e)=\dfrac{1}{e}$，由于 $x\in[1,3]$，故 $a\geq h(x)_{\max}=\dfrac{1}{e}$，　$a\leq e^2\cdot\dfrac{\ln e^2x}{e^2x}=e^2h\left(e^2x\right)_{\min}$，　易知 $e^2\leq e^2x\leq 3e^2$，故函数 $h\left(e^2x\right)$ 在 $x\in[1,3]$ 上单调递减，$a\leq e^2h\left(e^2x\right)_{\min}=e^2h\left(3e^2\right)=\dfrac{2+\ln 3}{3}$．故答案为 $\left[\dfrac{1}{e},\dfrac{2+\ln 3}{3}\right]$．

达标训练（适合高一）

1．（2020•佛山一模）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}+2x+1$，且 $f(a^2)+f(2a)>3$，则 a 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty,\ -3)\cup(1,\ +\infty)$　　B．$(-\infty,\ -2)\cup(0,\ +\infty)$

C．$(-2,0)$　　D．$(-1,3)$

2．（2019•路南区校级期中）已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x(1+\sqrt[3]{x})$，则当 $x<0$ 时，$f(x)$ 表达式是(　　)

A．$-x(1+\sqrt[3]{x})$　　B．$x(1+\sqrt[3]{x})$　　C．$-x(1-\sqrt[3]{x})$　　D．$x(1-\sqrt[3]{x})$

3．（2019•青冈县期中）已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)$ 为增函数，且 f（3）$=0$ 那么不等式 $xf(x)<0$ 的解集是(　　)

A．$(-3,\ -1)\cup(1,\ 3)$　　B．$(-3,\ 0)\cup(3,\ +\infty)$

C．$(-3,\ 0)\cup(0,\ 3)$　　D．$(-\infty,\ -3)\cup(0,\ 3)$

4．（2019•佛山期末）已知函数 $f(x)=xln(e^{2x}+1)-x^2+1$，f（a）$=2$，则 $f(-a)$ 的值为(　　)

A．1　　B．0　　C．-1　　D．-2

5．（2019•海南校级月考）已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\ +\infty)$ 单调递增，则满足 $f(\sqrt{x+2})<f(x)$ 的 x 取值范围是(　　)

A．$(2,+\infty)$　　B．$(-\infty,-1)$

C．$[-2，-1)\cup(2，+\infty)$　　D．$(-1,2)$

6.（2014•安徽模拟）已知 $f(x)$ 是偶函数，且 $f(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 上是增函数，如果 $f(ax+1)\leqslant f(x-2)$ 在 $x\in[\frac{1}{2},1]$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$[-2，1]$　　B．$[-5，0]$　　C．$[-5，1]$　　D．$[-2，0]$

7.（2019•朝阳区校级月考）已知函数 $f(x)=|x-1|+|x+1|(x\in R)$，则 $f(x)$ 的图象（　　）

A．关于原点对称，但不关于 y 轴对称 B．关于 y 轴对称，但不关于原点对称

C．关于原点对称，也关于 y 轴对称　D．既不关于原点对称，也不关于 y 轴对称

8.（2019•西城区校级月考）同一平面直角坐标系中，函数 $y=2^{x+1}$ 与 $y=2^{1-x}$ 的图象（　　）

A．关于原点对称　　B．关于 x 轴对称

C．关于 y 轴对称　　D．关于直线 $y=x$ 对称

9.（2019•南关区校级期中）函数 $y=f(a+x)$ 与函数 $y=f(a-x)$ 的图象关于（　　）

A．直线 $x=a$ 对称　B．点 $(a,0)$ 对称　C．原点对称　D．y 轴对称

10.（2019•临川区校级月考）若函数 $f(x)=x\bullet ln(ax+\sqrt{1+9x^2})$ 的图象关于 y 轴对称，则实数 a 的值为（　　）

A．3　B．±3　C．9　D．±9

11.（2019•西湖区校级模拟）函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}$ 的图象关于（　　）

A．x 轴对称　B．y 轴对称　C．原点对称　D．直线 $x=1$ 对称

12.（2019•凯里市校级月考）函数 $f(x)=\frac{1}{x}(\log_2 4^{x}+1)-2$ 的图象（　　）

A．关于 x 轴对称　B．关于 y 轴对称　C．关于原点对称　D．关于 $y=x$ 对称

13.（2019•渝中区校级期末）函数 $f(x)=(1-\frac{2}{1+2^x})\tan x$ 的图象（　　）

A．关于 x 轴对称 B．关于 y 轴对称 C．关于 $y=x$ 轴对称 D．关于原点轴对称

14.（2019•凯里市校级期末）函数 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{x}$ 的图象（　　）

A．关于原点对称 B．关于 y 轴对称　C．关于 x 轴对称　D．关于直线 $y=x$ 对称

15.（2019 秋•河南月考）若函数 $f(x)=\dfrac{te^x-t-2}{e^x-1}+x^3$ 是奇函数，则常数 t 等于（　　）

A．-1　B．$-e$　C．0　D．$\frac{1}{e}$

16.（2018•达州期末）已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 和偶函数 $g(x)$ 满足 $f(x)+g(x)=a^x(a>0,a\neq1)$，则

$f^2(1)-g^2(1)=($　　$)$

A．$-\frac{1}{2}$　　B．-2　　C．-1　　D．0

17．（2019•顺庆区校级月考）定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足：函数 $f(x+1)$ 的图象关于 y 轴对称，当 $x\in[0$，$1]$ 时，$f(x)=-x^2$，则下列选项正确的是 $($　　$)$

A．$f(x)$ 的图象关于 y 轴对称

B．$f(x)$ 的最小正周期为 2

C．当 $x\in[2$，$3]$ 时，$f(x)=(x-2)^2$

D．$f(x)$ 在 $[-2$，$-1]$ 上是减函数

18．（2019•大冶市校级月考）函数 $f(x)=e^x-e^{-x}$，若实数 a，b 满足 $f(2a+5)+f(4-b)=0$，则 $2a-b=($　　$)$

A．1　　B．-1　　C．-9　　D．9

19．（2018•武汉期末）已知函数 $f(x)=ax|x|+b\sin x+1$，若 f（3）$=2$，则 $f(-3)=($　　$)$

A．-2　　B．-1　　C．0　　D．1

20．（2019•齐齐哈尔期末）若函数 $f(x)=\log_3(3^x+1)+mx$ 是偶函数，则满足 $f(2x+3)<f(2m)$ 的实数 x 的取值范围是 $($　　$)$

A．$(0,1)$　　B．$(-1,0)$　　C．$(1,2)$　　D．$(-2,-1)$

21．（2019•龙凤区校级月考）已知 $f(x)=ln(\sqrt{9x^2+1}-3x)-1$，则 $f(lg\frac{1}{2})+f(lg2)=($　　$)$

A．2　　B．0　　C．-1　　D．-2

22．（2019•三门峡月考）函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-a$，$a]$，则下列命题错误的是 $($　　$)$

A．$f(x)+f(-x)$ 一定是偶函数

B．$f(x)-f(-x)$ 一定是奇函数

C．$f^2(x)$ 一定是偶函数

D．$xf(x^2)$ 一定是奇函数

23．（2019•崇川区校级期中）已知函数 $f(x)=\frac{8\times4^x-a}{2^x}(a\in R)$ 是奇函数，$g(x)=ln(e^x+1)-bx(b\in R)$ 是偶函数，则 $\log_b a=($　　$)$

A．-3　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．3

24．（2019•杜集区校级期中）已知函数 $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}+ln\frac{2019+x}{2019-x}-1$，若定义在 R 上的奇函数 $g(x)$，有 g（1）$=f(\log_2 25)+f(\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{5})$，则 $g(-1)=($　　$)$

A．2　　B．0　　C．-1　　D．-2

25．（2019•荆州区校级期中）已知定义域为$(-\infty,+\infty)$的函数$f(x)$都可以表示成一个奇函数$g(x)$与一个偶函数$h(x)$之和，若$f(x)=e^x(e$为自然对数的底)，则(　　)

A．$g(x)=e^x-e^{-x}$，$h(x)=e^x+e^{-x}$　　B．$g(x)=e^x+e^{-x}$，$h(x)=e^x-e^{-x}$

C．$g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$h(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　　D．$g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，$h(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

26．（2019•河南月考）已知函数$f(x)$是定义在R上的奇函数，当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)=ln(2x+2)-2^x$，则$f(-1)=($　　)

A．$-ln4-2$　　B．$-ln4-1$　　C．$ln4-2$　　D．$-ln4+2$

27．（2019•新乡期末）已知函数$f(x)$是定义在R上的偶函数，且在区间$[0$，$+\infty)$上单调递减，若$f(\log_2 a)+f(3\log_{\frac{1}{8}} a)\geqslant 2f(-1)$，则实数$a$的取值范围是(　　)

A．$[2$，$4]$　　B．$[\dfrac{1}{4}$，$2]$　　C．$[\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$4]$　　D．$[\dfrac{1}{2}$，$2]$

28．（2019•信阳期中）若定义域为R的偶函数$f(x)$在$[0$，$+\infty)$上是增函数，则不等式$f(\log_4 x)+f(\log_{0.25} x)\leqslant 2f$（1）的解集为(　　)

A．$[\dfrac{1}{4}$，$2]$　　B．$[\dfrac{1}{4}$，$4]$　　C．$[\dfrac{1}{2}$，$2]$　　D．$[\dfrac{1}{2}$，$4]$

29．（2019•兴庆区校级月考）设函数$f(x)=\dfrac{a-2^x}{1+a\bullet 2^x}(a\in R)$是定义域上的奇函数，则$a=$____.

30．（2019•武侯区校级期末）已知函数$f(x)=ax^2+bx+3a+b$是定义在$[a-1$，$2a]$的偶函数，则$a+b=$____.

31．（2020•青浦区一模）已知对于任意给定的正实数k，函数$f(x)=2^x+k\bullet 2^{-x}$的图象都关于直线$x=m$成轴对称图形，则$m=$____.

32．（2019•嘉定区期末）已知函数$f(x)=\dfrac{4}{3^{x-1}-3}$具有对称中心为$P$，则点$P$的坐标为____.

33．（2019•连云港期末）设函数$f(x)=\dfrac{1-9^x}{3^x}-x$，则不等式$f(12-x^2)+f(2-5x)<0$的解集为__$(-7,2)$__.

34．（2018•灌云县期中）设a为实常数，$y=f(x)$是定义在R上的奇函数，当$x<0$时，$f(x)=16x+\dfrac{a^2}{x}+5$，若$f(x)\geqslant a+2$对一切$x\geqslant 0$成立，则$a$的取值范围为____.

35．（2019•西湖区校级模拟）已知定义在R上的函数$y=f(x)$是偶函数，且$x\geqslant 0$时，$f(x)=ln(x^2-2x+2)$，

（1）当$x<0$时，求$f(x)$解析式；

（2）写出$f(x)$的单调递增区间．

36.（2019•烟台期末）已知函数 $f(x)=\log_2(m+\dfrac{n}{x+1})$ 为奇函数，其中 m ，$n\in R$ ，$m<0$.

（1）求 m ，n 的值；

（2）求使不等式 $f(x)\geqslant 1$ 成立的 x 的取值范围.

37.（2019•铜仁市期末）已知函数 $f(x)=log_9(3^x+1)+kx$（$k\in$R）为偶函数.

（1）求 k 的值；

（2）已知函数 $g(x)=9^{f(x)+\frac{x}{4}}+m\cdot 9^x-1$，$x\in[0，1]$，若 $g(x)$ 的最小值为 0，求 m 的值.

39.（2019•江阴市期中）已知 $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$，$x\in(-2，2)$

（1）判断 $f(x)$ 的奇偶性并说明理由；

（2）求证：函数 $f(x)$ 在（－2，2）上是增函数；

（3）若 $f(2+a)+f(1-2a)>0$，求实数 a 的取值范围.

40.（2018•宝安区期末）设函数 $f(x)=ka^x-a^{-x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）是奇函数.

（1）求常数 k 的值；

（2）若 $a>1$，试判断函数 $f(x)$ 的单调性，并加以证明；

（3）若已知 $f(1)=\frac{8}{3}$，且函数 $g(x)=a^{2x}+a^{-2x}-2mf(x)$ 在区间$[1，+\infty)$上的最小值为－2，求实数 m 的值.

41.（2019•西湖区校级模拟）对于函数 $f(x)$，若在定义域内存在实数 x，满足 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为“局部奇函数”.

（Ⅰ）已知二次函数 $f(x)=ax^2+2x-4a$（$a\in$R），试判断 $f(x)$ 是否为“局部奇函数”？并说明理由；

（Ⅱ）若 $f(x)=2^x+m$ 是定义在区间$[-1，1]$上的“局部奇函数”，求实数 m 的取值范围；

（Ⅲ）若 $f(x)=4^x-m\cdot 2^{x+1}+m^2-3$ 为定义域R上的“局部奇函数”，求实数 m 的取值范围.

达标训练（适合高三复习）

1.（2020•凉山州模拟）函数 $f(x)=\dfrac{2\sin(x+\frac{\pi}{2})+x^2-x}{x}$，其图象的对称中心是(　　)

A．$(0,1)$　　B．$(1,-1)$　　C．$(1,1)$　　D．$(0,-1)$

2.（2020•雨花区校级月考）定义在 R 的函数 $f(x)$，已知 $y=f(x+2)$ 是奇函数，当 $x>2$ 时，$f(x)$ 单调递增，若 $x_1+x_2>4$ 且 $(x_1-2)\cdot(x_2-2)<0$，则 $f(x_1)+f(x_2)$ 值（　　）

A．恒大于 0　　B．恒小于 0　　C．可正可负　　D．可能为 0

3.（2019•昆明月考）已知函数 $f(x)=e^{x}+e^{-x}$，则$($　　$)$

A．$f(-\sqrt{2})<f$（e）$<f(\sqrt{5})$　　B．f（e）$<f(-\sqrt{2})<f(\sqrt{5})$

C．$f(\sqrt{5})<f$（e）$<f(-\sqrt{2})$　　D．$f(-\sqrt{2})<f(\sqrt{5})<f$（e）

4.（2019•朝阳区期末）已知函数 $f(x)=e^{|x|}-e^{-|x|}$，则 $f(x)($　　$)$

A．是奇函数，且在$(0,+\infty)$上单调递增B．是奇函数，且在$(0,+\infty)$上单调递减

C．是偶函数，且在$(0,+\infty)$上单调递增D．是偶函数，且在$(0,+\infty)$上单调递减

5.（2020•长沙期末）已知函数 $f(x)=\frac{|x|-sinx+1}{|x|+1}$（$x\in R$）的最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m$ 的值为（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

6.（2020•绵阳模拟）已知 $f(x)$ 为偶函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x\cos x-\sin x+\frac{1}{3}x^{3}$，则满足不等式 $f(\log_{2}m)+f(\log_{\frac{1}{2}}m)<2f$（1）的实数 m 的取值范围为$($　　$)$

A．$(\frac{1}{2}，2)$　　B．$(0,2)$　　C．$(0，\frac{1}{2})\cup(1，2)$　　D．$(2,+\infty)$

7.（2020•开封一模）已知定义在$[m-5，1-2m]$上的奇函数 $f(x)$，满足 $x>0$ 时，$f(x)=2^{x}-1$，则 $f(m)$ 的值为$($　　$)$

A．-15　　B．-7　　C．3　　D．15

8.（2020•景德镇一模）设函数 $f(x)=\dfrac{a^{2}-a\sin x+1}{a^{2}-a\cos x+1}(a\neq 0)$ 的最大值为 M（a），最小值为 m（a），则$($　　$)$

A．存在实数 a，使 M（a）$+m$（a）$=2.5$　　B．存在实数 a，使 M（a）$+m$（a）$=-2.5$

C．对任意实数 a，有 M（a）$+m$（a）$\geqslant 3$　　D．对任意实数 a，有 M（a）$+m$（a）$=2$

9.（2020•绵阳模拟）已知函数 $f(x)=\dfrac{2^{x}}{2^{x}-1}$，若 $f(-m)=2$，则 $f(m)=($　　$)$

A．-2　　B．-1　　C．0　　D．$\frac{1}{2}$

10.（2019•南阳期中）已知 $f(x)=\sin x+\frac{(x+1)^{2}}{x^{2}+1}$，则 $f(x)$ 在区间[－1，1 上的最大值和最小值之和等于（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

11．（2020•遂宁模拟）若函数 $f(x)=\dfrac{2^{x}-m}{2^{x}+1}+\tan x+x$ 是定义在$[-1，1]$上的奇函数，则满足 $f(2x-1)<f(x-m+1)$ 的实数 x 的取值范围是$($　　$)$

A．$[0，1)$　　B．$(-1，0]$　　C．$[1，2)$　　D．$(0，1]$

12.（2020•涪城区校级模拟）已知函数 $f(x)=e^{|x|}+\cos x$，若 $f(2x-1)\geqslant f(x)$，则实数 x 的取值范围为(　　)

A．$(-\infty,\frac{1}{3}]\bigcup[1,+\infty)$　B．$[\frac{1}{3},1]$　C．$(-\infty,\frac{1}{2}]$　D．$[\frac{1}{2},+\infty)$

13.（2019•湖北期末）设函数 $f(x)=x^2+2\cos x$，$x\in[-1，1]$，则不等式 $f(x-1)>f(2x)$ 的解集为(　　)

A．$(-1,\frac{1}{3})$　B．$[0，\frac{1}{3})$　C．$(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$　D．$[0，\frac{1}{2}]$

14.（2018•思明区校级期中）已知函数 f（x）$=e^{x-2}+e^{2-x}$，若实数 x_1、x_2 满足 $x_1<x_2$，$x_1+x_2<4$ 且（x_1-2）（x_2-2）<0，则下列结论正确的是（　　）

A．f（x_1）$=f$（x_2）　B．f（x_1）$<f$（x_2）

C．f（x_1）$>f$（x_2）　D．f（x_1）$+f$（x_2）<4

15.（2018•池州期末）若函数 f（x）$=x^2+2x-ln\frac{1}{1+e^{|x+1|}}$，则不等式 f（$3x-1$）$>f$（2）的解集为（　　）

A．（－1，1）B．（－4，2）C．（－∞，－1）∪（1，+∞）D．（－∞，－4）∪（2，+∞）

16.（2018•渝水区校级月考）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}$，$m$，$n$ 满足 $f(m^2-2n)+f(n^2-2m)\geqslant 0$，则 $|m+7n+4|$ 的取值范围是(　　)

A．$[2，12]$　B．$[2，22]$

C．$[12，22]$　D．$[12-10\sqrt{2},12+10\sqrt{2}]$

17.（2019•温州期中）已知 $a>0$，设函数 $f(x)=\frac{2019^{x+1}+3}{2019^x+1}$（$x\in[-a，a]$）的最大值为 M，最小值为 N，那么 $M+N=$（　　）

A．2025　B．2022　C．2020　D．2019

18.（2019•长春四模）已知 $f(x)=\sin x+\frac{1}{\sin x}+ax^2$，若 $f(\frac{\pi}{2})=2+\pi$，则 $f(-\frac{\pi}{2})=$(　　)

A．$2-\pi$　B．$\pi-2$　C．2　D．π

19.（2018•城关区校级期中）设函数 $y=\frac{x^3+2017x}{x^4+2018}+1$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m$ 的值为（　　）

A．2　B．1　C．0　D．不存在

20.（2019•广州模拟）已知函数 $f(x)=ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{1}{x}+4$ 在 $[-8，8]$ 上的最大值和最小值分别为 M、m，则 $M+m=$(　　)

A．8　B．6　C．4　D．2

21.（2019•沙市区校级期末）若函数 $f(x)=\frac{log_3(3^x+1)}{x}+1(x\in[-2，-1]\cup[1，2])$的最大值为 M，最小值为 N，则 $M+N=$（　　）

A．1　　　　　　　　B．2　　　　　　　　C．3　　　　　　　　D．4

22．（2019•让胡路区校级三模）已知奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(1-x)$，若当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)=lg\dfrac{1+x}{1-x}$，且 $f(2018-a)=1$，则实数 a 的值可以是 $(\quad)$

A．$\dfrac{9}{11}$　　　　B．$\dfrac{11}{9}$　　　　C．$-\dfrac{9}{11}$　　　　D．$-\dfrac{11}{9}$

23．（2019•岳麓区校级模拟）已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x-a}{e^x+a}(a>0)$ 为奇函数，则不等式 $f(x+a)+f(2x)>0$ 的解集为 $(\quad)$

A．$(-\infty,0)$　　　　B．$(0,+\infty)$　　　　C．$(-\infty,-\dfrac{1}{3})$　　　　D．$(-\dfrac{1}{3},+\infty)$

24．（2019•河南模拟）已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{e^x}$，若实数 a 满足 $f(3^{-|a+1|})>f(-\dfrac{\sqrt{3}}{3})$，则 a 的取值范围是 $(\quad)$

A．$(-\dfrac{3}{2}，-\dfrac{1}{2})$　　　　B．$(-\infty,-\dfrac{3}{2})\cup(-\dfrac{1}{2}，+\infty)$

C．$(-\dfrac{4}{3}，-\dfrac{2}{3})$　　　　D．$(-\infty,-\dfrac{4}{3})\cup(-\dfrac{2}{3}，+\infty)$

25．（2019•大连模拟）已知定义在 R 上的函数 $f(x)=e^{x-1}-e^{1-x}+(x-1)^3+x$，则不等式 $f(x-4)+f(2-3x)\geqslant 2$ 的解集为 $(\quad)$

A．$(-\infty，-2]$　　　　B．$(-\infty，2]$　　　　C．$[-2，2]$　　　　D．$[2，+\infty)$

26．（2019•新课标Ⅱ）设 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=e^x-1$，则当 $x<0$ 时，$f(x)=(\quad)$

A．$e^{-x}-1$　　　　B．$e^{-x}+1$　　　　C．$-e^{-x}-1$　　　　D．$-e^{-x}+1$

27．（多选）下列命题中正确命题为（　　）

A．函数 f（x）$=\frac{sin^2x+sinx}{sinx+1}$是奇函数　B．函数 f（x）＝1 既是奇函数又是偶函数

C．函数 $y=(\frac{1}{3})^x$与 y＝－$\log_3x$ 的图象关于直线 y＝x 对称

D．若 y＝f（x）是定义在 R 上的函数，则 y＝f（1+x）与 y＝f（1－x）的图象关于 y 轴对称

28．（多选）已知函数 f（x）＝ln（1+x）－ln（1－x），以下四个命题中真命题是（　　）

A．$\forall x\in$（－1，1），有 f（－x）＝－f（x）　B．$\forall x_1$，$x_2\in$（－1，1）且 $x_1\neq x_2$，有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$

C．$\forall x_1$，$x_2\in$（0，1），有$f(\frac{x_1+x_2}{2})\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$　　D．$\forall x\in$（－1，1），$|f$（x）$|\geqslant 2|x|$

29．（多选）关于函数 f（x）＝$ln\frac{1-x}{1+x}$，下列命题中真命题有（　　）

A．f（x）的定义域为（－∞，－1）∪（1，+∞）　　B．f（x）为奇函数

C．f（x）在定义域上是增函数 D．对任意 x_1，x_2∈（﹣1，1），都有 f（x_1）+f（x_2）＝f（$\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}$）

30．（2019秋•枣庄期中）（多选）定义在R上的奇函数 f（x）和偶函数 g（x）满足：f（x）+g（x）＝4^x，下列结论正确的有（　　）

A．$f(x)=\frac{4^x-4^{-x}}{2}$，且0＜$f$（1）＜$g$（2）B．∀$x$∈R，总有[$g$（$x$）]^2﹣[$f$（$x$）]^2＝1

C．∀x∈R，总有 f（﹣x）g（﹣x）+f（x）g（x）＝0 D．∃x_0∈R，使得 f（$2x_0$）＞$2f$（x_0）g（x_0）

31．（2019•和平区校级期中）（多选）下列判断中哪些是不正确的（　　）

A．$f(x)=(x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$是偶函数B．$f(x)=\begin{cases}x^2+x(x<0)\\-x^2+x(x>0)\end{cases}$是奇函数

C．$f(x)=\sqrt{3-x^2}+\sqrt{x^2-3}$是偶函数　D．$f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+3|-3}$是非奇非偶函数

32．（2019•南海区学业）（多选）已知函数 h（x）＝$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，$\varphi(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，则 h（x），φ（x）满足（　　）

A．φ（h（0））＝1　B．h（﹣1）＜h（3）且φ（﹣1）＜φ（3）

C．h（$2x$）＝h（x）φ（x）　D．[h（x）]^2﹣[φ（x）]^2＝1

33．（2018秋•日照期末）（多选）已知函数 f（x）＝$ax^3-\frac{1}{x}+b$（a＞0，b∈Z），选取 a，b 的一组值计算 f（lga）和 f（$lg\frac{1}{a}$）所得出的结果可以是（　　）

A．3和4　　B．﹣2和5　　C．6和2　　D．﹣2和2

34．设函数 f（x）的定义域为 A，且满足任意 x∈A 恒有 f（x）+f（2﹣x）＝2的函数可以是（　　）

A．f（x）＝2﹣x　　B．f（x）＝（x﹣1）^{2}

C．f（x）＝$\frac{x}{x-1}$　　D．f（x）＝（x﹣2）^{3}

35．（多选）若函数 $f(x)$ 具有下列性质：①定义域为 $(-1,1)$；②对于任意的 $x,y\in(-1,1)$，都有 $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$；③当 $-1<x<0$ 时，$f(x)>0$，则称函数 $f(x)$ 为 δ 的函数.若函数 $f(x)$ 为 δ 的函数，则以下结论正确的是（）

A．$f(x)$ 为奇函数 B．$f(x)$ 为偶函数 C．$f(x)$ 为单调递减函数　D．$f(x)$ 为单调递增函数

36．（2019•安庆期末）已知函数 $f(x)=\frac{2}{4^x+1}+\tan x$，则 $f(-2)+f(-1)+f(0)+f$（1）+f（2）＝____.

37．（2019•长沙期末）已知函数 $f(x)=ax-\log_2(2^x+1)+\cos x(a\in R)$ 为偶函数，则 $a=$__.

38．（2020•南通模拟）已知函数 f（x）＝$1-\frac{2}{2^x+1}$，若存在 x∈R，使得不等式 f（e^{2x}﹣a）+f（$2a$﹣e^x）＜0

成立，则实数 a 的取值范围是____.

39.（2020•景德镇一模）已知函数 $f(x)=x^{-\frac{2}{3}}+0.5^{x^4+x^2}$，则不等式 $f(log_3x)\geq\frac{5}{2}-f(log_{\frac{1}{3}}x)$的解集为__.

40.（2019 秋•宝安区期末）设 $f(x)=\frac{1}{2^x+\sqrt{2}}$，利用课本中推导等差数列前 n 项和公式的方法，可求得 f（﹣5）+f（﹣4）+…+f（0）+…+f（5）+f（6）的值是____.

41.（2020•南充模拟）已知函数 f（x）$=\frac{xe^x+x+2}{e^x+1}+\sin x$，则 f（﹣5）+f（﹣4）+f（﹣3）+f（﹣2）+f（﹣1）+f（0）+f（1）+f（2）+f（3）+f（4）+f（5）的值是____

42.（2020•南通模拟）已知函数 f（x）是定义在 R 上的奇函数，当 $x>0$ 时，f（x）$=2^x-4$，则不等式 f（x）$+2x>0$ 的解集为____.

专题 5 函数图像变换

图像变换，在熟知函数单调性和奇偶性以外，对称性和绝对值函数就成为了一个核心考点，分类讨论常常成为数形结合的核心内容，绝討值函数的自带分类讨论的功能就成为了新宠，以数构形, 以形辅数. 高考中常见模型就是给出一个函数，判断其图象，或者分段函数的恒成立零点问题. 第一讲原函数和反函数图象问题.

第一讲 原函数和反函数图像问题

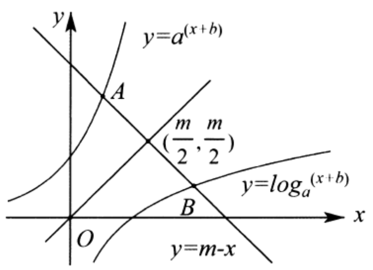


图 5-1-1

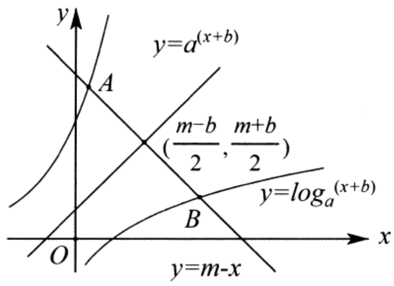


图 5-1-2

定理 1 指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $y=\log_a x$ 图象分别与直线 $y=m-x$ 交于 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$ 点, 则 $x_1+x_2=m$, 如图 $5-1-1$.

证明 由于 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$ 两点关于直线 $y=x$ 对称，故线段 AB 被直线 $y=x$ 垂直平分，且 AB 与交于点 $\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{m}{2}\right)$, 故 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{m}{2}$, 即 $x_1+x_2=m$.

推论 1 函数 $y=a^{x+b}$ 和 $y=\log_a(x+b)$ 分别与直线 $y=m-x$ 交于 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$ 两点, $x_1+x_2=m-b$.

证明 令 $x+b=t$, 则对称轴直线转化为 $y=m+b-t$, 所以 $t_1+t_2=m+b$, 故 $x_1+x_2=m-b$. 此推论可以理解为将原来所有的函数向左平移了 b 个单位，则对称轴与 AB 交点为 $\left(\dfrac{m-b}{2},\dfrac{m+b}{2}\right)$, 故 $x_1+x_2=m-b$，其本质就是对称轴与 AB 交点横坐标的两倍，即 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{m-b}{2}$, 如图 $5-1-2$.

推论 2 指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $y=\log_a x$ 分别与双曲线线 $y=\dfrac{m}{x}$ 交于 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$ 两点, 则 $x_1x_2=m$.

证明 因为 x_1 是方程 $a^x=\dfrac{m}{x}$ 的根, x_2 是方程 $\log_a x=\dfrac{m}{x}$ 的根，又因为函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数, 所以函数 $y=\log_a x$ 与函数 $y=\dfrac{m}{x}$ 的交点横坐标是函数 $y=a^x$ 与函数 $y=\dfrac{m}{x}$ 的交点纵坐标，又因为

$y=\frac{m}{x}$ 图象上点的横纵坐标之积为 m, 所以 $x_1x_2=m$.

定理 2 函数 $y=e^x$ 与函数 $y=\ln x$ 间的距离最小值为 $\sqrt{2}$, 即为切线 $y=x+1$ 到切线 $y=x-1$ 的距离.

证明 由于 $y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 互为反函数, 即寻找 $y=e^x$ 到对称轴 $y=x$ 的最小值, 由于 $y=e^x$ 上与 $y=x$ 平行的切线的切点为 $(0,1)$, 故最小距离为 $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 距离最小值为 $2d=\sqrt{2}$, 如图 $5-1-3$.

推论 3 直线 $y=1-x$ 上任意一点 P 到 $y=\ln x$ 的距离最小值为 $\sqrt{2}\pm d$, 其中 d 为 P 到点 $(0,1)$ 的距离; 同理, $y=1-x$ 上任意一点 P 到 $y=e^x$ 的距离最小值为 $\sqrt{2}\pm d$, 其中 d 为 P 到点 $(1,0)$ 的距离.

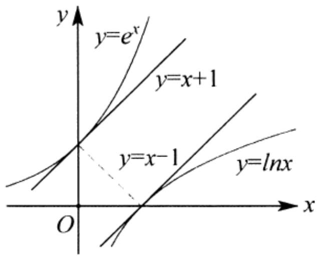


图 5-1-3

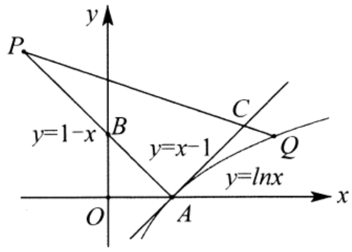


图 5-1-4

证明 由于点 $A(1,0)$ 和点 $B(0,1)$ 在直线 $y=1-x$ 上, 所以 $|PA|<|PC|<|PQ|$, $|PA|=|PB|+|AB|=d+\sqrt{2}$, 如图 $5-1-4$.

例 1:(2020•岳麓区校级月考)设 a、b 分别是方程 $2^x+x+2=0$ 与 $\log_2 x+x+2=0$ 的根, 则 $a+b=$____.

解析: 如图 $5-1-5$, 分别作出函数 $y=\log_2 x, y=2^x, y=-2-x$ 的图象, 相交于, 点 P,Q. 因为 $\log_2 a=-2-a$, $2^h=-2-b$. 而 $y=\log_2 x(x>0)$ 与 $y=2^x$ 互为反函数, 直线 $y=-2-x$ 与直线 $y=x$ 互相垂直, 因为点 P 与 Q 关于直线 $y=x$ 对称. 所以 $a=2^b=-2-b$. 所以 $a+b=-2$. 故答案为-2.

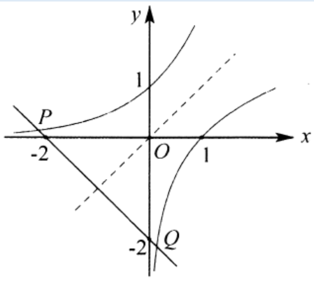


图 5-1-5

例 2.(2019•沈阳模拟)已知 x_1 是方程 $x•2^x=3$ 的根, x_2 是方程 $x\log_2 x=3$ 的根, 则 x_1x_2 的值为(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 10

解析: 方程 $x\cdot 2^x=3$ 可变形为方程 $2^x=\frac{3}{x}$, 方程 $x\log_2 x=3$ 可变形为方程 $\log_2 x=\frac{3}{x}$, 因为 x_1 是方程

$x\cdot 2^x=3$ 的根, x_2 是方程 $x\log_2 x=3$ 的根, 所以 x_1 是函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\dfrac{3}{x}$ 的交点横坐标, x_2 是函数 $y=\log_2 x$ 与函数 $y=\dfrac{3}{x}$ 交点的柄坐标, 因为函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数, 所以函数 $y=\log_2 x$ 与函数 $y=\dfrac{3}{x}$ 的交点横坐标是 x_2, 函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\dfrac{3}{x}$ 的交点纵坐标是 $\dfrac{3}{x_1}$. 又因为 $y=\dfrac{3}{x}$ 图象上点的横纵坐标之积为 3, 所以 $x_1\cdot x_2=3$, 故选 B.

例 3.（2019•瀍河区校级月考）已知实数 a, b, c, d 满足 $\dfrac{lna+1}{b+1}=\dfrac{c-2}{d-3}=1$，则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为(　　)

A. 8　　B. 4　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

解析：因为实数 a,b,c,d 满足 $\dfrac{\ln a+1}{b+1}=\dfrac{c-2}{d-3}=1$, 所以 $b=\ln a$, $d=c+1$. 令函数 $y=\ln x$, $y=x+1$. 所以 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 就是曲线 $y=\ln x$ 与直线 $y=x+1$ 之间的距离的平方.

法一对曲线 $y=\ln x$ 求导得 $y'=\dfrac{1}{x}$, 与直线 $y=x+1$ 平行的切线斜率 $k=1=\dfrac{1}{x}$, 解得 $x=1$, 将 $x=1$ 代入 $y=\ln x$ 得 $y=0$, 即切点坐标为 $(1,0)$, 所以切点 $(1,0)$ 到直线 $y=x+1$ 的距离 $d=\dfrac{|1-0+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, 即 $d^2=2$, 则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 2, 故选 C.

法二由于 $y=\ln x$ 与直线 $y=x-1$ 相切，故与 $y=x+1$ 之间的距离的平方值为 2, 故选 C.

例 4.（2019•合阳县期末）方程 $9x+3^x-\dfrac{63}{2}=0$ 的根为 x_1，方程 $x+\log_3(x-2)-\dfrac{7}{2}=0$ 的根为 x_2，则 $x_1+x_2=()$

A. $\dfrac{7}{2}$　　B. $\dfrac{9}{2}$　　C. $\dfrac{11}{2}$　　D. $\dfrac{13}{2}$

解析：法一因为 $9x+3^x-\dfrac{63}{2}=0$, 则 $3^{x-2}=3.5-x$, 因为 $x+\log_3(x-2)-\dfrac{7}{2}=0$, 则 $\log_3(x-2)=3.5-x$.

如图 5-2-2, 分别作出 $y=3^{x-2}$, $y=\log_3(x-2)$ 的图象, 可得它们关于直线 $y=x-2$ 对称, 作出直线 $y=3.5-x$，可得与直线 $y=x-2$ 垂直, 可得交点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 关于直线 $y=x-2$ 对称, 可得 $x_1-2=y_2$, $y_1+2=x_2$, 且 $x_1+y_1=x_2+y_2=3.5$, 则 $x_1+x_2-2=3.5$, 可得 $x_1+x_2=5.5$, 故选 C.

法二如图 $5-1-6$, 分别作出函数 $y=3^{x-2}$, 函数 $y=\log_3(x-2)$ 的图象，可得它们的图象关于直线 $y=x-2$ 对称，作出直线 $y=3.5-x$, 它们的交点为 $(2.75,0.75)$, 则 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=2.75$, 故 $x_1+x_2=5.5$, 故选 C.

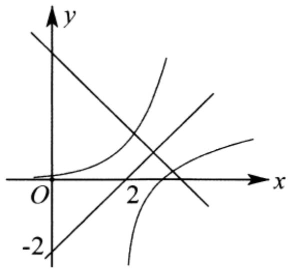


图 5-1-6

例 5.（2018•青岛二模）已知函数 $f(x)=(x-m)^2+(lnx-2m)^2$，当 $f(x)$ 取最小值时，则 $m=($　　$)$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}-ln2$　　C. $\frac{1}{10}-\frac{2}{5}ln2$　　D. $-2ln2$

解析：函数 $f(x)=(x-m)^2+(\ln x-2m)^2$ 的几何意义是，点 $(x,\ln x)$ 与点 $(m,2m)$ 的距离的平方，当直线 $y=2x$ 与曲线 $y=\ln x$ 的切线平行时，$f(x)$ 取得最小值，由 $y=\ln x$ 的导数为 $y'=\frac{1}{x}$，设与直线 $y=2x$ 平行的切线与曲线 $y=\ln x$ 的切点为 $(t,\ln t)$，由 $\frac{1}{t}=2$，可得 $t=\frac{1}{2}$，则切点为 $\left(\frac{1}{2},-\ln 2\right)$，联立直线 $y=2x$ 和直线 $y+\ln 2=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$，解得交点的横坐标为 $m=\frac{1}{10}-\frac{2}{5}\ln 2$，故选 C.

例 6.（2019•襄阳月考）设 $D=\sqrt{(x-a)^2+(e^x-2\sqrt{a})^2}+a+2$．其中 $e\approx 2.71828$，则 D 的最小值为(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}+1$　　D. $\sqrt{3}+1$

解析：由题意可得 $a\geqslant 0, D=\sqrt{(x-a)^2+\left(e^x-2\sqrt{a}\right)^2}+a+2$，由 $\sqrt{(x-a)^2+\left(e^x-2\sqrt{a}\right)^2}$ 表示两，点 $C\left(x,e^x\right)$ 与点 $A(a,2\sqrt{a})$ 的距离，而 A 在抛物线 $y^2=4x(x\geq 0)$ 上，抛物线的焦，点 $F(1,0)$，准线为 $x=-1$，则 D 表示 A 与 C 的距离和 A 与准线的距离的和再加上 1，由抛物线的定义可得 D 表示 A 与 C 的距离和 A 与 F 的距离的和再加上 1. 如图 5-1-7，当 F,A,C 三，点共线，且 QF 为曲线 $y=e^x$ 的法线，D 取得最小值，即 Q 为切点，设为 $\left(m,e^m\right)$，由 $\frac{e^m-0}{m-1}\cdot e^m=-1$，可得 $m+e^{2m}=1$，设 $g(m)=m+e^{2m}$，则 $g(m)$ 递增，且 $g(0)=1$，可得切点 $Q(0,1)$，即有 $|FQ|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，则 D 的最小值为 $\sqrt{2}+1$，故选 C.

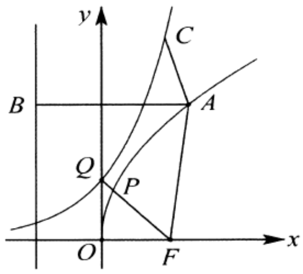


图 5-1-7

定理三当 $f(m)=g(n)$ 成立时，$n-m$ 最值可以转化为 $h(x)=g^{-1}(x)-f^{-1}(x)$ 最值问题，简称反函数构造法.

例 7.（2019•郑州期中）已知函数 $f(x)=e^{3x-1}$，$g(x)=\frac{1}{3}+lnx$，若 $f(m)=g(n)$，则 $n-m$ 的最小值为____.

解析:法一设 $f(m)=g(n)=t$,所以 $e^{3m-1}=\frac{1}{3}+\ln n=t,(t>0)$,所以 $3m-1=\ln t$, $m=\frac{1}{3}(1+\ln t),n=e^{t-\frac{1}{3}}$

故 $n-m=e^{t-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(1+\ln t)(t>0)$,令 $h(t)=e^{t-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(1+\ln t)(t>0),h'(t)=e^{t-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t}(t>0)$,易知 $h'(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,且 $h'\left(\frac{1}{3}\right)=0$, 当 $t>\frac{1}{3}$ 时, $h'(t)>0$, 当 $0<t<\frac{1}{3}$ 时, $h'(t)<0$,即当 $t=\frac{1}{3}$ 时, $h(t)$ 取得极小值同时也是最小值，此时 $h\left(\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3}\left(1+\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{2+\ln 3}{3}$, 即 $n-m$ 的最小值为 $\frac{2+\ln 3}{3}$.故答案为 $\frac{2+\ln 3}{3}$.

法二 函数 $f^{-1}(x)=\frac{\ln x}{3}+\frac{1}{3}$, $g^{-1}(x)=e^{x-\frac{1}{3}}$, 则 $n-m=h(x)=e^{x-\frac{1}{3}}-\frac{\ln x}{3}-\frac{1}{3}$, $h'(x)=e^{x-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3x}$ $=0$, $x=\frac{1}{3}$,即 $h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2+\ln 3}{3}$.故答案为 $\frac{2+\ln 3}{3}$.

达标训练（前 4 题适合高一，之后题适合高二复习）

1.（2019•衡山校级月考）若 x_1 满足 $x+3^{x-1}=4$， x_2 满足 $x+\log_3(x-1)=4$，则 $x_1+x_2=($　　$)$

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

2.（2019•宁波期中）若 x_1 是方程 $2^{x-1}+x-4=0$ 的根， x_2 是方程 $x+\log_2 x=3$ 的根，则 $x_1+x_2=$____.

3.（2019•岳麓区校级期中）已知方程 $x+2+\log_2 x=0$ 和 $x+2+2^x=0$ 的根分别是 a 和 b，则函数 $f(x)=(x+a)(x+b)$ 的单调递增区间是____.

4.（2020•汉阳月考）已知 $2^m+2m=5$， $2n+2\log_2(n-1)=5$，则 $m+n=$

5.（2019•定州市校级期末）已知 x_1， $x_2 \in R$，则 $(x_1-e^{x_2})^2+(x_2-e^{x_1})^2$ 的最小值等于( )

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

6.（2018•安徽模拟）若 x， a， b 均为任意实数．且 $(a+2)^2+(b-3)^2=1$，则 $(x-a)^2+(lnx-b)^2$ 的最小值为( )

A. $3\sqrt{2}$　　B. 18　　C. $3\sqrt{2}-1$　　D. $19-6\sqrt{2}$

7.（2018•全国期末）设 m，n∈R，那么（$m-e^n$）^{2}+（$n-e^m$）^{2}的最小值是____．

8.（2019•成都期中）若实数 a， b， c， d 满足 $(b+2a^2-6lna)^2+|2c-d+6|=0$，则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为( )

A. 5　　B. $2\sqrt{5}$　　C. 20　　D. $4\sqrt{5}$

9.（2019•辛集市校级月考）已知实数 a，b，c，d满足$\frac{1-a}{b-1}=\frac{c-2e^c}{d}=1$，其中 e 是自然对数的底数，则（$a-c$）^{2}+（$b-d$）^{2}的最小值为（ ）

A. 18　　B. 12　　C. 10　　D. 8

10.（2019•黄州区校级月考）设φ（a，b）$=\sqrt{(a-b)^2+(lna-\frac{b^2}{4})^2}+\frac{b^2}{4}$（$a$>0，$b$∈R），当 a，b变化时φ（a，b）的最小值为____．

11.（2019•和平区校级月考）若 a，b 分别是方程 $x+lgx=5$，$x+10^x=5$ 的解，$f(x)=\begin{cases} x^2+(a+b)x+3,(x\leqslant 0) \\ x^{\frac{b}{a}},(x>0) \end{cases}$，则关于 x 的方程 $f(x)=x$ 的解的个数是( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

12.（2019•芙蓉区校级期末）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}+ln\frac{x}{2}$，$g$（$x$）$=e^{x-2}$，若 g（m）$=f$（n）成立，则 $n-m$的最小值为____．

13.（2019•龙岩期末）已知函数 $f(x)=e^{2x-1}$， $g(x)=\frac{1}{2}+lnx$，若 $f(m)=g(n)$，则 $m-n$ 的最大值是( )

A. $-\frac{ln2+1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}-\sqrt{e}$　　C. $\frac{ln(2e)}{2}$　　D. $-\sqrt{e}-\frac{1}{2}$

14.（2019•湖北模拟）已知函数 $f(x)=e^x-e$，$g(x)=lnx+1$，若对于 $\forall x_1 \in R$，$\exists x_2 \in (0,+\infty)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，则 x_1-x_2 的最大值为( )

A. e　　B. $1-e$　　C. 1　　D. $1-\frac{1}{e}$

第二讲共对称中心问题

定理四 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：$f(x)+f(2a-x)=2b, g(x)+g(2a-x)=2b$, 则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 关于点 (a,b) 对称, 当 $f(x)$ 与有 m 个交点时, 一定有 $\sum_{i=1}^{m} x_i = am$; $\sum_{i=1}^{m} y_i = bm$.

证明 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均关于点 (a,b) 对称, 即有 $\left(x_1,y_1\right)$ 为交点, 即有 $\left(2a-x_1,2b-y_1\right)$ 也为交点, $\left(x,y_2\right)$ 为交点，即有 $\left(2a-x_2,2b-y_2\right)$ 也为交点，… 则有 $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_m=\frac{1}{2}\left[x_1+\left(2a-x_1\right)+x_2+\right.$.
$\left.\left(2a-x_2\right)+\cdots+x_m+\left(2a-x_m\right)\right]=am,\quad y_1+y_2+y_3+\ldots+y_m=$
$\frac{1}{2}\left[y_1+\left(2b-y_1\right)+y_2++\left(2b-y_2\right)+\ldots+y_m+\left(2b-y_m\right)\right]=bm$.

例 8.（2019•遂宁期末）已知函数 $f(x)(x\in R)$ 满足 $f(2-x)=-f(x)$，若函数 $y=\frac{1}{x-1}$ 与 $f(x)$ 图象的交点为 $(x_1$，$y_1)$，$(x_2$，$y_2)$，…，$(x_m$，$y_m)(m\in N^*)$，则 $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_m$ 的值为(　　)

A. $4m$　　B. $2m$　　C. m　　D. 0

解析：函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x)=-f(x)$, 即为 $f(x)+f(2-x)=0$, 可得 $f(x)$ 关于点 $(1,0)$ 对称，函数 $y=\frac{1}{x-1}$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称, 即有 $\left(x_1,y_1\right)$ 为交点, 即有 $\left(2-x_1,-y_1\right)$ 也为交, 点, $\left(x_2,y_2\right)$ 为交点, 即有 $\left(2-x_1,-y_1\right)$ 也为交点, 则有 $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_m=\frac{1}{2}\left[x_1+\left(2-x_1\right)+x_2++\left(2-x_2\right)+\ldots+x_m+\left(2-x_m\right)\right]$ $=m$. 故选 C.

例 9.（2018•南平一模）已知函数 $f(x)(x\in R)$ 满足 $f(-x)=4-f(x)$，若函数 $y=\frac{2x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 $(x_1$，$y_1)$，$(x_2$，$y_2)$，…，$(x_{10}$，$y_{10})$，则 $\sum_{i=1}^{10}(x_i-y_i)=$(　　)

A. 10　　B. 20　　C. -10　　D. -20

解析：因为函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=4-f(x)$, 则 $f(-x)+f(x)=4$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,2)$ 对称, 又因为函数 $y=\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}$ 也关于点 $(0,2)$ 对称, 所以 $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{10}=0, y_1+y_2+y_3+\ldots+y_{10}=$ $5\times4=20$，则 $\sum_{i=1}^{10}\left(x_i-y_i\right)=-20$, 故选 D.

15.（2018•信阳二模）已知函数 $f(x)(x\in R)$ 满足 $f(-x)=8-f(4+x)$，函数 $g(x)=\frac{4x+3}{x-2}$，若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象共有 168 个交点，记作 $P_i(x_i$，$y_i)(i=1$，2，…，168)，则 $(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\ldots+(x_{168}+y_{168})$ 的值

为( )

A．2018　　B．2017　　C．2016　　D．1008

16．（2018•陆良县二模）已知函数 $f(x)(x\in R)$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$，若函数 $y=\sin\pi x+1$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 $(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，…，$(x_m，y_m)$，则 $\sum_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=($ $)$

A．0　　B．m　　C．$2m$　　D．$4m$

17．（2019•武邑县校级期中）函数 $y=\dfrac{1}{1-x}$ 的图象与函数 $y=2\sin\pi x(-2\leqslant x\leqslant 2)$ 的图象所有交点的横坐标之和等于( )

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

18．（2019•渝中区校级期末）函数 $y=\frac{x-2}{x-1}$的图象与与函数 $y=2\sin\pi x+1$（﹣$2\leqslant x\leqslant 4$）的图象的所有的交点的横坐标与纵坐标之和等于（ ）

A．8　　B．12　　C．16　　D．20

19.（2018•宣城期末）已知函数 $f(x)=x+2sin(x-\frac{1}{2})$，则 $f(\frac{1}{2019})+f(\frac{2}{2019})+\cdots+f(\frac{2018}{2019})$的值等于（ ）

A．2019　　B．2018　　C．$\frac{2019}{2}$　　D．1009

20．（2019•长春四模）若函数 $f(x)=ln(e^{x-1}+e^{1-x})-2$ 与 $g(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ 的图象的交点为 $(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，…，$(x_m，y_m)$，则 $\sum_{i=1}^{m}x_i=($ $)$

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

21．（2019•上海校级模拟）已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}x^2+1,x\in[0,1)\\1-x^2,x\in[-1,0)\end{cases}$ 且 $f(x)=f(x+2)$，函数 $g(x))$ 的表达式为 $g(x)=\dfrac{x+3}{x+2}$，则方程 $g(x)=f(x)$ 在区间 $[-5，1]$ 上的所有实数根之和为____.

22．（2018•淮北一模）若存在实数 x 使得关于 x 的不等式 $(e^x-a)^2+x^2-2ax+a^2\leqslant\dfrac{1}{2}$ 成立，则实数 a 的取值范围是( )

A．$\{\dfrac{1}{2}\}$　　B．$\{\dfrac{1}{4}\}$　　C．$[\dfrac{1}{2}，+\infty)$　　D．$[\dfrac{1}{4}，+\infty)$

第二讲 绝对值函数交点问题

类型一 单个绝对值问题：

(1)将 $y=f(x)$ 的图象，x 轴上方部分不变，下方部分以 x 轴为对称轴向上翻折即得 $y=|f(x)|$ 的图象；

(2)将 $y=f(x)$ 的图象，y 轴右方部分不变，以 y 轴为对称轴将右方部分向左翻折即得 $y=f(|x|)$ 的图象，故 $y=f(|x|)$ 一定是偶函数；

(3)将 $y=f(x)$ 的图象，x 轴上方部分不变，下方部分以 x 轴为对称轴向上翻折，再将折后图象 y 轴右方部分不变，以 y 轴为对称轴将右方部分向左翻折即得 $y=|f(|x|)|$.

例 10.（2019•城关区校级月考）已知 $a>0$，且 $a\neq1$，则方程 $a^{|x|}=|\log_a x|$ 的实根个数是（　　）

A. 1 个或 2 个　　　　B. 1 个或 3 个

C. 2 个或 3 个　　　　D. 1 个或 2 个或 3 个

解析：①当 $0<a<1$ 时，分别作出 $y=a^{|x|}$ 和 $y=|\log_a x|$ 的函数图象如图 5-3-1，由图象可知，此时两函数图象有两个交点，故方程 $a^{|x|}=|\log_a x|$ 有两个根：2 当 $a>1$ 时，作出 $y=a^{|x|}$ 和 $y=|\log_a x|$ 的函数图象如图 $5-3-2$，由图象可知，此时两函数图象有 1 个交点或 3 个交点，故方程 $a^{|x|}=|\log_a x|$ 有 1 个根或 3 个根，故选 D.

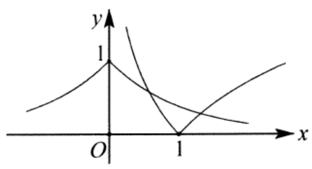


图 5-3-1

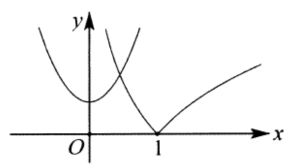


图 5-3-2

例 11.（2020•黄山一模）已知函数 $f(x)=ln|x|-a|x|+\frac{3}{2}$ 有 4 个零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A.（0，e^2）　　B.（$-\infty$，e^2）　　C. $(0,\ e^{\frac{1}{2}})$　　D. $(-e^{\frac{1}{2}},\ +\infty)$

解析：由题意得 $|x|>0$，令 $t=|x|$，则 $t>0$. 故 $y=\ln t-at+\frac{3}{2}$，因为函数 $f(x)=\ln|x|-a|x|+\frac{3}{2}$ 有 4 个零点，所以 $y=\ln t-at+\frac{3}{2}$ 有 2 个零点，即曲线 $y=\ln t$ 与直线 $y=at-\frac{3}{2}$ 有 2 个交点. 由题画出函数图象如图 $5-3-3$.

法一则直线在 $y=-\frac{3}{2}$ 与直线 $y=at-\frac{3}{2}$ 与曲线 $y=\ln t$ 相切之间即有 2 个交点.

①当直线在 $y=-\frac{3}{2}$ 时，$a=0$；

②当直线 $y=at-\frac{3}{2}$ 与曲线 $y=\ln t$ 相切时，设切，点为 (t_0,y_0). 对手曲线 $y=\ln t$，求导 $y'=\frac{1}{t}$，$y'|_{t=t_0}=\frac{1}{t_0}$.

所以曲线 $y=\ln t$ 在切点 (t_0,y_0) 的切线方程为 $y-y_0=\frac{1}{t_0}(t-t_0)$，整理得 $y=\frac{1}{t_0}t-1+\ln t_0$，所以

$-1+\ln t_0=-\frac{3}{2}$，解得 $t_0=e^{-\frac{1}{2}}$. 所以 $a=\frac{1}{t_0}=\frac{1}{e^{-\frac{1}{2}}}=e^{\frac{1}{2}}$. 所以实数 a 的取值范围为 $\left(0,e^{\frac{1}{2}}\right)$, 故选 C.

法二 因为函数 $y=\ln t-at+\frac{3}{2}$ 有两个零点, 则方程 $at=\ln t+\frac{3}{2}$ 有两个解, 即 $a=\frac{\ln e^{\frac{3}{2}}t}{t}$ 有两个根, 画出函数图象如图 $5-3-4$, 同构得 $h(t)=\frac{\ln t}{t}$, 则 $a=e^{\frac{3}{2}}\frac{\ln e^{\frac{3}{2}}t}{e^{\frac{3}{2}}t}=e^{\frac{3}{2}}h\left(e^{\frac{3}{2}}t\right)\in\left(0,e^{\frac{1}{2}}\right)$, 所以实数 a 的取值范围为 $\left(0,e^{\frac{1}{2}}\right)$, 故选 C.

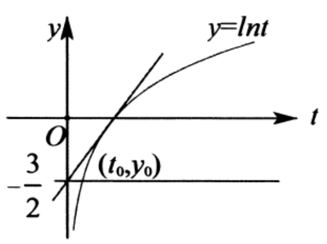


图 5-3-3

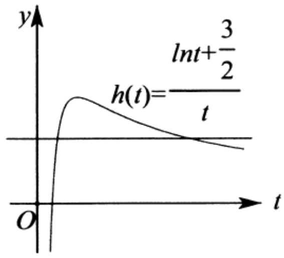


图 5-3-4

例 12.（2019 山东临沂市期中）关于 x 的方程 $ax^2-|x|+a=0$ 有四个不同的实数解，则实数 a 的值可能是

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

解析：方程 $ax^2-|x|+a=0$ 中，当 $a=0$ 时，只有一个解 $x=0$, 因此方程 $ax^2-|x|+a=0$ 有四个不同的解, 则 $a\neq0$, $x\neq0$, 因此方程可变为 $\frac{1}{a}=\frac{x^2+1}{|x|}=|x|+\frac{1}{|x|}$. 如图 $5-3-5$, 作出函数 $y=|x|+\frac{1}{|x|}$ 的图象和直线 $y=\frac{1}{a}$, 函数 $y=|x+\frac{1}{|x|}$ 的最小值为 2, 因此当 $\frac{1}{a}>2$ 时, 直线 $y=\frac{1}{a}$ 与函数 $y=|x|+\frac{1}{|x|}$ 的图象有四个不同的交点, 即原方程有四个解, 满足 $\frac{1}{a}>2$ 的有 BCD. 故选 BCD.

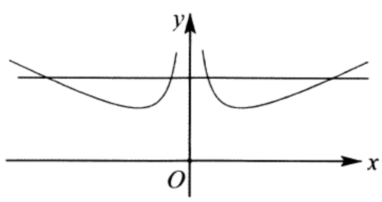


图 5-3-5

例 13.（2019•盐湖区校级期中）已知 $f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数，当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=|x-a^2|-a^2$ 且对任意 $x\in$R，恒有 $f(x+1)\geqslant f(x)$，则实数 a 的取值范围为____.

解析：当 $x\ge 0$ 时，$f(x)=\left|x-a^2\right|-a^2=\begin{cases}x-2a^2,x\ge a^2\\-x,0\le x\le a^2\end{cases}$， 又 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，所以 $f(x)$ 的图象如图 $5-3-6$：当 $x<0$ 时，函数的最大值为 a^2. 因为对任意 $x\in R$, 恒有 $f(x+1)\ge f(x)$, 要满足 $f(x+1)\ge f(x)$，则 1 大于等于区间长度 $3a^2-\left(-a^2\right)$, 所以 $1\ge 4a^2$, 解得 $-\dfrac{1}{2}\le a\le\dfrac{1}{2}$. 所以实数 a 的取值范围为 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$. 故答案为 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

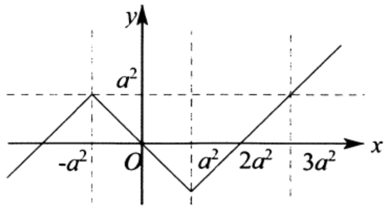


图 5-3-6

此题可以理解为平移单位一定要超越“同位最值”, 如图 5-3-6 可知, $\left(-a^2,a^2\right)$ 和 $\left(3a^2,a^2\right)$ 即为“同位最值”, 或者 “同位零点”，即 $\left(-2a^2,0\right)$ 和 $\left(2a^2,0\right)$ 即为 “同位零点”.

类型二 多绝对值函数

1. 双绝对值函数之平底锅函数和 Z 字函数型

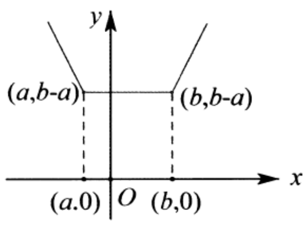


图 5-3-7

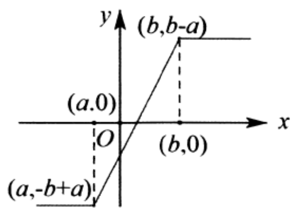


图 5-3-8

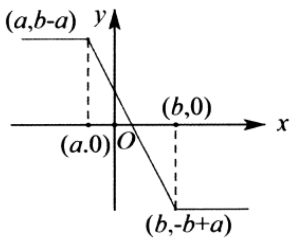


图 5-3-9

$f(x)=|x-a|+|x-b|$ $\qquad$ $f(x)=|x-a|-|x-b|$ $\qquad$ $f(x)=|x-b|-|x-a|(b>a)$

(1) 关于函数 $f(x)=|x-a|+|x-b|$, 从绝对值的概念理解，就是数轴上的点 x 到点 a 和点 b 的距离之和，显然点 x 位于点, a 、点 b 中间时，距离之和最小，作出函数图象如图 5-3-7，就是典型的“平底锅函数”，当 $a\le x\le b$ 时，取得最小值.

因为函数 $f(x)=|x-a|+|x-b|=\begin{cases}-2x+a+b(x<a)\\b-a(a\le x\le b)\\2x-a-b(x>b)\end{cases}$ ，所以当 $a+b=0$ 时，函数 $f(x)$ 偶函数.

(2) 关于 $f(x)=|x-a|-|x-b|$ 和 $f(x)=|x-b|-|x-a|(b>a)$, 属于典型的“Z 字函数”. 注意一点、当

被减绝对值式子为零的时，函数取得最小值.

因为函数 $f(x)=|x-a|-|x-b|=\begin{cases}a-b(x<a)\\2x-a-b(a\le x\le b)\\-a+b(x>b)\end{cases}$，所以当 $a+b=0$ 时，函数 $f(x)$ 是奇函数.

因为函数 $f(x)=|x-b|-|x-a|(b>a)=\begin{cases}-a+b(x<a)\\-2x+a+b(a\le x\le b)\\a-b(x>b)\end{cases}$，所以当 $a+b=0$ 时，函数 $f(x)$ 是奇函数.

2. 双绝对值函数 $f(x)=m|x-a|+n|x-b|$ 类型

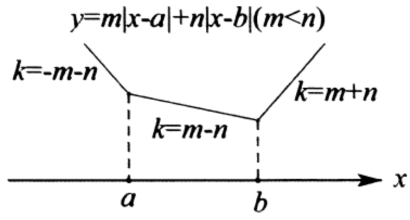


图 5-3-10

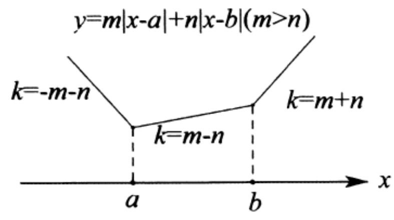


图 5-3-11

结论：在绝对值函数中，系数大的决定绝对值函数的最值，绝对值之和只有最小值，并在大系数绝对值取得零点时取到最小值. 这种绝对值函数称“尖角函数”.

3. 双绝对值函数 $f(x)=m|x-a|-n|x-b|$ 类型

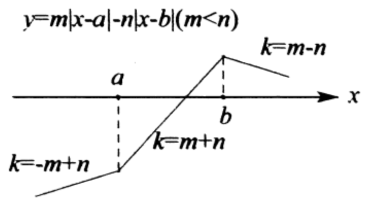


图 5-3-12

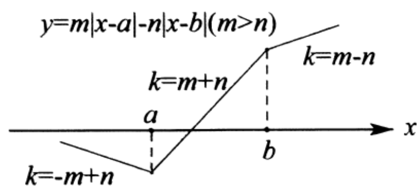


图 5-3-13

结论:在绝对值函数中,系数大的决定函数的最值,类似于二次函数,系数大的为正,开口向上,有小值;系数大的为负，开口向下，有最大值.

4. 多绝对值函数 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\left|x-a_i\right|$ 之尖尖角模型 $(n=2k-1)$ 与平底锅模型 $(n=2k)$

(1) 已知函数 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\left|x-a_i\right|$. 如图 5-3-14, 当 $n=2k-1$ 时, 函数 $f(x)$ 属于尖尖角函数模型，令使得单个绝对值取得零点的数构成的数列为 $\{a_n\}$, 且 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{2k-1}$, 当 $x=a_k$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值. 如图 $5-3-15$、当 $n=2k$ 时, 函数 $f(x)$ 属于平底锅模型，当 $x\in\left[a_k,a_{k+1}\right]$ 时、函数 $f(x)$ 取得最小值.

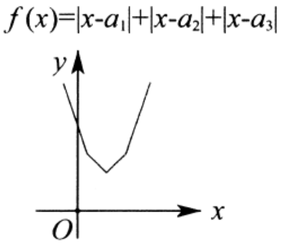


图 5-3-14

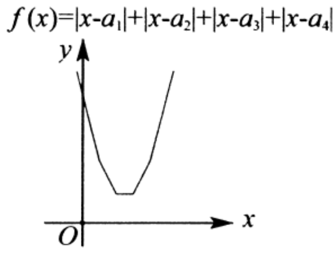


图 5-3-15

(2)多绝对值函数中的斜率问题:

①尖尖角(平底钠)函数两侧函数图象的斜率互为相反数;

②以中间点（段）为基准分别往左和往右，每经过一个零点,斜率绝对值增加 1;;;;

③零点数目相同的多绝对值函数一定是每一段都平行（重合）的函数.

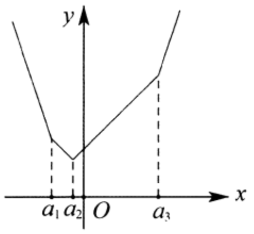


图 5-3-16

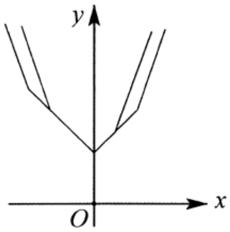


图 5-3-17

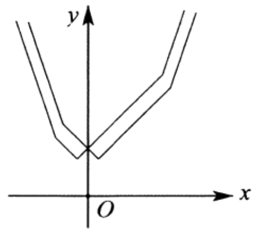


图 5-3-18

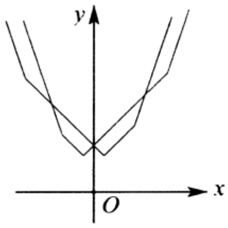


图 5-3-19

图示说明:

图 5-3-16:尖尖角(平底锅）函数的斜率问题，如 a_1a_2 段直线和 a_2a_3 段直线的斜率互为相反数.

图 5-3-17:两部分函数图象有无数个交点（部分重合）的模型.

图 5-3-18:两部分函数图象有单个交点（无重合）的模型.

图 5-3-19:两部分函数图象有三个交点（无重合）的模型.

结论函数零点个数相同的尖尖角涵数图象的交点个数只能是奇数个，平底锅函数图象的交点个数可以出现偶数个(平底锅位置出现一个).

例 14.（2019 秋•朝阳区校级月考）已知函数 $f(x)=|x-1|+|x+1|$（$x\in R$），则 $f(x)$ 的图象（　　）

A．关于原点对称，但不关于 y 轴对称　B．关于 y 轴对称，但不关于原点对称

C．关于原点对称，也关于 y 轴对称　　D．既不关于原点对称，也不关于 y 轴对称

解析：因为函数 $f(x)=|x-1|+|x+1|$,所以 $f(-x)=f(x)$,即函数 $f(x)$ 为偶函数,则图象关于 y 轴对称,故选 B.

例 15.（2019•沙河口区校级期中）已知函数 $f(x)=|2x-a|+a$（$a\in R$），满足 $f(x)\leqslant 6$ 的解集为 $\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$，若存在实数 n 使 $f(\frac{n}{2})\leq m+f(-\frac{n}{2})$成立，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. [﹣2，+∞)　　B. [2，+∞)　　C. (﹣∞，﹣2]　　D. (﹣∞，2]

解析：因为不等式 $f(x)\le 6$, 则可得 $\begin{cases}6-a\ge 0\\ a-6\le 2x-a\le 6-a\end{cases}$, 解得 $a-3\le x\le 3$. 因为 $f(x)\le 6$ 的解集为 $\{x|-2\le x\le 3\}$, 所以 $a-3=-2$, 解得 $a=1$, 所以 $f(x)=|2x-1|+1$, 若存在实数 n 使 $f\left(\frac{n}{2}\right)\le m+f\left(-\frac{n}{2}\right)$ 成立，即 $|n-1|+1-|-n-1|-1\le m$, 即 $|n-1|-|n+1|\le m$, 而 $|n-1|-|n+1|\ge -2$, 则 $m\ge -2$, 故选 A.

例 16.（2019•拉萨期末）若不等式 $|2x+1|-|x-4|\geqslant m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. (﹣∞，﹣1]　　B. $(-\infty,-\frac{5}{2}]$　　C. $(-\infty,-\frac{9}{2}]$　　D. (﹣∞，﹣5]

解析：法一令 $f(x)=|2x+1|-|x-4|$, 当 $x\le -\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=-2x-1+x-4=-x-5$, 当 $-\frac{1}{2}<x<4$ 时，$f(x)=2x+1+x-4=3x-3$, 当 $x\ge 4$ 时，$f(x)=2x+1-x+4=x+5$, 所以函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ 上是减函数，在 $\left(-\frac{1}{2},4\right)$ 上是增函数，在 $[4,+\infty)$ 上是增函数，所以 $f(x)_{\min}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-5=-\frac{9}{2}$. 因为 $|2x+1|-|x-4|\ge m$ 恒成立, 即 $m\le f(x)$ 恒成立, 所以 $m\le f(x)_{\min}$, 即 $m\le -\frac{9}{2}$, 故选 C.

法二令函数 $f(x)=|2x+1|-|x-4|=2\left|x+\frac{1}{2}\right|-|x-4|$, 由于零点 $-\frac{1}{2}$ 的系数大, 且系数为正, 根据双绝对值模型可知, $f(x)_{\min}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{2}\le m$, 即 $m\le -\frac{9}{2}$, 故选 C.

例 17.（2020•河北期中）设 $f(x)=|ax+b|+|cx+d|$（$x\in R$），$g(x)=|ax+b|-|cx+d|$（$x\in R$）且都满足 $\frac{b}{a}\ne\frac{d}{c}$，则下列说法错误的是（　　）

A. $f(x)$ 有最小值而无最大值　　B. 当 $|a|>|c|$ 时，$g(x)$ 有最小值而无最大值

C. 当 $|a|<|c|$ 时，$g(x)$ 有最小值而无最大值　　D. 当 $|a|=|c|$ 时，$g(x)$ 既有最小值又有最大值

解析：因为 $f(x)=|ax+b|+|cx+d|(x\in R)$, $g(x)=|ax+b|-|cx+d|(x\in R)$, 且都满足 $\frac{b}{a}\ne\frac{d}{c}$, 不妨令 a,b 均为正. 因为 $ax+b=0$, 所以 $x=-\frac{b}{a}$, 又因为 $cx+d=0$, 所以 $x=-\frac{d}{c}$; 则当 $x=-\frac{b}{a}$, 或 $x=-\frac{d}{c}$ 时, 函数有最小值而无最大值，故 A 正确；当 $|a|>|c|$ 时，$g(x)$ 有最小值而无最大值，故 B 正确；当

$|a|<|c|$时，$g(x)$有最大值而无最小值，故C错误；当$|a|=|c|$时，$g(x)$既有最小值又有最大值，故D正确，故选C.

点评此题A选项可以理解为平底锅或者尖尖角函数，D可以理解为Z字函数，B可以理解为类似开口向上的二次函数，C可以理解为开口向下的二次函数.

例18.（2019•林州市模拟）如果$0<p<15$，那么代数式$|x-p|+|x-15|+|x-p-15|$在$p\leqslant x\leqslant 15$的最小值是（　　）

A．30　　B．0

C．15　　D．一个与p有关的代数式

解析：法一因为$p\le x\le 15$，所以$x-p\ge 0$，$x-15\le 0$，$x-p-15\le 0$，所以$|x-p|+|x-15|+|x-p-15|=x-p+15-x+p+15-x=30-x$，所以当$x=15$时，代数式$|x-p|+|x-15|+|x-p-15|$的最小值为$30-15=15$，故选$C$.

法二 由于代数式$|x-p|+|x-15|+|x-p-15|$是三个绝对值的和，故为“尖尖角”模型，当$x=15$时，$|x-p|+|x-15|+|x-p-15|$的最小值为15，故选C.

例19.（2019•成都校级期末）已知函数$f(x)$是定义在R上的奇函数，当$x\geqslant 0$时，$f(x)=\frac{1}{2}(|x-a^2|+|x-2a^2|-3a^2)$，若对于任意的实数$x$，都有$f(x-1)\leqslant f(x)$成立，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$[-\frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{\sqrt{3}}{6}]$　　B．$[-\frac{\sqrt{6}}{6},\ \frac{\sqrt{6}}{6}]$　　C．$[-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}]$　　D．$[-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}]$

解析：法一因为$x\ge 0$时，函数$f(x)$满足$f(x)=\frac{1}{2}\left(\left|x-a^2\right|+\left|x-2a^2\right|-3a^2\right)$，利用零点分段法去绝对值得：$f(x)=\begin{cases}x-3a^2,x>2a^2\\-a^2,a^2<x\le 2a^2\\-x,0\le x\le a^2\end{cases}$，画出函数$f(x)$的图象如图$5-3-20$，由$f(x)=x-3a^2$，$x>2a^2$，得$f(x)>-a^2$；当$a^2<x<2a^2$时，$f(x)=-a^2$；由$f(x)=-x,0\le x\le a^2$，得$f(x)\ge -a^2$. 所以当$x>0$时，$f(x)_{\min}=-a^2$，因为函数$f(x)$为奇函数，所以当$x<0$时，$f(x)_{\max}=a^2$. 因为对$\forall x\in R$，都有$f(x-1)\le f(x)$，所以$2a^2-\left(-4a^2\right)\le 1$，解得$-\frac{\sqrt{6}}{6}\le a\le \frac{\sqrt{6}}{6}$，故选B.

法二如图$5-3-21$，根据图象可知，此题属于双绝对值平底锅模型，抓住平移至同位，即至少将零点的$-3a^2$

右移至零，点 $3a^2$ 时，满足 $f(x-1)\le f(x)$ 恒成立，此时即 $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\le a\le\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，故选 B．

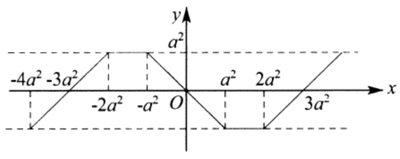


图 5-3-20

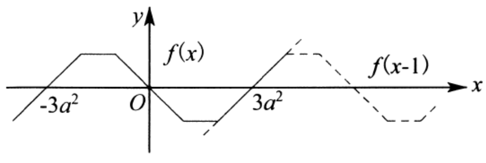


图 5-3-21

例 20.（2019•嘉定区一模）已知 a_1，a_2，a_3 与 b_1，b_2，b_3 是 6 个不同的实数，若关于 x 的方程 $|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|=|x-b_1|+|x-b_2|+|x-b_3|$ 解集 A 是有限集，则集合 A 中，最多有____个元素．

解析：法一令函数 $f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|$，$g(x)=|x-b_1|+|x-b_2|+|x-b_3|$，将关于 x 的方程 $|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|=|x-b_1|+|x-b_2|+|x-b_3|$ 解的个数的问题转化为两个函数图象交点个数的问题，

不妨令 $a_1<a_2<a_3$，$b_1<b_2<b_3$，

又 $f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|=\begin{cases}3x-a_1-a_2-a_3,x>a_3\\x-a_1-a_2+a_3,a_2<x<a_3\\-x-a_1+a_2+a_3,a_1<x<a_2\\-3x+a_1+a_2+a_3,x<a_1\end{cases}$，$g(x)=|x-b_1|+|x-b_2|+|x-b_3|$

所组成的，且两条射线的斜率对应相等，两条线段的斜率对应相等．当 a_1,a_2,a_3 的和与 b_1,b_2,b_3 的和相等时，此时两个函数射线部分完全重合，这与题设中方程的解集是有限集矛盾不妨令 a_1,a_2,a_3 的和小手 b_1,b_2,b_3 的和即 $a_1+a_2+a_3<b_1+b_2+b_3$，$-a_1-a_2-a_3>-b_1-b_2-b_3$，两个函数图象射线部分端点左右位置不同即若左边 $f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|$ 的射线端点在左，右边射线端，点一定在右，反之亦然．不妨认为左边 $f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|$ 的射线端，点在左，右边射线端点一定在右，且射线互相平行，中间线段也对应平行，如图 $5-3-22$，A 点在左，F 点在右，此时若 B,C 点在线段 AD 的上方，则只有一个交点；若 BC 线段位置在如图位置，则有三个交，点，探究知，当 a_1,a_2,a_3 的值依次是 $1,4,5$，b_1,b_2,b_3 的值分别是 2、3、6，可得到如图的图象，所以此两函数在本题条件下，最多有三个元素，故两函数图象最多有三个交点，即方程的解集是有限集时，最多有三个元素．故答案为 3．

法二 此题为“尖尖角”函数交，点模型，由于是有限集，故不存在“三点共线”，如图 5-3-22，点，A、B、C、D、E、F 均不能三点共线，且每一段都有与之对应的平行线，且两端一定平行，故可能出现 1 个或者$$3 个交点．故答案为 3．

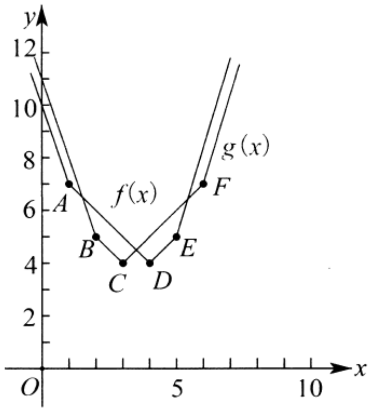


图 5-3-22

例 21. 函数 $y=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|+\cdots+10|x-10|$ 取得最小值时，x 的取值组成的集合为____

解析：法一因为函数 $y=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|+\cdots+10|x-10|$，且后半段系数很大，所以我们从 $5\le x<6$，开始讨论函数. 当 $5\le x<6$ 时，$y=-25x+275$，y 的范围是 $(125,150]$；当 $6\le x<7$ 时，$y=-13x+203$，y 的范围是 $(112,125]$；当 $7\le x<8$ 时，$y=x+105$，y 的范围是 $[112,113)$：当 $8\le x<9$ 时，$y=17x-23$，y 的范围是 $[113,130)$；当 $9\le x<10$ 时，$y=35x-185$，y 的范围是 $[130,165)$；当 $x=10$ 时，原式=165，综上所述，y 的最小值出现在 $x=7$ 处. 故答案为 7.

法二（利用尖尖角函数性质）由于零点共有 $1+2+3+\cdots+10=55$ 个，故属于“尖尖角”模型，只需找到最中间的那个点即可，即从小到大排列第 28 个零，点时，止于 $1+2+3+\cdots+6=21$，$1+2+3+\cdots+7=28$，即 y 的最小值出现在 $x=7$ 处，故答案为 7.

注意：这里使干了等差数列求和的秒杀公式 $S_n=na_{\frac{n+1}{2}}$，详细信息请参考秒 2。

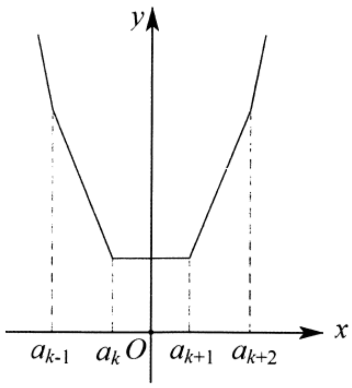


图 5-3-23

例 22.（2019•青浦区二模）等差数列 a_1，a_2，…，$a_n(n\geqslant 3,n\in N^*)$ 满足

$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|=|a_1+1|+|a_2+1|+\ldots+|a_n+1|=|a_1-2|+|a_2-2|+\ldots+|a_n-2|=2019$，则（　　）

A．n 的最大值为 50　　　　B．n 的最小值为 50

C．n 的最大值为 51　　　　D．n 的最小值为 51

解析：法一因为数列$\{a_n\}$为等差数列，则使等式$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|=|a_1+1|+|a_2+1|+\ldots+|a_n+1|$

$=|a_1-2|+|a_2-2|+\ldots+|a_n-2|$, 则数列$\{a_n\}$中的项一定有正有负，所以不妨设$a_1<0$, $d>0$, 因

$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|=|a_1+1|+|a_2+1|+\ldots+|a_n+1|=|a_1-2|+|a_2-2|+\ldots+|a_n-2|=2019$为定值， 所以

设$\begin{cases}a_{k+1}\ge 0\\ a_k<0\end{cases}$, 且$\begin{cases}a_{k+1}-2\ge 0\\ a_k-1<0\end{cases}$, 若$a_i<0$, 得 $d>3$.$且$a_i+1<0$, 则$|a_i|-|a_i+1|=1$, 同理若$a_i\ge 0$, 则

$|a_i+1|-|a_i|=1$， 所以$\sum\limits_1^k|a_i|-\sum\limits_1^k|a_i+1|=\sum\limits_{k+1}^n|a_i+1|-\sum\limits_{k+1}^n|a_i|=k$, 所以数列$\{a_n\}$的项数为$2k$. 所以

$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|==-a_1-a_2-a_3-\ldots-a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{2k}=-2\left(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k\right)+$

$\left(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k+a_{k+1}+\ldots+a_{2k}\right)=-2\left(ka_1+\dfrac{k(k-1)}{2}d\right)+\left(2ka_1+\dfrac{2k(2k+1)}{2}\right)=k^2d=2019$, 由于

$d>3$, 所以$k^2d=2019>3k^2$, 解得$k^2<673$故$k\le 25$, $n\le 50$, 故选A.

法二（构造平底锅函数）$f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|+\cdots+|x-a_n|$, 由于$f(0)=f(1)=f(-2)$, 故只能为平底锅函数（尖尖角函数只能有两个函数值相等）, 所以$n=2k$. 如图$5-3-23$, $a_k\le -2$且

$a_{k+1}\ge 1$, $|d|\ge 3$ (如果$|d|<3$, $f(0)$、$f(1)$、$f(-2)$不可能同时出现在平底锅的平底位置, 钟底宽度要小于等于公差）, 不妨令$d\ge 3$, 故

$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|=-\left(a_1+a_2+\cdots a_k\right)+a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}=S_{2k}-2S_k=2ka_{\frac{2k+1}{2}}-2ka_{\frac{k+1}{2}}$

$=k^2d=2019$, 由于$d\ge 3$, 所以$k^2d=2019\ge 3k^2$, 解得$k^2\le 673$, 故$k\le 25$, $n\le 50$, 故选A.

5. 双绝对值$h(x)=|f(x)-a|+|g(x)-b|$型*

定理 绝对值恒等式$|m|+|n|=\max\{|m+n|,|m-n|\}$.

例 23. （2018•越城区校级月考）设函数$f(x)=\left|x^2+a\right|+|x+b|(a,b\in R)$, 当$x\in[-2,2]$时，记$f(x)$最大值为$M(a,b)$，则$M(a,b)$的最小值为

解析: 法一(利用绝对值三角不等式, 辅以二次函数四点控制) $f(x)=\max\left\{x^2+x+a+b|,|x^2-x+a-b|\right\}$,

且$\left|x^2+x+a+b\right|_{\max}=\max\left\{\left|\dfrac{-1}{4}+a+b\right|,|6+a+b|\right\}$, 同理$\left|x^2-x+a-b\right|_{\min}=\left\{\dfrac{-1}{4}+a-b|,|6+a-b|\right\}$,

函数$f(x)$在[-2,2]上的最大值为$f(-2),f(2),f\left(-\dfrac{1}{2}\right),f\left(\dfrac{1}{2}\right)$中的一个， 由题意可得

$M(a,b)\ge f(-2)=|4+a|+|-2+b|$, $M(a,b)\ge f(2)=|4+a|+|2+b|$,

$M(a,b)\ge f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left|\dfrac{1}{4}+a\right|+\left|\dfrac{1}{2}+b\right|$, $M(a,b)\ge f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left|\dfrac{1}{4}+a\right|+\left|-\dfrac{1}{2}+b\right|$, 以上四个式子相加可得

$4M(a,b) \geq$

$2\left(|4+a|+\left|\frac{1}{4}+a\right|\right)+\left(|2-b|+|b+2|+\left|b+\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{1}{2}-b\right|\right) \geq 2\left|4-\frac{1}{4}\right|+\left(|2+2|+\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right|\right)=\frac{25}{2}$，即有

$M(a,b) \geq \frac{25}{8}$，可得 $M(a,b)$ 的最小值为 $\frac{25}{8}$. 故答案为 $\frac{25}{8}$.

反思 我们知道在线性规划里有着这样的一个关系，代数式 $|x|+|y|=1$ 的几何意义是一个对角线长度为 2 的正方形, 那么代数式 $|x|+|y|=k$ 又有着怎样的几何意义呢?显然此代数式的几何意义是对角线长度为 $2k$ 的正方形，并且随着 k 值的变化可以缩放该正方形. 带着这样的思维来看看此题的方法二：

法二（正方形区域构造）函数 $f(x)=\left|x^2-(-a)\right|+|x-(-b)|=|y-(-a)|+|x-(-b)| \leq M$（记 $y=x^2, x\in[-2,2]$）, 则点 (x,y) 的轨迹可作为 以 $(-b,-a)$ 为对称中心，对称轴垂直于坐标轴的正方形内部（含边界）. 随着 M 变化，正方形的大小也随之变化. 此题可以构造一个正方形，要求抛物线 $y=x^2, x\in[-2,2]$ 完全包裹在正方形内. 如图 $5-3-24$ 是临界状态，易知 $PQ: y=x+6, PS: y=-x+6$, $QR: y=x-\frac{1}{4}$, $SR: y=-x-\frac{1}{4}$, 此时对称中心为 $\left(0,\frac{23}{8}\right)$, 即 $a=-\frac{23}{8}, b=0, M=\frac{25}{8}$.

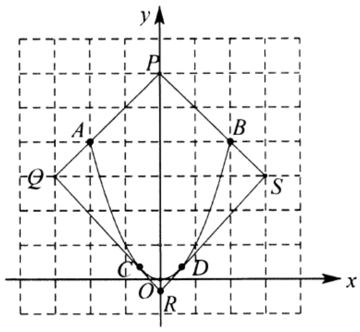


图 5-3-24

法三（分离函数之尖尖角函数开路）$\left|x^2+a\right|+|x+b| \leq M$ 在 $x\in[-2,2]$ 上恒成立, 即 $\left|x^2+a\right| \leq M-|x+b|$ 在 $x\in[-2,2]$ 上恒成立, 即 $y_1=\left|x^2+a\right|$ 的图象恒在 $y_2=M-|x+b|$ $(x\in[-2,2])$ 的下方，如图 5-3-25, 随意画出函数 $y_1=|x^2+a|$ 的大致图象, 函数 $y_2=M-|x+b|$ 是一个开口向下的 V 字图, 其中尖角的顶, 点在 $A(-b,M)$, 要使 M 尽可能小，显然在 $b=0$ 处取得（图可以解释，如图 $5-3-25$，当点 $A(-b,M)$ 在图中点 A 处，V 字图可以先向左平移，再向下平移，尖角到达点 B 处时，V_{DBE} 字图到达临界状态, 故题目简化为 $\left|x^2+a\right| \leq M-|x|$ 字图还可以继续向下移，直到如图$5-3-26$所示的临界状态，此时 $y=a-x^2 \Rightarrow y'=-2x=1 \Rightarrow x_F=-\frac{1}{2}$, 故字图还可以继续向下移，直到如图 $5-3-26$ 所示的临界状态，

此时 $y=a-x^2 \Rightarrow y'=-2x=1 \Rightarrow x_F=-\frac{1}{2}$，故 $F\left(-\frac{1}{2},-a-\frac{1}{4}\right)$,又$D(-2,4+a)$，所以

$$k_{DF}=\frac{4+a-\left(-a-\frac{1}{4}\right)}{-2+\frac{1}{2}}=1$$,解得 $a=-\frac{23}{8}$,此时直线 $l_{DF}: y=x+\frac{25}{8}$,故 $M_{\min}=\frac{25}{8}$.

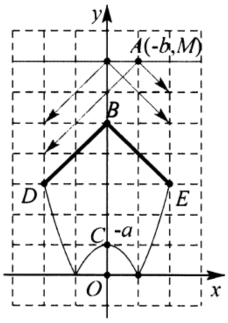


图 5-3-25

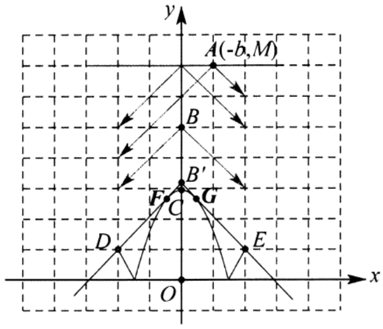


图 5-3-26

6. 曼哈顿距离

曼哈顿距离（ManhattanDistance）是由十九世纪的赫尔曼・闵可夫斯基所创词汇，是一种使用在几何度量空间的几何学用语,用以标明两个点在标准坐标系上的绝对轴距总和。曼哈顿的街道纵横交错，若要从 A 地经过 C 地到达 B 地，行走的最短距离显然是 $|AC|+|BC|$.在 $Rt\Delta ACB$ 中，我们用 $|AC|+|BC|$ 来表示 AB 间的折线距离，这种表示法就是著名的曼哈顿距离，又称为出租车几何.如图 5-3-27，我们也可以发现三种线型的不同路径(1,2,3)都对应 AB 的曼哈顿距离.

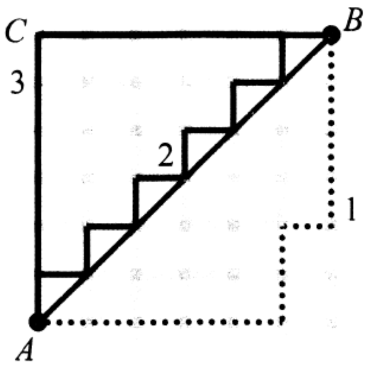


图 5-3-27

数学表示:点 $A(x_1,y_1)$ 与点 $B(x_2,y_2)$ 之间的曼哈顿距离为 $d_{AB}=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$.

例 24.（2014•江西）对任意 x，$y\in R$，$|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|$ 的最小值为（　　）

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

解析：法一对任意 $x,y\in R,|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|=|x-1|+|-x|+|1-y|+|y+1|\geq|x-1-x|+|1-y+y+1|=3$，当且仅当 $x\in[0,1]$, $y\in[-1,1]$ 成立，故选C.

法二（曼哈顿距离）如图 5-3-28，即求平面内动点 $P(x,y)$ 到两个定,点 $A(0,-1),B(1,1)$ 间垂直于坐标轴的方向的“曼哈顿距离”，显然最小值为 3，当且仅当 P 的轨迹是矩形区域内即可，故选 C.

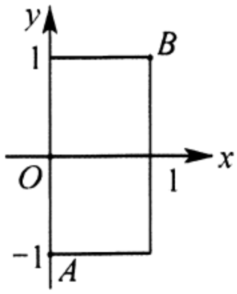


图 5-3-28

例 25.（2019•西湖区校级模拟）若不等式 $|x+1|+|\frac{1}{x}-1|\leqslant a$ 有解，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $a\geqslant 2$　　B. $a<2$　　C. $a\geqslant 1$　　D. $a<1$

解析：法一设函数 $f(x)=|x+1|+\left|\frac{1}{x}-1\right|$. ①当 $x\geq 1$ 时，$f(x)=x+2-\frac{1}{x},f^{'}(x)=1+\frac{1}{x^2}>0,f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上递增，故 $f(x)_{\min}=f(1)=2$；②当 $0<x<1$ 时，$f(x)=x+\frac{1}{x}$, $f^{'}(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x}<0$, 故 $f(x)$ 在（0, 1）上单调递减，所以 $f(x)>f(1)=2$；③当 $-1<x<0$ 时，$f(x)=x+2-\frac{1}{x}$, $f^{'}(x)=1+\frac{1}{x^2}>0$, $f(x)$ 在（-1, 0）上单调递增，所以 $f(x)>f(-1)=2$；④当 $x\leq -1$ 时，$f(x)=-x-\frac{1}{x}$, $f^{'}(x)=-1+\frac{1}{x^2}<0$, $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上单调递减, 所以 $f(x)>f(-1)=2$. 综上所述: 函数 $f(x)$ 的最小值是 2, 若不等式 $|x+1|+\left|\frac{1}{x}-1\right|\leq a$ 有解，即 $a\geq f(x)_{\min}$, 故 $a\geq 2$, 故选 A.

法二（曼哈顿距离）如图 5-3-29, 此题可以值成 $|x-(-1)|+|y-1|\leq a$, 即反比例函数上的点 $\left(x,\frac{1}{x}\right)$ 到 $A(-1,1)$ 的最小曼哈顿距,离，由手 $A(-1,1)$ 位于反比例函数的对称轴 $y=\pm x$ 上，所以此题只需考虑点 A 到

第一象限的反比例函数的最小曼哈顿距离，依次选取 $C\left(m,\dfrac{1}{m}\right)(m<1)$，$D(1,1)$，$E\left(n,\dfrac{1}{n}\right)(n>1)$，显然点. E 的曼哈顿距离较大，故先排除此，点. 在 C 点和 D 点中，只需比较 $|BC|$ 和 $|BD|$ 的大小即可，显然 $\left|k_{(D)}\right|>\left|\left(\dfrac{1}{x}\right)'\right|_{x=1}=1$，所以 $|BC|<|BD|$，即 $a\geq|AD|=2$，故选 A.

法三（正方形区域构造）如图 5-3-30，此题可以理解为以点，$A(-1,1)$ 为对称中心，对称轴垂直于坐标轴的正方形边界要和反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 有交，点，当在正方形的大小发生变化的过程中，反比例函数和正方形边界相切时，根据 $y'=-\dfrac{1}{x^2}=-1$ 得出切点为 $P(1,1)$ 和 $Q(-1,-1)$，此时 $a\geq|AP|=|AQ|=2$，故选 A.

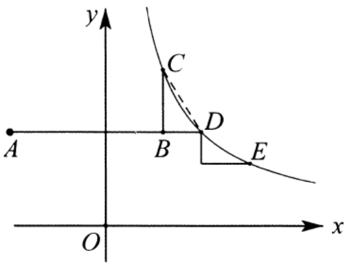


图 5-3-29

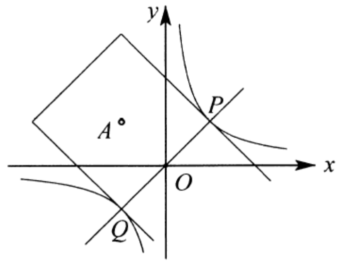


图 5-3-30

例 26.（2019•河南模拟）已知 x，$y\in$R，若 $|x+1|+|y+1|+|x-1|+|y-1|\leq 4$，则 $x+y$ 的取值范围是____.

解析：$|x+1|+|y+1|+|x-1|+|y-1|\leq 4$ 可以理解为点 $P(x,y)$ 到点 $A(-1,-1)$ 和点 $B(1,1)$ 的曼哈顿距离小于等于 4，即 $-1\leq x\leq 1$，$-1\leq y\leq 1$，画出可行域如图 $5-3-31$ 和 $5-3-32$ 所示，得 $-2\leq x+y\leq 2$，所以 $x+y$ 的取值范围为[-2, 2]. 故答案为[-2, 2].

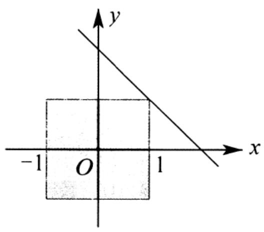


图 5-3-31

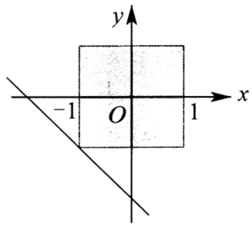


图 5-3-32

例 27.（2017•浙江金华模拟）已知 $y=|a\sin\theta+b\cos\theta|+|bsin\theta-a\cos\theta-1|$ 的最大值为 11，$a^2+b^2=$

解析：法一令 $x=a\sin\theta+b\cos\theta$，$y=b\sin\theta-a\cos\theta$，则 $x^2+y^2=a^2+b^2=r^2$，$Z=|x|+|y-1|$，可以理解为点 $A(0,1)$ 到以原点为圆心，半径为 r 的圆的曼哈顿距离最大值为 11，如图 $5-3-33$，易知曼哈顿距离最远的在负半轴，选取 B、$P\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}r,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}r\right)$、$C$ 三点，，点 P 处的切线斜率为 1，因为

$k_{PC}>1$, $k_{PB}<1$, 所以 $|PD|>|DC|,|PE|>|BE|$, 所以 $|AN|+|NP|>|AN|+|ND|+|DC|$,

$|AN|+|NP|>|AM|+|ME|+|EB|$, 所以 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r,-\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)$ 到 $A(0,1)$ 的曼哈顿距离最大, 即

$1+\sqrt{2}r=11$, $r=5\sqrt{2}$, 故 $a^2+b^2=50$: 同理可得点 $Q\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}r,\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)$ 到点 A 的受哈顿距离最小.

法二令 $x=a\sin\theta+b\cos\theta$, $y=b\sin\theta-a\cos\theta$, 则 $x^2+y^2=a^2+b^2=r^2$, $Z=|x|+|y-1|$. 如图 $5-3-34$, 随着 Z 的变大，正方形逐渐变大, 当正方形边界与圆相切时, Z 有最大值为 $Z_{\max}=11$, 此时 $r=d=\frac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$, 故 $a^2+b^2=50$.

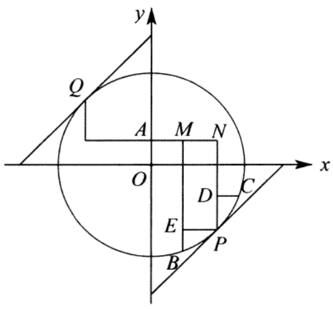


图 5-3-33

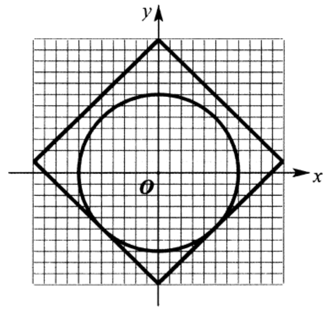


图 5-3-34

结论 固定点到曲线的曼哈顿距离最值出现在曲线上切线斜率为±1的位置.

以此类推，例题 23 我们也可以用曼哈顿距离来秒杀:

函数 $f(x)=\left|x^2-(-a)\right|+|x-(-b)|=\left|x^2-n\right|+|x-m|$, 这个目标函数可以理解为点 $P\left(x,x^2\right)$ 与 $M(m,n)$ 之间的“曼哈顿距离”$d_{MP}=|MN|+|PN|$，如图 5-3-35，由图象的对称性可知, 当 $M(m,n)$ 在 y 轴上, 即 $M_0(0,n)$ 时, d_{MP} 取得最大值的最小值, 即 $d_{\max}=\left|x^2-n\right|+x$, 如图 5-3-36, 则曼哈顿距离的最大值一定出现在抛物线 $y=x^2$ 切线斜率为 1 的位置 $P_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ 和也物线端, 点 $P_2(2,4)$ 中, $\left|M_0A\right|+\left|AP_1\right|=\left|M_0B\right|+\left|BP_2\right|$, 则 $\frac{1}{2}+n-\frac{1}{4}=2+4-n$, 即 $n=\frac{23}{8}$ 时, 曼哈顿距离取得最大值的最小值, 即为 $\frac{25}{8}$.

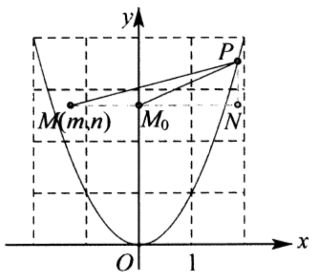


图 5-3-35

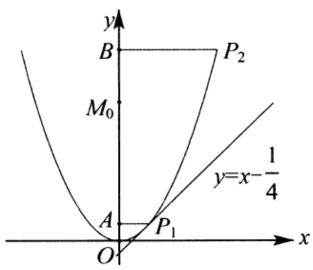


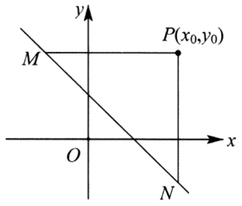
图 5-3-36

推论已知 $l: Ax+By+C=0(AB\neq 0)$, $P\left(x_0,y_0\right)$ 在直线 l 外. 点 Q 在直线 l 上, 过点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 分别作 x,y 轴的垂线，交直线于 M 、N, 则:

①若 $PN=PM$, 则 $d_{(P,Q)\min}=d_{(P,Q)\max}=|PM|=|PN|$, 此时斜率为 $k=\pm1$, 如图 $5-3-37$.

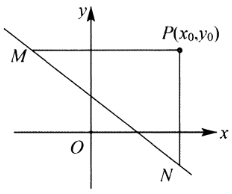
③若 $PN<PM$, 则 $d_{(P,Q)\min}=|PM|$, $d_{(P,Q)\max}=|PN|$, 此时斜率为 $|k|<1$, 如图 $5-3-38$.

③若 $PN>PM$, 则 $d_{(P,Q)\min}=|PM|$, $d_{(P,Q)\max}=|PN|$, 此时斜率为 $|k|>1$, 如图 $5-3-39$.



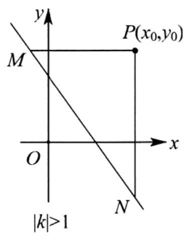
|k|=1

图 5-3-37



|k|<1

图 5-3-38



|k|>1

图 5-3-39

绝对值函数达标训练（适合高一）

1.（2019•临沂校级模拟）在实数范围内，不等式 $||x-2|-1|\leqslant 1$ 的解集为（　　）

A.（0，4］　　B.［0，4）　　C.［0，4］　　D.［1，4］

2.（2019•章丘市模拟）已知关于 x 的不等式 $m-|x+1|\leqslant|2x+1|+|x+1|$ 的解集为R，则实数 m 的最大值为（　　）

A．3　　B．2　　C．1　　D．0

3.（2019•葫芦岛校级月考）已知 $f(x)=|x-1|+|x+2|+|x+P|$ 的最小值为3，则实数 P 的取值范围是（　　）

A.（－∞，－2）　　B.（1，+∞）　　C.［－2，1］　　D.［－1，2］

4.（2019•西湖区校级期中）若关于 x 的不等式 $|x+t^2-2|+|x+t^2+2t-1|<3t$ 无解，则实数 t 的取值范围是（　　）

A.$[-\frac{1}{5}, 1]$　　B.［0，1］　　C.（－∞，1］　　D.［1，5］

5.（2019•浙江期中）已知对任意 $x\in[1, 4]$，$|x-1|+|x+\frac{4}{x}-m|-x+m\leq 4$ 恒成立，则 m 的取值范围（　　）

A.$(-\infty, \frac{9}{2}]$　　B.（－∞，4］　　C.$[4, \frac{9}{2}]$　　D.（－∞，5］

6.（2019•南京期中）已知定义在 R 上的奇函数 $y=f(x)$，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=|x-a|-a$，若对任意实数 x，有 $f(x-1)\leqslant f(x)$ 成立，则正数 a 的取值范围为（　　）

A．$[\frac{1}{4},+\infty)$　　B．$[\frac{1}{2},+\infty)$　　C．$(0,\frac{1}{4}]$　　D．$(0,\frac{1}{2}]$

7.（2019•浦东新区校级期末）函数 $y=|(\log_2|x-1|)|$（$x<1$）的单调递增区间是____.

8.（2019•闵行区校级月考）若函数 $f(x)=|x+1|+|2x+a|$ 的最小值是 3，则正实数 a 的值是____.

9.（2019•田家庵区校级期中）若 $f(x)=|2x-t|+|5-x|$ 的最小值为 3，则实数 t 的值是____.

10. $f(x)=|-x^2+2|x|+3|$ 的减区间为____.

11.（2019•柯城区校级期中）不等式组 $\begin{cases}|x^2-2x-3|>x^2-2x-3\\x^2+|x|-2<0\end{cases}$ 的解集为____.

12.（2013•江西）在实数范围内，不等式 $||x-2|-1|\leqslant 1$ 的解集为__.

13.（2019•岳麓区校级月考）已知函数 $f(x)=x^2-2|x|$，则满足 $f(-m^2-1)<f$（2）的 m 取值范围是____.

14.（2019•江西月考）如果关于 x 的不等式，$|x-a|<|x|+|x+1|$ 的解为一切实数，那么 a 的取值范围是____.

15.（2019•诸暨市校级期中）函数 $f(x)=|x^2+4x|$，若 $f(2^x-2)+f(-2^x-2)\leqslant 8$，则 x 的取值范围是____.

16.（2019•芙蓉区期中）已知 $a\in R$，函数 $f(x)=|2^{|x-3|}-a|+a$ 在区间 $[1,\ 5)$ 上的最大值是 4，则 a 的取值范围是____.

17. 已知函数 $f(x)=|x-1|+\dfrac{|x-2|}{2}+\dfrac{|x-3|}{3}(x\in R)$，则 $f(x)$ 的最小值是____.

18. 已知函数 $f(x)=|x-a|-|x-4a|(a>0)$，若对 $\forall x\in R$，都有 $f(2x)-1\leqslant f(x)$，则实数 a 的最大值是____.

19. 若函数 $f(x)=|x^2-1|+|x^2-2|+a|x^2-3|(x\in R)$ 有最小值，则 a 的取值范围是____.

绝对值函数达标训练（适合高二复习）

1. 已知 $S_n=|n-1|+2|n-2|+3|n-3|+\cdots+10|n-10|$，$n\in N^*$，则 S_n 的最小值为（　　）

A．108　　B．96　　C．120　　D．112

2.（2018•岳麓区校级期末）若直线 $l: y=-\dfrac{x}{2}+m$ 与曲线 $C: y=\dfrac{1}{2}\sqrt{|4-x^2|}$ 有且仅有三个交点，则　的取值范围是

A．$(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1)$　　B．$(1,\sqrt{2})$　　C．$(1,\sqrt{2}+1)$　　D．$(2,\sqrt{2}+1)$

3.（2019•河南模拟）已知 x，$y\in R$，若 $|x+1|+|y+1|+|x-1|+|y-1|\leqslant 4$，则 xy 的取值范围是____.

4.（2019•红谷滩新区校级期末）设 f（x）$=|x-2|+|x-3|$，若不等式 f（x）$\geq \frac{|a+1|-|2a-1|}{|a|}$ 对任意实数 $a\neq 0$ 恒成立，则 a 取值集合是____.

5.（2019•杭州校级模拟）已知函数 $f(x)=|x-a|+|x+a|+|x-b|+|x+b|-c$，若存在正常数 m，使 $f(m)=0$，则不等式 $f(x)<f(m)$ 的解集是____.

6.（2019•杭州期中）已知函数 f（x）是定义在实数集 R 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，f（x）$=\frac{1}{2}$（$|x-a|+|x-2a|-3|a|$），若集合 $\{x|f(x-2)-f(x)\leqslant 0,\ x\in R\}$，则实数 a 的取值范围是____

7.（2019•河北区一模）已知函数 $f(x)=x(1+a|x|)$，设关于 x 的不等式 $f(x+a)<f(x)$ 的解集为 A，若 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\subseteq A$，则 a 的取值范围是____.

8.（2019•闵行区校级月考）若函数 $f(x)=|x-1|+m|x-2|+6|x-3|$ 在 $x=2$ 时取得最小值，则实数 m 的取值范围是____

9.（2019•黄浦区校级模拟）设函数 $f(x)=|x+1|+|x+2|+\cdots+|x+2020|+|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-2020|$，$(x\in R)$，下列四个命题中真命题的序号是____.

（1）$f(x)$ 是偶函数；

（2）不等式 $f(x)<2019\times2020$ 的解集为$\varnothing$；

（3）$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

（4）方程 $f(a^2-5a+6)=f(a-2)$ 有无数个实根.

10.（2019•启东市期中）已知定义在 R 上的奇函数 $y=f(x)$，当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=|x-a^2|-a^2$，若对任意实数有 $f(x-a)\leqslant f(x)$ 成立，则正数 a 的取值范围为

A. $[\frac{1}{4},+\infty)$　　B. $[\frac{1}{2},+\infty)$　　C. $(0,\frac{1}{4}]$　　D. $(0,\frac{1}{2}]$

11.（2018•余姚市校级模拟）已知不等式 $|x+2|+|x|\leqslant a$ 的解集不是空集，则实数 a 的取值范围是____：若不等式 $|x^2+x-1|+|x^2+x+1|\geq\frac{|a+1|-|3a-1|}{|a|}$ 对任意实数 a 恒成立，则实数 x 取值范围是____.

12.（2019•浙江期中）若函数 $f(x)=x^2+(m-2)x+|x^2-(m+2)x+2|$ 的最小值为 0，则 m 的取值范围为

A. $(-\infty，1]$　　B. $[-2\sqrt{2}-2,1]$　　C. $(-\infty,2\sqrt{2}-2]$　　D. $[-2\sqrt{2}-2,2\sqrt{2}-2]$

13.（2019•台州模拟）已知 $a>1$，且函数 $f(x)=2|x^2-x+a|+|x^2-4x+a|$．若对任意的 $x\in(1,a)$ 不等式 $f(x)\geqslant(a-1)x$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为

A. $(1，9]$　B. $(1，25]$　C. $[4，25]$　D. $[4，+\infty)$

14.（2019•宁波期末）若四个数 a_1，a_2，a_3，a_4 成等差数列，满足

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|=|a_1+1|+|a_2+1|+|a_3+1|+|a_4+1|=|a_1-2|+|a_2-2|+|a_3-2|+|a_4-2|$，则公差 d 的取值范围是____.

15.（2019•镇海区校级模拟）已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足

$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|=|a_1+1|+|a_2+1|+\ldots+|a_n+1|=|a_1-1|+|a_2-1|+\ldots+|a_n-1|=98$，则 n 的最大值为

A. 14　　　B. 13　　　C. 12　　　D. 11

16.（2019 秋•中山区校级月考）当 $x\in[-1，1]$ 时，函数 $f(x)=|x^2+s|+|x+t|(s,t\in R)$ 的最大值记为 $P(s,t)$，则 $P(s,t)$ 的最小值为____.

17.（2019•西湖区校级模拟）已知 $\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant\frac{3}{4}$，设函数 $f(x)=|5^x-1|-k$ 和 $g(x)=|5^x-1|-k^2$ 的零点分别为 x_1，和 x_3，x_4，则 $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|$ 的最小值是

A.　　　B.　　　C. 1　　　D. 2

18.（2019•河南模拟）已知 $f(x)$ 为奇函数，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=1-2|x-\frac{1}{2}|$，当 $x\in(-\infty,-1]$，$f(x)=1-e^{-1-x}$，若关于 x 的不等式 $f(x+m)>f(x)$ 有解，则实数 m 的取值范围为

A. $(-1，0)\cup(0，+\infty)$　　　B. $(-2，0)\cup(0，+\infty)$

C. $(-\frac{1}{2}-ln2，-1)\cup(0，+\infty)$　　　D. $(-\frac{1}{2}-ln2，0)\cup(0，+\infty)$

19.（2014•浙江高考理科第 10 题）设函数 $f_1(x)=x^2$，$f_2(x)=2(x-x^2)$，$f_3(x)=\frac{1}{3}|\sin 2\pi x|$，$a_i=\frac{i}{99},i=0,1,2,\cdots 99$，记 $I_k=|f_k(a_1)-f_k(a_0)|+|f_k(a_2)-f_k(a_1)|\cdots+|f_k(a_{99})-f_k(a_{98})|$，$k=1,2,3$，则（）

A. $I_1<I_2<I_3$　　　B. $I_2<I_1<I_3$　　　C. $I_1<I_3<I_2$　　　D. $I_3<I_2<I_1$

20.（2018•绍兴市期末）已知 a,b 是实数，对任意的 $x\in R$，都有 $|a\sin x+b|\le 1$ 成立，则 $|a+3b|+|a-3b|$ 的最大值为

21.（2019•荔湾区期末）已知函数 $g(x)=\log_a x$，其中 $a>1$.

（Ⅰ）当 $x\in[0，1]$时，$g(a^x+2)>1$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（Ⅱ）设 $m(x)$ 是定义在$[s，t]$上的函数，在$(s，t)$内任取 $n-1$ 个数 x_1，x_2，…，x_{n-2}，x_{n-1}，设 $x_1<x_2<\cdots<x_{n-2}<x_{n-1}$，令 $s=x_0$，$t=x_n$，如果存在一个常数 $M>0$，使得 $\sum_{i=1}^{n}|m(x_i)-m(x_{i-1})|\le M$ 恒成立，则称函数 $m(x)$ 在区间$[s，t]$上的具有性质 P.

试判断函数 $f(x)=|g(x)|$在区间$[\frac{1}{a}，a^2]$上是否具有性质 P？若具有性质 P，请求出 M 的最小值；若不具有性质 P，请说明理由.

（注：$\sum_{i=1}^{n}|m(x_i)-m(x_{i-1})|=|m(x_1)-m(x_0)|+|m(x_2)-m(x_1)|+\cdots+|m(x_n)-m(x_{n-1})|$）

专题 6 周期函数与类周期函数

第一讲对称函数与周期函数

一．函数对称性

定理 1　若函数 $y=f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称，　则 $f(a+x)=f(a-x)$.

推论 1　关系式 $f(a+x)=f(a-x)$ 也可以写成 $f(x)=f(2a-x)$ 或 $f(-x)=f(2a+x)$.

若写成 $f(a+x)=f(b-x)$,则函数 $y=f(x)$ 关于直线 $x=\dfrac{(a+x)+(b-x)}{2}=\dfrac{a+b}{2}$ 对称.

证明　设点 (x_1,y_1) 在 $y=f(x)$, 由 $f(x)=f(2a-x)$ 可知，$y_1=f(x_1)=f(2a-x_1)$, 即点 $(2a-x_1,y_1)$ 也在函数 $y=f(x)$ 上，而点 (x_1,y_1) 与点 $(2a-x_1,y_1)$ 关于 $x=a$ 对称，即得证.

定理 2　若函数 $y=f(x)$ 关于点 (a,b) 对称,则 $f(a+x)+f(a-x)=2b$.

推论 2 关系式 $f(a+x)+f(a-x)=2b$ 也可以写成 $f(2a+x)+f(-x)=2b$ 或 $f(2a-x)+f(x)=2b$.

证明　设点 (x_1,y_1) 在 $y=f(x)$ 上，即 $y_1=f(x_1)$, 通过 $f(2a-x)+f(x)=2b$ 可知，$f(2a-x_1)+f(x_1)=2b$，所以 $f(2a-x_1)=2b-f(x_1)=2b-y_1$, 所以点 $(2a-x_1,2b-y_1)$ 也在 $y=f(x)$ 上,而点 $(2a-x_1,2b-y_1)$ 与 (x_1,y_1) 关于 (a,b) 对称，即得证.

定理 3　函数 $y=f(a+x)$ 与 $y=f(a-x)$ 关于 y 轴对称,函数 $y=f(a+x)$ 与 $y=-f(a-x)$ 关于原点对称.

证明　因为函数 $y=f(a+x)$ 田函数 $y=f(x)$ 向左平移 a 个单位得到，则函数 $y=f(a-x)=f[-(x-a)]$ 主函数 $y=f(-x)$ 向右平移 a 个单位得到, 又因为函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(-x)$ 关于 y 轴对称, 故 $y=f(a+x)$ 与 $y=f(a-x)$ 关于 y 轴对称，同理可证 $y=f(a+x)$ 与 $y=-f(a-x)$ 关于原点对称，注意自对称和互对称.

例 1.（2020•朝阳区校级月考）已知函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x)=-4-f(6-x)$，现将函数 $f(x)$ 左平移 a 个单位，再向上平移 b 个单位，得到 $g(x)=x+\dfrac{2}{x-1}$，则 $a+b=$____.

解析：将 $g(x)$ 向左平移一个单位得到 $y=x+1+\dfrac{2}{x}$, 又 $y=x+\dfrac{2}{x}$ 是奇函数，图象关于原点 $(0,0)$ 对称，则 $y=x+1+\dfrac{2}{x}$ 的图象关于 $(0,1)$ 对称，则 $g(x)$ 的图象关于 $(1,1)$ 对称，又因为 $f(x)$ 满足 $f(2+x)=-4-f(6-x)$, 所以 $f(2+x)+f(6-x)=-4$, 即 $f(x)$ 的图象关于 $(4,-2)$ 对称，将函数 $f(x)$ 左平移 a 个单位, 再向上平移 b 个单位，即把 $(4,-2)$ 平移到 $(1,1)$, 则 $a=3$,　$b=3$, 即 $a+b=3+3=6$. 故答案为 6.

例 2．（2019•浦东新区校级月考）设 x， y 为实数，且满足 $\begin{cases}(x-1)^{2019}+2017(x-1)=-1\\(y-1)^{2019}+2017(y-1)=1\end{cases}$，则 $x+y=$____.

解析：法一因为 $\begin{cases}(x-1)^{2019}+2017(x-1)+1=0\\(1-y)^{2019}+2017(1-y)+1=0\end{cases}$，设 $f(t)=t^{2019}+2017t+1$，则 $f'(t)=2019t^{2018}+2017>0$，所以 $f(t)=t^{2019}+2017t+1$ 为单调递增函数，则 $x-1=1-y$，所以 $x+y=2$．故答案为 2..

法二令 $f(t)=t^{2019}+2017t$，则 $f(t)$ 为奇函数，即 $f(x-1)+f(y-1)=0$，所以 $x+y=2$．故答案为 2.

例 3．（2019•西城区校级月考）同一平面直角坐标系中，函数 $y=2^{x+1}$ 与 $y=2^{1-x}$ 的图象（　　）

A．关于原点对称　　B．关于 x 轴对称

C．关于 y 轴对称　　D．关于直线 $y=x$ 对称

解析：因为函数 $y=2^{1-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 可看做由 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 的图象右移 1 个单位，而函数 $y=2^{x+1}$ 的图象可看做由 $y=2^{x}$ 的图象向左平移 1 个单位，且 $y=2^{x}$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 的图象关于 y 轴对称，故数 $y=2^{x+1}$ 与 $y=2^{1-x}$ 的图象关于 y 轴对称，故选 C.

例 4．（2019•义乌市期末）已知函数 $f(x)=\frac{a}{1-x}+b\cos\frac{\pi x}{2}+x^{2}$，且有 $f(1+\sqrt{3})=3$，则 $f(1-\sqrt{3})=$（　　）

A．3　　B．-3　　C．5　　D．-5

解析：法一由题得，函数 $f(1+\sqrt{3})=-\frac{a}{\sqrt{3}}+b\cos\left[\frac{\pi(1+\sqrt{3})}{2}\right]+(1+\sqrt{3})^{2}=-\frac{a}{\sqrt{3}}+b\cos\left[\frac{\pi(1+\sqrt{3})}{2}\right]+4+2\sqrt{3}$，又由 $f(1-\sqrt{3})=\frac{a}{\sqrt{3}}+b\cos\left[\frac{\pi(1-\sqrt{3})}{2}\right]+(1-\sqrt{3})^{2}=\frac{a}{\sqrt{3}}+b\cos\left[\frac{\pi(1-\sqrt{3})}{2}\right]+4-2\sqrt{3}$，则有 $f(1+\sqrt{3})+f(1-\sqrt{3})=8$，又由 $f(1+\sqrt{3})=3$，则 $f(1-\sqrt{3})=5$，故选 C.

法二构造函数 $f(1+x)+f(1-x)=\frac{a}{-x}+b\cos\frac{(1+x)\pi}{2}+(1+x)^{2}+\frac{a}{x}+b\cos\frac{(1-x)\pi}{2}+(1-x)^{2}=2+2x^{2}$，

则有 $f(1+\sqrt{3})+f(1-\sqrt{3})=2+2\times(\sqrt{3})^{2}=8$，又由 $f(1+\sqrt{3})=3$，则 $f(1-\sqrt{3})=5$，故选 C.

例 5．（2019•哈尔滨期末）设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的单调递增函数，且对任意实数 x 都有 $f(x)+f(2-x)=0$ 成立，如果实数 m， n 满足不等式组 $\begin{cases}f(m^{2}-6m+23)+f(n^{2}-8n)<0\\m>3\end{cases}$，那么 $m^{2}+n^{2}$ 的取值范围是（　　）

A. $(\sqrt{13},7)$　　B. $(9,25)$　　C. $(9,49)$　　D. $(13,49)$

解析：因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=-f(2-x)$，则 $f(2-x)=-f(x)$，即 $f\left(m^2-6m+23\right)+f\left(-8n+n^2\right)<0$ 可化为 $f\left(m^2-6m+23\right)<-f\left(-8n+n^2\right)=f\left(2-n^2+8n\right)$，因为 $f(x)$ 在 R 上单调递增，可得 $m^2-6m+23<2-n^2+8n$，表示圆的内部，其圆心为 $(3,4)$，半径 $r=2$，止此可画出不等式 $\begin{cases}m^2-6m+23<2-n^2+8n\\ m>3\end{cases}$，如图 6-1-1 所表示的点 (m,n) 对应的区域，A 的坐标为 $(3,2)$，　$B\left(\dfrac{21}{5},\dfrac{84}{15}\right)$，则 m^2+n^2 表示为原点 (0, 0) 为圆心，半径 r 的最大值和最小值. 从图象可得 OA 为半径时，r 最小值，OB 为半径时，r 最大值，所以 $13<m^2+n^2<49$，故选 D.

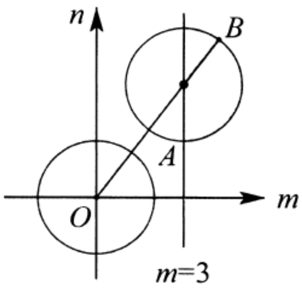


图 6-1-1

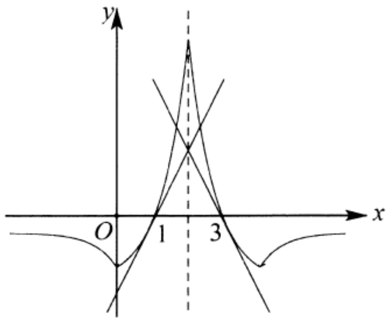


图 6-1-2

例 6.（2020•成都模拟）已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x)=f(2+x)$，当 $x\leqslant 2$ 时，$f(x)=(x-1)e^x-1$. 若关于 x 的方程 $f(x)-kx+2k-e+1=0$ 有三个不相等的实数根，则实数 k 的取值范围是（　　）

A.（-2，0）∪（0，2）　　B.（-2，0）∪（2，+∞）

C.（$-e$，0）∪（0，+∞）　　D.（$-e$，0）∪（0，e）

解析：由题意得，当 $x\le 2$ 时，$f(x)=(x-1)e^x-1$，则 $f'(x)=xe^x$. ①令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$；②令 $f'(x)<0$，解得 $x<0$；③令 $f'(x)>0$，解得 $0<x\le 2$；所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,2]$ 上单调递增，在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=-2$，　且 $f(1)=-1$；当 $x\to-\infty$ 时，　$f(x)\to 0$，　又因为函数 $f(x)$ 在 R 上满足 $f(2-x)=f(2+x)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称. 关于 x 的方程 $f(x)-kx+2k-e+1=0$ 可转化为 $f(x)=k(x-2)+e-1$. 而一次函数 $y=k(x-2)+e-1$ 显然是恒过定点 $(2,e-1)$. 如图 6-1-2 所示，结合图象，当 $k=0$ 时，有两个交点，不符合题意，当 $k=e$ 时，有两个交点，其中一个是 $(1,-1)$. 此时 $y=f(x)$ 与 $y=k(x-2)+e-1$ 正好相切. 所以当 $0<k<e$ 时，有三个交点. 同理可得当 $-e<k<0$ 时，也有三个交点.

实数 k 的取值范围为 $(-e,0)\cup(0,e)$, 故选 D.

例 7.（2019•崇川区校级月考）设 $A=[-1，1]$， $B=[-2，2]$，函数 $f(x)=2x^2+mx-1$，

（1）设不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集为 C，当 $C\subseteq(A\bigcap B)$ 时，求实数 m 的取值范围；

（2）若对任意 $x\in R$，都有 $f(1-x)=f(1+x)$ 成立，试求 $x\in B$ 时，函数 $f(x)$ 的值域；

（3）设 $g(x)=2|x-a|-x^2-mx(a\in R)$，求 $f(x)+g(x)$ 的最小值.

解析：(1) 由 $A=[-1,1]$, $B=[-2,2]$, 知 $A\cap B=[-1,1]$; 且二次函数 $f(x)$ 的开口向上, $f(0)=-1$; 由题意知不等式 $f(x)\le 0$ 的解集为 C, 当 $C\subseteq(A\cap B)$ 时，函数 $f(x)$ 必有两零, 点, 且两零, 点均在区间[-1, 1]内；故只需: $\begin{cases} f(-1)\ge 0 \\ f(1)\ge 0 \end{cases}$, 解得 $-1\le m\le 1$, 所以实数 m 的取值范围为 $[-1,1]$;

(2) 对任意 $x\in R$, 都有 $f(1-x)=f(1+x)$ 成立：所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $-\dfrac{m}{4}=1$，解得 $m=-4$, 所以函数 $f(x)=2(x-1)^2-3$, $x\in[-2,2]$; 所以 $x=-2$ 时， $f(x)$ 取最大值 15, $x=1$ 时，$f(x)$ 取最小值-3：所以函数 $f(x)$ 在区间 B 上的值域为[-3, 15]；

(3) 令 $h(x)=f(x)+g(x)$, 则 $h(x)=x^2+2|x-a|-1=\begin{cases} x^2+2x-2a-1, x\ge a \\ x^2-2x+2a-1, x\le a \end{cases}$;

①当 $a\le -1$ 时, 函数 $h(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 是减函数, $(-1,+\infty)$ 是增函数, 此时 $h(x)_{\min}=h(-1)=-2a-2$;

②当 $-1<a<1$ 时, 函数 $h(x)$ 在区间 $(-\infty,a)$ 是减函数, $(a,+\infty)$ 是增函数, 此时 $h(x)_{\min}=h(a)=a^2-1$;

③当 $a\ge 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 是减函数, $(1,+\infty)$ 是增函数, 此时 $h(x)_{\min}=2a-2$;

综上: 当 $a\le -1$ 时, $f(x)_{\min}=-2a-2$, 当 $-1<a<1$ 时 $f(x)_{\min}=a^2-1$, 当 $a\ge 1$ 时 $f(x)_{\min}=2a-2$.

二．函数对称性和迭代构造周期函数

定理 1 若函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a, x=b$ 都对称, 则 $f(x)$ 为周期函数且 $2|b-a|$ 是它的一个周期.

推论 若偶函数 $y=f(x)$ 的图象关手直线 $x=a$ 对称, 则 $y=f(x)$ 为周期函数, 且 $2|a|$ 是它的一个周期.

证明 函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(a-x)$ 且 $f(b+x)=f(b-x)$, 则可推出 $f(x)=f(2a-x)=f(2b-x)$; 故 $f(2a+x)=f(2b+x)\Leftrightarrow f(x)=f(2b-2a+x)$, 即可以得到 $y=f(x)$ 的周期为 $2|b-a|$.

定理 2 函数 $y=f(x)(x\in R)$ 的图象关于两点 $A\left(a,y_0\right)$、$B\left(b,y_0\right)$ 都对称， 则函数 $y=f(x)$ 是以 $2|b-a|$ 为周期的周期函数.

推论 若奇函数 $y=f(x)$ 的图象关于 $A(a,0)$ 对称, 则 $y=f(x)$ 为周期函数，且 $2|a|$ 是它的一个周期.

证明 函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a+x)=2y_0-f(a-x)$ 且 $f(b+x)=2y_0-f(b-x)$, 则 $f(x)=2y_0-f(2a-x)=2y_0-f(2b-x)$; 所以 $f(2a+x)=f(2b+x)\Leftrightarrow f(x)=f(2b-2a+x)$, 即可以得到 $y=f(x)$ 的周期为 $2|b-a|$.

定理 3 函数 $y=f(x)(x\in R)$ 的图象关于 $A\left(a,y_0\right)$ 和直线 $x=b$ 都对称，则函数 $y=f(x)$ 是以 $4|b-a|$ 为周期的周期函数.

推论 1 若奇函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称, 则 $y=f(x)$ 为周期函数，且 $4|a|$ 是它的一个周期.

推论 2 周期为 T 的奇函数一定关于点 $\left(\frac{T}{2},0\right)$ 对称，周期为 T 的偶函数关于直线 $x=\frac{T}{2}$ 对称.

证明 函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a+x)=2y_0-f(a-x)$ 且 $f(b+x)=f(b-x)$, 则 $f(x)=2y_0-f(2a-x)=f(2b-x)$; $f(x)=2y_0-f(2b-2a+x)=2y_0-f(2a-x)$, 所以 $f(2b+x)=2y_0-f(2a+x)\Leftrightarrow f(x)=2y_0-f(2b-2a+x)$ 所以 $f(x)=2y_0-f(2b-2a+x)=2y_0+f(4b-4a+x)-2y_0$, 即可以得到 $y=f(x)$ 的周期为 $4|b-a|$.

定理 4

①若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+m)=-f(x)$, 则 $T=2m$.

②若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+m)=\pm\frac{1}{f(x)}$, 则 $T=2m$.

③若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+m)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$, 则 $T=2m$.

证明: ①由函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+m)=-f(x)$, 则 $f(x+2m)=f(x+m+m)=-f(x+m)=f(x)$, 即 $T=2m$;

② 由函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+m)=\pm\frac{1}{f(x)}$, 则 $f(x+2m)=f(x+m+m)=\pm\frac{1}{f(x+m)}=f(x)$, 即 $T=2m$;

③ 由函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+m)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$, 则 $f(x+2m)=\frac{1-f(x+m)}{1+f(x+m)}=\frac{1-\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}=f(x)$, 即 $T=2m$. 综合①②③，我们得到定理 4: 当一个函数 $f(x+m)=\varphi(x)=\varphi^{-1}(x)$ 时，一定有 $f(x+2m)=f(x)$, $f(x)$ 是周期为 $2m$ 的周期函数。.

定理 5 若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)=f(x+a)+f(x-a)$, 则函数 $f(x)$ 是以 $6a$ 为周期的周期函数.

证明 由函数 $f(x)=f(x+a)+f(x-a)\Rightarrow f(x+a)=f(x+2a)+f(x)\Rightarrow f(x)=f(x+2a)+f(x)$

$+f(x-a)$，则 $0=f(x+2a)+f(x-a)$, 所以 $f(x-a)=-f(x+2a)\Rightarrow f(x)=-f(x+3a)=f(x+3a+3a)=f(x+6a)$, 则 $f(x)$ 是以 $6a$ 为周期的周期函数.

定理 6 若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+m)=1-\frac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$, 则函数 $f(x)$ 是以 $3m$ 为周期的周期函数.

证明 由函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+m)=1-\frac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$ 得 $f(x+3m)=1-\frac{1}{f(x+2m)}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{f(x+m)}}=\frac{-1}{f(x+m)-1}=\frac{-1}{1-\frac{1}{f(x)}-1}=f(x)$, 则函数 $f(x)$ 是以 $3m$ 为周期的周期函数.

定理 7 若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+m)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$, 则函数 $f(x)$ 是以 $4m$ 为周期的周期函数.

证明 由 $f(x+2m)=\frac{1+f(x+m)}{1-f(x+m)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}$, 又 $f(x+4m)=-\frac{1}{f(x+2m)}=f(x)$, 则 T=4m

例 8.（2019•汕头校级期末）定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，且当 $x\in[0，1]$时，$f(x)=x(3-2x)$，则 $f(\frac{31}{2})=($　　$)$

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

解析：由 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$, 则 $f(-x)=f(x+2)$, 又 $f(x)$ 为奇函数, 即 $f(x+2)=-f(x)$, 所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$, 即函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 则 $f\left(\frac{31}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}+16\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\left[\frac{1}{2}\left(3-2\times\frac{1}{2}\right)\right]=-1$, 故选 A .

例 9.（2019•上海校级月考）已知定义在 R 上的函数 $y=f(x)$ 对于任意的 x 都满足 $f(x+2)=f(x)$．当 $-1\leqslant x<1$时，$f(x)=x^3$．若函数 $g(x)=f(x)-\log_a|x|$至少有 6 个零点，则 a 的取值范围是____.

解析：题设为函数 $g(x)=f(x)-\log_a|x|$的零点个数, 即为函数 $y=f(x)$ 与 $y=\log_a|x|$图象交点的个数; 因为 $f(x+2)=f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 又出当 $-1\leq x<1$时，$f(x)=x^3$, 做出函数 $f(x)$ 的图象，$y=\log_a|x|$是偶函数, 当 $x>0$ 时，$y=\log_a x$, 则当 $x<0$ 时，$y=\log_a(-x)$, 如图 6-1-3 所示作出函数 $y=\log_a|x|$的图象，结合图象分析可得, 要使函数 $y=f(x)$ 与 $y=\log_a|x|$至少有 6 个交点, 则

$\log_a 5<1$ 或 $\log_a 5\geq -1$, 解得 $a>5$ 或 $0<a\leq \frac{1}{5}$. 所以 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{5}\right]\bigcup(5,+\infty)$. 故答案为 $\left(0,\frac{1}{5}\right]\cup(5,+\infty)$.

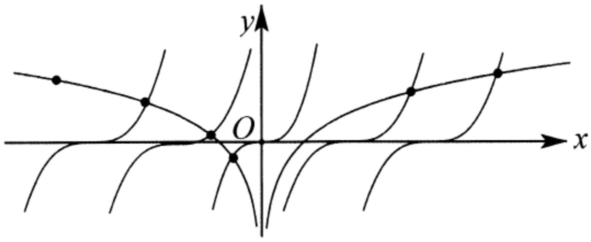


图 6-1-3

例 10.（2020•岳麓区校级模拟）若对任意的 $x\in R$，都有 $f(x)=f(x-\frac{1}{6})+f(x+\frac{1}{6})$，且 $f(0)=-1$，$f(\frac{1}{6})=1$，则 $f(\frac{2020}{3})$ 的值为____.

解析：因为对任意的 $x\in R$ 都有 $f(x)=f\left(x-\frac{1}{6}\right)+f\left(x+\frac{1}{6}\right)$, 得 $f\left(x+\frac{1}{6}\right)=f(x)+f\left(x+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=f(x)+f\left(x+\frac{1}{3}\right)$, 所以 $f\left(x+\frac{1}{6}\right)=f\left(x-\frac{1}{6}\right)+f\left(x+\frac{1}{6}\right)+f\left(x+\frac{1}{3}\right)$, 则有 $f\left(x+\frac{1}{3}\right)=-f\left(x-\frac{1}{6}\right)$, 即有 $f\left(x+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)=-f(x)$, 所以 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=-f(x)$, 则 $f\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=-f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)$, 即 $f(x+1)=f(x)$, 则函数 $f(x)$ 是周期为 1 周期函数，则 $f\left(\frac{2020}{3}\right)=f\left(673+\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=-f\left(-\frac{1}{6}\right)$, $f(0)=f\left(-\frac{1}{6}\right)+f\left(\frac{1}{6}\right)$, 即 $f\left(-\frac{1}{6}\right)=f(0)-f\left(\frac{1}{6}\right)=-1-1=-2$, 所以 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-f\left(-\frac{1}{6}\right)=2$, 故 $f\left(\frac{2020}{3}\right)=2$. 故答案为 2.

例 11.（2019•沈阳期末）定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x)=f(x)$，且在 $[0，1)$ 上单调递减，若方程 $f(x)=-1$ 在 $[0，1)$ 上有实数根，则方程 $f(x)=1$ 在区间 $[-1，11]$ 上所有实根之和是(　　)

A．30　　B．14　　C．12　　D．6

解析：法一由 $f(2-x)=f(x)$ 知函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，因为 $f(2-x)=f(x)$, $f(x)$ 是 R 上的奇函数, 所以 $f(-x)=f(x+2)=-f(x)$, 所以 $f(x+4)=f(x)$, 考虑 $f(x)$ 的一个周期, 例如 $[-1,3]$, 由

$f(x)$ 在 $[0,1)$ 上是减函数，知 $f(x)$ 在 $(1,2]$ 上是增函数，$f(x)$ 在 $(-,0]$ 上是减函数，$f(x)$ 在 $[2,3)$ 上是增函数，对于奇函数 $f(x)$ 有 $f(0)=0$，$f(2)=f(2-2)=f(0)=0$，故当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<f(0)=0$，当 $x\in(1,2)$ 时，$f(x)<f(2)=0$，当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)>f(0)=0$，当 $x\in(2,3)$ 时，$f(x)>f(2)=0$，方程 $f(x)=-1$ 在 $[0,1)$ 上有实数根，则这实数根是唯一的，因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是单调函数，则田于 $f(2-x)=f(x)$，故方程 $f(x)=-1$ 在 $(1,2)$ 上有唯一实数，在 $(-1,0)$ 和 $(2,3)$ 上 $f(x)>0$，则方程 $f(x)=-1$ 在 $(-1,0)$ 和 $(2,3)$ 上没有实数根，从而方程 $f(x)=-1$ 在一个周期内有且仅有两个实数根，当 $x\in[-1,3]$，方程 $f(x)=-1$ 的两实数根之和为 $x+2-x=2$，当 $x\in[-1,11]$，方程 $f(x)=-1$ 的所有 6 个实数根之和为 $x+2-x+4+x+4+2-x+x+8+2-x+8=2+8+2+8+2+8=30$，故选 A．

法二周期函数中的一点一轴对称型函数，可以设计为“上下双钻齒型”或者“上下双半圆型”函数，如图 6-1-4 所示，在区间 $[-1,11]$ 这三个周期内，每个周期有两个点与 $y=1$ 相交，易知 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=1$，$\dfrac{x_3+x_4}{2}=5$，$\dfrac{x_5+x_6}{2}=9$，故 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=30$，故选 A．

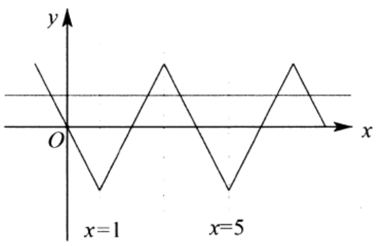


图 6-1-4

例 12.（2019•赣州期中）已知函数是 R 上偶函数，且对于 $\forall x\in R$ 都有 $f(x+6)=f(x)+f$（3）成立，当 x_1，$x_2\in[0.3]$，且 $x_1\neq x_2$ 时，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$．对于下列叙述；①$f$（3）$=0$；②直线 $x=-6$ 是函数 $y=f(x)$ 的一条对称轴；③函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-9$，$-6]$ 上为增函数；④函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-9$，$9]$ 上有四个零点．其中正确命题的序号是（　　）

A．①②③　　B．①②　　C．②③④　　D．①②④

解析：根据题意，对于(1)，在 $f(x+6)=f(x)+f(3)$ 中，令 $x=-3$ 可得，$f(3)=f(-3)+f(3)$，即 $f(-3)=0$，又由函数 $y=f(x)$ 是 R 上偶函数，则 $f(3)=f(-3)=0$，则(1)正确：对于（2），由（1）可得，$f(3)=0$，又由 $f(x+6)=f(x)+f(3)$，则有 $f(x+6)=f(x)$，即 $f(x)$ 是以 6 为周期的函数，又由函数

$y=f(x)$ 是 R 上偶函数，即 $f(x)$ 的一条对称轴为 y 轴，即 $x=0$, 则直线 $x=-6$ 也是函数 $y=f(x)$ 的一条对称轴, (2) 正确; 对于 (3)， 由当 $x_1,x_2\in[0,3]$, 都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$, 可得 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上为单调增函数, 又由函数 $y=f(x)$ 是, 则 $f(x)$ 在 $[-3,0]$ 上为减函数， 又早 $f(x)$ 是以 6 为周期的函数， 则函数 $y=f(x)$ 在区间 [-9, -6] 上为减函数, (3) 错误：对于 (4), 由 (1) 可得，$f(3)=f(-3)=0$, 又田 $f(x)$ 是以 6 为周期的函数, 则 $f(-9)=f(-3)=0, f(9)=f(3)=\ 0$, 即函数 $y=f(x)$ 在区间 [-9, 9] 上有四个零点, (4) 正确; 即正确的命题为 (1) (2) (4), 故选 D.

例 13. （2018•浙江期末）已知函数 $f(x)$ 是偶函数，且 $f(5-x)=f(5+x)$，若 $g(x)=f(x)\sin\pi x$，$h(x)=f(x)\cos\pi x$，则下列说法错误的是 (　　)

A．函数 $y=h(x)$ 的最小正周期是 10　　B．对任意的 $x\in R$，都有 $g(x+5)=g(x-5)$

C．函数 $y=h(x)$ 的图象关于直线 $x=5$ 对称　D．函数 $y=g(x)$ 的图象关于 $(5,0)$ 中心对称

解析：由 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f(5-x)=f(5+x)$, 得 $f(5-x)=f(5+x)=f(x-5)$, 即 $f(10+x)=f(x)$, 则 $f(x)$ 是周期为 10 的周期函数, 所以 $h(x+10)=f(x+10)\cos(\pi x+10\pi)=f(x)\cos\pi x=h(x)$, 则 $y=h(x)$ 是的最小正周期为10, 故排除 A,　$g(x+5)=f(x+5)\sin(\pi(x+5))=f(5-x)\sin(\pi x+5\pi)=$ $f(5-x)(-\sin\pi x)=-f(x-5)(-\sin\pi x)=f(x-5)\sin\pi x=g(x-5)$, 故排除 B; $h(5-x)=f(5-x)$ $\cos(5\pi-5x)=f(5+x)\cos(5x-5\pi)=f(5+x)\cos(5x-5\pi+10\pi)=f(5+x)\cos(5x+5\pi)=\ h(5+x)$, 所以函数 $y=h(x)$ 的图象关于直线 $x=5$ 对称，故排除 C，故选 D.

例 14. （2018•海南一模）已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，$f(x)=f(12-x)$，当 $x\in[0，6]$ 时，$f(x)=\log_6(x+1)$，若 f （a） $=1(a\in[0,2020])$，则 a 的最大值是 (　　)

A．2018　　B．2010　　C．2020　　D．2011

解析：因为 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, $f(x)=f(12-x)$, 所以 $f(x)=f(12-x)=f(x-12)$, 即函数 $f(x)$ 是周期为 12 的周期函数, 且函数关于 $x=6$ 对称, 当 $x\in[0,6]$ 时, 由 $f(x)=\log_6(x+1)=1$, 得 $x+1=6$, 即 $x=5$, 当 $x\in[-6,0]$ 时, 十 $f(x)$ 是偶函数, 则十 $f(x)=1$, 得 $x=-5$, 即若 $f(a)=1$, 则 $a=12k+5$ 或 $a=12k-6, a\in[0,2020]$, 由 $a=12k+5\le 2020$ 得 $k\le 117\dfrac{11}{12}$, 即 $k=1617$ 时，a 最大为

$a=167\times12+5=2009$，由 $a=12k-5\le2020$ 得 $k\le168\frac{9}{12}$，即 $k=168$ 时，a 最大为 $a=168\times12-5=2011$，即 a 的最大值是 2011，故选 D.

例 15.（2018•玉溪模拟）设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(x+4)=f(x)$，当 $x\in(4，6]$ 时 $f(x)=2^x+1$，则 $f(x)$ 在区间 $[-2，0)$ 上的表达式为(　　)

A. $f(x)=2^x+1$　　　　B. $f(x)=-2^{-x+4}-1$

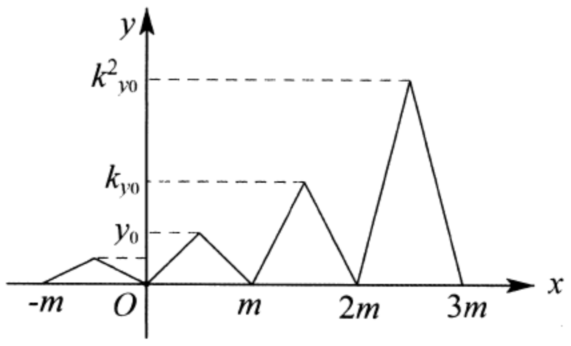
C. $f(x)=2^{-x+4}+1$　　　　D. $f(x)=2^{-x}+1$

解析：法一当 $x\in[-2,0)$ 时，$-x\in(0,2]$，所以 $-x+4\in(0,6]$，又因为当 $x\in(4,6]$ 时，$f(x)=2^x+1$，所以 $f(-x+4)=2^{-x+4}+1$. 又因为 $f(x+4)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 的周期为 $T=4$，所以 $f(-x+4)=f(-x)$，又因为函数 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，所以 $-f(x)=2^{-x+4}+1$，所以当 $x\in[-2,0)$ 时，函数 $f(x)=-2^{-x+4}-1$. 故选 B.

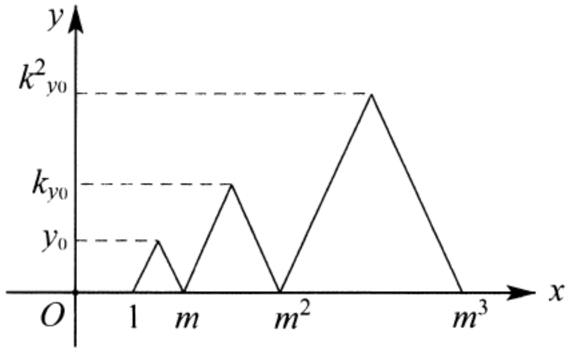
法二 先将 $x\in(0,6]$ 时函数 $f(x)=2^x+1$ 向左平移 4 单位，即得到 $x\in(0,2]$ 解析式为 $f(x)=f(x+4)=2^{x+4}+1$，再由关于原，点对称性质得到 $f(x)=-f(-x)=-2^{-x+4}-1$，故选 B.（利用函数周期性平移和奇偶函数转化求函数在不同周期的解析式）

第二讲 类周期函数

类型一 周期函数若 $y=f(x)$ 满足：$f(x+m)=kf(x)$ 或 $f(x)=kf(x-m)$，则 $y=f(x)$ 横坐标每增加 m 个单位，则函数值扩大 k 倍。此函数称为周期为 m 的类周期函数.



类周期函数图象



倍增函数图象

类型二倍增函数若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(mx)=kf(x)$ 或 $f(x)=kf\left(\frac{x}{m}\right)$，则 $y=f(x)$ 横坐标每扩大 m

倍，则函数值扩大k倍。此函数称为倍增函数。

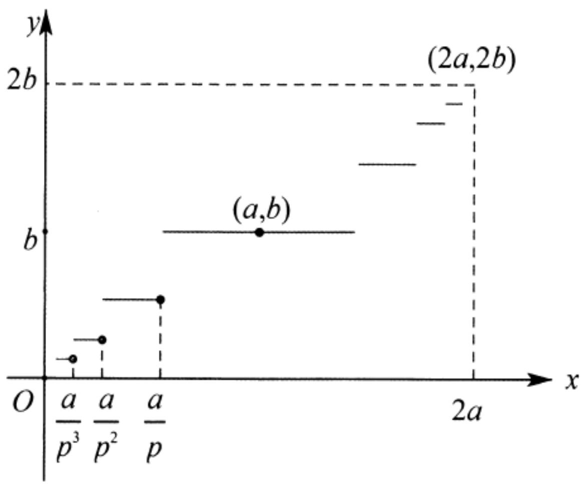
.

注意、当$m=k$时，构成一系列平行的分段函数，$f(x)=\begin{cases} g(x), & x\in[1,m) \\ g(x-m+1), & x\in\left[m,m^2\right) \\ g\left(x-m^2+1\right), & x\in\left[m^2,m^3\right) \\ \cdots \\ g\left(x-m^{n-1}+1\right), & x\in\left[m^{n-1},m^n\right) \end{cases}$.

三等比阶梯函数若函数$y=f(x)$满足$f(a+x)+f(a-x)=2b$，且$f\left(\dfrac{x}{p}\right)=\dfrac{1}{q}f(x), f(0)=0,$则

$y=f(x)$关于点(a,b)对称，　以(a,b)为中心，原点和$(2a,2b)$构成的一个矩形边界内的等比阶梯函数.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{b}{q^{n-1}}, x\in(\dfrac{a}{p^n},\dfrac{a}{p^{n-1}}] \\ \cdots \\ \dfrac{b}{q^2}, x\in(\dfrac{a}{p^3},\dfrac{a}{p^2}] \\ \dfrac{b}{q}, x\in(\dfrac{a}{p^2},\dfrac{a}{p}] \\ b, x\in(\dfrac{a}{p},a+\dfrac{a}{p}) \\ b+\dfrac{b}{q}, x\in[a+\dfrac{a}{p},a+\dfrac{a}{p^2}) \\ b+\dfrac{b}{q}+\dfrac{b}{q^2}, x\in[a+\dfrac{a}{p^2},a+\dfrac{a}{p^3}) \\ \cdots \\ b+\dfrac{b}{q}+\dfrac{b}{q^2}+\cdots+\dfrac{b}{q^{n-1}}, x\in[a+\dfrac{a}{p^{n-1}},a+\dfrac{a}{p^n}) \end{cases}$$



等比阶梯函数图象

例 16.（2019•汕头模拟）已知函数$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x^2-1|}{x-1}+1, & x\in[-2,0] \\ 2f(x-2), & x\in(0,+\infty) \end{cases}$，若函数$g(x)=f(x)-x-2m+1$在区间$[-2$，$4]$内有 3 个零点，则实数$m$的取值范围是(　　)

A．$\{m|-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{2}\}$　　B．$\{m|-1<m\leqslant\dfrac{1}{2}\}$

C．$\{m|-1<m<\dfrac{1}{2}$或$m=1\}$　　D．$\{m|-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{2}$或$m=1\}$

解析：法一由题意得，当$-2\le x\le -1$时，函数$f(x)=\dfrac{(x^2-1)}{x-1}+1=x+1+1=x+2$；当$-1\le x\le 0$时，$f(x)=-\dfrac{(x^2-1)}{x-1}+1=-(x+1)+1=-x$：当$0<x\le 1$时，$-2<x-2\le -1$，此时$f(x)=2f(x-2)=2(x-2+2)=2x$；当$1<x\le 2$时，$-1<x-2\le 0$，此时$f(x)=2f(x-2)=-2(x-2)=-2x+4$，当$2<x\le 3$时，$0<x-2\le 1$，此时$f(x)=2f(x-2)$；当$3<x\le 4$时，$1<x-2\le 2$，此时$f(x)=2f(x-2)=2(x-2+2)=2x$；当$0<x\le 1$时，$-2<x-2\le -1$，此时$f(x)=2f(x-2)=2[-2(x-2)+4]=-4x+16$，

由函数$g(x)=f(x)-x-2m+1=0$，得$2m-1=f(x)-x=\begin{cases}2, & -2\le x\le -1\\ -2x, & -1<x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\\ -3x+4, & 1<x\le 2\\ 3x-8, & 2<x\le 3\\ -5x+16, & 3<x\le 4\end{cases}$，设$h(x)=f(x)-x$，$x\in[-2,4]$，如图$6-2-1$，作出$h(x)$在$[-2,4]$上的图象：要使$2m-1$与$h(x)$有三个交点，则$2m-1=1$或$-2<2m-1<0$，即$m=1$或$-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{2}$，即实数$m$的取值范围是$\left\{m\middle|-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{2}\text{或}m=1\right\}$，故选D.

法二由题意得，当$-2\le x\le -1$时，$f(x)=\dfrac{(x^2-1)}{x-1}+1=x+2$，当$-1\le x\le 0$时，$f(x)=-\dfrac{(x^2-1)}{x-1}+1=-x$，如图6-2-2，如图6-2-2，画出类周期函数图象，根据题意有$f(x)=x+2m-1$在区间[-2, 4]有三个交，点，即直线位于图中l_1位置或者l_2与l_3之间可以满足题意，即$2m-1=1\Rightarrow m=1$或者$-2<2m-1<0\Rightarrow -\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{2}$，故选D.

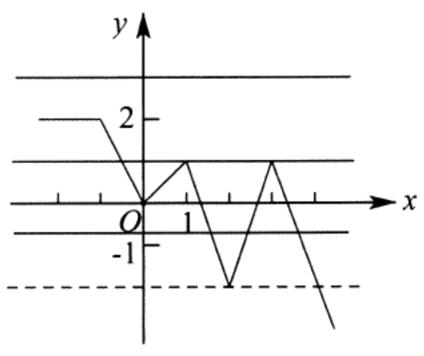


图 6-2-1

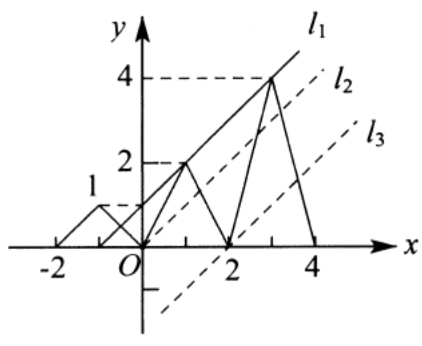


图 6-2-2

例 17. （2019•晋江期末）已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=2f(x+1)$，当 $0\leqslant x<1$ 时，$f(x)=8\sin\pi x$，则函数 $g(x)=f(x)-lnx$ 的零点的个数为____.

解析：因为 $f(x)=2f(x+1)$，所以当自变量增加 1 时，因变量变为原来的 $\frac{1}{2}$，将 $x\in[0,1)$ 的图象右移一个单位，再把纵坐标压缩为原来的一半，得到 $x\in[1,2)$ 的图象，依次进行，得到 $f(x)$ 的图象，如图 6-2-3，作出 $f(x)$ 图象与 $\ln x$ 的图象，函数 $g(x)=f(x)-\ln x$ 的零，点个数，即方程 $f(x)=\ln x$ 的根的个数，图象的交点个数：从图象可知共有 4 个交点. 故答案为 4.

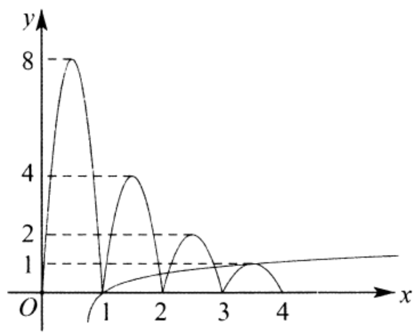


图 6-2-3

例 18.（2019•闵行区校级月考）定义在区间$[1，+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足：① $f(2x)=2f(x)$；②当 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时，$f(x)=1-|x-3|$，则集合 $S=\{x\,|\,f(x)=f(2035)\}$ 中的最小元素是(　　)

A. 13　　B. 21　　C. 45　　D. 51

解析：法一因为 $x\in[2,4]$ 时，$f(x)=1-|x-3|$，其值域为 [0, 1]，且先增后减，所以 $x\in[4,8]$ 时，$f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)=2\left[1-\left|\frac{x}{2}-3\right|\right]=2-|x-6|$，值域为 $[0,2]$，$x\in[8,16]$ 时，$f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)=2\left[2-\left|\frac{x}{2}-6\right|\right]$

$=4-|x-12|$ 值域为 $[0,4]$，$x\in[16,32]$ 时，$f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)=2\left[4-\left|\frac{x}{2}-12\right|\right]=8-|x-24|$，值域为 $[0,8]$，$x\in[32,64]$ 时，$f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)=2\left[8-\left|\frac{x}{2}-24\right|\right]=16-|x-48|$，值域为 $[0,16]$，…，一般地，$x\in\left[2^n,2^{n+1}\right]$ 时，$f(x)=2^{n-1}-\left|x-3\cdot 2^{n-1}\right|$ 值域为 $\left[0,2^{n-1}\right]$. 而 $2035\in\left[2^{10},2^{11}\right]$，即 $n=10$，所以 $f(2035)=512-|2035-1536|=13$，止于 $f(x)=f(2015)=13$，要使 x 最小，可设 $x\in[13,16]$，即令

$16-|x-48|=13$, 解得 $x=45$ 或 $x=51$, 所以，满足 $f(x)=f(2035)$ 的最小 x 的值为 45, 故选 C.

法二 此题为倍增函数，如图 6-2-4，画出前三个分段单位，易知第一个分段单位 $2\le x\le 4$ 最大值为 1，对称轴两端斜率分别为 ± 1，第二个分段单位 $4\le x\le 8$ 最大值为 2，对称轴两端斜率分别为土 1，以此类推，第 n 个单位 $2^n\le x\le 2^{n+1}$ 的最大值为 2^{n-1}, 对称轴两端斜率分别为 ± 1, 而 $2035\in\left[2^{10},2^{11}\right]$, 即 $n=10$，$2035=2^{11}-13$, 因为 $f(2035)=13\in\left[2^3,2^4\right]$, 由此可得，最早出现与 $f(x)=f(2035)$ 的 $x\in\left[2^5,2^6\right]$, 且位于斜率为 1 的增区间上，所以函数 $f(2035)=13=f(2048-13)=f(1024+13)=f(512+13)=f(256+13)=f(128+13)=f(64+13)=f(32+13)$, 所以满足 $f(x)=f(2035)$ 的最小 x 的值为 45, 故选 C.

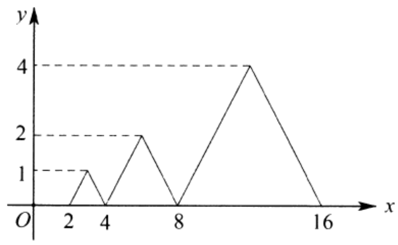


图 6-2-4

例 19.（2020•桃源县校级月考）定义在 R 上的函数满足 $f(0)=0$，$f(x)+f(1-x)=1$，$f(\frac{x}{5})=\frac{1}{2}f(x)$，且当 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$ 时，$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则 $f(\frac{125}{2020})=$_____.

解析：法一 根据题意，函数满足 $f(0)=0$, $f(x)+f(1-x)=1$, 令 $x=0$ 可得 $f(0)+f(1)=1$, 即 $f(1)=1$，又由 $f\left(\frac{x}{5}\right)=\frac{1}{2}f(x)$, 令 $x=1$ 可得 $f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}$, 再令 $x=\frac{1}{5}$ 可得 $f\left(\frac{1}{25}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{4}$; 在 $f(x)+f(1-x)=1$ 中, 令 $x=\frac{1}{2}$ 可得 $2f\left(\frac{1}{2}\right)=1$, 即 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, 又因为 $f\left(\frac{x}{5}\right)=\frac{1}{2}f(x)$, 令 $x=\frac{1}{2}$ 可得 $f\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$, 则有 $f\left(\frac{1}{25}\right)=f\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{4}$, 又由 $\frac{1}{25}<\frac{125}{2020}<\frac{1}{10}$, 则 $f\left(\frac{125}{2020}\right)=\frac{1}{4}$. 故答案为 $\frac{1}{4}$

法二直接根据等比阶梯函数图象快速得出答案就是 $\frac{1}{4}$. 如图 6-2-5, 此题以 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 为对称中心，横坐标每

缩小$\frac{1}{5}$,纵坐标缩小$\frac{1}{2}$,止$\frac{1}{50}<\frac{125}{2020}<\frac{1}{10}$,则$f\left(\frac{125}{2020}\right)=\frac{1}{4}$.故答案为$\frac{1}{4}$.

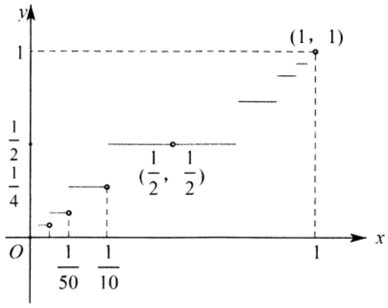


图 6-2-5

达标训练（适合高一）

1.（2020•永州二模）已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)+f(3-x)=0$，若 f（1）$=2$，则 f（1）$+f$（2）$+f$（3）$+\ldots+f(2019)=($　　$)$

A．-2　　B．0　　C．2　　D．2020

2.（2020•衢州期末）已知 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且满足 $f(x+3)=f(x-3)$，当 $x\in(0,3)$ 时，$f(x)=2^x-1$，则 $f(2020)=($　　$)$

A．$-\frac{3}{4}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．-3　　D．3

3.（2019•怀化期末）已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，满足 $f(x+2)=-f(x)$，且 $x\in(-\frac{3}{2},0)$ 时，$f(x)=\log_2(-3x+1)$，则 $f(-2019)=($　　$)$

A．4　　B．2　　C．-2　　D．$\log_2 5$

4.（2019 秋•南岸区期末）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1,x\geqslant 2\\ f(x+2),x<2\end{cases}$，则 f（1）$-f$（2）$=($　　$)$

A．12　　B．2　　C．-2　　D．3

5.(多选)设函数 $f(x)$ 的定义域为 A，且满足任意 $x\in A$ 恒有 $f(x)+f(2-x)=2$ 的函数可以是（　　）

A．$f(x)=2-x$　　B．$f(x)=(x-1)^2$

C．$f(x)=\frac{x}{x-1}$　　D．$f(x)=(x-2)^3$

6.（多选）设函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，对任意 $x\in R$，有 $f(x+6)=f(x)+f$（3）成立，且 $f(-2)=-1$，当 x_1，$x_2\in[0$，$3]$ 且 $x_1\neq x_2$ 时，有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，下列命题正确的是(　　)

A．$f(2012)=-1$　　B．$x=-6$ 是 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴

C．$y=f(x)$ 在 $[-9，-6]$ 上是增函数　D．函数 $y=f(x)$ 在 $[-9，9]$ 上有 4 个零点

7．（2018•绵阳模拟）函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x)$，且当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=|x|$．若函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $g(x)=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 的图象有且仅有 4 个交点，则 a 的取值集合为(　　)

A．$(4,5)$　　B．$(4,6)$　　C．$\{5\}$　　D．$\{6\}$

8．（2019•宜春月考）函数 $f(x)=-x^2+4x-2(e^{x-2}+e^{2-x})$，则不等式 $f(2x-1)<f(3x)$ 的解集为(　　)

A．$(-\infty，-1)\cup(1，+\infty)$　　B．$(-1,1)$

C．$(-1,+\infty)$　　D．$(-\infty,-1)$

9．（2018•普陀区一模）定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}2^x+2 & 0\leqslant x<1\\ 4-2^{-x} & -1\leqslant x<0\end{cases}$，且 $f(x-1)=f(x+1)$，则函数 $g(x)=f(x)-\dfrac{3x-5}{x-2}$ 在区间 $[-1，5]$ 上的所有零点之和为(　　)

A．4　　B．5　　C．7　　D．8

10．（2019•双台子区校级期末）已知函数 $f(x)$ 是定义域在 $(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$ 上的偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\begin{cases}2^{|x-1|},0<x\leqslant 2\\ 2f(x-2),x>2\end{cases}$，则函数 $g(x)=f(x)-2$ 的零点个数为(　　)

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

11．（2019•荔湾区校级期末）已知定义域为 R 的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4)=f(x)+f$（2），当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)=2x^2-3x+1$，则函数 $y=f(x)$ 在 $[-4，4]$ 上零点的个数(　　)

A．10　　B．11　　C．12　　D．13

12（2019•蚌埠期末）函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=-f(x)$，且当 $0\leqslant x<1$ 时，$f(x)=1-x$，若函数 $g(x)=f(x)-ax$ 有 4 个零点，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$[-\frac{1}{3},-\frac{1}{4})\cup(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$　　B．$(-\frac{1}{3},-\frac{1}{4}]\bigcup[\frac{1}{3},\frac{1}{2})$

C．$[-\frac{1}{4},-\frac{1}{5})\cup(\frac{1}{5},\frac{1}{4}]$　　D．$(-\frac{1}{4},-\frac{1}{5})\bigcup(\frac{1}{5},\frac{1}{4})$

13．（2017•乐山二模）若函数 $f(x)$ 满足 $f(x-1)=\dfrac{1}{f(x)-1}$，当 $x\in[-1，0]$ 时，$f(x)=x$，若在区间 $[-1，1]$ 上，$g(x)=f(x)-mx+m$ 有两个零点，则实数 m 的取值范围为____．

14．（2020•涞水县校级月考）设 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数．且满足 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$，如果 f（1）$=lg\dfrac{3}{2}$，f（2）$=lg15$，则 $f(2020)=$____．

15.（2019•湖北期末）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-|x+2|,x\in[-4,0]\\2f(x-4),x\in(0,+\infty)\end{cases}$，则 f（6）＝____；若方程 $f(x)=x+a$ 在区间 $[-4，8]$ 有三个不等实根，实数 a 的取值范围为____.

16.（2019•南关区校级月考）已知定义在 $[0，+\infty)$ 上的函数 $f(x)$，当 $x\in[0，2]$ 时，$f(x)=8(1-|x-1|)$，且对任意的实数 $x\in[2^n-2，2^{n+1}-2](n\in N^*，n\geqslant 2)$，都有 $f(x)=\dfrac{1}{2}f(\dfrac{x}{2}-1)$，若函数 $g(x)=f(x)-\log_a x$ 有且仅有三个零点，则 a 的取值范围是____.

17.（2020•青浦区一模）已知对于任意给定的正实数 k，函数 f（x）＝$2^x+k\cdot 2^{-x}$ 的图象都关于直线 $x=m$ 成轴对称图形，则 m＝____.

18.（2019•松江区一模）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(x)\cdot f(-x)=1$ 和 $f(1+x)\cdot f(1-x)=4$ 对任意的 $x\in R$ 都成立．若当 $x\in[0，1]$，$f(x)$ 的值城为 $[1，2]$，则当 $x\in[-100，100]$ 时，函数 $f(x)$ 的值域为____.

19.（2019•普陀区校级月考）设定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：对任意的 x_1、$x_2\in R$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$.

（1）若 $f(x)=ax^3+1$，求实数 a 的取值范围；

（2）若 $f(x)$ 为周期函数，证明：$f(x)$ 是常值函数；

（3）若 $f(0)=0,f(x)+f(1-x)=1,f(\dfrac{x}{5})=\dfrac{1}{2}f(x)$

①记 $a_n=f(\dfrac{1}{5^n})(n\in N^*)$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

②求 $f(\dfrac{1}{2019})$ 的值.

20.（2018•四川模拟）已知函数 $f(x)$ 是偶函数，且满足 $2f(x+2)-f(-x)=0$，当 $x\in(0，2]$ 时，$f(x)=e^x+ax(a>1)$，当 $x\in(-4，-2]$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $4e^2+16$.

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）函数 $g(x)=\dfrac{4}{3}bx^3-4bx+2(b\neq 0)$，若对任意的 $x_1\in(1,2)$，总存在 $x_2\in(1,2)$，使不等式 $f(x_1)<g(x_2)$ 恒成立，求实数 b 的取值范围.

21.（2019天心区校级月考）设 $A=[-1，1]$，$B=[-2，2]$，函数 $f(x)=2x^2+mx-1$，

（1）设不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集为 C，当 $C\subseteq(A\bigcap B)$ 时，求实数 m 的取值范围；

（2）若对任意 $x\in R$，都有 $f(1-x)=f(1+x)$ 成立，试求 $x\in B$ 时，函数 $f(x)$ 的值域；

（3）设 $g(x)=2|x-a|-x^2-mx(a\in R)$，求 $f(x)+g(x)$ 的最小值.

达标训练（适合高二复习）

1.（2019•东莞市校级期末）已知 $f(x+1)=f(x-1)$， $f(x)=f(-x+2)$，方程 $f(x)=0$ 在 $[0,\ 1]$ 内有且只有一个根 $x=\frac{1}{2}$，则 $f(x)=0$ 在区间 $[0,\ 2019]$ 内根的个数为(　　)

A. 2018　　B. 1008　　C. 2019　　D. 1009

2.（2018•宁城县一模）若定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x)$ 且 $x\in[0,\ 1]$ 时， $f(x)=x$，则方程 $f(x)=\log_3|x|$ 的零点个数是(　　)

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 6 个

3.（2019•大连模拟）已知定义在 R 上的函数 $f(x)=e^{x-1}-e^{1-x}+(x-1)^3+x$，则不等式 $f(x-4)+f(2-3x)\geqslant 2$ 的解集为(　　)

A. $(-\infty,\ -2]$　　B. $(-\infty,\ 2]$　　C. $[-2,\ 2]$　　D. $[2,\ +\infty)$

4.（2018•余姚市校级期中）定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0, f(x)+f(1-x)=1, f(\frac{x}{5})=\frac{1}{2}f(x)$，且当 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant 1$ 时， $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则 $f(\frac{1}{2018})$ 等于(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{16}$　　C. $\frac{1}{32}$　　D. $\frac{1}{64}$

5.（2019 秋•沧州月考）已知函数 $f(x)=2x$，函数 $g(x)$ 与 $p(x)=1+ln(-2-x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 对称，若 $f(x_1)=g(x_2)$，则 x_1+x_2 的最小值为(　　)

A. 2　　B. $\frac{ln2-1}{2}$　　C. $ln2$　　D. $\frac{1}{2}ln2$

6.（2019•宝鸡二模）定义在 R 上的函数 $y=f(x)$，满足 $f(3-x)=f(x)$， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，且 $(x-\frac{3}{2})f'(x)<0$，若 $x_1<x_2$，且 $x_1+x_2>3$，则有(　　)

A. $f(x_1)<f(x_2)$　　B. $f(x_1)>f(x_2)$　　C. $f(x_1)=f(x_2)$　　D. 不确定

7.（2018•南平一模）已知 $\alpha,\beta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}], t\in R$，且 $\alpha^5+\sin\alpha-3t=0$， $81\beta^5+\frac{1}{3}\sin 3\beta+t=0$，则 $ln[3-\cos(\alpha+3\beta)]=$(　　)

A. $ln2$　　B. $ln3$　　C. $ln\frac{5}{2}$　　D. $ln(3-\frac{\sqrt{2}}{2})$

8.（2019•镇海区校级月考）已知函数 $f(x)=-x^2(x^2+ax+b)$，且满足 $f(1-x)=f(1+x)$，则 $f(x)$ 的最大值是(　　)

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

9．（2019•湛江校级月考）设函数 $f(x)$ 的定义域为 R，满足 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $x\in(0，1]$ 时，$f(x)=x(1-x)$．若存在 $x\in(-\infty，m]$，使得 $f(x)\geqslant\frac{8}{9}$，则 m 的最小值是(　　)

A. $\frac{9}{4}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{7}{3}$　　D. $\frac{8}{3}$

10．（2019•雁江区校级月考）若 $f(x)$ 函数满足 $f(x+2)=2f(x)$，当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)=lnx-ax(a>\frac{1}{2})$，当 $x\in(-4,-2)$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $-\frac{1}{4}$，则实数 a 的值为(　　)

A. 3　　B. e　　C. 2　　D. 1

11．（2019•路南区校级月考）定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=-f(x)$，当 $x\in[0，1]$ 时，$f(x)=-2x+1$，则函数 $g(x)=f(x)-\sin\frac{\pi}{2}x(0\leqslant x\leqslant 4)$ 的零点之和为(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 8

12．（2018•南岗区校级期中）已知定义域为 R 的奇函数 $f(x)$，当 $x>0$ 时，$f(x)=2f(x+3)$，当 $-3<x\leqslant 0$ 时，$f(x)=\log_3(1-x)$，则 $f(2018)=$(　　)

A. $-\frac{1}{2^{673}}$　　B. $-\frac{1}{2^{672}}$　　C. $\frac{1}{2^{672}}$　　D. $\frac{1}{2^{673}}$

13．（2018•甘肃模拟）已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且 $f(-3-x)=f(3-x)$，当 $-3\leqslant x\leqslant -1$ 时，$f(x)=-(x+2)^2$，当 $-1<x\leqslant 0$ 时，$f(x)=2^x+1$，则 f（1）$+f$（2）$+f$（3）$+\ldots+f(2018)=$(　　)

A. 670　　B. 334　　C. -337　　D. -673

14．（2019•珠海期中）已知定义在 R 上的函数 $y=f(x)$ 满足条件 $f(x+\frac{3}{2})=-f(x)$，且函数 $y=f(x-\frac{3}{4})$ 为奇函数，下列有关命题的说法错误的是(　　)

A. 函数 $f(x)$ 是周期函数　　B. 函数 $f(x)$ 为 R 上的偶函数

C. 函数 $f(x)$ 为 R 上的单调函数　　D. $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{3}{4},0)$ 对称

15．（2019•全国月考）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且满足 $f(x+1)=-2f(x)$，当 $x\in[0，1]$ 时，$f(x)=x(1-x)$．则函数 $y=4f(x)-3$ 在区间 $[0，5]$ 上的零点个数为(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

16．（2019 秋•凤城市校级月考）已知函数 $f(x)=e^x(x-1)$，若关于 x 的方程 $|f(x)-a|+|f(x)-a-1|=1$ 有且仅有两个不同的整数解，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $[-\frac{2}{e}-1,-\frac{3}{e^{2}}-1)$　　B. $[-\frac{2}{e},-\frac{3}{e^{2}})$

C. $[-1,-\frac{2}{e}]$　　D. $[0，e^{2}]$

17.（2019•西湖区校级模拟）设函数 $f(x)=\begin{cases}1-|x-1|,x\in(-\infty,2)\\ \frac{1}{2}f(x-2),x\in[2,+\infty)\end{cases}$，则函数 $F(x)=xf(x)-1$ 的零点的个数为(　　)

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

18.（2019•定州市校级月考）已知函数 $f(x)$ 的周期为 4，且当 $x\in(-1，3]$ 时，$f(x)=\begin{cases}m\sqrt{1-x^{2}},x\in(-1,1]\\ 1-|x-2|,x\in(1,3]\end{cases}$ 其中 $m>0$．若方程 $3f(x)=x$ 恰有 3 个实数解，则 m 的取值范围为(　　)

A. $(0,\frac{\sqrt{15}}{3})$　　B. $(\frac{\sqrt{15}}{3}，\sqrt{7})$　　C. $(\frac{4}{3}，\frac{8}{3})$　　D. $(\frac{4}{3}，\sqrt{7})$

19.（2018•济宁二模）已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数且满足 $f(2-x)=f(x)$，当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)=e^{x}-\frac{1}{x}$，则函数 $y=f(x)$ 在 $(-2，3]$ 上的零点个数是(　　)

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

20.（2018•浙江三模）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|lnx|,0<x\leqslant 10\\ f(20-x),10<x<20\end{cases}$ 设方程 $f(x)=t(t\in R)$ 的四个不等实根从小到大依次为 x_1，x_2，x_3，x_4，则下列判断中错误的是(　　)

A. $x_1+x_2+x_3+x_4=40$　　B. $x_1x_2=1$

C. $x_3x_4=361$　　D. $x_3x_4-20(x_3+x_4)+399=0$

21.（2019•广西期末）已知函数 $g(x)$ 满足 $g(x)=2g(\frac{1}{x})$，当 $x\in[1，3]$ 时，$g(x)=lnx$．若函数 $f(x)=g(x)-mx$ 在区间 $[\frac{1}{3}，3]$ 上有三个不同的零点，则实数 m 的取值范围是(　　)

A. $[\frac{ln3}{3}，\frac{1}{e})$　　B. $[ln3，\frac{3}{e})$　　C. $(\frac{1}{e}，ln3)$　　D. $(0,\frac{1}{e})$

22. 已知偶函数 $f(x)$ 满足 $f(\frac{\pi}{2}+x)=f(\frac{\pi}{2}-x)$，当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f(x)=\cos x$，若方程 $f(x)=kx(k>0)$ 有且仅有 4 个根，这 4 个根的最大值为 θ，则(　　)

A. $\theta=\tan\theta$　　B. $\theta=-\tan\theta$　　C. $\theta=-\frac{1}{\tan\theta}$　　D. $\theta=\frac{1}{\tan\theta}$

23．（2019•乌兰察布期末）已知函数 $f(x)$ 对于任意 $x\in R$，均满足 $f(x)=f(2-x)$．当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)=\begin{cases} lnx,0<x\leqslant 1 \\ e^{x},x\leqslant 0 \end{cases}$．若函数 $g(x)=m|x|-2-f(x)$，下列有关函数 $g(x)$ 的零点个数问题中正确的为(　　)

A．若 $g(x)$ 恰有两个零点，则 $m<0$　　B．若 $g(x)$ 恰有三个零点，则 $\dfrac{3}{2}<m<e$

C．若 $g(x)$ 恰有四个零点，则 $0<m<e$　　D．不存在 m 使得 $g(x)$ 恰有四个零点

24.（2019•河东区校级模拟）已知函数 $f(x)$ 为偶函数且 $f(x)=f(x-4)$，又 $f(x)=\begin{cases} -x^{2}-\dfrac{3}{2}x+5,x\in[0,1] \\ 2^{x}+2^{-x},x\in(1,2] \end{cases}$，函数 $g(x)=(\dfrac{1}{2})^{|x|}+a$，若 $F(x)=f(x)-g(x)$ 恰好有 4 个零点，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$(2,\dfrac{19}{8})$　　B．$(1,\dfrac{16}{7})$　　C．$(2，\dfrac{16}{7}]$　　D．$(2,\dfrac{18}{7})$

25.（2019•宿迁期末）已知函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & 1\leqslant x<2 \\ 2f(\dfrac{1}{2}x), & x\geqslant 2 \end{cases}$ 如果函数 $g(x)=f(x)-k(x-3)$ 恰有 2 个不同的零点，那么实数 k 的取值范围是__．

26. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且满足 $f(-x+1)=f(x+1)$，当 $x\in[-1，0]$ 时，$f(x)=x^{2}$，且方程 $f(x)=\log_{a}|x|$ 在 R 上有且只有 6 个零点，则 a 的取值范围为__．

27.（2019 和平区校级月考）设 $f(x)$，$g(x)$ 是定义在 R 上的两个函数，$f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$，$g(x)$ 满足 $g(x+2)=g(x)$，且当 $x\in(0，2]$ 时，$f(x)=\sqrt{-x^{2}+2x}$，$g(x)=\begin{cases} k(x+2) & 0<x\leqslant 1 \\ -\dfrac{1}{2} & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$，若在区间 $[0，11]$ 上，关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有 8 个不同的实数根，则 k 的取值范围是____．

28.（2018•西城区校级期中）函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若对于任意 x_{1}，$x_{2}\in D$，当 $x_{1}<x_{2}$ 时，都有 $f(x_{1})\leqslant f(x_{2})$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上为非减函数，设函数 $f(x)$ 在 $[0，1]$ 上为非减函数，且满足以下三个条件：① $f(0)=0$；② $f(\dfrac{x}{3})=\dfrac{1}{2}f(x)$；③ $f(1-x)=1-f(x)$，则 $f(\dfrac{1}{3})=$____；$f(\dfrac{3}{5})+f(\dfrac{6}{7})=$____．

29.（2018•衡阳三模）已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(3x)$，当 $x\in[1，3)$，$f(x)=lnx$，若在区间 $[1，9)$ 内，函数 $g(x)=f(x)-ax$ 有两个不同的零点，则实数 a 的取值范围是____．

30.（2019•澧县校级期中）已知函数 $y=f(x)$ 是 R 上的偶函数，满足 $f(x+2)=f(x-2)+f$（2），且当 $x\in[0，2]$ 时，$f(x)=2^{x}-4$，令函数 $g(x)=f(x)-m$，若 $g(x)$ 在区间 $[-10，2]$ 上有 6 个零点，分别记为 x_{1}，x_{2}，x_{3}，x_{4}，x_{5}，x_{6}，则 $x_{1}+x_{2}+x_{3}+x_{4}+x_{5}+x_{6}=$____．

31.（2017•天津二模）函数 $f(x)$ 的定义域为实数集 R， $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^{x}-1,-1\leqslant x\leqslant 0\\ lnx+1,0<x<3\end{cases}$ 对于任意的 $x\in R$， $f(x+2)=f(x-2)$，若在区间 $[0，4]$ 上函数 $g(x)=f(x)-mx$ 恰有三个不同的零点，则实数 m 的取值范围____.

32.（2019•湘潭县校级模拟）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1，+\infty)$，且 $f(x)=\begin{cases}1-|2x-3|,1\leqslant x<2\\ \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}x),x\geqslant 2\end{cases}$，则函数 $y=2xf(x)-3$ 在区间 $(1,2019)$ 上的零点个数为____.

33.（2019•未央区校级月考）狄利克雷是 19 世纪德国著名的数学家，他定义了一个“奇怪的函数” $D(x)=\begin{cases}1,x为有理数\\ 0,x为无理数\end{cases}$，下列关于狄利克雷函数的叙述正确的有：____.

①$D(x)$ 的定义域为 R，值域是 $\{0，1\}$ ②$D(x)$ 具有奇偶性，且是偶函数③$D(x)$ 是周期函数，但它没有最小正周期④对任意的 $x\in R$， $f(f(x))=1$

34.（2019•岳麓区校级月考）定义在 $(0,+\infty)$ 上函数 $f(x)$ 满足：①当 $x\in[1，3)$ 时， $f(x)=1-|x-2|$；② $f(3x)=3f(x)$．设关于 x 的函数 $F(x)=f(x)-a$ 的零点从小到大依次为 x_1， x_2， …， x_n ….若 $a\in(1,3)$，则 $x_1+x_2+\ldots+x_{2n}=$____.

35.（2018•舟山校级期中）已知函数 $f(x)=ax^2+(b-1)x+1(a，b\in R，a>0)$.

（1）若 f（1）$=0$，且对任意 $x\in R$，都有 $f(2-x)=f(2+x)$，求 $f(x)$ 的解析式；

（2）已知 x_1， x_2 为函数 $f(x)$ 的两个零点，且 $x_2-x_1=2$，当 $x\in(x_1，x_2)$ 时， $g(x)=-f(x)+2(x_2-x)$ 的最大值为 h（a），当 $a\geqslant 2$ 时，求 h（a）的最小值.

36.（2019•青羊区月考）设 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且对任意 $x\in R$，都有 $f(x+2)=-f(x)$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时， $f(x)=x^2$.

(I) 当 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 时，求 $f(x)$ 的解析式；

(II) 设向量 $\vec{a}=(2\sin\theta,1),\vec{b}=(9,16\cos\theta)$，若 $\vec{a},\vec{b}$ 同向，求 $f(\frac{2017}{\sin\theta+\cos\theta})$ 的值；

(III) 定义：一个函数在某区间上的最大值减去最小值的差称为此函数在此区间上的“界高”.

求 $f(x)$ 在区间 $[t，t+1](-2\leqslant t\leqslant 0)$ 上的“界高” $h(t)$ 的解析式；在上述区间变化的过程中，“界高” $h(t)$ 的某个值 h_0 共出现了四次，求 h_0 的取值范围.

专题 7 嵌套函数与零点问题

嵌套函数成为了最近几年的热门考点，以其绕得晕和审题难而著称，嵌套函数和一些复杂得分段函数求零点个数也是一种常考题型，零点问题不再是那么简单的“二分法”就能搞定了，结合我们之前的二次函数分析法，参变分离和定海神针始终相伴，终究还是看函数的综合能力.

第一讲嵌套函数

在某些情况下，我们可能需要将某函数作为另一函数的参数使用，这一函数就是嵌套函数. 在函数里面调用另外一个函数，就叫做函数嵌套。如果调用自己本身，就叫做递归调用，也叫递归嵌套.

一. 嵌套函数解析式问题

换元法　将被嵌套的部分换为一个主元 t, 即求出 $y=f(t)$ 解析式，属于通法.

待定系数法　将被嵌套部分换成一个常数，最后解出这个常数即可.

例 1.（2019•北京校级期中）已知函数 $f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上是单调函数，若对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f[f(x)-\frac{1}{x}]=2$，则 $f(\frac{1}{6})$ 的值是（　　）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

解析：由题若对任意 $x\in(0,+\infty)$ 都有 $f\left[f(x)-\frac{1}{x}\right]=2$, 得到 $f(x)-\frac{1}{x}$ 为一个常数, 令 $f(x)-\frac{1}{x}=n$, 则 $f(n)=2$, 所以 $2-\frac{1}{n}=n$,　则 $n=1$,　即 $f(x)=1+\frac{1}{x}$,　所以 $f\left(\frac{1}{6}\right)=7$, 故选 C.

例 2.（2019•江阴市期中）已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 为单调函数，且 $f(f(x)-\frac{4}{x})=4$，则 f（1）＝____.

解析：因为函数 $f(x)$ 为定义在 $(0,+\infty)$ 上的单调函数, 则十 $f\left(f(x)-\frac{4}{x}\right)=4$ 得,　$f(x)-\frac{4}{x}=m$, 即 $m>0$，所以 $f(x)=\frac{4}{x}+m$, 则 $f(m)=\frac{4}{m}+m$, 即 $\frac{4}{m}+m=4$, 解得 $m=2$, 所以 $f(1)=4+2=6$. 故答案为 6.

例 3.（2019•开福区校级月考）已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的单调函数，满足 $f[f(x)-e^x]=1$，且 $f(a)>f(b)>e$，若 $\log_a b+\log_b a=\frac{17}{4}$，则 a 与 b 的关系是（　　）

A. $a=b^3$　　B. $b=a^3$　　C. $a=b^4$　　D. $b=a^4$

解析：因为 $f(x)$ 是定义在 R 上的单调函数, 满足 $f\left[f(x)-e^x\right]=1$, 所以 $f(x)-e^x$ 是一个常数, 设 $a=f(x)-e^x$, 则 $f(a)=1$,　由 $a=f(x)-e^x$,　得 $f(x)=a+e^x$,　令 $x=a$,　得 $f(a)=a+e^a=1$,

解得 $a=0$，因为 $f(a)>f(b)>e=f(1)$, 所以 $a>b>1$, 所以 $\log_b a>1$, 因为 $\log_a b+\log_b a=\frac{17}{4}$, 所以 $\frac{1}{\log_b a}+\log_b a=\frac{17}{4}$，解得 $\log_b$ 或 $\log_b a=-\frac{1}{4}$ （舍去）, 所以 $a=b^4$, 故选 C.

例 4.（2019•西湖区校级模拟）已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 为单调函数，且 $f(x)\cdot f(f(x)+\frac{2}{x})=2$，则 $f(1)=$____.

解析：因为 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 所以当 $x=1$ 时， $f(1)\cdot f(f(1)+2)=2$, 所以 $f(f(1)+2)=\frac{2}{f(1)}$, 把 $f(1)+2$ 作为 $f(f(1)+2)$ 自变量的一个取值, 它必须在定义域内, 所以 $f(1)+2>0$, 即 $f(1)>-2$, 设 $f(1)=a$,（其中 $a>-2$），所以 $f(a+2)=\frac{2}{a}$ (1)，令 $x=a+2$ （其中 $a>-2$），代入 $f(x)\cdot f\left(f(x)+\frac{2}{x}\right)=2$ 中，得 $f(a+2)\cdot f\left(f(a+2)+\frac{2}{a+2}\right)=2(2)$, 把（1）代入 (2) 得 $\frac{2}{a}\cdot f\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{a+2}\right)=2$, 即 $f\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{a+2}\right)=a$ (3), 因为 $a=f(1)$, 所以 $f\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{a+2}\right)=f(1)$, 把 $\frac{2}{a}+\frac{2}{a+2}$ 和 1 分别看作函数 $f(x)$ 的自变量的 2 个取值, 由于函数 $f(x)$ 是单调函数，要使对应的函数值相等，自变量必须相等, 即 $\frac{2}{a}+\frac{2}{a+2}=1$, 解得 $a=1+\sqrt{5}$ 或 $a=1-\sqrt{5}$, 因为 $1+\sqrt{5}$ 和 $1-\sqrt{5}$ 都大于 -2, 所以两个数值都符合题意，综上，$f(1)=1+\sqrt{5}$ 或 $f(1)=1-\sqrt{5}$. 故答案为 $1\pm\sqrt{5}$.

注意: 若 $f(x)$ 为单调增函数, 则 $f(f(1)+2)=\frac{2}{f(1)}>f(1)\Leftrightarrow f^2(1)<2\Leftrightarrow f(1)=1-\sqrt{5}$, 反之，若 $f(x)$ 为单调减函数，则 $f(f(1)+2)=\frac{2}{f(1)}<f(1)\Leftrightarrow f^2(1)>2\Leftrightarrow f(1)=1+\sqrt{5}$. 故答案为 $1\pm\sqrt{5}$.

例 5.（2018•唐山模拟）已知函数 $f(x)=a^x-\log_a x(a>1)$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(1,e^{\frac{1}{e}})$　　B. $[2，e^e)$

C. $(e^{\frac{1}{e}}，e^e)$　　D. $(e^{\frac{1}{e}}，e^{\frac{2}{e}})$

解析：法一根据题意，函数 $f(x)=a^x-\log_a x(a>1)$ 有两个零点, 则函数 $y=a^x$ 与函数 $y=\log_a x$ 有 2 个交点, 设 $g(x)=a^x$， $h(x)=\log_a x$, 且两个函数互为反函数，两个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称，当两个

函数的图象都与直线 $y=x$ 相切时，设切点的横坐标为 $m, g(x)=a^x$，则 $g'(x)=a^x\ln a$，当 $x=m$ 时，

$g'(m)=a^m\ln a$，$h(x)=\log_a x, h'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$，则 $h'(m)=\dfrac{1}{m\ln a}$，则有 $\begin{cases}a^m\ln a=1\\ \dfrac{1}{m\ln a}=1\\ a^m=\log_a m\end{cases}$，解得

$m=e,\ a=e^{\frac{1}{e}}$，即当 $a=e^{\frac{1}{e}}$ 时，两个函数的图象只有一个交点，则当 $a<e^{\frac{1}{e}}$ 时，两个函数的图象有2个交点，

即函数 $f(x)$ 有 2 个零，点，则实数 a 的取值范围是 $\left(1,e^{\frac{1}{e}}\right)$，故选 A.

法二由 $a^x>\log_a x\Rightarrow a^{a^x}>a^{\log_a x}=x\Rightarrow f(f(x))>x\Rightarrow f(x)>x\Rightarrow a^x=e^{x\ln a}>x\Rightarrow x\ln a>\ln x\Rightarrow$

$\ln a>\dfrac{\ln x}{x}_{\max}$，故 $a>e^{\frac{1}{e}}$，故选 A.（利用递归嵌套函数，当 $f(f(x))>x$ 时，一定有 $f(f(x))>f(x)>x$，这是不动点定理 2）.

法三同构，参考秒 1 第五章专题 7.

二．嵌套函数与不动点问题

不动点对于函数 $f(x)(x\in D)$，我们把方程 $f(x)=x$ 的解 x 称为函数 $f(x)$ 的不动点，即 $y=f(x)$ 与 $y=x$ 图象交点的横坐标.

例如函数 $f(x)=2x-1$ 有一个不动点为1，函数 $g(x)=2x^2-1$ 的不动点. 有两个不动点 $-\dfrac{1}{2},1$.

稳定点对于函数 $f(x)(x\in D)$，我们把方程 $f[f(x)]=x$ 的解 x 称为函数 $f(x)$ 的稳定点，即 $y=f[f(x)]$ 与 $y=x$ 图象交点的横坐标. 很显然，若 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的不动点，则 x_0 义为函数 $y=f(x)$ 的稳定点.

证明因为 $f\left(x_0\right)=x_0$，所以 $f\left(f\left(x_0\right)\right)=f\left(x_0\right)=x_0$，故 x_0 也是函数 $y=f(x)$ 的稳定点.

例 6. 求函数 $f(x)=2x^2-1$ 的稳定点.

解析令 $f(f(x))=x$，则 $2\left(2x^2-1\right)^2-1=x\Rightarrow 2\left(4x^4-4x^2+1\right)-1-x=0\Rightarrow 8x^4-8x^2-x+1=0$，因为不动点，必为稳定点，所以该方程一定有两解 $x_1=-\dfrac{1}{2},x_2=1\Rightarrow 8x^4-8x^2-x+1$ 必有因式 $(x-1)(2x+1)=2x^2-x-1$，可得 $(x-1)(2x+1)\left(4x^2+2x-1\right)=0\Rightarrow$ 另外两解 $x_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$，故函数 $f(x)=2x^2-1$ 的稳定点，是 $-\dfrac{1}{2}$，1，$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4},\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$，其中 $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$ 是稳定点，但不是不动点.

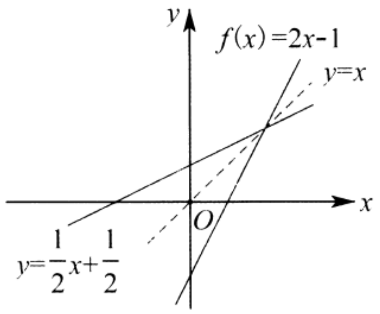


图 7-1-1

$$$$$$$$$$$$

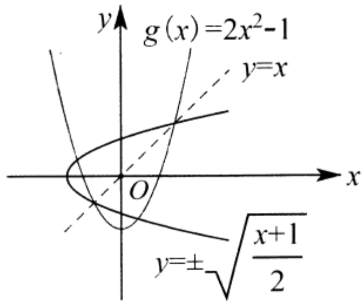


图 7-1-2

由此可见，不动点是函数图象与直线 $y=x$ 的交点的横坐标，稳定点是函数 $y=f(x)(x\in D)$ 图象与曲线 $x=f(y)(y\in D)$ 图象交点的横坐标（特别，若函数有反函数时，则稳定点是函数图象与其反函数图象交点的横坐标.

不动点定理 1 若函数 $f(x)$ 为定义域内的单调递增函数, 则 $f(f(x))=x$ 有解等价于 $f(x)=x$ 有解.

证明若 $f(x)=x$ 无解，则必有 $f(x)>x$, 或 $f(x)<x$ 恒成立, 当 $f(x)>x$ 时, 因为 $f(x)$ 为定义域内的单调增函数, 则 $f(f(x))>f(x)>x$, 显然 $f(f(x))=x$ 无解; 同理, 可证 $f(x)<x$ 的情况. 因此, 函数 $f(x)$ 为定义域内的单调增函数, $f(f(x))=x$ 有解等价于 $f(x)=x$ 有解.

例 7.（2013•四川文）设函数 $f(x)=\sqrt{e^x+x-a}$（$a\in R$，e 为自然对数的底数）, 若存在 $b\in[0,1]$ 使 $f(f(b))=b$ 成立, 则 a 的取值范围是__________.

解析由题意得函数 $f(x)$ 在定义域内为增函数，利用 $f(f(x))=x$ 等价于 $f(x)=x$ 有解这个结论，若存在 $b\in[0,1]$ 使 $f(f(b))=b$ 成立，即为 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 有解，所以 $x=\sqrt{e^x+x-a}$, 分离参数得 $a=e^x-x^2+x=g(x)$, $x\in[0,1]$, 所以 $g'(x)=e^x-2x+1\geq 0$, 所以 $g(x)$ 单调递增，$g(x)\in[1,e]$, 所以若存在 $b\in[0,1]$ 使 $f(f(b))=b$ 成立，则 a 的取值范围是 $[1,e]$. 故答案为 $[1,e]$.

例 8.（2019•丽水模拟）已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数, 若方程 $f(f(x))=x$ 有且仅有一个实数根，则 $f(x)$ 可能是（）

$A.\ f(x)=|2x-1|$　　$B.\ f(x)=e^x$ $C.\ f(x)=x^2+x+1$　　$D.\ f(x)=\sin x$

解析：法一由题意知，仅存在一个 x_0 使 $f(f(x_0))=x_0$ 成立. 设 $f(x_0)=y_0$, 则 $f(y_0)=x_0$, 即 (x_0,y_0), (y_0,x_0) 两点都在 $y=f(x)$ 上, 由于 (x_0,y_0), (y_0,x_0) 两, 点关于 $y=x$ 对称, 故题意转为 $y=f(x)$ 图象上有

且仅有一对点关于 $y=x$ 对称，对 A 选项 $y=|2x-1|$, 显然 $y=|2x-1|$ 与 $y=x$ 有两个交点, $至少这两个交点, 就不符合题意中的唯一性了; 对 B 选项 $y=e^x$, 显然 $y=e^x$ 恒在 $y=x$ 上方，故不存在一对点关于 $y=x$ 对称对 C 选项 $y=x^2+x+1$, 显然 $y=x^2+x+1$ 恒在 $y=x$ 上方，故不存在一对点关于 $y=x$ 对称：对 D 选项有 $y=\sin x$, 仅有 $(0,0)$ 关于 $y=x$ 对称，故选 D.

法二唯一的稳定点意味着唯一的不动, 点, 故仅存在一个 x_0 使 $f\left(x_0\right)=x_0$ 成立只有 D 满足题意，故选 D.

例 9.（2018•舒城县校级月考）对于函数 $f(x)$，若 $f\left(x_0\right)=x_0$，则称 x_0 为函数的“不动点”；若 $f\left(f\left(x_0\right)\right)=x_0$，则称 x_0 为函数的 “稳定点”，若函数 $f(x)=x^2+a(a\in R)$ 的稳定点恰是它的不动点，则实数 a 的取值范围是________.

解析：法一设 $y=f(x)$, 由 $f(f(x))=x$ 得 $y^2+a=x$, 所以 $\begin{cases}y^2+a=x\\x^2+a=y\end{cases}$, 两式相减得 $(y-x)(y+x+1)=0$，即 $y-x=0$ 或 $y+x+1=0$, 所以 $y-x=0$ 必有解，即 $x^2-x+a=0$ 有解，所以 $\Delta=1-4a\geq 0\Rightarrow a\leq\frac{1}{4}$, 因为函数 $f(x)=x^2+a(x\in R)$ 的稳定点恰是它的不动, 点, 所以 $y+x+1=0$ 无解或者与 $y-x=0$ 同解，当 $y+x+1=0$ 无解时, 即方程 $x^2+x+a+1=0$ 无解， 则 $\Delta=1-4(a+1)<0\Rightarrow a>-\frac{3}{4}$, 当 $y+x+1=0$ 与 $y-x=0$ 同解时，$\begin{cases}x^2+x+a+1=0\\x^2-x+a=0\end{cases}$, 两式相减得 $x=\frac{1}{2}$, $a=-\frac{3}{4}$, 经检验 $a=-\frac{3}{4}$ 满足题意，综上所述 $a\in\left[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right]$

法二如图 $7-1-3$ 所示，$f(x)=x^2+a(x\in R)$ 的其中一个不动, 点一定位于 $f(x)=x^2+a$ 与 $f^{-1}(x)=\sqrt{x-a}$ 的切点，此时原函数与反函数公切线斜率一定为 -1, $f'(x)=2x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\Rightarrow$ $a=-\frac{3}{4}$, 当 $f(x)=x^2+a$ 只有一个不动点时，$a=\frac{1}{4}$, 故 $a\in\left[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right]$.

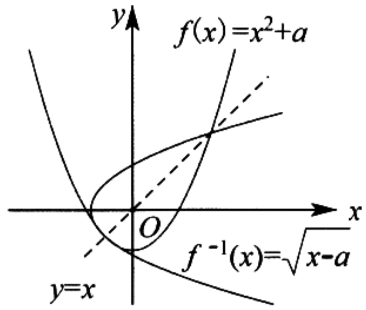


图 7-1-3

例 10.（2018•浙江模拟）已知二次函数 $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$，则“ $y=f\left(x\right)$ 与 $y=f\left(f\left(x\right)\right)$ 有相同的零点”是“ $c=0$ ”的___________条件.

解析：当 $y=f(x)$ 与 $y=f(f(x))$ 有相同的零,点时，不妨设 x_0 是函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(f(x))$ 的一个相同零点，则 $\begin{cases}f\left(x_0\right)=0\\f\left(f\left(x_0\right)\right)=0\end{cases}$，即 $f(0)=0$，所以 $c=0$. 反之，当 $c=0$ 时，$f(x)=ax^2+bx(a\neq 0)$，$f(f(x))=\left(ax^2+bx\right)\left(a^2x^2+abx+b\right)$， 显然 $y=f(x)$ 与 $y=f(f(x))$ 有相同的零点. 综上“ $y=f(x)$ 与 $y=f(f(x))$ 有相同的零点”是“ $c=0$ ”的充要条件.

例 11.（2019•宝山校级月考）已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，若 $f(x)=x$ 无实根，给出下列命题：

①方程 $f(f(x))=x$ 一定无实根；

②若 $a>0$，则不等式 $f(f(x))>x$ 对一切实数 x 都成立；

③若 $a<0$，则必存在实数 x_0 使 $f(f(x_0))>x_0$；

④若 $a+b+c=0$，则不等式 $f(f(x))<x$ 对一切实数 x 都成立.

其中正确的是________.

解析：因为 $f(x)=x$ 方程无实根，即 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 与 $y=x$ 的图象无交点，对于①，函数 $y=f[f(x)]$ 与 $y=x$ 的图象无交,点，即方程 $f(f(x))=x$ 一定无实根，①正确；对于②，当 $a>0$ 时，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象开口向上，与 $y=x$ 无交点，所以 $f(x)>x$ 对一切 $x\in R$ 成立，所以 $f[f(x)]>f(x)>x$，故命题②正确：对于③，同理当 $a<0$ 时，函数 $f(x)=a$ x^{2}+b $x+c$ 的图象开口向下，且在 $y=x$ 的下方，所以③错误：$f(x)<x$ 对一切 $x\in R$ 成立，所以 $f[f(x)]<f(x)<x$，故命题③错误；

对于④，因为 $a+b+c=0$，所以 $f(1)=0$，由 $a+b+c=0$，可知 a,b,c 中有两个同号，另一个与他们异号，又由 $f(x)=x$ 无实根，可得 $4ac>(b-1)^2$，从而有 a,c 同号，结合题意知 $a<0$，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象在 $y=x$ 的下方，所以 $f[f(x)]<x$ 对一切 $x\in R$ 恒成立，故命题④正确. 故答案为①②④.

综上，我们得出不动点定理 2：当 $f(f(x))>x$ 时，一定有 $f(f(x))>f(x)>x$，当 $f(f(x))<x$ 时，一定有 $f(f(x))<f(x)<x$.

例 12.（2018•吕梁一模）已知 x_0 是方程 $2x^2e^{2x}+lnx=0$ 的实根，则关于实数 x_0 的判断正确的是（　　）

A．$x_0\geqslant ln2$　　　　B．$x_0<\dfrac{1}{e}$

C．$2x_0+lnx_0=0$　　　　D．$2e^{x_0}+lnx_0=0$

解析：法一（同构）令 $2x^2e^{2x}+\ln x=0$，得 $2x^2e^{2x}=-\ln x$，其中 $x>0$，在等式两边同时除以 x 得，$2xe^{2x}=-\dfrac{\ln x}{x}$，即 $2xe^{2x}=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{x}$，构造函数 $f(x)=xe^x$，其中 $x>0$，则 $f'(x)=(x+1)e^x>0$，所以，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(\ln x)=(\ln x)e^{\ln x}=x\ln x$，根据题意，若 x_0 是方程 $2x^2e^{2x}+\ln x=0$ 的实根，则 $2x_0e^{2x_0}=\dfrac{1}{x_0}\ln\dfrac{1}{x_0}$，即 $f(2x_0)=f\left(\ln\dfrac{1}{x_0}\right)$，所以 $2x_0=\ln\dfrac{1}{x_0}=-\ln x_0$，　因此 $2x_0+\ln x_0=0$，故选 C

法二（嵌套函数构造）根据题意得出 $2x_0e^{2x_0}=\dfrac{1}{x_0}\ln\dfrac{1}{x_0}$ 后，取指数得 $e^{2x_0\cdot e^{2x_0}}=\left(e^{2x_0}\right)^{e^{2x_0}}=e^{\frac{1}{x_0}\ln\frac{1}{x_0}}=\left(e^{\ln\frac{1}{x_0}}\right)^{e^{\ln\frac{1}{x_0}}}$，故在函数 $f(x)=e^x$ 中，$f(f(x))=\left(e^x\right)^{e^x}$ 为单增函数，此题满足 $f\left(f\left(2x_0\right)\right)=f\left(f\left(\ln\dfrac{1}{x_0}\right)\right)$，因此，$2x_0+\ln x_0=0$，故选 C.（递归嵌套函数构造法可以避免求导验证单调性，适合高一学生接受，同构法适合高二学生.）

例 13.（2019•青羊区校级月考）已知 x_1 是函数 $f(x)=x\log_2x-2019$ 的一个零点，x_2 是函数 $g(x)=x\bullet 2^x-2019$ 的一个零点，则 $x_1\bullet x_2$ 的值为（　　）

A．4038　　B．2019^2　　C．2019　　D．1

解析：法一由 $f(x)=x\log_2 x-2019=0$ 得: $\log_2 x=\dfrac{2019}{x}$, 由 $g(x)=x\cdot 2^x-2019=0$ 得: $2^x=\dfrac{2019}{x}$, 因为 x_1 是函数 $f(x)=x\log_2 x-2019$ 的一个零, 点, x_2 是函数 $g(x)=x\cdot 2^x-2019$ 的一个零点, 所以 x_1 是 $y=\log_2 x$ 和 $y=\dfrac{2019}{x}$ 的交点. B 的横坐标, x_2 是 $y=2^x$ 和 $y=\dfrac{2019}{x}$ 交点 A 的横坐标, 如图 7-1-4 所示, 因为函数 $y=\log_2 x$ 和函数 $y=2^x$ 互为反函数, 所以点, A, 点, B 关于直线 $y=x$ 对称，即直线 AB 的斜率为 -1,

$B\left(x_1,\dfrac{2019}{x_1}\right),A\left(x_2,\dfrac{2019}{x_2}\right),k_{AB}=\dfrac{\dfrac{2019}{x_2}-\dfrac{2019}{x_1}}{x_2-x_1}=-\dfrac{\dfrac{2019\left(x_1-x_2\right)}{x_1x_2}}{x_1-x_2}=-\dfrac{2019}{x_1x_2}=-1$, 即 $x_1\cdot x_2=2019$, 故选 C. 数形结合，构造反比例函数求交点, 本章节专题 5 有重点介绍

法二（构造递归败套函数）因为 $x_1\log_2 x_1=2019, x_2\cdot 2^{x_2}=2019$，所以 $2^{x_1\log_2 x_1}=\left(x_1\right)^{x_1}=2^{2019},\left(2^{x_2}\right)^{2^{x_2}}=2^{2019}$, 即 $x_1=2^{x_2}$, 代入 $x_2\cdot 2^{x_2}=2019$ 得: $x_1x_2=2019$, 故选 C .

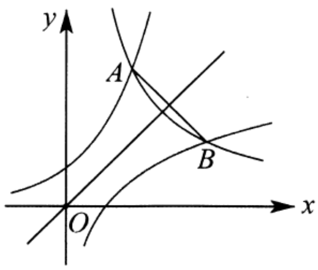


图 7-1-4

例 14.（2018•建华区校级期末）已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，$x>0$ 时 $f(x)=e^{\frac{x}{3}}-3lnx$，则函数 $f(x)$ 的零点个数为(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

解析：法一因为函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 所以 $f(0)=0$, 当 $x>0$ 时, 令 $f(x)=0$, 得 $e^{\frac{x}{3}}=3\ln x$, 即 $\dfrac{x}{3}e^{\frac{x}{3}}=x\ln x$, 构造函数 $h(x)=xe^x$, 即 $h\left(\dfrac{x}{3}\right)=h(\ln x)\Rightarrow\dfrac{x}{3}=\ln x\Rightarrow\dfrac{1}{3}=\dfrac{\ln x}{x}$, 如图 $7-1-5$ 所示, 由于 $\dfrac{\ln x}{x}\le\dfrac{1}{e}$, 所以 $\dfrac{1}{3}=\dfrac{\ln x}{x}$ 有两个解，当 $x<0$ 时，$f(x)$ 也是 2 个零点, 综上, 当 $x\in R$ 时，$f(x)$ 有 5 个零点, 故选 D.

法二令 $\dfrac{x}{3}=t$, 则 $e^t=3\ln 3t\Rightarrow e^{e^t}=e^{3\ln 3t}=(3t)^3\Rightarrow\left(e^t\right)^{e^t}=(3t)^{3t}\Rightarrow 3t=e^t$, 令 $h(t)=e^t-3t$, 则 $h(0)=1$, 又 $h(1)=e-3<0$, $h(2)=e^2-6>0$, 故 $h(x)$ 在区间 (0, 1) 和区间 (1, 2) 各有一个交点，$f(x)$ 是定义在

R 上的奇函数,故 $f(0)=0$,当 $x<0$ 时,$f(x)$ 也是 2 个零点,综上,当 $x\in R$ 时,$f(x)$ 有 5 个零点,故选 D.

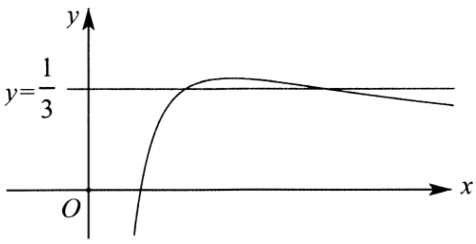


图 7-1-5

第二讲嵌套函数零点问题

定理一若函数 $f(g(x))=x$ 有解，则等价于 $g(f(x))=x$ 有解.

证明因为 $f(g(x))=x$,两边同取反函数 f^{-1},则 $g(x)=f^{-1}(x)$ 有解，令其中一个交点的坐标分别为 $P(x_0,y_0)$，当 $g(f(x))=x$,得 $f(x)=g^{-1}(x)$ 有解，且一个交点一定为 $Q(y_0,x_0)$.

例 15.(2017•温州模拟)已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数,则给定 R 上的函数 $f(x)$（）

A.存在 R 上的函数 $g(x)$，使得 $f(g(x))=x$　B.存在 R 上的函数 $g(x)$，使得 $g(f(x))=x$

C.存在 R 上的函数 $g(x)$，使得 $f(g(x))=g(x)$ D.存在 R 上的函数 $g(x)$，使得 $f(g(x))=g(f(x))$

解析：对 A,$f(g(x))=x$,两边同取反函数 f^{-1},则 $g(x)=f^{-1}(x)$,即 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数,不是所有的函数都有反函数,如 $y=x^2,x\in R$,故 A 错误.同理,对 B,$g(f(x))=x$,得 $f(x)=g^{-1}(x)$,即 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的反函数,故 B 错误.对 C,令 $g(x)=t$,则 $f(x)=t$,即 $y=f(x)$ 与 $y=x$ 有交点,这个不一定，故 C 错误.对 D,只需要 $f(x)=g(x)$ 就可以满足,故选 D.

例 16.已知 $f:\{1,2,3,\cdots\cdots n\}\to\{1,2,3,\cdots\cdots n\}$（$n\geq 3,n\in N$）满足 $f(f(x))=f(x)$,求这样的函数个数有多少个?

解析:设 $i,j\in\{1,2,3,\ldots,n\}$,若 $f(i)=i$ 时，显然满足 $f(f(x))=f(x)$;若 $f(i)=j\neq i$ 时,由 $f(f(i))=f(i)$ 可得: $f(i)=f(j)=j$.若函数的值域含有 $k(k\in\{1,2,3,\ldots,n\})$ 个元素时,不妨设值域为 $\{1,2,3,\ldots,k\}$,

当 $i\in\{1,2,3,\ldots,k\}$ 时,必有 $f(i)=i$,　当 $i\in\{k+1,k+2,\ldots,n\}$ 时,　$f(i)=j,j\in\{1,2,3,\ldots,k\}$,

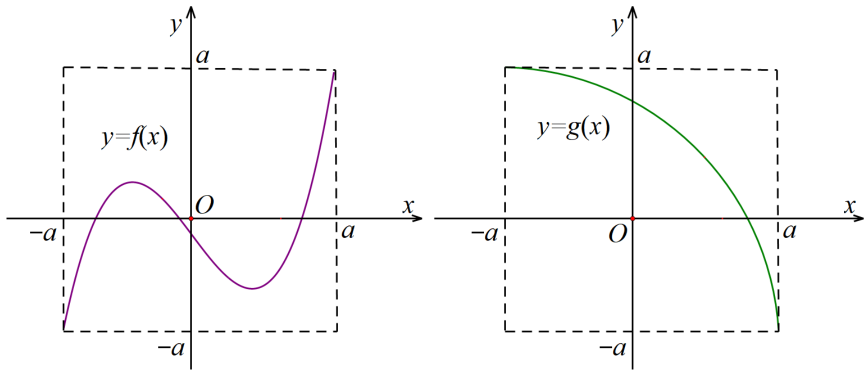
则值域为 k 元 个元素，满足的函数有 $C_n^k k^{n-k}$ 个.所以满足题设条件的函数有 $\sum_{k=1}^{n}C_n^k k^{n-k}$ 个.

秒杀秘籍:

嵌套函数零点问题的总法则:内函数横着走，外函数竖着走，参变分离横竖皆来.

将函数 $y=f(g(x))$ 分为 $t=g(x)$ 和 $y=f(t)$ 一内一外两个函数，分别作出其图形,找到竖着外函数 $y=f(t)$ 的零点 $t_1,t_2,t_3\cdots t_n$,然后将 $t_1,t_2,t_3\cdots t_n$ 作纵坐标在内函数当中横插从而找到交点来确定零点.

例 17.（多选）定义域和值域均为 $[-a,\ a]$（常数 $a>0$) 的函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象如图所示，下列四个命题中正确的结论是(　　)



A．方程 $f[g(x)]=0$ 有且仅有三个解　B．方程 $g[f(x)]=0$ 有且仅有三个解

C．方程 $f[f(x)]=0$ 有且仅有九个解　D．方程 $g[g(x)]=0$ 有且仅有一个解

解析：关于 A, 当 $f[g(x)]=0$ 时,如图 $7-2-1$, 先找到外函数 $y=f(x)$ 的零,点 x_1,x_2,x_3,如图 $7-2-2$,再针对内函数分别作出 $y=x_1$, $y=x_2$, $y=x_3$, 可得三条横线与 $y=g(x)$ 有三个交,点,故 A 正确;

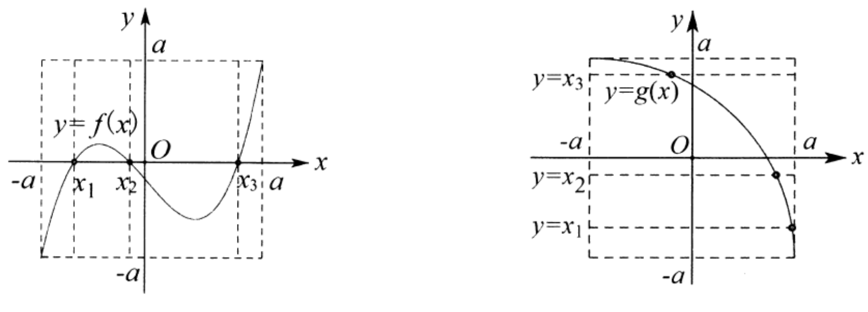


图 7-2-1　　图 7-2-2

关于 B,当 $g[f(x)]=0$ 时,如图 7-2-3，先找到外函数 $y=g(x)$ 的零点 x_1,如图 7-2-4,再针对内函数作出 $y=x_1$ 可得一条横线与 $y=f(x)$ 有一个交点,故 B 错误;

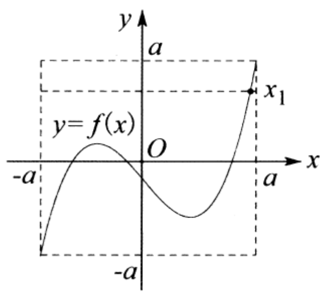


图 7-2-3

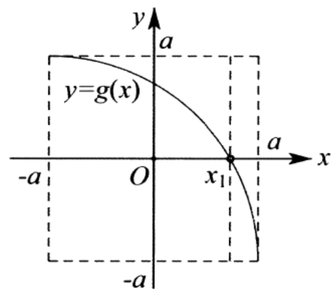


图 7-2-4

关于C,当 $f[f(x)]=0$ 时,如图 7-2-5，先找到外函数 $y=f(x)$ 的零点 x_1,x_2,x_3,如图 7-2-6，再针对内函数分别作出 $y=x_1$， $y=x_2$， $y=x_3$， 可得三条横线仅有 $y=x_2$ 与 $y=f(x)$ 有三个交点,故C错误；

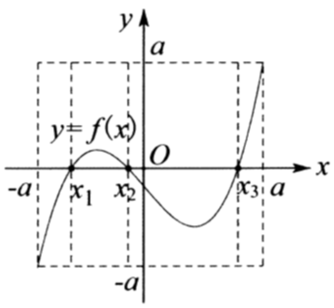


图 7-2-5

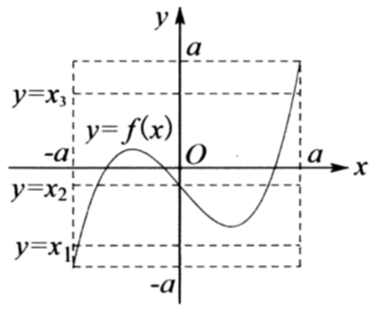


图 7-2-6

关于 D，当 $g[g(x)]=0$ 时,如图 7-2-7，先找到外函数 $y=g(x)$ 的零点, x_1,如图 7-2-8，再针对内函数作出 $y=x_1$ 可得一条横线与 $y=g(x)$ 有一个交,点,故 D 正确，故选 AD.

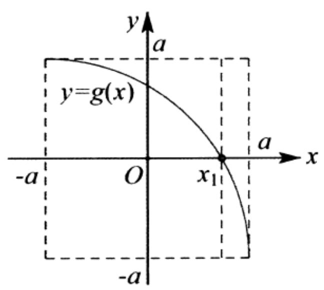


图 7-2-7

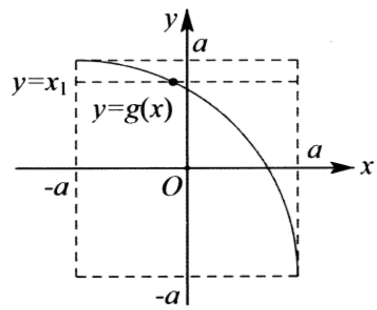


图 7-2-8

例 18.（2020•江苏一模）已知函数 $f(x)=\begin{cases} ||x-1|-1|, x\geqslant 0 \\ \dfrac{x}{x-1}, x<0 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f^2(x)+2af(x)+1-a^2=0$ 有五个不相等的实数根，则实数 a 的取值范围是____.

解析：令 $f(x)=t$,则 $g(t)=t^2+2at+1-a^2$,作 $t=f(x)$ 的图象如图 7-2-9,设 $g(t)$ 的零点为 t_1,t_2,由图 7-2-10 可知，根据定海神针法则有 $\begin{cases} 0<t_1<1 \\ t_2>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(0)>0 \\ g(1)<0 \end{cases}$,解得 $-1<a<1-\sqrt{3}$. 故答案为 $(-1,1-\sqrt{3})$.

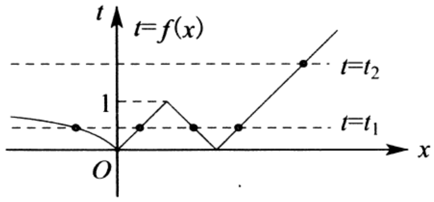


图 7-2-9

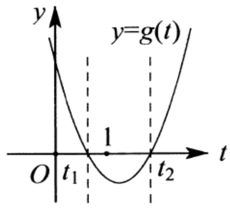


图 7-2-10

例 19.（2018•长郡中学期中）已知 $m\in R$，函数 $f(x)=\begin{cases}|2x+1|,x<1\\ log_2(x-1),x>1\end{cases}$，$g(x)=x^2-2x+2m-1$，若函数 $y=f(g(x))-m$ 有 6 个零点，则实数 m 的取值范围是____.

解析：函数 $f(x)=\begin{cases}|2x+1|,x<1\\ \log_2(x-1),x>1\end{cases}$ 的图象如图 7-2-11 所示, 令 $g(x)=t$, $y=f(t)$ 与 $y=m$ 的图象最多有 3 个零点, 当有 3 个零点, 则 $0<m<3$, 从左到右交点的横坐标依次 $t_1<t_2<t_3$, 由手函数 $y=f(g(x))-m$ 有 6 个零点, $t=g(x)=x^2-2x+2m-1$, 则每一个 t 的值对应 2 个 x 的值, 则 t 的值取最小值 t_1 时，必须高于内函数的顶点, 函数 $g(x)=x^2-2x+2m-1$ 对称轴 $x=1$, 则 t 的最小值为 $1-2+2m-1=2m-2$, 由图 $7-2-12$ (1) (2) 得 $0<m<\dfrac{3}{5}$. 所以实可知，$2t_1+1=-m$, 则 $t_1=\dfrac{-m-1}{2}$, 满足 $\dfrac{-m-1}{2}>2m-2$ (1)，又 $0<m<3$ (2)，联立数 m 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{3}{5}\right)$. 故答案为 $\left(0,\dfrac{3}{5}\right)$.

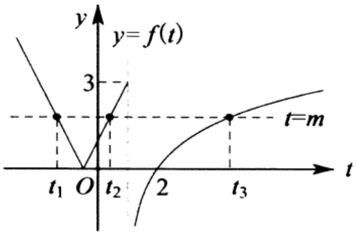


图 7-2-11

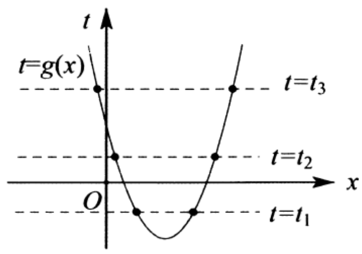


图 7-2-12

秒杀秘籍：外函数参变分离时横竖皆来

某些情况下外函数在求零点时会遇到一些计算量较大的情况，故需要对外函数进行参变分离，即 $y=g(f(x))$ 分解为 $y=g(t)$ 与 $t=f(x)$, 利用参变分离, 将 $y=g(t)$ 转化为 $a=h(t)$ 形式, 从而构造 $y=a$ 与 $y=h(t)$ 交点, 即在外函数也增加了一条横线来确定 t_1,t_2 的具体位置.

例 20.（2018•定州市期中）已知函数 $f(x)=\begin{cases}4^{|x-1|},x>0\\ -x^2-4x+1,x\leqslant 0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f^2(x)-2af(x)+a+2=0$ 有

8 个不等的实数根，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(1,\frac{18}{7})$　　B. $(1,\frac{9}{4})$　　C. $(2,\frac{18}{7})$　　D. $(2,\frac{9}{4})$

解析：法一如图 $7-2-13$，令 $f(x)=t, g(t)=t^2-2at+a+2=0$，参变分离得 $a=\frac{t^2+2}{2t-1}=\frac{1}{4}\left[(2t-1)+\frac{9}{2t-1}\right]+\frac{1}{2}$，显然是一个对幻函数，如图 7-2-14，因为原方程有 8 个不同实根，则 $1<t_1<t_2<4$，所以只需求出 $a=y=\frac{t^2+2}{2t-1}$ 在区间 $(1,4)$ 有两个交点即可，因为 $6<(2t-1)+\frac{9}{2t-1}<\frac{58}{7}$，所以 $2<a<\frac{18}{7}$，故选 C.

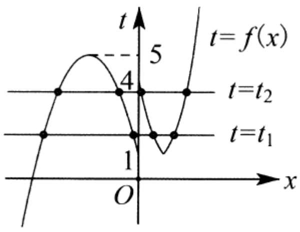


图 7-2-13

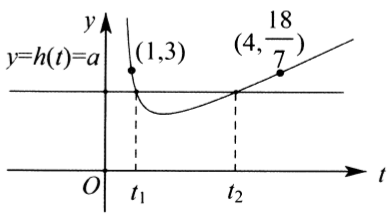


图 7-2-14

法二如图 $7-2-15$ 所示，令函数 $f(x)=t$，则 $g(t)=t^2-2at+a+2=0$，因为原方程有 8 个不同实根，所以 $t^2-2at+a+2=0$ 在 $(1,4)$ 内有 2 个根，如图 $7-2-16$ 得：$\begin{cases}\Delta=(-2a)^2-4(a+2)>0\\1<a<4\\1-2a+a+2>0\\16-8a+a+2>0\end{cases}$，解得 $2<a<\frac{18}{7}$，故选 C.

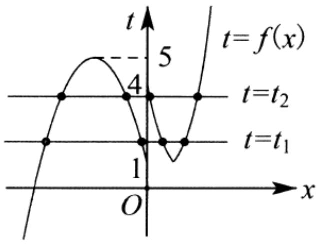


图 7-2-15

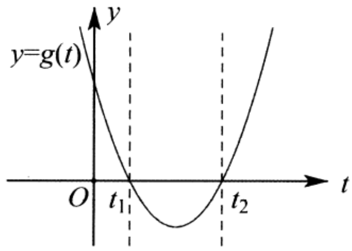


图 7-2-16

总结二次函数作为外函数可以通过参变分离减少运算，但是前提就是函数的基本功要扎实.

例 21.（2018•福州期末）已知 $f(x)=|xe^x|$，关于 x 的方程 $f^2(x)+af(x)+2=0(a\in R)$ 有四个不同的实数根，则 a 的取值范围为____.

解析：因为函数 $f(x)=\begin{cases}xe^x, x\ge 0\\ -xe^x, x<0\end{cases}$，所以当 $x\ge 0$ 时，$f'(x)=e^x(x+1)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x<0$ 时，$f'(x)=-e^x(x+1)$，所以当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$，当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单递增，在 $(-1,0)$ 上单调递减，所以当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $f(-1)=\frac{1}{e}$. 作出 $f(x)$ 的函数图象如图 $7-2-17$ 所示，令 $f(x)=t$，所以当 $0<t<\frac{1}{e}$，$f(x)=t$ 有 3 解，当 $t>\frac{1}{e}$ 或 $t=0$ 时，$f(x)=t$ 有 1 解，当 $t=\frac{1}{e}$，$f(x)=t$，有 2 解. 因为关于 x 的方程 $[f(x)]^2+af(x)+2=0(a\in R)$ 有四个不同的实数根，所以关于 t 的方程 $t^2+at+2=0$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上各有 1 解. 令 $g(t)=t^2+at+2$，如图 $7-2-18$，所以 $g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^2}+\frac{t}{e}+2<0$，即 $t<-\frac{2e^2+1}{e}$，故答案为：$\left(-\infty,-\frac{2e^2+1}{\rho}\right)$.

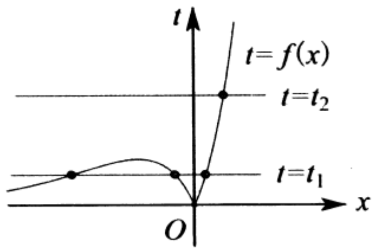


图 7-2-17

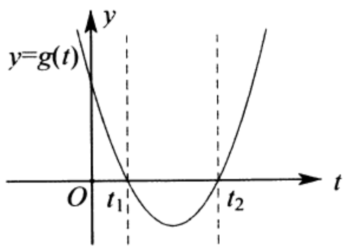


图 7-2-18

注意定海神针卡住 $t=\frac{1}{e}$，使得 $g\left(\frac{1}{e}\right)<0$ 为解题关键突破口. 参变是否分离的关键在于外函数的两个零点是否在同一区间，若在，参变分离肯定更加简单，否则直接定海神针解决问题，此类问题我们在专题 2 中已经探讨，不再详述.

例 22.（2019•日照期末）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2a, x<0\\ x^2-ax, x\geqslant 0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f(f(x))=0$ 有 8 个不同的实根，则 a 的值可能为(　　)

A. -6　　B. 8　　C. 9　　D. 12

解析：如图 7-2-19，由题意可得 $a\le 0$ 时，显然不成立：当 $a>0$ 时，令 $f(x)=t$，则由 $f(t)=0$ 得，$t_1=-2a$，

$t_2=0,t_3=a$, 又方程 $f(f(x))=0$ 有 8 个不同的实根, 如图 7-2-20, 由题意结合图可得: $\begin{cases}a>0\\a<2a\\-2a>-\dfrac{a^2}{4}\end{cases}$, 由得 $a>8$, 故选 CD.

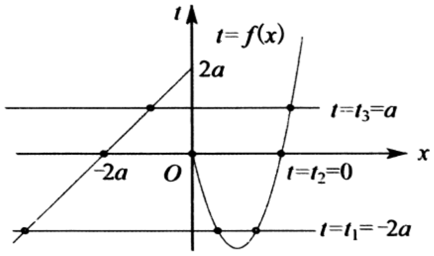


图 7-2-19

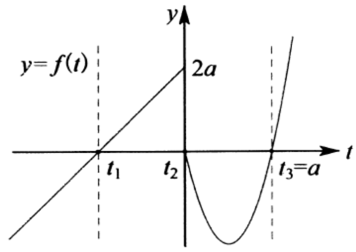


图 7-2-20

例 23.（2019•金山区一模）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|log_5(1-x)|,x<1\\-(x-2)^2+2,x\geqslant1\end{cases}$，则方程 $f(x+\dfrac{1}{x}-2)=a(a\in R)$ 的实数根个数不可能( )

A. 5 个　　B. 6 个　　C. 7 个　　D. 8 个

解析：因为函数 $f(x)=\begin{cases}\left|\log_5(1-x)\right|,x<1\\-(x-2)^2+2,x\ge1\end{cases}$, 即 $f(x)=\begin{cases}\log_5(1-x),x\le0\\-\log_5(1-x),0<x<1\\-(x-2)^2+2,x\ge1\end{cases}$ 令 $t=g(x)=x+\dfrac{1}{x}-2$, 则 $a=f(t)$, 当 $a=f(t)=1$ 时, $t=1$ 或 3 或 $\dfrac{4}{5}$ 或 -4, 当 $a=f(t)=2$ 时, $t=2$ 或 $\dfrac{24}{25}$ 或 -24, 显然当 $1\le a<2$ 时, $a=f(t)$ 有四个零点, 且满足 $-24<t_1\le-4,\dfrac{4}{5}\le t_2<\dfrac{24}{25}$, $1\le t_3<2$, $2<t_4\le3$, 因为 $g(x)=x+\dfrac{1}{x}-2\ge0$ 或 $g(x)=x+\dfrac{1}{x}-2\le-4$, 所以, 当 $x+\dfrac{1}{x}-2=-4$ 时只有一个 $x=-2$ 与之对应. 其它情况都有 2 个 x 值与之对应，故此时所求的方程有 7 个根，如图 7-2-21 和 7-2-22 所示;

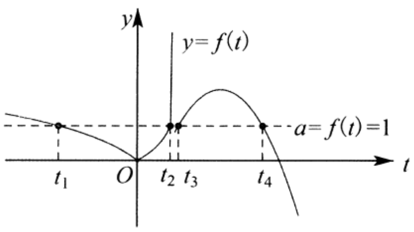


图 7-2-21

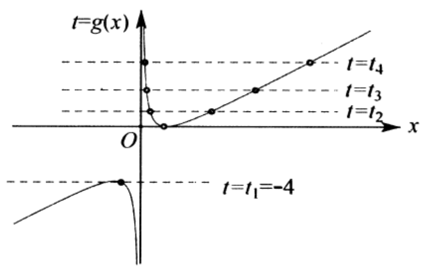


图 7-2-22

当 $1<a<2$ 时, 函数 $y=f(t)$ 与 $y=a$ 有 4 个交点, 故有 8 个根，如图 7-2-23 和 7-2-24 所示;

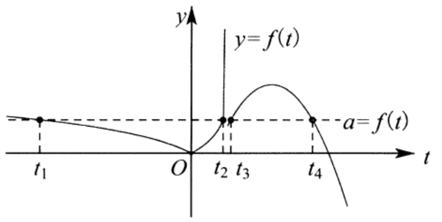


图 7-2-23

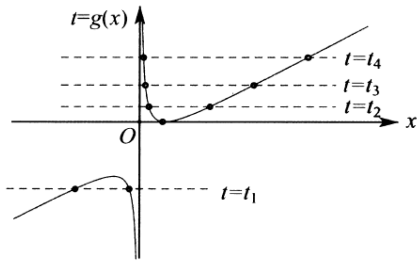


图 7-2-24

当 $a=2$ 时, 函数 $y=f(t)$ 与 $y=a$ 有 3 个交点, 故有 6 个根，如图 7-2-25 和 7-2-26 所示:

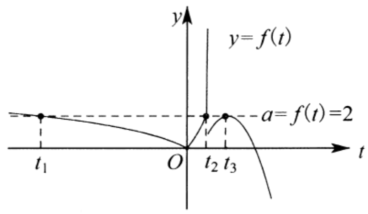


图 7-2-25

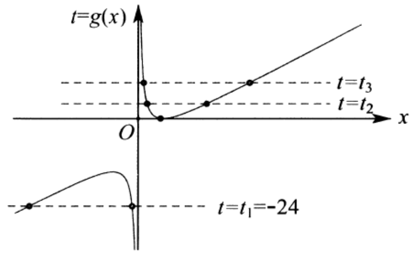


图 7-2-26

综上:不可能有 5 个根，故选 A.(注：涉及几个根的取值范围问题, 需要构造新的函数来确定取值范围.)

例 24.（2019•襄阳期末）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x,x\leqslant 0,\\ lnx,x>0\end{cases}$ 函数 $g(x)=f(x)+a$ 有三个不同的零点 x_1，x_2，x_3，则 $x_1•x_2•x_3$ 的取值范围是（其中 e 是自然对数的底）(　　)

A. $(1,2)$　　B. $(1,e)$　　C. $[0，1)$　　D. $[0，e)$

解析：主题作出函数 $f(x)$ 的图象如图 7-2-27 所示, 所以当 $-2\le x\le 0$ 时，抛物线的对称轴为 $x=-1$, 若函数 $g(x)=f(x)+a$ 有三个不同的零, 点 x_1,x_2,x_3, 不妨设 $x_1<x_2<x_3$, 即 $g(x)=f(x)+a=0$, $f(x)=-a$ 有三个不同的根, 则 $0\le -a\le 1$, 即 $-1\le a\le 0$, 当 $x\le 0$ 时, $-x^2-2x+a=9$, 即 $x^2+2x-a=0$, 则 $x_1x_2=-a$, 当 $x>0$ 时, 由 $\ln x_3+a=0$, 得 $\ln x_3=-a$, 即 $x_3=e^{-a}$, 则 $x_1\cdot x_2\cdot x_3=-ae^{-a}$, 设 $g(a)=-ae^{-a}$, $-1\le a\le 0$, 则导数 $g'(a)=-e^{-a}+ae^{-a}=e^{-a}(a+1)$, 则当 $-1\le a\le 0$ 时, $g'(a)\le 0$ 恒成立, 即此时函数 $g(a)$ 为减函数, 则 $g(0)=0$, $g(-1)=e$, 即 $0\le g(a)\le e$, 即 $0\le x_1\cdot x_2\cdot x_3\le e$, 即 $x_1\cdot x_2\cdot x_3$ 的取值范围是 $[0,e]$, 故选 D.

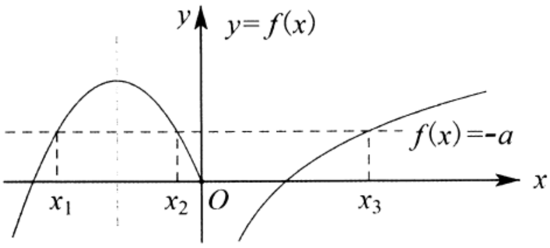


图 7-2-27

例 25.（2019•攀枝花期末）已知函数 $f(x)=(\frac{x}{e^x})^2+\frac{ax}{e^x}-a$ 有三个不同的零点 x_1，x_2，x_3（其中 $x_1<x_2<x_3$），则 $(1-\frac{x_1}{e^{x_1}})^2(1-\frac{x_2}{e^{x_2}})(1-\frac{x_3}{e^{x_3}})$ 的值为（　　）

A．1　　　　B．-1　　　　C．a　　　　D．$-a$

解析：令 $t=g(x)=\frac{x}{e^x}$，则 $t'=\frac{1-x}{e^x}$，所以当 $x<1$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递增，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，在 $(1,+\infty)$ 单调递减，且 $t=g(x)_{\max}=g(1)=\frac{1}{e}$，如图 $7-2-28$，由题意得 $g(t)=t^2+at-a$ 必有从个根 $t_1<0$，且 $0<t_2<\frac{1}{e}$，由根与系数的关系有，$t_1+t_2=-a, t_1t_2=-a$，由图 $7-2-29$ 可知，$t_1=\frac{x}{e^x}$ 有一解 $x_1<0$，$t_2=\frac{x}{e^x}$ 有两解 x_2，x_3，且 $0<x_2<1<x_3$，$\left(1-\frac{x_1}{e^{x_1}}\right)^2\left(1-\frac{x_2}{e^{x_2}}\right)\left(1-\frac{x_3}{e^{x_3}}\right)=\left(1-t_1\right)^2\left(1-t_2\right)\left(1-t_2\right)=\left[\left(1-t_1\right)\left(1-t_2\right)\right]^2=\left[1-\left(t_1+t_2\right)+t_1t_2\right]^2=(1+a-a)^2=1$，故选 A．

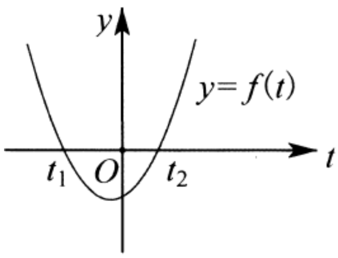


图 7-2-28

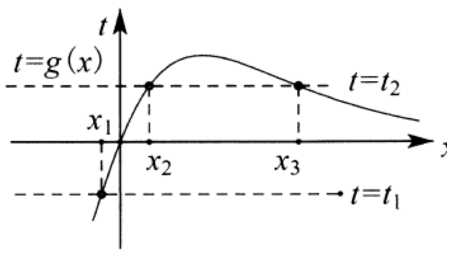


图 7-2-29

例 26．（2019•葫芦岛期末）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|, x>0,\\ -x^2+mx, x\leqslant 0\end{cases}$ 和 $g(x)=a(a\in R$ 且为常数），则下列结论正确的是（　　）

A．当 $a=4$ 时，存在实数 m，使得关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有四个不同的实数根

B．存在 $m\in[3，4]$，使得关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有三个不同的实数根：

C．当 $x>0$ 时，若函数 $h(x)=f^2(x)+bf(x)+c$ 恰有 3 个不同的零点 x_1，x_2，x_3，则 $x_1x_2x_3=1$

D．当 $m=-4$ 时，且关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有四个不同的实数根 x_1， x_2， x_3， $x_4(x_1<x_2<x_3<x_4)$，

解析：若 $m\geq 0$，则函数 $f(x)=-x^2+mx$ 在区间(-\infty,0]上单调递增，且当 $x\leq 0$ 时， $f(x)\leq f(0)=0$，如图 7-2-30 所示，此时关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 根的个数不大于 2，B 选项不符合题意；若 $m<0$，且 $x\leq 0$ 时，如图 7-2-31 所示，函数 $f(x)=-x^2+mx$ 在区间 $\left(-\infty,\dfrac{m}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\dfrac{m}{2},0\right]$ 上单调递减，此时 $f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{m}{2}\right)=\dfrac{m^2}{4}$， 当 $a=4$ 时，若关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有四个不同的实数根，则 $\dfrac{m^2}{4}>4$，解得 $m<-4$，选项 A 正确；

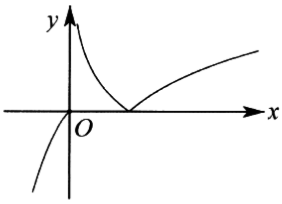


图 7-2-30

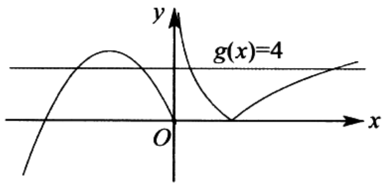


图 7-2-31

设 $t=f(x)$， 由 $h(x)=f^2(x)+bf(x)+c=0$， 得 $t^2+bt+c=0$， 当 $x>0$ 时，$t=f(x)=|\ln x|\geq 0$，如图 $7-2-32$ 所示，设关于 t 的一元二次方程 $t^2+bt+c=0$ 的两根分别为 $t_1,t_2\left(t_1>t_2\right)$，函数 $y=h(x)$ 有三个零点，则 $t_1>0$， $t_2=0$， 设 $x_1<x_2<x_3$， 由 $t_1=\left|\ln x_2\right|=0$，得 $x_2=1$，如图 7-2-33 所示，由图可知，$0<x_1<1<x_3$，由 $t_2=\left|\ln x_1\right|=\left|\ln x_3\right|$， 则 $-\ln x_1=\ln x_3$，即 $x_1x_3=1$， C 选项正确.

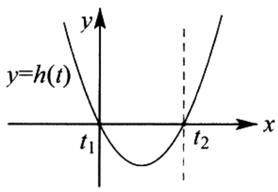


图 7-2-32

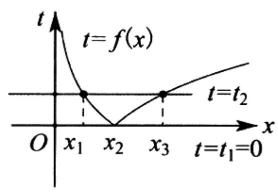


图 7-2-33

当 $m=-4$ 时，若 $x\leq 0$，$f(x)=-x^2-4x=-(x+2)^2+4$，此时，函数 $y=g(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上的两个交点关于直线 $x=-2$ 对称，则 $x_1+x_2=-4$. 如图 7-2-34 所示，当 $x>0$ 时，函数 $y=g(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 的两个交点，的横坐标 x_3,x_4 满足 $0<x_3<1<x_4$，且有 $a=\left|\ln x_3\right|=\left|\ln x_4\right|$， $0<a<4$， 则 $a=-\ln x_3=\ln x_4$，所以 $x_3=e^{-a}$，$x_4=e^a$，由图象可知，函数 $f(x)=|\ln x|$ 在 $\left[x_3^2,1\right]$ 上单调递减，在 $\left[1,x_4\right]$ 上

单调增，所以 $f\left(x_3^2\right)=f\left(e^{-2a}\right)=2a, f\left(x_4\right)=f\left(e^{a}\right)=a$, 所以

$2a=\ln 4=2\ln 2,\ a=\ln 2, x_3=e^{-\ln 2}=\dfrac{1}{2},\ x_4=e^{\ln 2}=2$, 所以 $x_1+x_2+2x_3+2x_4=1$, D 选项正确，故选 ACD.

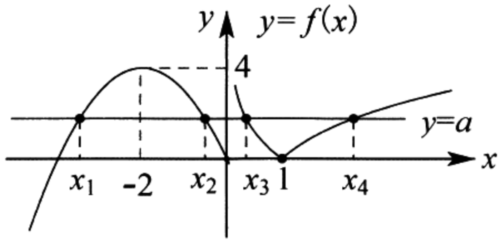


图 7-2-34

例 27.（2020•郑州一模）$f(x)=\begin{cases}|2x+1|, x<1\\ \log_2(x-1), x>1\end{cases}$，$g(x)=\dfrac{5}{4}x^3-\dfrac{15}{4}x^2+m+2$，若 $y=f(g(x))-m$ 有 9 个零点，则 m 的取值范围是(　　)

A．$(0,1)$　　B．$(0,3)$　　C．$(1,\dfrac{5}{3})$　　D．$(\dfrac{5}{3},3)$

解析：令 $t=g(x)$, $g(x)=\dfrac{5}{4}x^3-\dfrac{15}{4}x^2+m+2$, $g'(x)=\dfrac{15}{4}x^2-\dfrac{15}{2}x=\dfrac{15}{4}\left(x^2-2x\right)=\dfrac{15}{4}x(x-2)$，当 $x\in(-\infty,0),(2,+\infty)$ 时，函数 $g(x)$ 递增，当 $x\in(0,2)$ 时，函数 $g(x)$ 递减，函数 $g(x)$ 有极大值 $g(0)=m+2$，极小值 $g(2)=m-3$, 若 $y=f(g(x))-m$ 有 9 个零点，画出图象如图 7-2-35: 观察函数 $y=f(t)$ 与 $y=m$ 的交点，当 $m<0$ 时，$t>1$, 此时函数 $y=f(t)$ 与 $y=m$ 最多由 3 个交点，故不成立，当 $m=0$ 时，$t_1=-\dfrac{1}{2}, t_2=2$，$g(0)=2, g(2)=-3$, $g(x)=t_1$, 有三个解，$g(x)=2$ 有 2 个解，共 5 个解，不成立；当 $m>3$ 时，显然不成立：故要使函数有 9 个零点，$0<m<3$，如图 7-2-36，根据图象，每个 $y=t$ 最多与 $y=g(x)$ 有三个交，点，要有 9 个交点，只能每个 t 都要有 3 个交点，当 $0<m<3$, $y=f(t)$ 与 $y=m$ 的交点，$-2<t_1<-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}<t_2<1$，$t_3>1$, 显然 $g(x)=t_3=2^m+1$, 有三个解，$g(x)=t_1=-\dfrac{m+1}{2}$ 有三个解，即 $g(0)=m+2>2^m+1$, 即 $m<1$，$g(2)=m-3<-\dfrac{m+1}{2}$, 综上：$m\in(0,1)$, 故选 A.

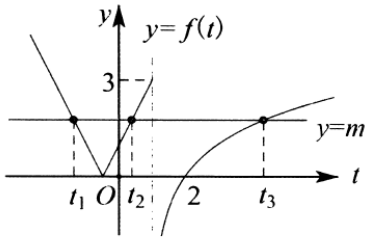


图 7-3-35

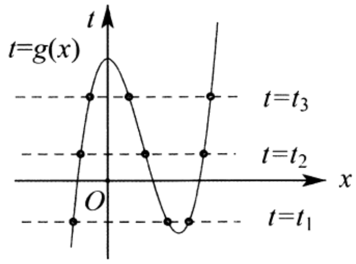


图 7-2-36

例 28.（2020•合肥一模）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-e^{-x},x\leqslant 0\\ xe^{x}-x-1-lnx,x>0\end{cases}$，则函数 $F(x)=f(f(x))-ef(x)$ 的零点个数为(　　)(e 是自然对数的底数）.

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

解析：法一不妨设 $f_1(x)=-e^{-x}(x\le 0)$, $f_2(x)=xe^{x}-x-1-\ln x(x>0)$, 易知 $f_1(x)<0$ 在 $(-\infty,0]$ 上恒成立，且在 $(-\infty,0]$ 单调递增；$f_2'(x)=e^{x}+xe^{x}-1-\dfrac{1}{x}=(x+1)\left(e^{x}-\dfrac{1}{x}\right)$，设 $g(x)=e^{x}-\dfrac{1}{x}(x>0)$，由当 $x\to 0^{+}$ 时，$g(x)\to -\infty$，$g(1)=e-1>0$, 且函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增，故函数 $g(x)$ 存在唯一零, 点 $x_0\in(0,1)$，使得 $g\left(x_0\right)=0$，即 $e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$，则 $x_0e^{x_0}=1,\ln x_0+x_0=0$，故当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时，$g(x)<0$，$f_2'(x)<0$，$f_2(x)$ 单减；当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时，$g(x)>0$，$f_2'(x)>0$，$f_2(x)$ 单增，故 $f_2(x)_{\min}=f_2\left(x_0\right)=x_0e^{x_0}-x_0-1-\ln x_0=0$，故 $f_2(x)\ge 0$; 令 $t=f(x)$，$F(t)=f(t)-et=0$, 当 $t\le 0$ 时，$-e^{-t}-et=0$, 解得 $t=-1$, 此时易知 $f(x)=t=-1$ 有一个解：当 $t>0$ 时，$te^{t}-t-1-\ln t-et=0$, 即 $te^{t}-t-1-\ln t=et$, 作函数 $f_2(t)$ 与函数 $y=et$, 如下图所示，由图 $7-2-37$ 可知, 函数 $f_2(t)$ 与函数 $y=et$ 有两个交点, 设这两个交点为 t_1,t_2，且 $t_1>0,t_2>0$, 而由图观察易知，$f(x)=t_1,f(x)=t_2$ 均有两个交, 点, 故此时共有四个解：综上，函数 $F(x)=f(f(x))-ef(x)$ 的零点个数为 5, 故选 B.

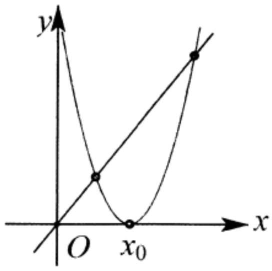


图 7-2-37

法二利用切线放缩函数 $h(x)=e^x-x-1\geq 0$，当仅当 $x=0$ 时等号成立，可得 $h(x-1)=e^{x-1}-x\geq 0$ 即 $e^x\geq ex$ 当仅当 $x=1$ 时等号成立，$xe^x-x-\ln x-1=e^{x+\ln x}-(x+\ln x)-1=h(x+\ln x)\geq 0$，当仅当 $x_0+\ln x_0=0$ 时等号成立，根据题意，构造函数 $y=f(t)$ 与 $y=et$，易知 $-e^{-t}\leq et$，当 $t=-1$ 取得等号，即 $t_1=-1$，当 $t>0$ 时，$y=f(t)$ 与 $y=et$ 有两个交，点，其中 $0<t_2<t_0<t_3$，且 $t_0+\ln t_0=0$；如图 7-2-38 和 7-2-39 所示，作出 $t=f(x)$ 图象，易知 $t=f(x)$ 与 $t=t_2$ 和 $t=t_3$ 各有两个交点，当 $t_1=-1$ 时，与 $t=-e^{-x}$ 仅有一个交，点 $(0,-1)$，综上，函数 $F(x)=0$ 的零，点个数为 5，故选 B.

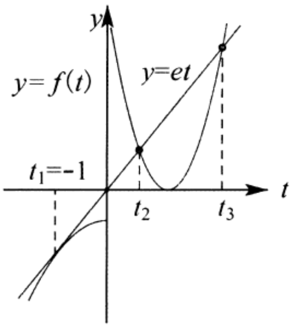


图 7-2-38

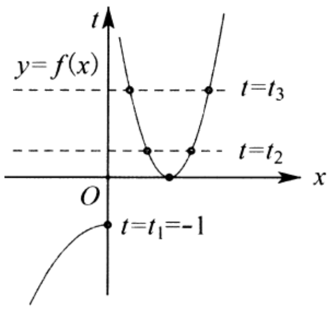


图 7-2-39

例 29. 设函数 $f(x)=x^2+2x+a$，若函数 $f(f(x))=f(x)$ 有且只有 3 个实根，则实数 a 的取值范围为____________.

解析：法一（硬撸）令 $x+1=t$，则 $f(x)=x^2+2x+a=t^2+a-1$，根据 $f(f(x))=f(x)$ 得到下列方程 $\left(t^2+a-1\right)^2+2\left(t^2+a-1\right)+a=t^2+a-1$，移项得 $\left(t^2+a-1\right)^2+\left(t^2+a-1\right)+a=0$，配方后得 $\left(t^2+a-\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4}=0$，对函数 $y=\left(t^2+a-\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4}$，求导得到驻点方程 $\left(t^2+a-1\right)t=0$，解上述驻点方程，得 $t_1=0,t_2=\sqrt{1-a}$，$t_3=-\sqrt{1-a}$，因为方程 $f(f(x))=f(x)$ 有 3 个实数根，则 t_1,t_2,t_3 必互不相

等且为实数（因为若令 $t_1=t_2$，则必有 $1-a=0$，于是 t_3 也为0，则就只有一个驻点 $t=0$，若 t_2 不为实数，则 t_3 也不为实数，上述两种情况下，都只有一个驻点，于是方程 $f(f(x))=f(x)$ 最多只有两个实数根），因为方程 $f(f(x))=f(x)$ 有且只有 3 个实数根，所以中间那个驻点必须使得方程 $y=\left(t^2+a-\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4}=0$，否则方程 $f(f(x))=f(x)$ 会有 4 个或 2 个或者没有实数根．又因为 $t_2>t_1>t_3$，即 $t_1=0$ 时，有 $\left(t^2+a-\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4}=0$，得到 $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-a$，化简后有 $a^2=0$，即 $a=0$，综上：a 的取值范围是 $a=0$．

备注为了叙述方便，引入驻点一词，名词解释：驻点是指一阶导数等于 0 的点.

法二（嵌套函数，内横外坚）令 $f(x)=t$，则 $f(t)=t$ 有两个不等实根 t_1,t_2，如图 7-2-40 和 7-2-41 所示，若使函数 $f(f(x))=f(x)$ 有且只有 3 个实根，只需 $f(x)_{\min}=t_1$，且 $t_2>t_1$，显然 $y=t$ 经过 $f(t)=t^2+2t+a$ 的顶点，同时 $y=t$ 与 $f(t)=t^2+2t+a$ 要有两个交点，故有 $t_1=f(-1)=-1\Rightarrow a-1=-1$，解得 $a=0$．

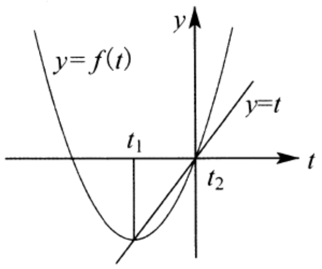


图 7-2-40

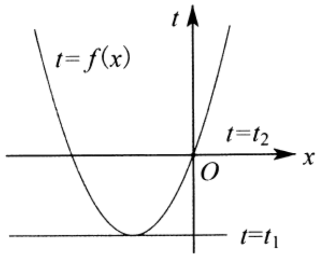


图 7-2-41

法三（因式定理，直接变形）因为函数 $f(f(x))=f(x)$，所以 $f(f(x))-f(x)$ 中必有一个因式 $f(x)-x$ 存在，配方有 $f(f(x))-f(x)=\left(x^2+2x+a\right)^2+\left(x^2+2x+a\right)+a=\left(x^2+x+a\right)\left(x^2+3x+a\right)$，上式要有 3 个实根，存在一根 x_1，有 $\begin{cases}x_1^2+x_1+a=0\\x_1^2+3x_1+a=0\end{cases}$，解得 $a=0$，此时正好有三根 $0,-1,-3$，满足题意.

注意：因式定理，即为余式定理的推论之一，如果多项式 $f(x)=0$，那么多项式 $f(x)$ 义定含有因式 $x-a$，反过来，如果 $f(x)$ 含有因式 $x-a$，那么 $f(a)=0$．

达标训练（适合高一）

1．（2018•如皋市期中）已知函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增，且对于任意的实数 x 都有 $f(f(x)-e^x-x)=e^{-2}-4$ 成立，若 $y=f(x)$ 的零点所在的区间是 $(n,n+1)$，则整数 n 的值为____．

2. 已知函数 $f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上是单调函数，若对任意的 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f[f(\frac{1}{x})-x]=2$，则 $f'(\frac{1}{2})=$____.

3.（2019•全国模拟）已知定义在 $\left(0,+\infty\right)$ 上的函数 $f(x)$ 为单调函数，且 $f(x)f(f(x)+\frac{1}{x})=1$，则 $f(1)=$.

4.（2018•济南一模）设 x_1，x_2 分别是函数 $f(x)=x-a^{-x}$ 和 $g(x)=x\log_a x-1$ 的零点（其中 $a>1$），则的取值范围是(　　)

A．$[4，+\infty)$　　B．$(4,+\infty)$　　C．$[5，+\infty)$　　D．$(5,+\infty)$

5．（2018•沈阳期中）a 是 $f(x)=(\frac{1}{3})^x-\log_2 x$ 的零点，若 $0<x_0<a$，则 $f(x_0)$ 的值满足(　　)

A．$f(x_0)$ 的符号不确定　　B．$f(x_0)<0$

C．$f(x_0)=0$　　D．$f(x_0)>0$

6.（2019•万州区校级月考）定义域为 R 的函数 $f(x)$ 满足 $f[f(x)-x^2+x]=f(x)-x^2+x$．若方程 $f(x)=x$ 有且只有一个根，则 $f(x)$ 的解析式为____.

7. 设函数 $f(x)=x^2+2x+a$，若函数 $y=f[f(x)]$ 有且只有 2 个不同的零点，则实数 a 的取值范围为__________.

8.（2019•岳麓区校级月考）设函数 $f(x)=\sqrt{x-a}(a\in R)$．若方程 $f(f(x))=x$ 有解，则 a 的取值范围为()

A. $(-\infty,\frac{1}{4}]$ B. $[0,\frac{1}{8}]$ C. $(-\infty,\frac{1}{8}]$ D. $[1,+\infty)$

9.（多选）函数 $f(x)=\frac{x}{1+|x|}(x\in R)$，以下四个结论中正确的结论是(　　)

A．$f(x)$ 的值域是 $(-1,1)$

B．对任意 $x\in R$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$

C．若规定 $f_1(x)=f(x)$，$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$，则对任意的 $n\in N^*$，$f_n(x)=\frac{x}{1+n|x|}$

D．对任意的 $x\in[-1，1]$，若函数 $f(x)\leqslant t^2-2at+\frac{1}{2}$ 恒成立，则当 $a\in[-1，1]$时，$t\leqslant-2$ 或 $t\geqslant2$

10.（2006•湖北）关于 x 的方程 $(x^2-1)^2-\left|x^2-1\right|+k=0$，给出下列四个命题：

①存在实数 k，使得方程恰有 2 个不同的实根；②存在实数 k，使得方程恰有 4 个不同的实根；

③存在实数 k，使得方程恰有 5 个不同的实根；④存在实数 k，使得方程恰有 8 个不同的实根；

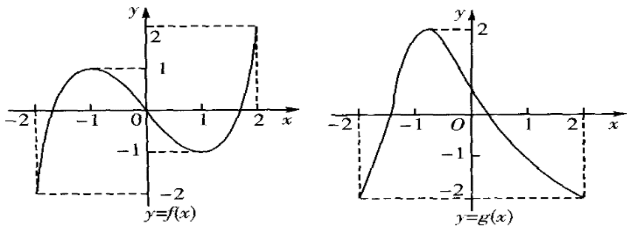
其中假命题的个数是（）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

11.（2019•东安区校级月考）若 x_1 是方程 $xe^x=e^3$ 的解，x_2 是方程 $xlnx=e^3$ 的解，则 x_1x_2 等于(　　)

A. e^4　　B. e^3　　C. e^2　　D. e

12.（2019•庐阳区校级一模）已知函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 在 $[-2,2]$ 的图象如下图表所示:



给出下列四个命题:

①方程 $f[g(x)]=0$ 有且仅有 6 个根；②方程 $g[f(x)]=0$ 有且仅有 3 个根；

③方程 $f[f(x)]=0$ 有且仅有 5 个根；④方程 $g[g(x)]=0$ 有且仅有 4 个根；

其中正确命题的是__________(注：把你认为是正确的序号都填上).

13. 设 $f(x)=|x^2-2x-3|$，已知方程 $f^2(x)+af(x)+b=0$ 恰好有三个互不相等的实根，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $\{a\,|\,a<-2$ 或 $a>-4\}$　B. $\{a\,|\,a\leqslant -8\}$　　C. $\{a\,|\,a>-4\}$　　D. $\{a\,|\,a=-8$ 或 $a>-4\}$

14.（2019•百色期末）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-6x+1,x\geqslant 0\\(\frac{1}{2})^{x+1},x<0\end{cases}$，若 $g(x)=|f(x)|-a$ 恰有 4 个零点，则 a 的取值范围为(　　)

A. $(\frac{1}{2}，1]$　　B. $(0，\frac{1}{2})\cup(1，8)$　C. $[\frac{1}{2}，1)$　　D. $(0，\frac{1}{2}]\cup(1,8)$

15.（2018•沙河口区校级期中）$f(x)=\begin{cases}-x^2-6x-3,x\leqslant 0\\3^x-4,x>0\end{cases}$，则函数 $y=f[f(x)]$ 的零点个数为(　　)

A. 7　　B. 6　　C. 5　　D. 3

16.（2017•宿州一模）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+1(x\leqslant 0)\\|log_2x|(x>0)\end{cases}$，若方程 $f(x)=k$ 有四个不同的实数根，x_1、x_2、x_3、x_4，则 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 的取值范围是(　　)

A. $[0，\frac{1}{2}]$　　B. $[\frac{1}{2}，\frac{9}{4})$　　C. $[\frac{1}{2}，\frac{9}{4}]$　　D. $[\frac{9}{4}，+\infty)$

17.（2019秋•汉中月考）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|2x-8|+4, x>0, \\ x^3+7, x\leqslant 0\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x^2+2x-1)-a$ 有 6 个不同的零点，则 a 的取值范围是(　　)

A．(4，7]　　B．(−1，7]　　C．(4,8)　　D．(−1,8)

18.（2020•沈阳一模）已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$ 上的偶函数，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, 0<x\leqslant 2 \\ \dfrac{1}{2}f(x-2), x>2\end{cases}$，则函数 $g(x)=8f^2(x)-6f(x)+1$ 的零点个数为(　　)

A．20　　B．18　　C．16　　D．14

19.（2019•阳新县期末）已知 $m\in R$，函数 $f(x)=\begin{cases}|2x+1|, x<1 \\ \log_2(x-1), x>1\end{cases}$，$g(x)=x^2-2x+2m-1$，下列叙述中正确的有____

①函数 $y=f(f(x))$ 有 4 个零点；②若函数 $y=g(x)$ 在 $(0,3)$ 有零点，则 $-1<m\leqslant 1$；③当 $m\geqslant -\dfrac{1}{8}$ 时，函数 $y=f(x)+g(x)$ 有 2 个零点；④若函数 $y=f(g(x))-m$ 有 6 个零点则实数 m 的取值范围是 $(0,\dfrac{3}{5})$.

20. 已知定义在 $(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$ 的函数 $y=f(x)$，都有 $f[f(x)-x-\dfrac{2}{x}]=f(x)-x-\dfrac{2}{x}+3$

（1）若 $f(1)=5$，求 $f(2)$ 的值；

（2）若有且仅有一个实数 x_0 满足方程 $2f(x)=x$，求 x_0 及函数解析式；

（3）在（2）的条件下，若实数 $x_0<0$，请你判断此时函数 $f(x)$ 在区间 $[1，6]$ 上的单调性并证明你的结论；

21. 已知 $f\left(x\right)=x^3-bx$，若 $f\left(x\right)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调.

（1）求 b 的取值范围；

（2）已知 $f\left(x\right)=x^3-bx$，若设 $x_0\geq 1, f(x_0)\geq 1$，且满足 $f[f(x_0)]=x_0$，求证：$f(x_0)=x_0$.

22. (2013•江西) 已知函数 $f(x)=a(1-2\left|x-\dfrac{1}{2}\right|)$，$a\in R$ 且 $a>0$.

(1) 证明: 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称;

(2) 若 x_0 满足 $f(f(x_0))=x_0$, 但 $f(x_0)\neq x_0$，则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的二阶周期点, 如果 $f(x)$ 有两个二阶周期点 x_1, x_2，试确定实数 a 的取值范围.

达标训练（适合高二复习）

1.（2019•洛阳期末）已知 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的单调函数，满足 $f(f(x)-e^{x}-2lnx)=e+1$，则函数 $f(x)$ 的零点所在区间为(　　)

A. $(\frac{1}{e^{3}}，\frac{1}{e^{2}})$　　B. $(\frac{1}{e^{2}}，\frac{1}{e})$　　C. $(\frac{1}{e}，1)$　　D. $(1,e)$

2.（2019•河南期中）已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 为增函数，且 $f(x)\cdot f(f(x)+\frac{1}{x})=1$，则 f（1）等于(　　)

A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$　　C. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$　　D. $\sqrt{5}$

3.（2018•平遥县校级月考）定义在 $(0,+\infty)$ 上的单调函数 $f(x)$，$\forall x\in(0,+\infty)$，$f[f(x)-\log_{2}x]=3$，则方程 $f(x)-f'(x)=2$ 的解所在的区间是____.

4.（2013•四川理）设函数 $f\left(x\right)=\sqrt{e^{x}+x-a}$（$a\in R$，e 为自然对数的底数），若曲线 $y=\sin x$ 上存在点 $\left(x_{0},y_{0}\right)$ 使得 $f\left(f\left(y_{0}\right)\right)=y_{0}$，则实数 a 的取值范围是（）

A. $\left[1,e\right]$ B. $\left[e^{-1}-1,1\right]$ C. $\left[1,1+e\right]$ D. $\left[e^{-1}-1,e+1\right]$

5.（2004•浙江理）若函数 $f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$ 都是定义在实数集 R 上的函数，且方程 $x-f\left(g\left(x\right)\right)=0$ 有实数解，则 $g[f(x)]$ 不可能是（）

A. $x^{2}+x-\frac{1}{5}$ B. $x^{2}+x+\frac{1}{5}$ C. $x^{2}-\frac{1}{5}$ D. $x^{2}+\frac{1}{5}$

6.（2019 秋•安徽期末）已知函数 $f(x)=\begin{cases}ex^{2}+2ex,x\leqslant 0\\ \frac{lnx}{x},x>0\end{cases}$ $(e=2.718\ldots)$，若关于 x 的方程 $f(x)=a(a\leqslant 0)$ 有 3 个不同的实数解 x_{1}，x_{2}，x_{3}，则 $x_{1}+x_{2}+x_{3}$ 的取值范围是____

7.（2009•福建）函数 $f(x)=ax^{2}+bx+c(a\neq 0)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 对称. 据此可推测，对任意的非零实数 a,b,c,m,n,p，关于 x 的方程 $m\left[f(x)\right]^{2}+nf(x)+p=0$ 的解集都不可能是（）

A. $\{1,2\}$　　B $\{1,4\}$　　C $\{1,2,3,4\}$　　D $\{1,4,16,64\}$

8. 已知关于 x 的方程 $\sin^{2}x-\sin x-a=0$ 在 $x\in[0,2\pi)$ 上有两个不同的实数根，则 a 的取值范围为.

9.（2018•兰州校级期中）设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2\sin x,0\le x\le\pi\\x^{2},x<0\end{cases}$，则函数 $y=f\left[f\left(x\right)\right]-1$ 的零点个数为_______.

10.（2020•许昌一模）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2}-1(x<1)\\\dfrac{lnx}{x}(x\geqslant1)\end{cases}$ 关于 x 的方程 $2[f(x)]^{2}+(1-2m)f(x)-m=0$，有 5 不同的实数解，则 m 的取值范围是(　　)

A. $(-1,\dfrac{1}{e})$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(0,\dfrac{1}{e})$　　D. $(0,\dfrac{1}{e}]$

11.（多选）已知函数 $f(x)=\dfrac{a(x-b)}{(x-b)^{2}+c}(a\neq0$，$b\in R$，$c>0)$，$g(x)=m[f(x)]^{2}-n(mn>0)$，下列四个命题中真命题有(　　)

A. ①当 $b=0$ 时，函数 $f(x)$ 为奇函数；

B. ②函数 $f(x)$ 的图象关于 x 轴上某点成中心对称；

C. ③存在实数 p 和 q，使得 $p\leqslant f(x)\leqslant q$ 对于任意的实数 x 恒成立；

D. ④关于 x 的方程 $g(x)=0$ 的解集可能为 $\{-4$，-2，0，$3\}$.

12.（2019•思明区校级期中）已知函数 $f(x)=\begin{cases}kx+1,x\leqslant0\\\log_{2}x,x>0\end{cases}$，下列是关于函数 $y=f[f(x)]+1$ 的零点个数的 4 个判断，其中正确的是(　　)

A. 当 $k>0$ 时，有 3 个零点　　B. 当 $k<0$ 时，有 2 个零点

C. 当 $k>0$ 时，有 4 个零点　　D. 当 $k<0$ 时，有 1 个零点

13.（2019•汕头校级期末）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x}+1,x<0\\|\dfrac{1}{2}x^{2}-2x+1|,x\geqslant0\end{cases}$ 方程 $[f(x)]^{2}-af(x)+b=0$ 有 5 个不同的实根，则 $\dfrac{b}{a}$ 取值范围是(　　)

A. $(0,\dfrac{2}{3})$　　B. $[0$，$\dfrac{2}{3})$　　C. $(0,1)$　　D. $[0$，$1)$

14.（2019•朝阳区校级月考）(B 组）如图所示，偶函数 $f(x)$ 的图象形如字母 M，奇函数 $g(x)$ 的图象形如字母 N，若方程：$f(f(x))=0$，$f(g(x))=0$，$g(g(x))=0$，$g(f(x))=0$ 的实根个数分别为 a，b，c，d，则 $a+b+c+d=$____.

15.（2019•西湖区校级模拟）已知函数 $f(x)=\dfrac{x^{2}-3}{e^{x}}$，关于 x 的方程 $[f(x)]^{2}+tf(x)-\dfrac{12}{e^{2}}=0(t\in R)$ 有 m 个不同的实数解，则 m 的所有可能的值构成的集合为(　　)

A. $\{3\}$　　B. $\{3，5\}$　　C. $\{3，4\}$　　D. $\{3，4，5\}$

16.（2020•茂名一模）已知函数 $f(x)=\begin{cases}ax^2-ax+1,x\leqslant 1\\ x-alnx,x>1\end{cases}(a\in R)$，若函数 $f(x)$ 有四个零点，则 a 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,0)$　　B. $(e,+\infty)$　　C. $(4,+\infty)$　　D. $(4,e^2)$

17.（2020•宁德一模）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x,x\leqslant 0,\\ x+\dfrac{a}{x},x>0,\end{cases}$ 下列关于函数 $y=f(f(x))-2$ 的零点个数判断正确的是(　　)

A. 当 $a>0$ 时，至少有 2 个零点　　B. 当 $a>0$ 时，至多有 9 个零点

C. 当 $a<0$ 时，至少有 4 个零点　　D. 当 $a<0$ 时，至多有 4 个零点

18.（2019•青羊区校级月考）已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{lnx+1}{x}$，若关于 x 的方程 $f^2(x)-mf(x)+m^2-1=0$ 恰好有 4 个不相等的实根，则 m 的取值范围是(　　)

A. $(1,\dfrac{1}{e}+1)$　　B. $(0,\dfrac{1}{e}+1)$　　C. $(1,\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$　　D. $(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$

20.（2019•龙岩一模）已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{lnx}{x},\ x\geqslant 1\\ -(x-1)^3,x<1\end{cases}$，若关于 x 的方程 $[f(x)]^2+mf(x)-1-m=0$ 恰好有 4 个不相等的实数解，则实数 m 的取值范围为(　　)

A. $(-1,\dfrac{1}{e}-1)$　　B. $(-1-\dfrac{1}{e},-1)$　　C. $(1,\dfrac{1}{e}+1)$　　D. $(0,\dfrac{1}{e})$

21.（2020•渭南一模）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x,x\geq 1,\\ 1-\dfrac{x}{2},x<1.\end{cases}$ 若 $F(x)=f\left[f(x)+1\right]+m$ 有两个零点 x_1,x_2，则 x_1x_2 的取值范围是__________.

22. 函数 $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ 满足 $f(f(x))=f(x)$，这样的函数有_________个

23.（2017•衡水一模）已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^x,x\in[0,1]\\ \dfrac{9}{2}-\dfrac{3}{2}x,x\in(1,3]\end{cases}$，当 $t\in[0,1]$ 时，$f(f(t))\in[0,1]$，则实数 t 的取值范围是.

24.（2018•天心区月考）已知函数 $f\left(x\right)=e^{x-1}+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-\ln x-a$，若 $f\left(x\right)$ 与函数 $f\left(f\left(x\right)\right)$ 有相同

的值域，则实数a的取值范围是________

25.（2018•湖南三模）已知函数$f\left(x\right)=x\ln x-x+2a$，若函数$y=f\left(x\right)$与函数$y=f\left(f\left(x\right)\right)$有相同的值域，则实数$a$的取值范围是___________.

26. 已知二次函数$f\left(x\right)=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$，若函数$y=f\left(x\right)$与$y=f\left(f\left(x\right)\right)$的零点相同，则实数$c=$_________，此时实数$b$的取值范围是___________.

27.（2018•南通一模）已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-2ax-a+1, x\geq 0,\\ \ln\left(-x\right), \quad x<0,\end{cases}$ $g\left(x\right)=x^2+1-2a$，若函数$y=f\left(g\left(x\right)\right)$有4个零点，则实数$a$的取值范围是________.

专题 8 函数中的隐圆和隐距离

函数当中涉及一些求最值,求值域,除了传统方法外,数形结合发挥了巨大的作用,在之前我们介绍了绝对值函数的“正方形控制”和“曼哈顿距离”问题，以及津津乐道到的“平底锅函数”，在根式下的函数又有哪些隐藏的树形结合规律和套路呢？考试当中的那些给定函数判断图像，或者给了图像，判断是哪个函数解析式，然，这里经常要用到高二的求导甚至同构知识.

第一讲隐圆和隐距离问题

类型一 隐半圆类型

隐半圆 常常出现的结构为: (1) $\sqrt{a^2-x^2}$; (2) $\sqrt{a^2-(x-b)^2}$

隐半圆的结构特点：根式下为二次代数式，且二次项系数为-1. 如 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 表示以原点为圆心, $|a|$ 为半径的圆的上半圆, $y=\sqrt{a^2-(x-b)^2}$ 表示以 $(b,0)$ 为圆心, $|a|$ 为半径的圆的上半圆, 必要的时候可以进行三角换元, $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 上的任意一点可以表示为 $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$, $y=\sqrt{a^2-(x-b)^2}$ 上的任意一点可以表示为 $(b+a\cos\alpha, a\sin\alpha)$, 此时 α 的范围为 $[0,\pi]$.

例 1.（2019•开福区校级期中）函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$ 的最小值为____.

解析：令 $x=\cos\alpha(0\le\alpha\le\pi)$, 则函数 $y=f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha-2}(0\le\alpha\le\pi)$, 它表示 $B(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 与 $A(2,0)$ 连线的斜率，如图 8-1-1 所示，由图可得：当 AB 与半圆相切时，函数 y 取最小值，此时 $\angle OAB=30^\circ$, $k_{AB}=\tan\left(180^\circ-30^\circ\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 故答案为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

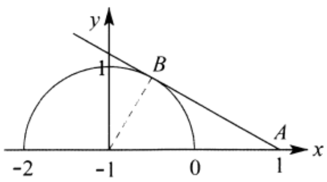


图 8-1-1

例 2.（2018•湖北期中）若直线 $y=kx-1$ 与曲线 $y=\sqrt{-x^2+6x-8}$ 有两个公共点，则 k 的取值范围是____.

解析：由题知曲线 $y=\sqrt{-x^2+6x-8}$ 表示的是圆心在 $(3,0)$, 半径 1 的圆的一半, 直线 $y=kx-1$ 恒过点 $(0,1)$, 当直线 $y=kx-1$ 与圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 相切时, 由 $\dfrac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$, 得 $k=0$（舍）, $k=\dfrac{3}{4}$, 点 (0, -1) 与点

$(2,0)$ 连线的斜率为 $\frac{1}{2}$，所以 k 得取值范围是 $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$. 故答案为 $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$.

例 3.（2019•天河区校级期中）若方程 $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+a}-1=0$ 仅有一解，则实数 a 的取值范围是__.

解析：方程 $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+a}-1=0$ 等价于 $\sqrt{1-x^2}=x+a$. 方程 $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+a}-1=0$ 仅有一解，即方程 $\sqrt{1-x^2}=x+a$ 仅有一解，所以函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与函数 $y=x+a$ 的图象有且只有一个零点. 如图 8-1-2 所示，当 $a=\sqrt{2}$ 时，直线与半圆相切，满足要求，当 $a\in(-1,1]$ 时，直线与半圆相交但只有一个交点，满足要求，所以实数 a 的取值范围为 $\{\sqrt{2}\}\cup(-1,1]$. 故答案为 $\{\sqrt{2}\}\cup(-1,1]$.

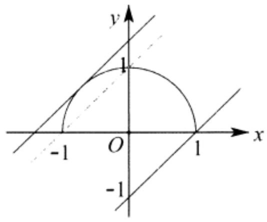


图 8-1-2

例 4.（2018•浙江模拟）记 $M=|x-1|+\sqrt{4-x^2}$，则 M 的最大值为(　　)

A. 4　　B. $1+2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. $1+\sqrt{2}$

解析：设 $x=2\sin\theta,\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $M=|x-1|+\sqrt{4-x^2}=|2\sin\theta-1|+2\cos\theta|$; 当 $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$M=1-2\sin\theta+2\cos\theta=1-2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$，因为 $\theta-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{12}\right]$，所以当 $\theta=-\frac{\pi}{2}$ 时，M 的最大值为 $1+2\sqrt{2}$; 当 $\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$M=2\sin\theta+1+2\cos\theta=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1$，因为 $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{5\pi}{12},\frac{3\pi}{4}\right]$，所以当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，M 的最大值为 $1+2\sqrt{2}$，综上所述 M 的最大值为 $1+2\sqrt{2}$，故选 B.

例 5.（2018•龙凤区校级期末）已知函数 $f(x)=ax-a^2-4$，若 $p^2+q^2=8$，则 $\frac{f(p)}{f(q)}$ 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,2-\sqrt{3})$　　B. $[2+\sqrt{3},+\infty)$　　C. $(2-\sqrt{3}，2+\sqrt{3})$　D. $[2-\sqrt{3}，2+\sqrt{3}]$

解析：由 $\dfrac{f(p)}{f(q)}=\dfrac{ap-a^2-4}{aq-a^2-4}=\dfrac{p-\left(a+\dfrac{4}{a}\right)}{q-\left(a+\dfrac{4}{a}\right)}$，表示点 $A(q,p)$ 与 $B\left(a+\dfrac{4}{a},a+\dfrac{4}{a}\right)$ 连线的斜率．如图 8－1－3，又 $a+\dfrac{4}{a}\geq 4$，故取，点 $E(4,4)$， 当 AB 与圆的切线 EC 重合时取最小值，可求 $k_{EC}=\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$，所 以 $\dfrac{f(p)}{f(q)}$ 的最小值为 $2-\sqrt{3}$；当 AB 与圆的切线 ED 重合时取最大值，可求 $k_{ED}=\tan 75^\circ=2+\sqrt{3}$，则 $\dfrac{f(p)}{f(q)}$ 的最大值为 $2+\sqrt{3}$；故 $\dfrac{f(p)}{f(q)}$ 的取值范围是 $[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$，故选 D．

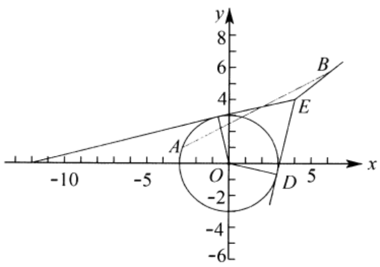


图 8-1-3

例 6．（2019•岳麓区校级月考）已知函数 $f(x)=|\sqrt{1-x^2}-ax-b|(a,b\in R)$，当 $x\in[0，1]$时，$f(x)$ 的最大值为 $M(a,b)$，则 $M(a,b)$ 的最小值等于____．

解析：

(平口单峰函数) 令 $x=\cos\alpha\left(0\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha, M(a,b)_{\min}=\max|\sin\alpha-a\cos\alpha-b|_{\min}$

根据平口单峰函数性质，易知函数水平跨度只有周期的 $\dfrac{1}{4}$，故平口单峰函数最佳控制为一个对称轴的左右两边相等，且最大值和最小值的和为零（参考秒 2），令 $g(\alpha)=\sin\alpha-a\cos\alpha-b$，$g(0)=g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，故 $a=-1$，$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\in[1,\sqrt{2}]$，$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 时取得最大值，故只需 $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，

即 $b=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，即 $M(a,b)_{\min}=g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$．

例 7．（2009•上海）将函数 $y=\sqrt{4+6x-x^2}-2(x\in[0,6])$ 的图象绕坐标原点逆时针方向旋转角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\alpha)$，得到曲线 C．若对于每一个旋转角 θ，曲线 C 都是一个函数的图象，则 α 的最大值为____．

解析：如图$8-1-4$, 先画出函数 $y=\sqrt{4+6x-x^2}-2(x\in[0,6])$ 的图象, 这是一个圆弧, 且圆心为$M(3,-2)$ 由图可知，当此圆弧绕坐标原, 点逆时针方向旋转角大于$\angle MAB$时, 曲线C都不是一个函数的图象，所以$\angle MAB$正切最大值为$\angle MAB=\arctan\dfrac{2}{3}$,　即$\alpha$的最大值为$\arctan\dfrac{2}{3}$. 故答案为$\arctan\dfrac{2}{3}$.

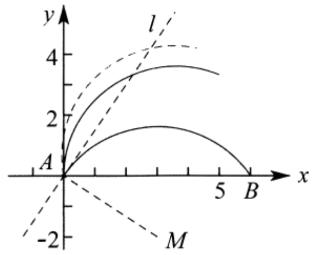


图 8-1-4

总结在关于函数旋转问题，一定要满足不能一个自变量x对应两个y, 关于圆弧，就是不能出现平行于y轴的切线，那么其它任意函数也要满足此规律.

例 8.（2018•沙坪坝区校级月考）已知函数 $f(x)=\sqrt{3}lnx(x\geqslant 1)$，若将其图象绕原点逆时针旋转 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 角后，所得图象仍是某函数的图象，则当角θ取最大值θ_0时， $\tan\theta_0=($　　$)$

A. $\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{e}$　　D. $\dfrac{e}{\sqrt{3}}$

解析：如图 8-1-5 所示，画出函数图象，易知函数图象过点 $A(1,0)$, 点 $A(1,0)$ 处的切线 m 转动到直线 n 的位置(即和 x 轴垂直）时就是转动的最大角度，此后若再旋转，图象的一个 x 值将对应 2 个 y, 那样就不是函数的图象了. 因此只要求出初始位置时切线和终了位置时的切线的夹角θ即为转动的最大角度θ_0. 设切线m的倾斜角为α, 所以$\tan\alpha=f'(1)$, 因为$f'(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{x}$, 所以 $\tan\alpha=f'(1)=\sqrt{3}$, 所以$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, 所以$\theta=\dfrac{\pi}{6}$, 所以$\theta_0=\dfrac{\pi}{6}$,　所以$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 故选B.

注意：此题要验证其它, 点不会出现与y轴平行的切线，设图象上一点(x,y)绕(1, 0)逆时针旋转a角后变成(x_1,y_1), 则 $x_1=(x-1)\cos a-y\sin a+1$,　$y_1=(x-1)\sin a+y\cos a$,　绕原点逆时针旋转 a 角后变成 (x_2,y_2), 则 $x_2=x\cos a-y\sin a$,　$y_2=x\sin a+y\cos a$, 所以 (x_1,y_1) 是 (x_2,y_2) 按照向量 $(-\cos a+1,-\sin a)$ 平移后得到的，所以绕 (1, 0) 旋转 a 后的图象是绕原点旋转后的图象按照向量 $(-\cos a+1,-\sin a)$ 平移后得到的, 而平移是不改变图形形状的. 所以绕原点的最大角度和绕(1, 0)点旋转的

最大角度相等.

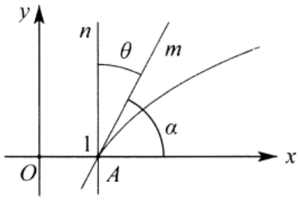


图 8-1-5

例 9.（2018•浦东新区校级期中）已知正实数 p 、 q 满足 $p+2q=pq$，则 $p+q+\sqrt{p^2+q^2}$ 的最小值是____

解析因为 $p>0,\quad q>0$, 又知 $p+2q=pq(p>0,q>0)$, 故 $\frac{1}{q}+\frac{2}{p}=1$, 该式可以看作恒过定点 $P(2,1)$ 的直线在 x 轴，y 轴上的截距分别为 p,q, 设 $A(p,0),\quad B(0,q)$, 过 p 分别作 $PC\perp x$ 轴，$PD\perp y$ 轴，则 $p+q+\sqrt{p^2+q^2}$ 即表示 OAB 的周长.

解析：法一（万能公式）如图 $8-1-6$, 设 $\angle BAC=\theta,\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),t=\tan\frac{\theta}{2},t\in(0,1)$, 所以 $OA=2+\frac{1}{\tan\theta}=2+\frac{1-t^2}{2t}$, $OB=1+2\tan\theta=1+\frac{4t}{1-t^2}$, $AB=PA+PB=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{2}{\cos\theta}=\frac{1+t^2}{2t}+\frac{2\left(1+t^2\right)}{1-t^2}$, 所以 $p+q+\sqrt{p^2+q^2}=OA+OB+AB=3+\frac{1-t^2}{2t}+\frac{4t}{1-t^2}+\frac{1+t^2}{2t}+\frac{2\left(1+t^2\right)}{1-t^2}=3+\frac{1}{t}+\frac{2(t+1)^2}{1-t^2}=$ $3+\frac{1}{t}+\frac{2(1+t)}{1-t}=1+\frac{1}{t}+\frac{4}{1-t}=1+\left(\frac{1}{t}+\frac{4}{1-t}\right)[t+(1-t)]=6+\frac{1-t}{t}+\frac{4t}{1-t}\geq 6+4=10$,

当且仅当 $\frac{1-t}{t}=\frac{4t}{1-t}$, 即 $t=\frac{1}{3}$ 时取等号, 此时 $p+q+\sqrt{p^2+q^2}$ 取得最小值 10. 故答案为 10.

法二（构造隐圆），根据题意, 如图 8-1-7, 作 $Rt\triangle OAB$ 的旁切圆 C, 与 OA 和 OB 延长线切于点 N、M,

易知 $OA+OB+AB=CM+CN=2r$, 由于 $PC\geq CN$, 即 $(r-2)^2+(r-1)^2\geq r^2$, 解得 : $r\geq 5$ 或者 $r\leq 1$（舍）, 故当切点是点. P 时，周长最小, 此时 $p+q+\sqrt{p^2+q^2}$ 取得最小值 10. 故答案为 10.

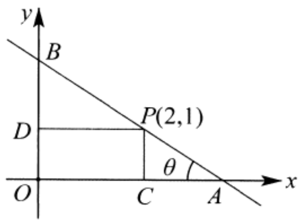


图 8-1-6

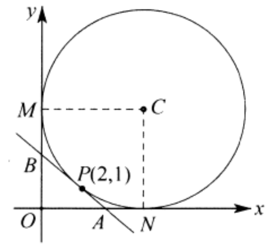


图 8-1-7

注意此题被改编多次，包括在解三角形领域当中多次出现，成为一道网红考题，解答方法很多，篇幅受限，不一一列举，一旦遇到三角形周长问题，构造“旁切圆”很容易达到“高观点，低运算″的效岸。

类型二二次函数类型

形如 $f(x)=mx+n\pm\sqrt{ax+b}$ 模型，可以通过换元转化为二次函数 $ax^2+bx+c=0$ 的类型来处理. 这种类型

的特点就是根号下的式子和根号外式子相似，这样换元构造一个二次函数。

例 10. （2019•西山区校级期中）函数 $f(x)=2x-1+\sqrt{x-2}$ 的最小值是(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

解析：设 $\sqrt{x-2}=t$，$t\geq 0$，则 $x=t^2+2$，则函数 $f(x)=2x-1+\sqrt{x-2}$ 等价于 $y=2t^2+t+3$，$t\geq 0$，因为 $y=2t^2+t+3$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，$y_{\min}=2\times 0^2+0+3=3$. 所以函数 $f(x)=2x-1+\sqrt{x-2}$ 的最小值是 3, 故选 A.

例 11. 已知函数 $y=2x-3-\sqrt{a-4x}$ 的值域为 $(-\infty，\frac{7}{2}]$，则实数 a 的值为____.

解析：由题意可得 $a-4x\geq 0$ 可得 $x\leq\frac{a}{4}$，令 $\sqrt{a-4x}=t(t\geq 0)$，则 $2x=\frac{a-t^2}{2}$，$y=-\frac{t^2}{2}-t+\frac{a}{2}-3$，所以当 $t=-1$ 时取得最大值，但由于 $t\geq 0$，故当 $t=0$，即 $x=\frac{a}{4}$ 时，$y=\frac{a}{2}-3=\frac{7}{2}$，解得 $a=13$. 故答案为 13.

类型三隐距离类型

隐距离问题常常出现的结构如下:

1. $\sqrt{(x-a)^2+b^2}$ 表示 x 轴上的一点 $(x,0)$ 到点 (a,b) 的距离。

2. $\sqrt{(x-a)^2+b^2}+\sqrt{(x-c)^2+d^2}$ 表示 x 轴上的一点 $(x,0)$ 到点 (a,b) 和点 (c,d) 的距离之和.

3. $\sqrt{(x-a)^2+b^2}-\sqrt{(x-c)^2+d^2}$ 表示 x 轴上的一点 $(x,0)$ 到点 (a,b) 和点 (c,d) 的距离之差.

4. $\sqrt{(x-a)^2+b^2}+(x-c)$ 表示：当 $x\geq c$ 时，x 轴上的一点 $(x,0)$ 到点 (a,b) 和点 $x=c$ 的距离之和，当 $x<c$

时，x 轴上的一点 $(x,0)$ 到点 (a,b) 和点 $x=c$ 的距离之差，显然当 $x\to-\infty$ 时，距离之差无限靠近 $a-c$.

例 12. 求函数 $y=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2x+2}$ 的最小值.

解析：函数 $y=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{(x-0)^2+(0-2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(0-1)^2}$ 表示点 $P(x,0)$ 到，点 $A(0,2)$ 和 $B(1,1)$ 的距离之和. 如图 8-1-8 所示作出 A 关于 x 轴的对称，点 A'，连接 $A'B$. 由 $|PA|+|PB|=|PA'|+|PB|\ge|P'A|+|P'B|=|P'A'|+|P'B|=|A'B|$，而 $A'(0,-2),|A'B|=\sqrt{(1-0)^2+(1+2)^2}=\sqrt{10}$. 即有函数 y 的最小值为 $\sqrt{10}$.

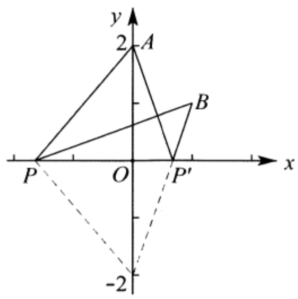


图 8-1-8

例 13. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x^2-4x+10}-\sqrt{x^2-2x+3}$，求 $f(x)$ 的最大值及相应的 x 值.

解析：因为函数 $f(x)=\sqrt{x^2-4x+10}-\sqrt{x^2-2x+3}$，所以 $f(x)=\sqrt{(x-2)^2+6}-\sqrt{(x-1)^2+2}$. 所以记 $P(x,0)$，$A(2,\sqrt{6}),B(1,\sqrt{2})$，则点 P 在 x 轴上，点 A、B 在 x 轴上方，因为 $|AB|=\sqrt{(2-1)^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{9-4\sqrt{3}}$. 所以 $f(x)=|PA|-|PA|\le|AB|=\sqrt{9-4\sqrt{3}}$. 三点 P、A、B 共线时，取最大值. 由 $A(2,\sqrt{6}),B(1,\sqrt{2})$，得直线 AB 的方程 $y-\sqrt{2}=(\sqrt{6}-\sqrt{2})(x-1)$，令 $y=0$，得 $x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$. 所以 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{9-4\sqrt{3}}$，此时 $x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

例 14. （2019•西湖区校级模拟）函数 $y=x+\sqrt{x^2-2x+3}$ 的值域为(　　)

A. $[1+\sqrt{2}，+\infty)$　　B. $(\sqrt{2}，+\infty)$　　C. $[\sqrt{3}，+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

解析：法一(判别式法) 函数 $y=x+\sqrt{x^2-2x+3}=x+\sqrt{(x-1)^2+2}$，可知函数的定义域为 R . 当 $x\ge1$ 时，可知函数 y 是递增函数，可得 $y\ge1+\sqrt{2}$，当 $x\le1$ 时，可得 $y-x=\sqrt{x^2-2x+3}\ge0$，两边平方，因为 $y-x\ge0$，即 $y>1$；所以 $(y-x)^2=\sqrt{x^2-2x+3}$，可得 $x^2-2xy+y^2=x^2-2x+3(y\ne1)$，所以

$x=\dfrac{y^2-3}{2y-2}\le 1$. 得 $y\in R$. 由 $y-x=y-\dfrac{y^2-3}{2(y-1)}=\dfrac{y^2-2y+3}{2y-2}\ge 0$, 因为 $y>1$. 所以 $y^2-2y+3\ge 0$, 可得 $y\in R$ 综上可得 $y>1$. 所以函数 $y=x+\sqrt{x^2-2x+3}$ 的值域为 $(1,\infty)$, 故选 D.

法二（对称对偶式构造）当 $x\ge 1$时, 可知函数 y 是递增函数, 可得 $y\ge 1+\sqrt{2}$, 当 $x\le 1$时, 可得 $y-1=\sqrt{x^2-2x+3}+x-1=\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-2x+1}$, 令 $t=(x-1)^2+1$,（构造对称对偶式），则 $y-1$ $=\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}(t\ge 1)$, $y=1+\dfrac{2}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}$, 显然 $0<\dfrac{2}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}\le\sqrt{2}$, 故 $1<y\le\sqrt{2}$, 故选 D.

法三（隐距离构造）$y=x+\sqrt{x^2-2x+3}=\begin{cases}x+\sqrt{(x-1)^2+2}(x\ge 0)\\-x+\sqrt{(x-1)^2+2}(x\le 0)\end{cases}$, 如图 8-1-9, 令 $A(1,\sqrt{2})$, 易知当 $x\ge 0$

时, x 轴非负半轴上任意一点 P, 满足 $|PA|+|PO|\ge|OA|=\sqrt{3}$, 故 $x\ge 0$ 时, $y\ge\sqrt{3}$; 当 $x\le 0$ 时, x 轴非正半轴上任意一点 Q, 满足 $|QA|-|QA|\le|OA|=\sqrt{3}$, 作 $AA_1\perp x$ 轴于 A_1, 当 $x\to-\infty$ 时, $|QA|\to|QA_1|$, $|QA|-|QO|\to|QA|-|QA_1|=1$, 故 $x\le 0$ 时, $1<y\le\sqrt{3}$, 故选 D.

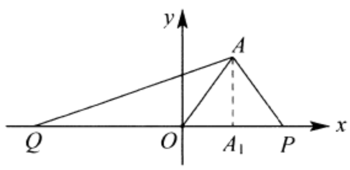


图 8-1-9

秒杀秘籍：距离之差定理：

已知 A,B 为直线 l 外的两点, 点 A 、点 B 在直线 l 上的射影为点 A_1 、点 B_1, 点. P 在直线 l 上，如图 $8-1-10$ 和图 8-1-11 所示。

①$|PA|-|PB|\le|AB|$, 当且仅当 A、B 、P 三点共线时等号成立.

② 当 $|PA|\ge|PB|$ 时，记为 P_1, 当 P_1 在无穷远处时，根据极限原理，距离之差 $|P_1A|-|P_1B|\to|P_1A_1|-|P_1B_1|=|A_1B_1|$.

③同理当 $|PA|\le|PB|$ 时, 记为 P_2, 当 P_2 在无穷远处时, 距离之差 $|P_2A|-|P_2B|\to|P_2A_1|-|P_2B_1|=-|A_1B_1|$.

综上可得: $-|A_1B_1|<|PA|-|PB|\le|AB|$.

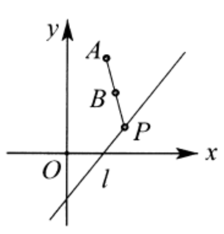


图 8-1-10

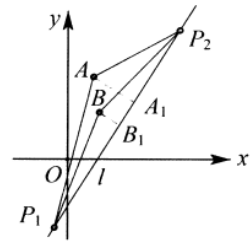


图 8-1-11

例 15. 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4-3x^2+9}-\sqrt{x^4-4x^2+9}}{x}(x>0)$

（1）将 $f(x)$ 化成 $\dfrac{1}{\sqrt{g^2(x)+a}+\sqrt{g^2(x)+b}}$ (a，b 是不同的整数）的形式；

（2）求 $f(x)$ 的最大值及相应的 x 值.

解析：(1) 由题意的, 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4-3x^2+9}-\sqrt{x^4-4x^2+9}}{x^2}=\dfrac{x^4-3x^2+9-x^4+4x^2-9}{x^2\cdot\frac{1}{x}\left(\sqrt{x^4-3x^2+9}+\sqrt{x^4-4x^2+9}\right)}$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{9}{x^2}-3}+\sqrt{x^2+\frac{9}{x^2}-4}}=\frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{x}\right)^2+3}+\sqrt{\left(x-\frac{3}{x}\right)^2+2}};$$

(2) 设 $h(x)=\left(x-\dfrac{3}{x}\right)^2$， $x>0$， 当 $x=\dfrac{3}{x}$ 时, 即 $x=\sqrt{3}$ 时, $h(x)$ 有最小值, 则 $f(x)$ 有最大值, 所以

$f(x)_{\max}=f(\sqrt{3})=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

注意此题可以令 $x-\dfrac{3}{x}=t$, 即可转化为 $f(t)=\sqrt{t^2+3}-\sqrt{t^2+2}$, 转化为距离形式, 同样利用三点共线来算出距离之差最大值，当然最小值时取不到的，在无穷远处，这里不再详述.

例 16. 求 $s=\sqrt{x^4-5x^2-8x+25}-\sqrt{x^4-3x^2+4}$ 的最大值.

解析：如图 8-1-12，在函数 $y=x^2$ 的图象上求, 点 $N\left(x,x^2\right)$, 使得 $s=\sqrt{x^4-5x^2-8x+25}-\sqrt{x^4-3x^2+4}$ 有最大值，$y=\sqrt{\left(x^2-3\right)^2+(x-4)^2}+\sqrt{\left(x^2-2\right)^2+x^2}$ 表示, 点 $N\left(x,x^2\right)$, 分别到 $P(4,3),Q(0,2)$ 的距离差，则 PQ 的延长线与 $y=x^2$ 的交, 点 N 为所求, $|PQ|=|PN-QN|$. 下面证明 $y_{\max}=|PQ|$, 在 $y=x^2$ 上找一点不同于 N 点的 M 点. 在 $\triangle MPQ$ 中，$PQ\ge QM-PM|$. 即 $y_{\max}=|PQ|=\sqrt{(4-0)^2+(3-2)^2}=\sqrt{17}$, 因此最大值为 $\sqrt{17}$.

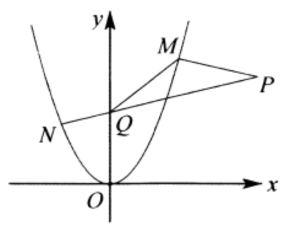


图 8-1-12

达标训练（高一预习三角函数和圆后使用）

1.（2019•枣庄校级月考）函数 $y=x+\sqrt{1-x^2}$ 的值域为(　　)

A．$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　　B．$[-1,\sqrt{2}]$　　C．$[-2，2]$　　D．$[1,\sqrt{2}]$

2.（2019•保定校级月考）对函数 $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ 作 $x=h(t)$ 的代换，则不改变函数 $f(x)$ 值域的代换是(　　)

A．$h(t)=\sin t,t\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$　　B．$h(t)=\sin t$，$t\in[0，\pi]$

C．$h(t)=\sin t$，$t\in[-\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{\pi}{2}]$　　D．$h(t)=\dfrac{1}{2}\sin t$，$t\in[0，2\pi]$

3．（2019•广东期末）函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x-2}$ 的值域是(　　)

A．$[-\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}]$　　B．$[-\dfrac{4}{3},0]$　　C．$[0，1]$　　D．$[0,\dfrac{4}{3}]$

4.（2019•抚州校级期中）对于函数 $f(x)$，如果存在锐角 θ 使得 $f(x)$ 的图象绕坐标原点逆时针旋转角 θ，所得曲线仍是一函数，则称函数 $f(x)$ 具备角 θ 的旋转性，下列函数具有角 $\dfrac{\pi}{4}$ 的旋转性的是(　　)

A．$y=\sqrt{x^2-1}$　　B．$y=x^2$　　C．$y=2^x$　　D．$y=lnx$

5．（2018•浙江期中）设 I 是含数 π 的有限实数集，$f(x)$ 是定义在 I 上的函数，若 $f(x)$ 的图象绕坐标原点逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$ 后与原图象重合，则在以下各项中，$f(\pi)$ 的取值不可能是(　　)

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$　　B．$\sqrt{3}\pi$　　C．π　　D．$\sqrt{2}\pi$

6．（2018•沙坪坝区校级期末）函数 $f(x)=2x-3-\sqrt{-x^2+6x-8}$ 的值域是(　　)

A．$[3-\sqrt{5}，5]$　　B．$[1，5]$　　C．$[2，3+\sqrt{5}]$　　D．$[3-\sqrt{5}，3+\sqrt{5}]$

7．（2019•山西期中）若直线 $y=kx-1$ 与函数 $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{2x-x^2},0\leqslant x\leqslant 2\\ \sqrt{-x^2+6x-8},2<x\leqslant 4\end{cases}$ 的图象恰有 3 个不同的交点，则 k 的取值范围为(　　)

A. $[\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$　　B. $[\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4})$　　C. $[\frac{1}{4},\frac{3}{4})$　　D. $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$

8.（2019•开福区校级模拟）方程$\frac{(1+x)^3}{\sqrt{4-x^2}}+x^2-4=0$的实根个数为（）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

9.（2018•濂溪区校级月考）设$f(x)=\frac{\sqrt{x^4-3x^2+9}-\sqrt{x^4-4x^2+9}}{x}(x>0)$，则$f(x)$的值域为$(\quad)$

A. $(0,\sqrt{3}-\sqrt{2}]$　　B. $(\sqrt{3}-\sqrt{2},1)$　　C. $(-1,\sqrt{3}-\sqrt{2})$　　D. $(\sqrt{3}-\sqrt{2},\sqrt{3}+\sqrt{2})$

10.（2018•晋城二模）若$f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-2x+4}$的最小值与$g(x)=\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}(a>0)$的最大值相等，则$a$的值为$(\quad)$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

11.（2018•东宝区校级月考）若$(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})(y-1+\sqrt{y^2-2y+2})=1$，则$x+y=(\quad)$

A. 0　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

12.（2018•桥东区校级月考）已知点$M(x,y)$是抛物线$y^2=4x$上的动点，则$\sqrt{x^2-6x+y^2-2y+10}+\sqrt{x^2-2x+y^2+1}$的最小值为$(\quad)$

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

13.（2019•苏州校级期末）若函数$f(x)=\sqrt{9x^2+3x+1}-\sqrt{9x^2-3x+1}-a$存在零点，则实数$a$的取值范围是____.

14.（2018•杨浦区校级期末）若关于x的方程$\sqrt{1-x^2}=|x-a|-a$有两个不相等的实数根，则实数a的取值范围是____.

15. 将函数$y=\sqrt{-x^2+2x+3}-\sqrt{3}(x\in[0,2])$的图象绕坐标原点逆时针旋转$\theta(\theta$为锐角），若所得曲线仍是一个函数的图象，则$\theta$的范围是____.

16.（2019•湛江月考）若曲线$y=\sqrt{1-x^2}$与直线$y=x+b$始终有交点，则b的取值范围是____；若有一个交点，则b的取值范围是____；若有两个交点，则b的取值范围是____.

17. 函数$y=x-1+\sqrt{x^2+2x+3}$的值域为.

18. 已知$x\leqslant -\frac{1}{2}$，则二元函数$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{y^2-2y+5}$的最小值是____.

19.（2019•嘉兴市校级月考）函数 $y=\sqrt{x^4+3x^2-6x+10}-\sqrt{x^4-3x^2+2x+5}$ 的最大值为____.

20. 过点 $(2\sqrt{2},0)$ 直线 l 与曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 交于 A， B 两点， O 为坐标原点，当 ΔABO 的面积取最大值时，直线 l 的斜率等于____.

21.（2018•宝应县校级月考）若关于 x 的方程 $\sqrt{4-x^2}-kx-4+2k=0$ 有且只有两个不同的实数根，则实数 k 的取值范围是____.

22. 关于 x 的方程 $\sqrt{|1-x^2|}+a=x$ 有两个不相等的实数根，试求实数 a 的取值范围.

第二讲和谐区间和倍值区间问题

类型一和谐区间： 对于定义域为 D 的函数 $y=f(x)$，若存在区间 $[a，b]\subset D$，使得 $f(x)$ 同时满足：① $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上是单调函数，②当 $f(x)$ 的定义域为 $[a，b]$ 时， $f(x)$ 的值域也为 $[a，b]$，则称区间 $[a，b]$ 为该函数的一个“和谐区间”. 和谐区间满足:① $y=f(x)$ 位于连续区间（不能出现无穷间断点），② $y=f(x)$ 单调递增， $\begin{cases}f(a)=a\\f(b)=b\end{cases}$； 或者 $y=f(x)$ 单调递减， $\begin{cases}f(a)=b\\f(b)=a\end{cases}$

例 17.（2018•徐汇区校级期末）对于定义域为 D 的函数 $y=f(x)$，若存在区间 $[a，b]\subset D$，使得 $f(x)$ 同时满足，① $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上是单调函数，②当 $f(x)$ 的定义域为 $[a，b]$ 时， $f(x)$ 的值域也为 $[a，b]$，则称区间 $[a，b]$ 为该函数的一个“和谐区间”.

（1）求出函数 $f(x)=x^3$ 的所有“和谐区间” $[a，b]$；

（2）函数 $f(x)=|\frac{4}{x}-3|$ 是否存在“和谐区间” $[a，b]$？若存在，求出实数 a， b 的值；若不存在，请说明理由；

（3）已知定义在 $(2,k)$ 上的函数 $f(x)=2m-\frac{4}{x-1}$ 有“和谐区间”，求正整数 k 取最小值时实数 m 的取值范围.

解析：(1) 因为函数 $f(x)=x^3$; 所以 $f(x)$ 在 R 内单调递增：再令 $f(x)=x^3=x$, 所以 $x=-1,0,1$;

所以 $f(x)=x^3$ 的“和谐区间”为: $[-1,0]$、$[0,1]$、$[-1,1]$；

(2) 假设函数 $f(x)=\left|\frac{4}{x}-3\right|$ 存在和谐区间, 所以 $\left|\frac{4}{x}-3\right|=x$；所以 $x^2+3x-4=0$ 或 $x^2-3x+4=0$，①当 $x^2+3x-4=0$, 即 $x=-4$ 或 1; 在 $[-4,1]$ 内 $f(x)$ 不单调，故不成立;②当 $x^2-3x+4=0$ 时， x 无解，故不

成立，所以综上所述：函数 $f(x)=\left|\frac{4}{x}-3\right|$ 不存在和谐区间；

(3) 因为函数 $f(x)=2m-\frac{4}{x-1}$ 有“和谐区间”，所以 $f(x)$ 在 $(2,k)$ 内单调逆增，且 $f(x)=x$ 在定义内有两个不等的实数根；所以 $2m-\frac{4}{x-1}=x$ 在定义内有两个不等的实数根；即 $2m=x+\frac{4}{x-1}=x-1+\frac{4}{x-1}+1$：因为 $x\in(2,k)$，所以 $2m\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}+1=5$，即 $m\geq\frac{5}{2}$；因为 $g(x)=x+\frac{4}{x-1}$ 在 $(2,3)$ 内单调递减，在 $(3,+\infty)$ 内单调递增，所以 $k>3$，因为函数 $g(x)=x+\frac{4}{x-1}$ 与直线 $y=2m$ 在 $(2,k)$ 有两个交点，$g(2)=6$，所以 $k+\frac{4}{k-1}=6$，所认正整数 k 最小值为 5，此时 $g(5)=6$，则 $2m=6$，即 $m=3$，此时 m 的取值范固为 $\left(\frac{5}{2},3\right)$.

倍值区间：对于定义域为 D 的函数 $y=f(x)$，若存在区间 $[a，b]\subset D$，使得 $f(x)$ 同时满足，① $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上是单调函数，②当 $f(x)$ 的定义域为 $[a，b]$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[ka，kb]$，则称区间 $[a，b]$ 为该函数的一个“k 倍区间”．此函数也叫倍值函数.

倍值区间满足：① $y=f(x)$ 位于连续区间（无无穷间断点），② $y=f(x)$ 单调递增，$\begin{cases}f(a)=a\\f(b)=b\end{cases}$；或者 $y=f(x)$ 单调递减，$\begin{cases}f(a)=b\\f(b)=a\end{cases}$

例 18.（2019•庐阳区校级月考）已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-2x$.

（1）求函数 $f(x)$ 在 R 上的解析式；

（2）是否存在非负实数 a，$b(a<b)$，使得当 $x\in[a，b]$ 时，函数 $g(x)=f(x)$ 的值域为 $[-b，-a]$？若存在，求出所有 a，b 的值；若不存在，说明理由.

解析：(1) 设 $x<0$，则 $-x>0$，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-2x$，且 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)=x^2+2x=-f(x)$，

所以 $f(x)=-x^2-2x$，因为 $f(0)=0$，故 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x,x>0\\0,x=0\\-x^2-2x,x<0\end{cases}$

（2）假设存在满足题意的 $a,b(a<b)$，且 $a\geq0,b\geq0$，由 (1) 可知，当 $x\geq0$ 时，$f(x)\geq-1$，故 $-b\geq-1$，

即$b\le 1$,故$f(x)$在$[a,b]$上单调递减，从而有$\begin{cases}f(a)=-a\\f(b)=-b\end{cases}$,即$a=0,\quad b=1$,故存在$a=0,b=1$满足题意.

例 19.（2020•南通期末）设$a\in R$，函数$f(x)=\dfrac{2^x+a}{2^x-a}$.

（1）若$a=1$，求证：函数$f(x)$为奇函数；

（2）若$a<0$，判断并证明函数$f(x)$的单调性；

（3）若$a\ne 0$，函数$f(x)$在区间$[m，n](m<n)$上的取值范围是$[\dfrac{k}{2^m}，\dfrac{k}{2^n}](k\in R)$，求$\dfrac{k}{a}$的范围.

解析：(1)由题意得,当$a=1$时,函数$f(x)=\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$,因为$2^x-1\ne 0$,所以$x\ne 0$,从而对任意的$x\ne 0$,

都有$f(-x)=\dfrac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1}=\dfrac{1+2^x}{1-2^x}=-f(x)$,所以$f(x)=\dfrac{2^x+1}{2^x-1}(x\ne 0)$为奇函数.

(2)当$a<0$时,因为$2^x>0$,所以$2^x-a>0$,所以函数$f(x)=\dfrac{2^x+a}{2^x-a}$的定义域为$R$.结论:函数

$f(x)=\dfrac{2^x+a}{2^x-a}(a<0)$为$R$上的单调逆增函数.证明如下：设对任意的$x_1,x_2\in R$,且$x_1<x_2$,则

$$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\frac{2^{x_1}+a}{2^{x_1}-a}-\frac{2^{x_2}+a}{2^{x_2}-a}=\frac{\left(2^{x_1}+a\right)\left(2^{x_2}-a\right)-\left(2^{x_2}+a\right)\left(2^{x_1}-a\right)}{\left(2^{x_1}-a\right)\left(2^{x_2}-a\right)}=\frac{2a\left(2^{x_2}-2^{x_1}\right)}{\left(2^{x_1}-a\right)\left(2^{x_2}-a\right)},$$

因为$x_1<x_2$,所以$2^{x_2}>2^{x_1}$,即$2^{x_2}-2^{x_1}>0,\quad$又因为$2^{x_1}-a>0,\quad 2^{x_2}-a>0,\quad a<0$,

所以$\dfrac{2a\left(2^{x_2}-2^{x_1}\right)}{\left(2^{x_1}-a\right)\left(2^{x_2}-a\right)}<0,\quad$于是$f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$.

(3)因为$m<n$,所以$2^m<2^n$,从而$\dfrac{1}{2^m}>\dfrac{1}{2^n}$,由$\left[\dfrac{k}{2^m},\dfrac{k}{2^n}\right]$,知$\dfrac{k}{2^m}<\dfrac{k}{2^n}$,所以$k<0$,因为$a\ne 0$,所以$a<0$

或$a>0$.①当$a<0$时,由(2)知,函数$f(x)=\dfrac{2^x+a}{2^x-a}$为$R$上单调逆增函数.因为函数$f(x)$在区

间)$[m,n](m<n)$上的取值范围是$\left[\dfrac{k}{2^m},\dfrac{k}{2^n}\right],\quad(k\in R)$所以$\begin{cases}f(m)=\dfrac{k}{2^m}\\f(n)=\dfrac{k}{2^n}\end{cases}$,即$\begin{cases}\dfrac{2^m+a}{2^m-a}=\dfrac{k}{2^m}\\\dfrac{2^n+a}{2^n-a}=\dfrac{k}{2^n}\end{cases}$,从而关于$x$

的方程$\underline{2^x+a}=\underline{k}$有两个互异实数根.令$t=2^x$.则$t>0$.所以方程$t^2+(a-k)t+ak=0$,$(a,k<0)$有两个

互异

实数根，则$\begin{cases}-\dfrac{a-k}{2}>0\\(a-k)^2-4ak>0,\\ak>0\end{cases}$ 从而 $0<\dfrac{k}{a}<3-2\sqrt{2}$. ②当 $a>0$ 时，函数 $f(x)=1+\dfrac{2a}{2^x-a}$ 在区间 $\left(-\infty,\log_2 a\right)$，$\left(\log_2 a,+\infty\right)$ 上均单调递减. 若 $[m,n]\subseteq\left(\log_2 a,+\infty\right)$, 则 $f(x)>1$, 于是 $\dfrac{k}{2^m}>0$, 这与 $k<0$ 矛盾, 故舍去.

若 $[m,n]\subseteq\left(-\infty,\log_2 a\right)$, 则 $f(x)<1$，于是$\begin{cases}f(m)=\dfrac{k}{2^n}\\f(n)=\dfrac{k}{2^m}\end{cases}$，即$\begin{cases}\dfrac{2^m+a}{2^m-a}=\dfrac{k}{2^n}\ (1)\\\dfrac{2^n+a}{2^n-a}=\dfrac{k}{2^m}\ (2)\end{cases}$，

所以$\begin{cases}2^n\left(2^m+a\right)=k\left(2^m-a\right)\\2^m\left(2^n+a\right)=k\left(2^n-a\right)\end{cases}$，两式相减整理得 $(a-k)\left(2^n-2^m\right)=0$,　又 $2^m<2^n$, 故 $2^n-2^m>0$,　从而 $a-k=0$,　因为 $a>0$,　所以 $\dfrac{k}{a}=-1$.

达标训练（适合高一）

23.（2019•延吉市校级期中）已知函数 $f(x)=|1-\dfrac{1}{x}|(x>0)$，

（1）是否存在实数 a，$b(a<b)$，使得函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域都是 $[a，b]$，若存在，求出 a，b 的值，若不存在，说明理由

（2）若存在实数 a，$b(a<b)$，使得函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[a，b]$ 时，值域为 $[ma，mb]$，$(m\neq 0)$，求 m 的取值范围.

24.（2018•射洪县校级期中）已知函数 $f(x)=kx(k\neq 0)$，且满足 $f(x+1)\bullet f(x)=x^2+x$，

(I) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(II) 若函数 $f(x)$ 为 R 上的增函数，$h(x)=\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1}(f(x)\neq 1)$，问是否存在实数 m 使得 $h(x)$ 的定义域和值域都为 $[m，m+1]$？若存在，求出 m 的值，若不存在，请说明理由.

25.（2018•虹口区校级期末）已知函数 $f(x)=2+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2x}$（实数 $a\neq 0$），

（1）若 $m<n<0$，请判断函数 $f(x)$ 在区间 $[m，n]$ 上的单调性并证明；

（2）若 $\dfrac{8}{7}\leqslant m<n$ 且 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 的定义域和值域都 $[m，n]$，求 $n-m$ 的最大值.

26.（2018•临川区校级期末）已知定义在区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)=|t(x+\dfrac{4}{x})-5|$，其中常函数 $t>0$

（1）若函数 $f(x)$ 分别在区间 $(0,2)$， $(2,+\infty)$ 上单调，试求 t 的取值范围；

（2）当 $t=1$ 时，方程 $f(x)=m$ 有四个不等实根 x_1， x_2， x_3， x_4

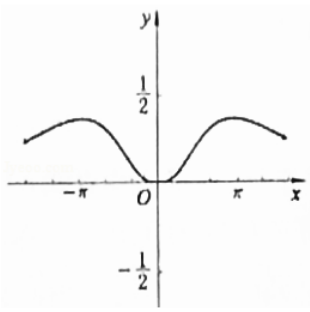
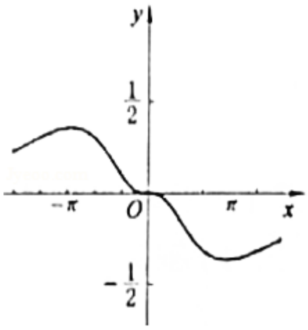
①证明： $x_1 \bullet x_2 \bullet x_3 \bullet x_4=16$；

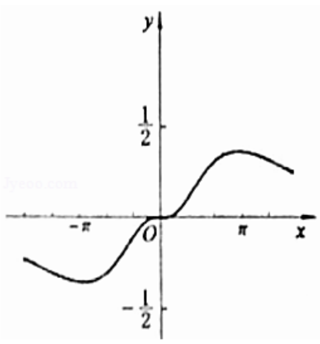
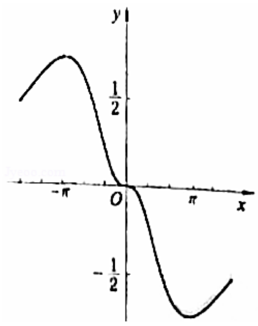
②是否存在实数 a， b，使得函数 $f(x)$ 在区间 $[a$， $b]$ 上单调，且 $f(x)$ 的取值范围为 $[ma$， $mb]$，若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，请说明理由.

第三讲函数图像与解析式

口诀：一奇偶，二特值，三单调，四极限.

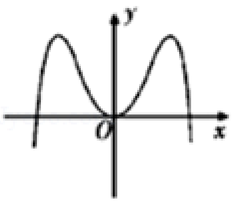
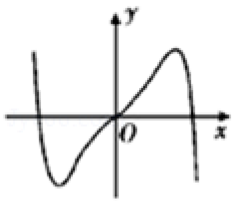
例 20. （2020•淮北一模）函数 $f(x)=\frac{sinx-x}{cosx+x^2}$ 的部分图象是（　　）

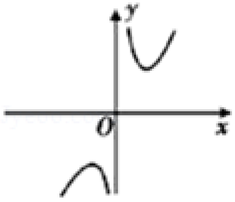
A. 
B. 

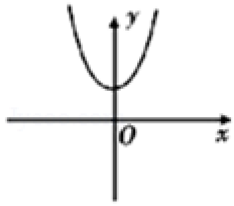
C. 
D. 

解析：因为 $f(-x)=\dfrac{-\sin x+x}{\cos x+x^2}=-f(x)$, 则函数 $f(x)$ 是奇函数, 图象关于原点对称, 排除 A. 当 $x=\pi$ 时, $f(\pi)=\dfrac{\sin\pi-\pi}{\cos\pi+\pi^2}=\dfrac{-\pi}{\pi^2-1}<0$, 排除 C,　且 $-\dfrac{1}{2}<f(\pi)<0$, 排除 D, 故选 B.

例 21. （2020•乐山模拟）函数 $f(x)=(e^x+e^{-x})\bullet \sin x$ 的图象大致是（　　）

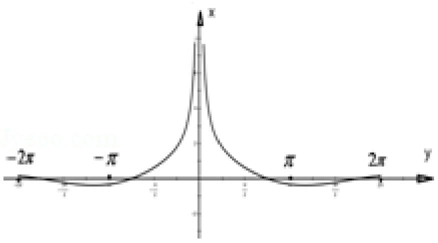
A. 
B. 

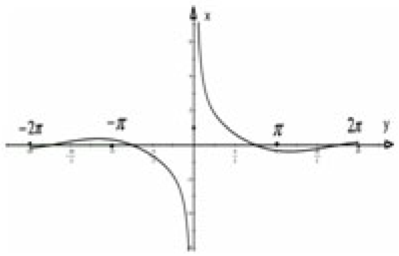
C. 

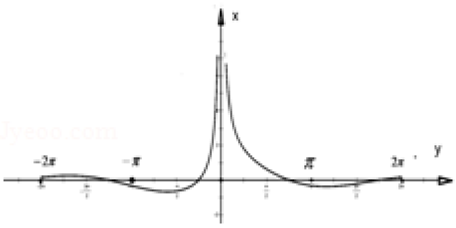
D. 

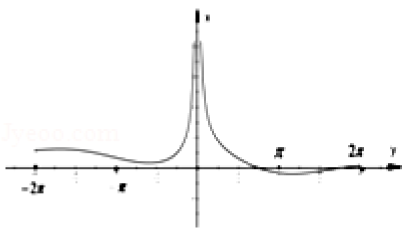
解析：因为 $f(-x)=\left(e^{-x}+e^{x}\right)\sin(-x)=-\left(e^{-x}+e^{x}\right)\sin x=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，其图象关于原点对称，故排除 A、D；又因为 $f(x)$ 的定义域是 R，排除 C，故选 B.

例 22. （2020•黄山一模）函数 $y=\dfrac{sinx+cosx}{|x|}$在区间[﹣2π，2π]的图象大致是（　　）

A. 

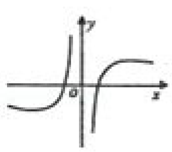
B. 

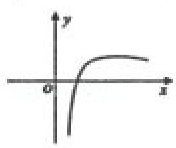
C. 

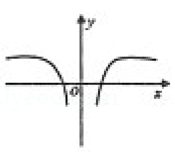
D. 

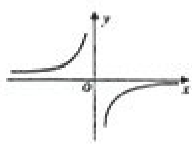
解析：由题得函数 $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{|x|}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{|x|}$，$x\in[-2\pi,2\pi]$，令 $f(x)=0$，解得 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 或 $x=-\dfrac{5\pi}{4}$，由图观察可知，只有选项 C 符合题意，故选 C .

例 23. （2020•曲靖一模）函数 $f(x)=\dfrac{lnx^4}{x}$的大致图象是（　　）

A. 

B. 

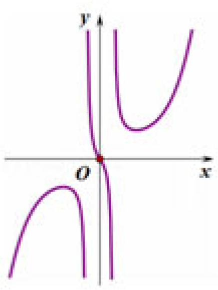
C. 

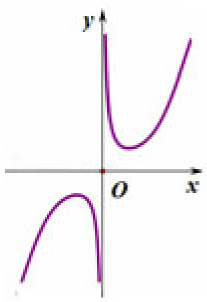
D. 

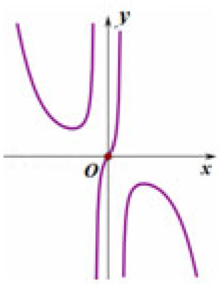
解析因为函数的定义域为 $\{x|\ x\neq 0\}$，且函数 $f(-x)=\dfrac{\ln(-x)^4}{-x}=-\dfrac{\ln x^4}{x}=-f(x)$ 为奇函数，排除 B 和 C，又

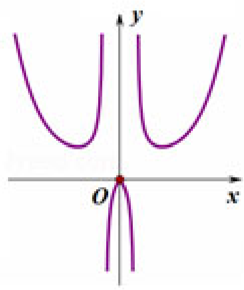
函数 $f(x)=\dfrac{\ln x^4}{x}$ 的零点为 -1 和 1, 排除 D, 故选 A .

例 24. （2020•合肥一模）函数 $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{|x|-cosx}$的图象大致为（　　）

A. 

B. 

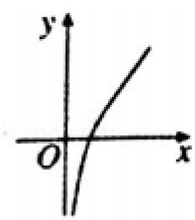
C. 

D. 

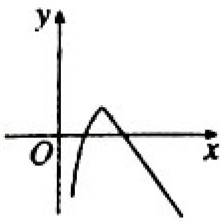
解析：由题得函数 $f(-x)=\dfrac{2^{-x}-2^x}{|-x|-\cos(-x)}=-\dfrac{2^x-2^{-x}}{|x|-\cos x}=-f(x)$, 即函 $f(x)$ 在定义域上为奇函数, 故排除 D, 又因为 $f(0)=0, f(1)=\dfrac{2-2^{-1}}{1-\cos 1}>0$, 故排除 B 和 C， 故选 A.

\end{aligned}

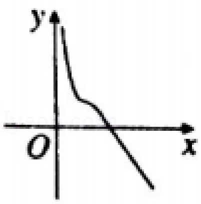
例 25. （2019•南阳期末）函数 $f(x)=|x-1|+e^{|lnx|}$的大致图象为（　　）



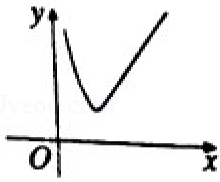
A.



B.



C.



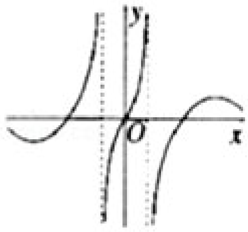
D.

解析：根据题意, 函数 $f(x)=|x-1|+e^{\ln x|}$, 其定义域为 $(0,+\infty)$, 又由 $|x-1|\geq 0, e^{\ln x|}>0$, 则必有 $f(x)>0$ 恒

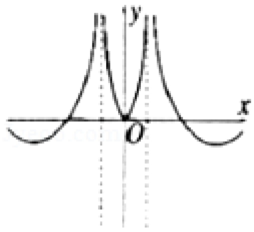
成立，故函数的图象在第一象限，只有 D 选项符合，故选 D.

达标训练（适合高一优等生或者高二）

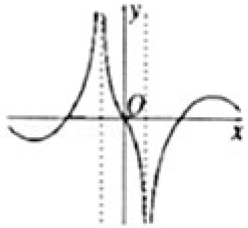
1．（2020•荆州一模）函数 $f(x)=\frac{2sinx}{1-|x|}$的图象大致是（　　）



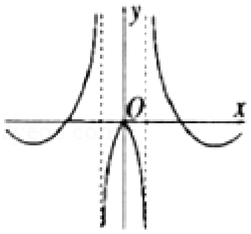
A.



B.

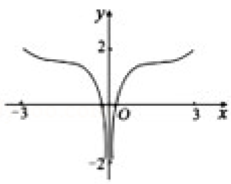


C.

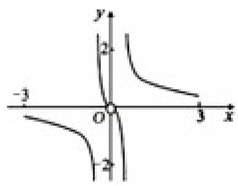


D.

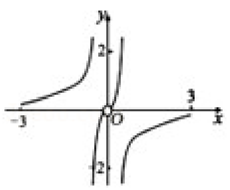
2．（2019•安庆期末）函数 $y=\frac{sinx}{log_{2019}|2^{x}-2^{-x}|}$在区间[－3，0）∪（0，3]上的图象为（　　）



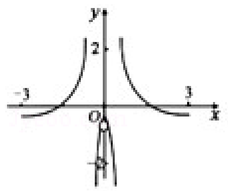
A.



B.

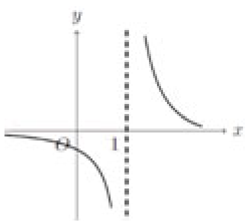


C.

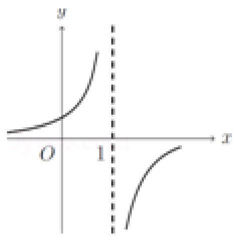


D.

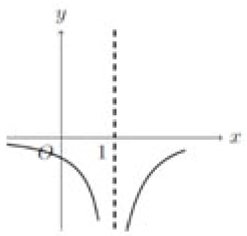
3．（2020•青羊区校级模拟）函数 f（x）$=\frac{1}{e^{x-1}-x}$的图象大致为（　　）



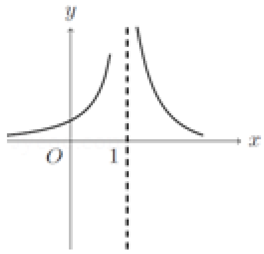
A.



B.

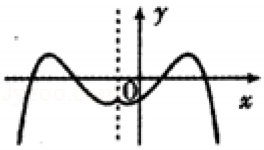


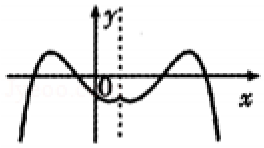
C.

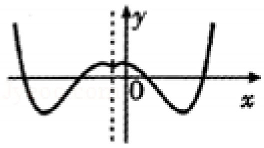


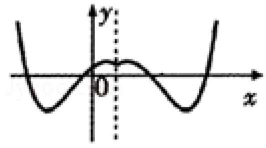
D.

4．（2020•内江模拟）函数 $f(x)=x^2-2x-2^{|x-1|}+1$ 的图象大致为（　　）

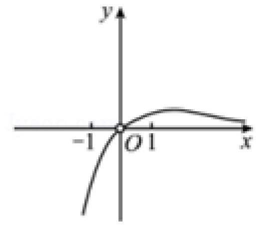
A. 

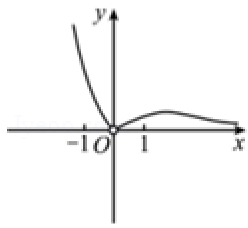
B. 

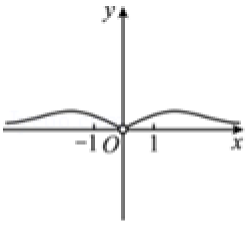
C. 

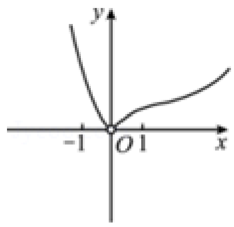
D. 

5．（2020•四川模拟）函数 $f(x)=\frac{x^2}{|e^x-1|}$的图象大致为（　　）

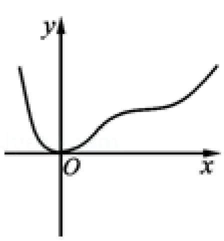
A. 

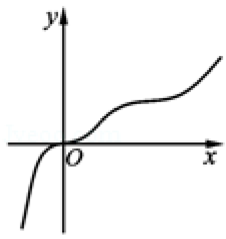
B. 

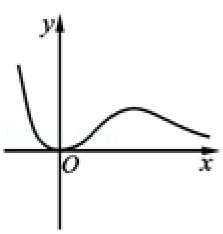
C. 

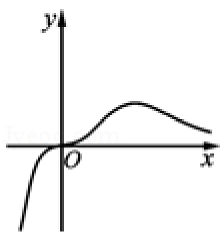
D. 

6．（2020•渭南一模）函数 $f(x)=\frac{x^3}{e^x+1}$的图象大致是（　　）

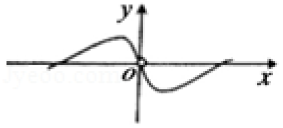
A. 

B. 

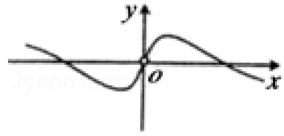
C. 

D. 

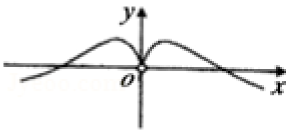
7．（2020•遂宁模拟）函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{xlnx}{x^2+1}，x>0\\ \frac{xln(-x)}{x^2+1}，x<0\end{cases}$ 的图象大致为（　　）



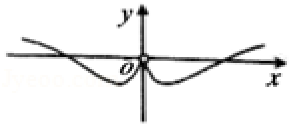
A.



B.

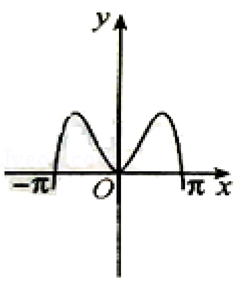


C.

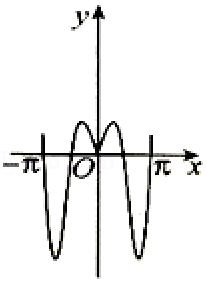


D.

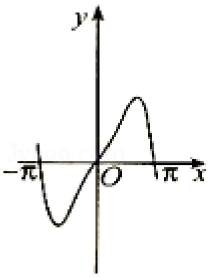
9. （2020•汉中一模）函数 $y=3^{|x|}\sin2x$ 的图象可能是（　　）



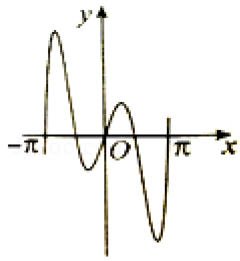
A.



B.

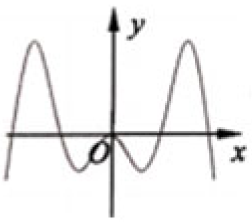


C.

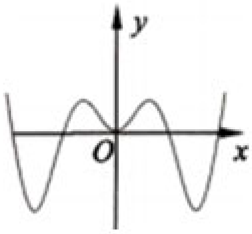


D.

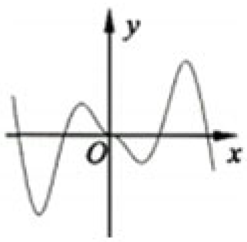
10. （2020•乐山模拟）函数 $f(x)=x\bullet ln\frac{2-sinx}{2+sinx}$ 的部分图象可能是（　　）



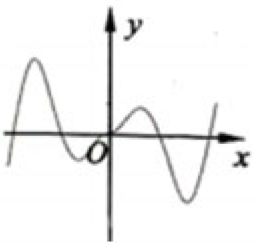
A.



B.

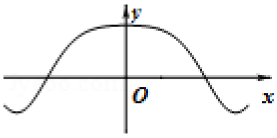


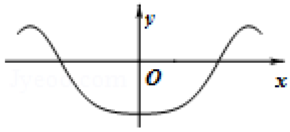
C.

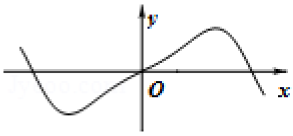


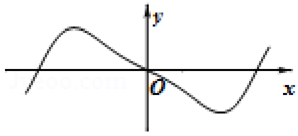
D.

11. （2020•黄山一模）函数 $y=\frac{sinx}{2^{cosx}}$ 的图象大致是（　　）

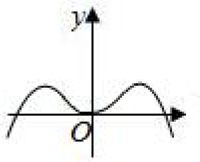
A. 

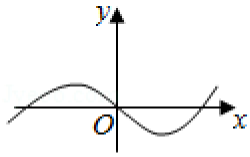
B. 

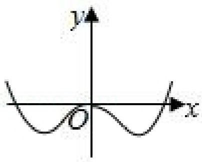
C. 

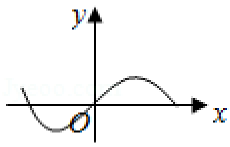
D. 

12. （2020•天河区一模）函数 $f(x)=(\frac{2}{1+e^{x}}-1)sinx$ 图象的大致形状是（　　）

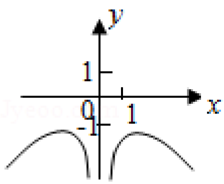
A. 

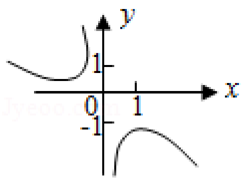
B. 

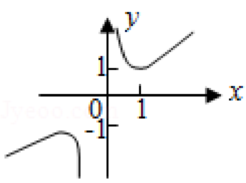
C. 

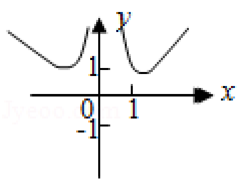
D. 

13. （2020•武侯区校级模拟）函数 $f(x)=\frac{x^{2}+cosx}{x}$的图象大致为（　　）

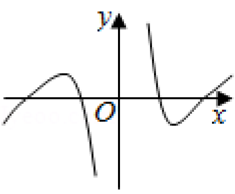
A. 

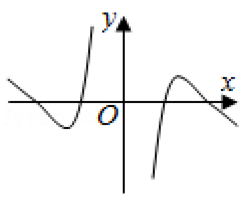
B. 

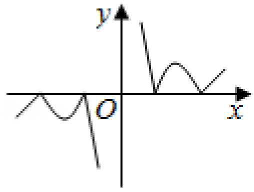
C. 

D. 

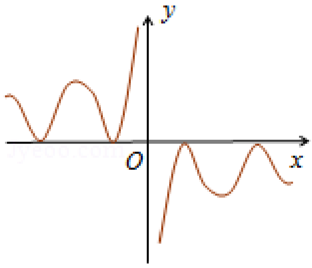
14. （2020•攀枝花一模）函数 $f(x)=\frac{3cosx+1}{x}$的部分图象大致是（　　）

A. 

B. 

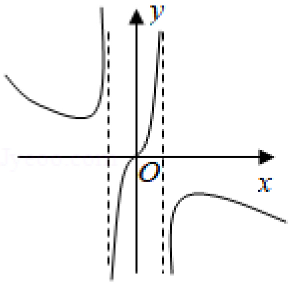


C.

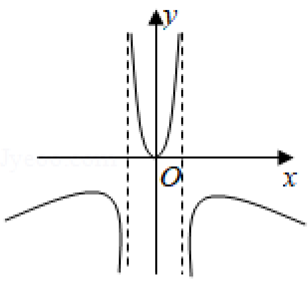


D.

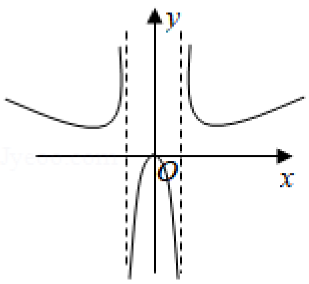
15. （2020•荆州一模）函数 $f（x）=\frac{x(e^{-x}-e^{x})}{4x^{2}-1}$的部分图象大致是（　　）



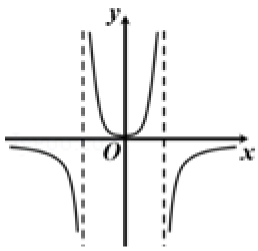
A.



B.

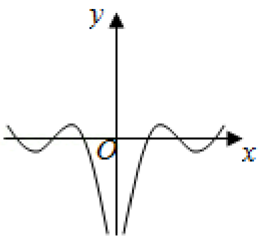


C.

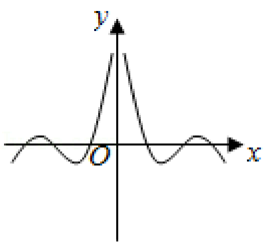


D.

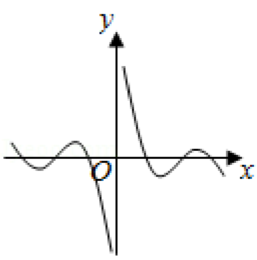
16. （2020•郑州一模）函数 $f(x)=\frac{2^{x}+1}{2^{x}-1}\cdot cosx$ 的图象大致是（　　）



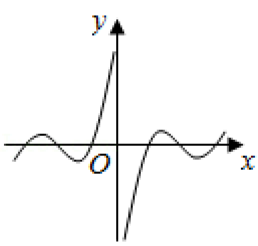
A.



B.

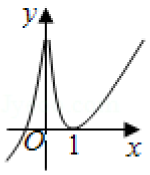


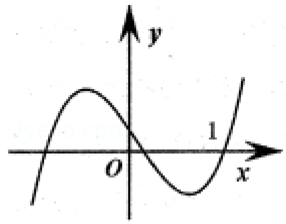
C.

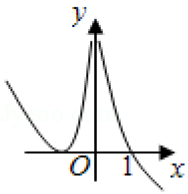


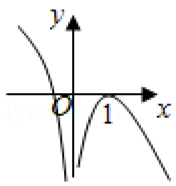
D.

17. （2020•泸州模拟）函数 $f（x）=（x-1）ln|x|$的图象大致为（　　）

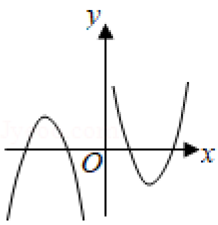
A. 

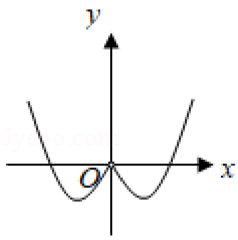
B. 

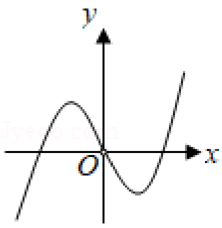
C. 

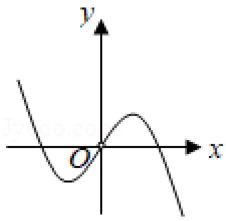
D. 

18. （2020•渭南一模）函数 $y=x\ln|x|$ 的大致图象是（　　）

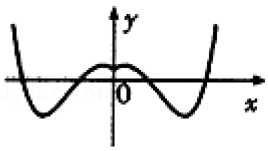
A. 

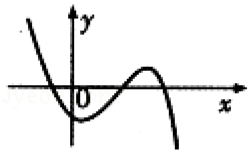
B. 

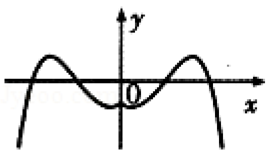
C. 

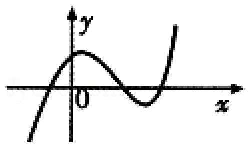
D. 

19. （2020•内江模拟）函数 $f(x)=x^2-2^{|x|}$ 的图象为（　　）

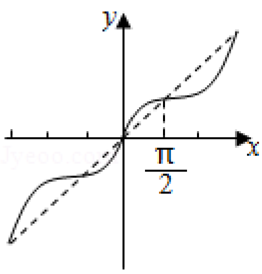
A. 

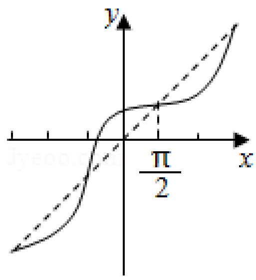
B. 

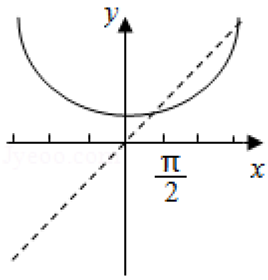
C. 

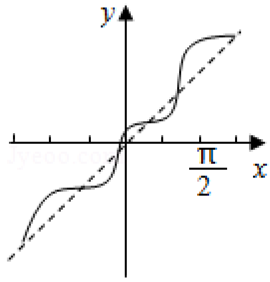
D. 

20. （2020•郴州一模）函数 $y=x+\cos x$ 的大致图象是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

专题 9 函数的综合应用

随着数学建模的能力要求越来越高，函数的应用题被摆上了重要台面成为了“新宠”. 当中涉及一些一次函数、二次函数、对勾函数，指数对数函数模型和三角函数模型也随即出现其中出现，函数模型拟合性，求最值，方案选择，其实本质还是审题.

第一讲　利润问题

类型一 常见的初等函数利润问题

涉及涨价降价的百分数问题，提价降销量的二次函数问题，分段函数求平均利润的对勾函数问题双变量的线性规划问题，我们一一分解，关键在于题目给到的数据和基础函数模型

例 1.（2019•烟台期末）某商家准备在 2020 年春节来临前连续 2 次对某一商品销售价格进行提价且每次提价10%，然后在春节活动期间连续 2 次对该商品进行降价且每次降价10%，则该商品的最终售价与原来价格相比(　　)

A．略有降低　　B．略有提高　　C．相等　　D．无法确定

解析：A

例 2.（2019•平谷区期末）某餐厅经营盒饭生意，每天的房租、人员工资等固定成本为 200 元，每盒盒饭的成本为 15 元，销售单价与日均销售量的关系如表：

单价 / 元	16	17	18	19	20	21	22
日销售量 / 盒	480	440	400	360	320	280	240

根据以上数据，当这个餐厅每盒盒饭定价______元时，利润最大(　　)

A．16.5　　B．19.5　　C．21.5　　D．22

解析：C

例 3.（2020•汨罗市一模）2019 年 1 月 1 日起新的个人所得税法开始实施，依据《中华人民共和国个人所得税法》可知纳税人实际取得工资、薪金（扣除专项、专项附加及依法确定的其他）所得不超过 5000 元（俗称“起征点”）的部分不征税，超出 5000 元部分为全月纳税所得额．新的税率表如下：

2019 年 1 月 1 日后个人所得税税率表

全月应纳税所得额	税率 (%)
不超过 3000 元的部分	3
超过 3000 元至 12000 元的部分	10
超过 12000 元至 25000 元的部分	20

超过 25000 元至 35000 元的部分	25

个人所得税专项附加扣除是指个人所得税法规定的子女教育、继续教育、大病医疗、住房贷款利息、住房租金和赡养老人等六项专项附加扣除．其中赡养老人一项指纳税人赡养 60 岁（含）以上父母及其他法定赡养人的赡养支出，可按照以下标准扣除：纳税人为独生子女的，按照每月 2000 元的标准定额扣除；纳税人为非独生子女的，由其与兄弟姐妹分摊每月 2000 元的扣除额度，每人分摊的额度不能超过每月 1000 元．某纳税人为独生子，且仅符合规定中的赡养老人的条件，如果他在 2019 年 10 月份应缴纳个人所得税款为 390 元，那么他当月的工资、薪金税后所得是____元．

解析：由题意知当工资、薪金为 8000 元时，放纳税款 $3000\times3\%$ =90（元），当工资、薪金为 17000 元时，缴纳税款 $3000\times3\%+9000\times10\%=990$ （元），所以他的工资、薪金在 $8000-17000$ 元之间，设工资、薪金为 x 元，则 $3000\times3\%+(x-10000)\times10\%=390$ ，解得：$x=13000$ ，所以税后所得为 $13000-390=12610$（元）. 故答案为 12610.

注意分段函数分别求.

例 4.（2019•临沂期末）某地某路无人驾驶公交车发车时间间隔 t（单位：分钟）满足 $5\leqslant t\leqslant 20$，$t\in N$．经测算，该路无人驾驶公交车载客量 $p(t)$ 与发车时间间隔 t 满足：$p(t)=\begin{cases}60-(t-10)^2, 5\leqslant t<10,\\ 60, 10\leqslant t\leqslant 20,\end{cases}$ 其中 $t\in N$．

（1）求 $p(5)$，并说明 $p(5)$ 的实际意义；

（2）若该路公交车每分钟的净收益 $y=\dfrac{6p(1)+24}{t}-10$（元），问当发车时间间隔为多少时，该路公交车每分钟的净收益最大？并求每分钟的最大净收益．

解析：(1) 由题意得 $p(5)=60-(5-10)^2=35$, 实际意义为:发车时间间隔为 5 分钟时, 载客量为 35;

(2) 因为 $y=\dfrac{6p(t)+24}{t}-10,$ 所以当 $5\le t<10$ 时，$y=\dfrac{360-6(t-10)^2+24}{t}-10,$ 即 $y=\dfrac{-6t^2+120t-216}{t}-10=110-\left(6t+\dfrac{216}{t}\right),$ 因为 $6t+\dfrac{216}{t}\ge 2\sqrt{6t\times\dfrac{216}{t}}=72,$ 当且仅当 $6t=\dfrac{216}{t},$ 即 $t=6$ 时等号成立，所以当 $t=6$ 时，y 取得最大值 38, 当 $10\le t\le 20$ 时，$y=\dfrac{6\times60+24}{t}-10=\dfrac{384}{t}-10,$ 则当 $t=10$ 时，y 取得最大值 28.4, 综上，当发车时间间隔为 6 分钟时，该路公交车每分钟的净收益最大，最大净收益为 38 元.

例 5.（2019•益阳期末）某企业通过前期考察与论证可知，投资每个 A 项目第一年需资金 20 万元，从中可

获利 5 万元；投资每个 B 项目第一年需资金 30 万元，从中可获利 6 万元．现公司拟投资 A，B 两个项目共不多于 8 个且投入资金不超过 200 万元，需合理安排这两个项目的个数使第一年获利最多，则获利最多可达到(　　)

A．40 万元　　　　B．44 万元　　　　C．48 万元　　　　D．50 万元

解析：设投资 A 项目 x 个, 投资 B 项目 y 个, 由题意得 $\begin{cases} x+y\le 8 \\ 20x+30y\le 200 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ z=5x+6y \end{cases}$, 作出可行域如图 $9-1-1$ 所示, 四边形 $OABC$ 是满足条件的可行域, $O(0,0)$, $A(8,0)$, $C\left(0,\dfrac{20}{3}\right)$, 解方程组 $\begin{cases} x+y=8 \\ 20x+30y=200 \end{cases}$, 得

$x=4$, $y=4$, 所以

$B(4,4)$, $z_O=5\times 0+6\times 0=0, z_A=5\times 8+6\times 0=40, z_B=5\times 4+6\times 4=44$, $z_C=5\times 0+6\times\dfrac{20}{3}=40$ 所以获利最多可达到 44 万元, 故选 B.

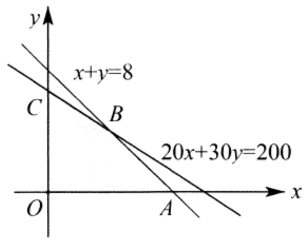


图 9-1-1

二．数列模型

等差等比的基本递推即可，需要结合不等式的基本知识．

例 6．（2019•淄博期末）为落实“精准扶贫”任务，某扶贫干部帮助帮扶贫困村筹集资金 16 万元，购进了一条配件加工生产线．已知该生产线每年收入 20 万元，第一年生产成本为 4 万元，从第二年起，每年生产成本比前一年增加 2 万元．若该生产线 $n(n\in N^*)$ 年后年平均利润达到最大值（利润 = 收入 − 生产成本 − 筹集资金），则 n 等于(　　)

A．3　　　　B．4　　　　C．5　　　　D．6

解析：设年平均利润达为 y, n 年的生产成本之和为 s, 止题意可知，生产成本是以 4 为首项，公差为 2 的等差数列，所以 $s=4n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+3n$, 所

$y=\dfrac{20n-s-16}{n}=\dfrac{20n-n^2-3n-16}{n}=\dfrac{-n^2+17n-16}{n}=$ $-n-\dfrac{16}{n}$

$+17=-\left(n+\frac{16}{n}\right)+17\le -2\sqrt{n\times\frac{16}{n}}+17=9$, 当且仅当 $n=\frac{16}{n}$, 即 $n=4$ 时, 取等号, 所以平均利润达到最大值时， $n=4$, 故选 B .

例 6.（2019•深圳期末）某企业 2018 年的纯利润为 500 万元，因设备老化等原因，企业的生产能力将逐年下降．若不能进行技术改造，预测从 2019 年起每年比上一年纯利润减少 20 万元，2019 年初该企业一次性投入资金 600 万元进行技术改造，预测在未扣除技术改造资金的情况下，第 n 年 (2019 年为第一年）的利润为 $500(1+\frac{1}{2^n})$ 万元 (n 为正整数).

（1）设从 2019 年起的前 n 年，若该企业不进行技术改造的累计纯利润为 A_n 万元，进行技术改造后的累计纯利润为 B_n 万元（须扣除技术改造资金），求 A_n、 B_n 的表达式；

（2）依上述预测，从 2019 年起该企业至少经过多少年，进行技术改造后的累计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润？

解析:（1）某企业 2018 年的纯利润为 500 万元，因设备老化等原因，企业的生产能力将逐年下降. 若不能进行技术改造，预测从 2019 年起每年比上一年纯利润减少 20 万元，2019 年初该企业一次性投入资金 600 万元进行技术改造，预测在未扣除技术改造资金的情况下，第 n 年（2019 年为第一年）的利润为 $500\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ 万元 $\left(n\right.$ 为正整数).

依题设 $A_n=(500-20)+(500-40)+\ldots+(500-20n)=490n-10n^2$, $B_n=500\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right]-600=500n-\frac{500}{2^n}-100$.

(2) 由题得

$B_n-A_n=\left(500n-\frac{500}{2^n}-100\right)-\left(490n-10n^2\right)=10n^2+10n-\frac{500}{2^n}-100=10\left[n(n+1)-\frac{50}{2^n}-10\right]$, 因为数列 $\left\{10\left(n(n+1)-\frac{50}{2^n}-10\right)\right\}$ 在上为递增数列，当 $1\le n\le 3$ 时， $n(n+1)-\frac{50}{2^n}-10\le 12-\frac{50}{8}-10<0$;

当 $n\ge 4$ 时, $n(n+1)-\frac{50}{2^n}-10\ge 20-\frac{50}{16}-10>0$, 因为仅当 $n\ge 4$ 时, $B_n>A_n$. 所以至少经过 4 年, 该企业进

行技术改造后的係计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润.

例 7.（2019•金牛区校级期中）某学生家长为缴纳该学生上大学时的教育费，于 2003 年 8 月 20 号从银行贷款 a 元，为还清这笔贷款，该家长从 2004 年起每年的 8 月 20 号便去银行偿还确定的金额，计划恰好在贷款的 m 年后还清，若银行按年利息为 p 的复利计息（复利：即将一年后的贷款利息也纳入本金计算新的利息），则该学生家长每年的偿还金额是(　　)

A. $\dfrac{a}{m}$　　　　B. $\dfrac{ap(1+p)^{m+1}}{(1+p)^{m+1}-1}$

C. $\dfrac{ap(1+p)^{m+1}}{p^m-1}$　　　　D. $\dfrac{ap(1+p)^m}{(1+p)^m-1}$

解析：设每年偿还的金额都是 x 元，则根据题意有 $a(1+p)^m=x+x(1+p)+x(1+p)^2+\cdots+x(1+p)^{m-1}$，所以 $a(1+p)^m=x\cdot\dfrac{1-(1+p)^m}{1-(1+p)}$，所以 $x=\dfrac{ap(1+p)^m}{(1+p)^m-1}$，故选 D．

例 8.（2019•黄浦区校级月考）“垛积术”（隙积术）是由北宋科学家沈括在《梦溪笔谈》中首创，南宋科学家杨辉、元代数学家朱世杰丰富和发展的一类数列求和方法，有菱草垛、方垛、三角垛等等，某仓库中部分货物堆放成“菱草垛”，自上而下，第一层 1 件，以后每一层比上一层多 1 件，最后一层是 n 件，已知第一层货物单价 1 万元，从第二层起，货物的单价是上一层单价的 $\dfrac{9}{10}$，若这堆货物总价是 $100-200(\dfrac{9}{10})^n$ 万元，则 n 的值为____

解析：由题意可得第 n 层的货物的价格为 $a_n=n\cdot\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-1}$，设这堆货物总价是

$$S_n=1\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^0+2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^1+3\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\ ①$$

由①$\times\dfrac{9}{10}$可傅，$\dfrac{9}{10}S_n=1\cdot\left(\dfrac{9}{10}\right)^1+2\cdot\left(\dfrac{9}{10}\right)^2+3\cdot\left(\dfrac{9}{10}\right)^3+\cdots+n\cdot\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$

①-②可得

$$\frac{1}{10}S_n=1+\left(\frac{9}{10}\right)^1+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\cdots+\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}-n\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^n}{1-\frac{9}{10}}-n\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n=10-(10+n)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n$$

所以 $S_n=100-10(10+n)\cdot\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$，因为这堆货物惑价是 $100-200\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ 万元，所以 $n=10$．故答案为 10.

例 9.（2019•荆门期末）甲、乙两大超市同时开业，第一年的全年销售额为 a 万元，由于经营方式不同，甲超市前 n 年的总销售额为 $\frac{a}{2}(n^2-n+2)$ 万元，乙超市第 n 年的销售额比前一年销售额多 $a(\frac{2}{3})^{n-1}$ 万元.

（Ⅰ）求甲、乙两超市第 n 年销售额的表达式；

（Ⅱ）若其中某一超市的年销售额不足另一超市的年销售额的 50%，则该超市将被另一超市收购，判断哪一超市有可能被收购？如果有这种情况，将会出现在第几年？

解析：假设甲超市前 n 年式销售额为 S_n，第 n 年销售额为 a_n 则 $S_n=\frac{a}{2}\left(n^2-n+2\right)(n\geq 2)$，因为 $n=1$ 时，$a_1=a$，则 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{a}{2}\left(n^2-n+2\right)-\frac{a}{2}\left[(n-1)^2-(n-1)+2\right]=a(n-1)$，故 $a_n=\begin{cases}a\cdot n=1\\(n-1)a,n\geq 2\end{cases}$ 设乙超市第 n 年销售领为 b_n，又 $b_1=a$，$n\geq 2$ 时，$b_n-b_{n-1}=a\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，故 $b_n=b_1+\left(b_2-b_1\right)+\left(b_3-b_2\right)+\cdots+\left(b_n-b_{n-1}\right)=\left[3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]a$. 显然 $n=1$ 也适合，故 $b_n=\left[3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]a\left(n\in N^*\right)$

(2) 当 $n=2$ 时，$a_2=a,b_2=\frac{5}{3}a$，有 $a_2>\frac{1}{2}b_2$；当 $n=3$ 时，$a_3=2a,b_3=\frac{19}{9}a$，有 $a_3>\frac{1}{2}b_3$；当 $n\geq 4$ 时，$a_n\geq 3a$，$\sqrt{m}b_n<3a$，故乙超市有可能被收购. 当 $n\geq 4$ 时，令 $\frac{1}{2}a_n>b_n$，则 $\frac{1}{2}(n-1)a>\left[3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]a$，所以 $n-1>6-4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，即 $n>7-4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. 又当 $n\geq 7$ 时，$0<4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}<1$，故当 $n\in N^*$ 且 $n\geq 7$ 时，必有 $n>7-4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. 即第 7 年乙超市的年销售额不足甲超市的一半，乙超市将被甲超市收购.

例 10.（2019•南阳期末）已知函数 $f(x)=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots-\frac{x^{2018}}{2018}+\frac{x^{2019}}{2019}$，若函数 $f(x)$ 的零点均在区间 $[a，b](a<b，a，b\in Z)$ 内，则 $b-a$ 的最小值是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解析：若函数 $f(x)$ 的零点均在区间 $[a,b]$（$a<b,a,b\in Z$）内，则 $b-a$ 的值可能是 1，2，3... 函数 $f'(x)=1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{2017}+x^{2018}=\frac{1\times\left[1-(-x)^{2019}\right]}{1-(-x)}=\frac{1+x^{2019}}{1+x}$，当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，又因为 $f(0)=1>0,f(-1)=1-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}<0$，所以函数 $f(x)$ 在

[-1,0]上有唯一零点,所以$b-a$的最小值是 1，故选 A.

达标训练（适合高一）

1.（2019•丹东期末）一种商品售价上涨2%后，又下降了2%，那么这种商品的最终售价y与原来的售价x之间的函数关系为(　　)

A．$y=0.96x$　　B．$y=0.98x$　　C．$y=0.9996x$　　D．$y=x$

2.（2020•绵阳模拟）某数学小组进行社会实践调查，了解到鑫鑫桶装水经营部在为定价发愁．进一步调研了解到如下信息；该经营部每天的房租，人工工资等固定成本为 200 元，每桶水的进价是 5 元，销售单价与日均销售量的关系如表：

销售单价 / 元	6	7	8	9	10	11	12
日均销售量 / 桶	480	440	400	360	320	280	240

根据以上信息，你认为该经营部的定价为多少才能获得最大利润？(　　)

A．每桶 8.5 元　　B．每桶 9.5 元　　C．每桶 10.5 元　　D．每桶 11.5 元

3.（2019•泸州月考）股票价格上涨10%称为“涨停”，下跌10%称为“跌停”．某位股民购进某只股票，在接下来的交易时间内，这只股票先经历了 2 次涨停，又经历了 2 次跌停，则该股民这只股票的盈亏情况（不考虑其他费用）为(　　)

A．略有盈利　　B．略有亏损

C．没有盈利也没有亏损　　D．无法判断盈亏情况

4.（2019•河北月考）建设“学习强国”学习平台是贯彻落实习近平总书记关于加强学习、建设学习大国重要指示精神、推动全党大学习的有力抓手．某人近来加强学习，9 月份的得分为A，10 月份的得分增长率为$p(p>0)$，11 月份的得分增长率为$q(q>0)$，这两个月的得分的平均增长率为x，增长率均以相邻的前一个月为参照，则(　　)

A．$x=\dfrac{p+q}{2}$　　B．$x\leqslant\dfrac{p+q}{2}$　　C．$x>\dfrac{p+q}{2}$　　D．$x\geqslant\dfrac{p+q}{2}$

5.（2019•临沂期中）二十四节气是中国古代的一种指导农事的补充历法，是我国劳动人民长期经验的积累成果和智慧的结晶，被誉为“中国的第五大发明”．由于二十四节气对古时候农事的进行起着非常重要的指导作用，所以劳动人民编写了很多记忆节气的歌谣：春雨惊春清谷天，夏满芒夏暑相连，秋处露秋寒霜降，冬雪雪冬小大寒．《易经》里对二十四节气的晷影长的记录中，冬至和夏至的晷影长是实测得到的，其他节气的晷影是按照等差数列的规律计算出来的，在下表中，冬至的晷影最长为 130.0 寸，夏至的晷影最短为 14.8 寸，那么《易经》中所记录的清明的晷影长应为(　　)

节气	冬至	小寒（大雪）	大寒（小雪）	立春（立冬）	雨水（霜降）	惊蛰（寒露）	春分（秋分）	清明（白露）	谷雨（处暑）	立夏（立秋）	小满（大暑）	芒种（小暑）	夏至
晷影长度	130.0	……	……	……	……	……	……	?	……	……	……	……	14.8

A．77.2 寸　　B．72.4 寸　　C．67.3 寸　　D．62.8 寸

6．(2019•汉中月考) A_4 纸是生活中最常用的纸规格．A 系列的纸张规格特色在于：① A_0、A_1、A_2…、A_5，所有尺寸的纸张长宽比都相同．②在 A 系列纸中，前一个序号的纸张以两条长边中点连线为折线对折裁剪分开后，可以得到两张后面序号大小的纸，比如 1 张 $A0$ 纸对裁后可以得到 2 张 $A1$ 纸，1 张 $A1$ 纸对裁可以得到 2 张 $A2$ 纸，依此类推．这是因为 A 系列纸张的长宽比为 $\sqrt{2}:1$ 这一特殊比例，所以具备这种特性．已知 $A0$ 纸规格为 84.1 厘米 $\times 118.9$ 厘米 $.118.9 \div 84.1 \approx 1.41 \approx \sqrt{2}$，那么 $A4$ 纸的长度为(　　)

A．14.8 厘米　　B．21.0 厘米　　C．29.7 厘米　　D．42.0 厘米

7．(2019•新疆模拟)《九章算术》中有如下问题："今有竹九节，下三节容量四升，上四节容量三升．问中间二节欲均容，各多少？"其大意："今有竹 9 节，下 3 节容量 4 升，上 4 节容量 3 升，问使中间两节也均匀变化，每节容量是多少？"在这个问题中，中间这两节的容量是(　　)

A．$1\frac{15}{66}$ 升和 $1\frac{8}{66}$ 升　　B．$1\frac{8}{66}$ 升和 $1\frac{1}{66}$ 升

C．$1\frac{1}{66}$ 升和 $\frac{60}{66}$ 升　　D．$\frac{60}{66}$ 升和 $\frac{53}{66}$ 升

8．(2019•全国 I 卷模拟) 如图 1 是某条公共汽车线路收支差额 y 与乘客量 x 的图象．由于目前本条线路亏损，公司有关人员提出了两种扭亏为盈的建议，如图 2、3 所示．你能根据图象判断下列说法错误的是(　　)

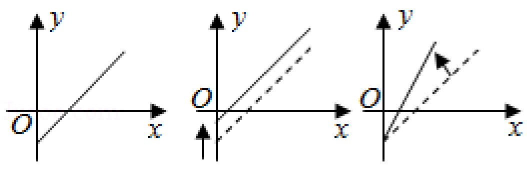


图1　　图2　　图3

①图 2 的建议为减少运营成本②图 2 的建议可能是提高票价

③图 3 的建议为减少运营成本④图 3 的建议可能是提高票价

A．①④　　B．②④　　C．①③　　D．②③

9．(2020•资阳模拟) 某企业在"精准扶贫"行动中，决定帮助一贫困山区将水果运出销售．现有 8 辆甲型

车和 4 辆乙型车，甲型车每次最多能运 6 吨且每天能运 4 次，乙型车每次最多能运 10 吨且每天能运 3 次，甲型车每天费用 320 元，乙型车每天费用 504 元．若需要一天内把 180 吨水果运输到火车站，则通过合理调配车辆，运送这批水果的费用最少为(　　)

A．2400 元　　　B．2560 元　　　C．2816 元　　　D．4576 元

10．（2019•眉山期末）某企业生产甲、乙两种产品均需要 A，B 两种原料，已知生产 1 吨每种产品所需原料及每天原料的可用限额如表所示．如果生产 1 吨甲、乙产品可获得利润分别为 3 万元、4 万元，则该企业每天可获得最大利润为(　　)

	甲	乙	原料限额
A（吨）	3	2	10
B（吨）	1	2	6

A．10 万元　　　B．12 万元　　　C．13 万元　　　D．14 万元

11．（2018•荆门期末）复利是一种计算利息的方法．即把前一期的利息和本金加在一起算作本金，再计算下一期的利息．某同学有压岁钱 1000 元，存入银行，年利率为 2.25%；若放入微信零钱通或者支付宝的余额宝，年利率可达 4.01%．如果将这 1000 元选择合适方式存满 5 年，可以多获利息(　　)元．

（参考数据：$1.0225^4=1.093$，1，$0225^5=1.170$，$1.0401^5=1.217)$(　　)

A．176　　　B．104.5.　　　C．77　　　D．88

12．（2019•潍坊三模）中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题："三百七十八里关，初行健步不为难，次日脚痛减一半，六朝才得到其关，要见次日行里数，请公仔细算相还．"其大意为："有一个人走了 378 里路，第一天健步行走，从第二天起因脚痛每天走的路程为前一天的一半，走了 6 天后到达目的地．"问此人第 4 天和第 5 天共走了(　　)

A．60 里　　　B．48 里　　　C．36 里　　　D．24 里

13．（2019 秋•南阳期中）某小贩卖若干个柑桔．若小贩以所有柑桔的一半又半个卖给第一人；以其剩余的一半又半个卖给第二人；同样的方法，卖给其余的顾客，当第七个人来买时，小贩已经卖完了，则小贩的柑桔一共有____个．

14．（2019•宁德期末）在国庆期间，某商场进行优惠大酬宾活动，在活动期间，商场内所有商品按标价的80%出售；同时，当顾客在该商场内消费满一定金额(x 元）后，还可按如下方案获得相应金额(y 元）的奖券：

$$y=\begin{cases}20,100\leqslant x<300,\\30,300\leqslant x<400,\\50,400\leqslant x<600,\\80,600\leqslant x<800,\\\cdots\end{cases}$$

根据上述优惠方案，顾客在该商场购物可以获得双重优惠例如，购买标价为 300 元的商品，则消费金额为 240 元，获得的优惠额为：$300\times0.2+20=80$（元）．设购买商品得到的优惠率$=\dfrac{购买商品获得的优惠额}{商品的标价}$，试问：

（1）购买一件标价为 800 元的商品，顾客得到的优惠率是多少？

（2）对于标价在$[400，700]$（元）内的商品，要使顾客购买某商品获得30%的优惠率，则该商品的标价是多少？

15.（2019•泰安期末）某企业开发生产了一种大型电子产品，生产这种产品的年固定成本为 2500 万元，每生产 x 百件，需另投入成本 $c(x)$（单位：万元），当年产量不足 30 百件时，$c(x)=10x^2+100x$；当年产量不小于 30 百件时，$c(x)=501x+\dfrac{10000}{x}-4500$；若每件电子产品的售价为 5 万元，通过市场分析，该企业生产的电子产品能全部销售完．

（1）求年利润 y（万元）关于年产量 x（百件）的函数关系式；

（2）年产量为多少百件时，该企业在这一电子产品的生产中获利最大？

16.（2019•宁阳县校级月考）（1）一家商店使用一架两臂不等长的天平称黄金．一位顾客到店里购买 10 克黄金，售货员先将 5 克的砝码放在天平左盘中，取出一些黄金放在天平右盘使天平平衡；再将 5 克砝码放在天平的右盘中，再取出一些黄金放在天平左盘中使天平平衡；最后将两次称得的黄金交给顾客．你认为顾客购买得的黄金是小于 10 克，等于 10 克，还是大于 10 克？为什么？

（2）两次购买同一种物品，可以用两种不同的策略，第一种是不考虑物品价格的升降，每次购买这种物品的数量一定；第二种是不考虑物品价格的升降，每次购买这种物品所花的钱数一定．哪种购物方式比较经济？能把所得结论作一些推广吗？

17.（2019•湖北期末）打赢扶贫攻坚战，到 2020 年全面建成小康社会，是中国共产党向全世界和全国人民的承诺．一贫困户在政府扶持下结合地方特色联合当地几户贫困户创办一家农产品公司．为了振兴乡村，打好扶贫攻坚战，某市党政府开展了地标特产展销会．该公司拟定在 2020 年元旦展销期间举行产品促销活动，经测算该产品的年销量 t 万件（生产量与销量相等）与促销费用 x 万元满足 $t=4-\dfrac{4}{x+2}$．已知 2020 年生产该产品还需投入成本 $4+t$ 万元（不含促销费），促销费 x 满足当 $0\leqslant x\leqslant 1$，产品销量价格定为 5 元/件，当 $x>1$ 产品销量价格定为 $5+\dfrac{a}{t}$ 元/件（其中 a 为正常数）．

（1）试将 2020 年该产品的利润 y 万元表示为促销费费 x 万元的函数；

（2）2020 年该公司促销费投入多少万元时，公司利润最大？

第二讲指数对数函数问题

源于等比数列，源于题目给予．

例 11.（2019•南京期末）安装了某种特殊装置的容器内有细沙 $10cm^3$，容器倒置后，细沙从容器内流出，$tmin$ 后容器内剩余的细沙量为 $y=10^{1+at}$（单位：cm^3），其中 a 为常数．经过 $4min$ 后发现容器内还剩余 $5cm^3$ 的沙子，再经过 $xmin$ 后，容器中的沙子剩余量为 $1.25cm^3$，则 $x=($　　$)$

A．4　　B．6　　C．8　　D．12

解析：安装了某种特殊装置的容器内有细沙 10 cm^3，容器倒置后，细沙从容器内流出，t min 后容器内利余的细沙量为 $y=10^{1+at}$（单位：cm^3），其中 a 为常数．经过 4 min 后发现容器内还利余 5 cm^3 的沙子，所以 $10^{1+4a}=5$，所以 $1+4a=\lg 5=1-\lg 2$，所以 $a=-\dfrac{\lg 2}{4}$，所以 $y=10^{1-\frac{\lg 2}{4}t}$，由 $10^{1-\frac{\lg 2}{4}t}=1.25=\dfrac{5}{4}$，得 $1-\dfrac{\lg 2}{4}t=\lg\dfrac{5}{4}=1-3\lg 2$，解得 $t=12$，因为再经过 x min 后，容器中的沙子剩余量为 12.5 cm^3，所以 $x=12-4=8$，故选 C．

例 12.（2019•惠州期末）有关数据显示，2015 年我国快递行业产生的包装垃圾约为 400 万吨．有专家预测，如果不采取措施，快递行业产生的包装垃圾年平均增长率将达到 50%．由此可知，如果不采取有效措施，则从(　　)年开始，快递行业产生的包装垃圾超过 4000 万吨．（参考数据：$lg2\approx 0.3010$，$lg3\approx 0.4771$）

A．2018　　B．2019　　C．2020　　D．2021

解析：设包装垃圾为 y 万吨，n 表示从 2015 年开始增加的年份数，由题意可得 $y=400\times(1+50\%)^n=400\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$，由 $400\times\left(\frac{3}{2}\right)^n>4000$，得 $\left(\frac{3}{2}\right)^n>10$，两边取对数可得 $n(\lg 3-\lg 2)>1$，所以 $n(0.4771-0.3010)>1$，得 $0.176n>1$，解得 $n>5.682$，所以从 $2015+6=2021$ 年开始，快递行业产生的包装垃圾超过 4000 万吨，故选 D.

例 13.（2020•合肥一模）射线测厚技术原理公式为 $I=I_0e^{-\rho\mu t}$，其中 I_0，I 分别为射线穿过被测物前后的强度，e 是自然对数的底数，t 为被测物厚度，ρ 为被测物的密度，μ 是被测物对射线的吸收系数．工业上通常用镅 $241({}^{241}Am)$ 低能 γ 射线测量钢板的厚度．若这种射线对钢板的半价层厚度为 0.8，钢的密度为 7.6，则这种射线的吸收系数为(　　)

（注：半价层厚度是指将已知射线强度减弱为一半的某种物质厚度，$ln2\approx 0.6931$，结果精确到 0.001)

A．0.110　　B．0.112　　C．0.114　　D．0.116

解析：由题意可得，$\frac{1}{2}=1\times e^{-7.6\times 0.8\mu}$，所以 $-\ln 2=-7.6\times 0.8\mu$，即 $6.08\mu\approx 0.6931$，则 $\mu\approx 0.114$．所以这种射线的吸收系数为 0.114，故选 C．

达标训练（适合高一）

18．（2020•曲靖一模）设光线通过一块玻璃，强度损失 10%、如果光线原来的强度为 $k(k>0)$，通过 x 块这样的玻璃以后强度为 y，则 $y=k\bullet 0.9^x(x\in N^*)$，那么光线强度减弱到原来的 $\frac{1}{4}$ 以下时，至少通过这样的玻璃块数为(　　)（参考数据：$1g2\approx 0.3011g3\approx 0.477$)

A．12　　B．13　　C．14　　D．15

19．（2019•佛山期末）某种物质在时刻 $tmin$ 的浓度 Mmg/L 与 t 的函数关系为 $M(t)=ar^t+24(a$，r 为常数)．在 $t=0min$ 和 $t=1min$ 测得该物质的浓度分别为 $124mg/L$ 和 $64mg/L$，那么在 $t=4min$ 时，该物质的浓度为__ mg/L；若该物质的浓度小于 $24.001mg/L$，则整数 t 的最小值为____．（参考数据：$lg2\approx 0.3010$)

20．（2019•青岛期末）l5.2019 年 7 月，中国良渚古城遗址获准列入世界遗产名录，标志着中华五千年文明史得到国际社会认可．良渚古城遗址是人类早期城市文明的范例，实证了中华五千年文明史．考古科学家在测定遗址年龄的过程中利用了“放射性物质因衰变而减少”这一规律．已知样本中碳 14 的质量 N 随时间 t（单位：年）的衰变规律满足 $N=N_0\bullet 2^{\frac{-T}{5730}}(N_0$ 表示碳 14 原有的质量)，则经过 5730 年后，碳 14 的质量变为原来的____；经过测定，良渚古城遗址文物样本中碳 14 的质量是原来的 $\frac{3}{7}$ 至 $\frac{1}{2}$，据此推测良渚古城存在

的时期距今约在 5730 年到____年之间．（参考数据：$lg2 \approx 0.3$，$lg7 \approx 0.84$，$lg3 \approx 0.48$)

20. （2020•江苏一模）尽管目前人类还无法准确预报地震，但科学家通过研究，已经对地震有所了解，例如．地震时释放出的能量 E（单位：焦耳）与地震里氏震级 M 之间的关系为 $lgE = 4.8 + 1.5M$.2008 年 5 月汶川发生里氏 8.0 级地震，它释放出来的能量是 2019 年 6 月四川长宁发生里氏 6.0 级地震释放出来能量的____倍．

21．（2019•扬州期末）已知物体初始温度是 T_0，经过 t 分钟后物体温度是 T，且满足 $T = T_\alpha + (T_0 - T_\alpha) \bullet 2^{-kt}$，$(T_\alpha$ 为室温，k 是正常数)．某浴场热水是由附近发电厂供应，已知从发电厂出来的 $90^\circ C$ 的热水，在 $10^\circ C$ 室温下，温度降到 $50^\circ C$ 需要 30 分钟，那么降温到 $20^\circ C$ 时，需要____分钟．

解：由题意，初始温度 $T_0 = 90^\circ C$，室温 $T_\alpha = 10^\circ C$，代入公式，可得 $T = 10 + (90 - 10) \bullet 2^{-kt} = 10 + 80 \bullet 2^{-kt}$，

第三讲函数选取拟合问题

例 14.（2019•惠州期末）惠州市某学校物理兴趣小组在实验测试中收集到一组数据如表所示：

t	1.99	3.0	4.0	5.1	6.12
v	1.5	4.04	7.5	12	18.01

用下列函数中的一个近似地表示这些数据满足的规律，其中最接近的一个是(　　)

A．$v = \log_2 t$　　B．$v = \log_{\frac{1}{2}} t$　　C．$v = \dfrac{t^2 - 1}{2}$　　D．$v = 2t - 2$

=

解析：法一由表可知，v 是关于 t 的增函数：且增幅随 t 的增大而增大，故只有 C 满足要求. 故选 C.

法二作出散点图，如图 9-3-1 所示：

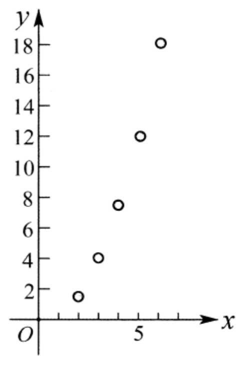


图 9-3-1

由函数拟合可知只有 C 满足要求，故选 C.

法三由表可知 v 是关于 t 的增函数, 故 B 不适合; 对于 $A:\log_2 1.99\approx 2,\quad \log 23\approx 0.3,\quad \log_2 4=2$, 故 A 不接近; 对于 $C:\dfrac{1.99^2-1}{2}\approx 1.5,\dfrac{3^2-1}{2}=4,\dfrac{4^2-1}{2}=7.5,\dfrac{5.1^2-1}{2}\approx 12.5,\dfrac{6.12^2-1}{2}\approx 18.2$, 故 C 接近; 对于 $D:2\times 1.99-2=1.98,\quad 2\times 3-2=4,\quad 2\times 4-2=6,\quad 2\times 5.1-2=8.2,\quad 2\times 6.12-2=10.24$, 故 D 不接近，故选 C.

例 15.（2019•安徽月考）安徽怀远石榴 (*Punicagranatum*) 自古就有“九州之奇树，天下之名果”的美称，今年又喜获丰收．怀远一中数学兴趣小组进行社会调查，了解到某石榴合作社为了实现 100 万元利润目标，准备制定激励销售人员的奖励方案：在销售利润超过 6 万元时，按销售利润进行奖励，且奖金 y（单位：万元）随销售利润 x（单位：万元）的增加而增加，但奖金总数不超过 3 万元，同时奖金不能超过利润的 20%．同学们利用函数知识，设计了如下函数模型，其中符合合作社要求的是（参考数据：$1.015^{100}\approx 4.432$，$lg11\approx 1.041$)(　　)

A．$y=0.04x$　　　　B．$y=1.015^x-1$

C．$y=\tan(\dfrac{x}{19}-1)$　　　　D．$y=\log_{11}(3x-10)$

解析：在 A 中, 当 $x=100$ 时，$y=0.04\times 100=4$（万元), 奖金总数超过 3 万元，不合题意，故 A 错误；在 B 中，当 $x=100$ 时，$y=1.105^{100}-1=3.432$（万元），奖金总数超过 3 万元，不合题意，故 B 错误；在 C

中，$y=\tan\left(\dfrac{x}{19}-1\right)$ 的单调增区间是 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$k\in Z$, 所以在 $x\in[6,100]$ 时，不能保证奖金 y（单位：万元）随销售利润 x（单位：万元）的增加而增加，故 C 错误；在 D 中，当 $x\in[6,100]$ 时，$y=\log_{11}(3x-10)$

增函数，且当 $x=100$ 时，$y=\log_{11}290<\log_{11}11^3$, 故 D 正确，故选 D.

例 16.（2019•聊城期末）1766 年；人类已经发现的太阳系中的行星有金星、地球、火星、木星和土星．德国的一位中学教师戴维一提丢斯在研究了各行星离太阳的距离（单位：AU，AU 是天文学中计量天体之间距离的一种单位）的排列规律后，预测在火星和木星之间应该还有一颗未被发现的行星存在，并按离太阳的距离从小到大列出了如表所示的数据：

行星编号 (x)	1（金星）	2（地球）	3（火星）	4(__谷神星)	5（木星）	6（土星）

离太阳的距离 (y)	0.7	1.0	1.6		5.2	10.0

受他的启发，意大利天文学家皮亚齐于 1801 年终于发现了位于火星和木星之间的谷神星.

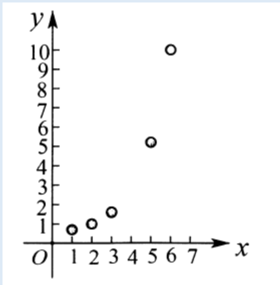
（1）为了描述行星离太阳的距离 y 与行星编号之间的关系，根据表中已有的数据画出散点图，并根据散点图的分布状况，从以下三种模型中选出你认为最符合实际的一种函数模型（直接给出结论即可）；

① $y=ax+b$；② $y=a\bullet b^x+c(b>1)$；③ $y=a\bullet\log_b x+c(b>1)$.

（2）根据你的选择，依表中前几组数据求出函数解析式，并用剩下的数据检验模型的吻合情况；

（3）请用你求得的模型，计算谷神星离太阳的距离.

解析：（1）画出散,点图如图所示:



根据散,点图的分布状况，选函数模型:(2) $y=a\cdot b^x+c(b>1)$,最符合实际;

（2）因为 $y=a\cdot b^x+c(b>1)$,带入数据 $(1,0.7),(2,1),(3,1.6)$，得 $\begin{cases}a\cdot b+c=0.7\\a\cdot b^2+c=1\\a\cdot b^3+c=1.6\end{cases}$ ，解得 $\begin{cases}a=\dfrac{3}{20}\\b=2\\c=\dfrac{2}{5}\end{cases}$.

所以函数解析式为 $y=\dfrac{3}{20}\times2^x+\dfrac{2}{5}$, 当 $x=5$ 时, $y=5.2$: 当 $x=6$ 时, $y=10$，刚好符合:

(3)因为函数解析式为 $y=\dfrac{3}{20}\times2^x+\dfrac{2}{5}$,所以当 $x=4$ 时, $y=2.8$，所以谷神星离太阳的距离为 2.8 天文单位.

例 17.（2019•公安县期末）某地区今年 1 月，2 月，3 月患某种传染病的人数分别为 42，48，52．为了预测以后各月的患病人数，甲选择了模型 $y=ax^2+bx+c$，乙选择了模型 $y=pq^x+r$，其中 y 为患病人数，x 为月份数，a，b，c，p，q，r 都是常数．结果 4 月，5 月，6 月份的患病人数分别为 54，57，58．

（1）求 a，b，c，p，q，r 的值；

（2）你认为谁选择的模型好．

解析：(1)由甲模型令 $y=f(x)=ax^2+bx+c$,可得 $a+b+c=42$, $4a+2b+c=48$, $9a+3b+c=52$,

解得 $a=-1,b=9,c=34$. 由乙模型设 $y=g(x)=p\cdot q^{x}+r$, 可得: $g(1)=pq+r=42, g(2)=pq^{2}+r=48$, $g(3)=pq^{3}+r=52$, 解得 $p=-27,\quad q=\dfrac{2}{3},\quad r=60$.

(2) 由 (1) 可得 $f(x)=-x^{2}+9x+34$, 所以 $f(4)=-4^{2}+9\times4+34=54,\quad f(5)=-5^{2}+9\times5+34=54<57$,

$f(6)=-6^{2}+9\times6+34=52<58$: 由乙模型可得 $g(x)=-27\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}+60$, 因为 $g(4)=54+\dfrac{2}{3}\approx54,\quad g(5)=56+\dfrac{4}{9}$, $g(6)=57+\dfrac{17}{27}\approx57$. 可得 $g(4),g(5)$, $g(6)$ 比 $f(4),f(5),f(6)$ 更接近真实值.

达标训练（适合高一）

22.（2019•仓山区校级期末）有一组实验数据如表所示：

x	2.01	3	4.01	5.1	6.12
y	3	8.01	15	23.8	36.04

则最能体现这组数据关系的函数模型是(　　)

A. $y=2^{x+1}-1$　　B. $y=x^{2}-1$　　C. $y=2\log_{2}x$　　D. $y=x^{3}$

23.（2019•东城区期末）将初始温度为 $0^{\circ}C$ 的物体放在室温恒定为 $30^{\circ}C$ 的实验室里，现等时间间隔测量物体温度，将第 n 次测量得到的物体温度记为 t_{n}，已知 $t_{1}=0^{\circ}C$．已知物体温度的变化与实验室和物体温度差成正比（比例系数为 k)．给出以下几个模型，那么能够描述这些测量数据的一个合理模型为____；（填写模型对应的序号）

①$t_{n+1}-t_{n}=\dfrac{k}{t_{n}-30}$；②$t_{n+1}-t_{n}==k(30-t_{n})$；③$t_{n+1}=k(30-t_{n})$．

在上述模型下，设物体温度从 $5^{\circ}C$ 上升到 $10^{\circ}C$ 所需时间为 $amin$，从 $10^{\circ}C$ 上升到 $15^{\circ}C$ 所需时间为 $bmin$，从 $15^{\circ}C$ 上升到 $20^{\circ}C$ 所需时间为 $Cmin$，那么 $\dfrac{a}{c}$ 与 $\dfrac{b}{c}$ 的大小关系是____．（用“$>$”，“$=$”或“$<$”号填空）

24.（2019•吉林期末）某工厂生产一种产品，根据预测可知，该产品的产量平稳增长，记 2015 年为第 1 年，第 x 年与年产量 $f(x)$（万件）之间的关系如表所示：

x	1	2	3	4
$f(x)$	4.00	5.52	7.00	8.49

现有三种函数模型：$f(x)=ax+b$，$f(x)=a\times2^{x}+b$，$f(x)=\log_{0.5}x+a$

（1）找出你认为最适合的函数模型，并说明理由，然后选取 $x=1$，3 这两年的数据求出相应的函数解析式；

（2）因受市场环境的影响，2020 年的年产量估计要比预计减少 30%，试根据所建立的函数模型，估计 2020 年的年产量．

25．（2019•淄博期末）汽车“定速巡航”技术是用于控制汽车的定速行驶，当汽车被设定为定速巡航状态时，电脑根据道路状况和汽车的行驶阻力自动控制供油量，使汽车始终保持在所设定的车速行驶，而无需司机操纵油门，从而减轻疲劳，促进安全，节省燃料．某汽车公司为测量某型号汽车定速巡航状态下的油耗情况，选择一段长度为 $240km$ 的平坦高速路段进行测试．经多次测试得到一辆汽车每小时耗油量 F（单位：L) 与速度 v（单位：$km/h)(0\leqslant v\leqslant 120)$ 的下列数据：

v	0	40	60	80	120
F	0	$\frac{20}{3}$	$\frac{65}{8}$	10	20

为了描述汽车每小时耗油量与速度的关系，现有以下三种函数模型供选择：$F(v)=av^3+bv^2+cv$，$F(v)=(\frac{1}{2})^v+a$，$F(v)=k\log_a v+b$．

（1）请选出你认为最符合实际的函数模型，并求出相应的函数解析式．

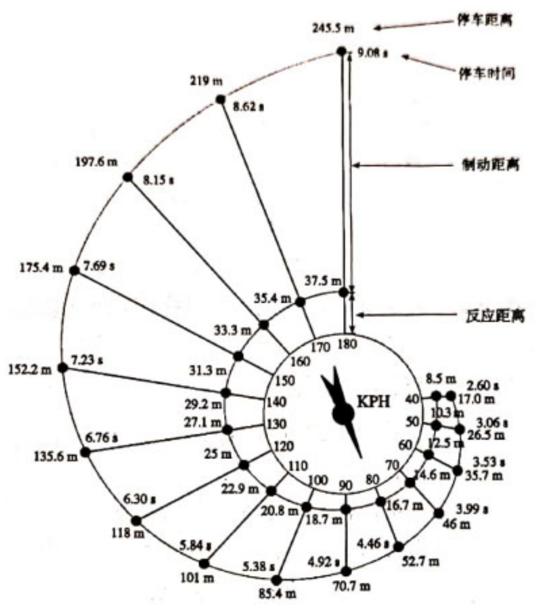
（2）这辆车在该测试路段上以什么速度行驶才能使总耗油量最少？

26．（2019•烟台期末）科技创新在经济发展中的作用日益凸显．某科技公司为实现 9000 万元的投资收益目标，准备制定一个激励研发人员的奖励方案：当投资收益达到 3000 万元时，按投资收益进行奖励，要求奖金 y（单位：万元）随投资收益 x（单位：万元）的增加而增加，奖金总数不低于 100 万元，且奖金总数不超过投资收益的 20%．

（1）现有三个奖励函数模型：① $f(x)=0.03x+8$，② $f(x)=0.8^x+200$，③ $f(x)=100\log_{20}x+50$，$x\in[3000$，$9000]$．试分析这三个函数模型是否符合公司要求？

（2）根据（1）中符合公司要求的函数模型，要使奖金额达到 350 万元，公司的投资收益至少要达到多少万元？

27．（2019•佛山期末）汽车急刹车的停车距离与诸多因素有关，其中最为关键的两个因素是驾驶员的反应时间和汽车行驶的速度．设 d 表示停车距离，d_1 表示反应距离，d_2 表示制动距离，则 $d=d_1+d_2$．如图是根据美国公路局公布的试验数据制作的停车距离示意图．、



（1）根据上述示意图，完成表格并画出散点图；

序号	速度 (km/h)	停车距离 (m)
1	40	
2	50	
3	60	
4	70	
5	80	
6	90	
7	100	
8	110	

（2）根据表格中的数据，建立停车距离与汽车速度的函数模型．可选择模型一：$d=av+b$ 或模型二：$d=av^2+bv$（其中 v 为汽车速度，a，b 为待定系数）进行拟合，请根据序号 2 和序号 7 两组数据分别求出两个函数模型的解析式；

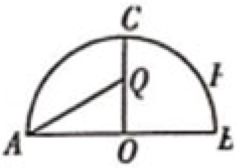
（3）通过计算 $v=180km/h$ 时的停车距离，分析选择哪一个函数模型的拟合效果更好．

（参考数据：$324\times648=209952$；$18\times1178=21204$；$18\times206=3708$．）

第四讲三角函数与几何问题

例 18.（2019•天心区校级月考）如图，某景区内有一圆形花圃，其直径 AB 为 6，O 为圆心，且 $OC\perp AB$，在 OC 有一座观赏亭 Q，其中 $\angle AQC=\dfrac{2\pi}{3}$，计划在圆弧 $\widehat{BC}$ 再建一座观赏亭 P，记 $\angle POB=\theta$ $(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$，

当$\angle OPQ$越大时，游客在观赏亭P处的观赏效果越佳，则观赏效果最佳时，$\sin\theta=($　　$)$



A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

解析：设$\angle OPQ=\alpha$, 在$\triangle OPQ$中，$OP=3, \angle POQ=\frac{\pi}{2}-\theta$, 由正弦定理得$\frac{OQ}{\sin\angle OPQ}=\frac{OP}{\sin\angle OQP}$, 即$\frac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}=\frac{3}{\sin\left(\pi-\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)}$, 所以$\sqrt{3}\sin\alpha=\sin\left(\pi-\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\theta)\right)=\cos(\alpha-\theta)=\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta$, 从而$(\sqrt{3}-\sin\theta)\sin\alpha=\cos\alpha\cos\theta$, 其中$\sqrt{3}-\sin\theta\neq 0$, $\cos\alpha\neq 0$, 所以$\tan\alpha=\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}-\sin\theta}$, 法一记$f(\theta)=\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}-\sin\theta}$, 则$f'(\theta)=\frac{1-\sqrt{3}\sin\theta}{(\sqrt{3}-\sin\theta)^2}$, $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 令$f'(\theta)=0$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 存在唯一$\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$使得$\sin\theta_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 当$\theta\in(0,\theta_0)$时$f'(\theta)>0$, $f(\theta)$单调增，当$\theta\in\left(\theta_0,\frac{\pi}{2}\right)$时$f'(\theta)<0$, $f(\theta)$单调递减, 所以当$\theta=\theta_0$时，$f(\theta)$最大，即$\tan\angle OPQ$最大, $\angle OPQ$为锐角，从而$\angle OPQ$最大，此时$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故观赏数果达到最佳时, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故选A.

法二由题$\tan\alpha=\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}-\sin\theta}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}-\sin\theta}{\cos\theta}}$, $\frac{\sqrt{3}-\sin\theta}{\cos\theta}$即表示过点$(0,\sqrt{3})$的直线与第一象限的单位图一定有交点, 如图9-4-1所示，根据几何知识求得$\frac{\sqrt{3}-\sin\theta}{-\cos\theta}\leq-\sqrt{3}$, 直线和图相切时$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故选A.

例19.（2019•新课标Ⅱ）2019年1月3日嫦娥四号探测器成功实现人类历史上首次月球背面软着陆，我国航天事业取得又一重大成就．实现月球背面软着陆需要解决的一个关键技术问题是地面与探测器的通讯联系．为解决这个问题，发射了嫦娥四号中继星“鹊桥”，鹊桥沿着围绕地月拉格朗日L_2点的轨道运行．L_2点是平衡点，位于地月连线的延长线上．设地球质量为M_1，月球质量为M_2，地月距离为R，L_2点到月球的

距离为r，根据牛顿运动定律和万有引力定律，r满足方程：$\dfrac{M_1}{(R+r)^2}+\dfrac{M_2}{r^2}=(R+r)\dfrac{M_1}{R^3}$．

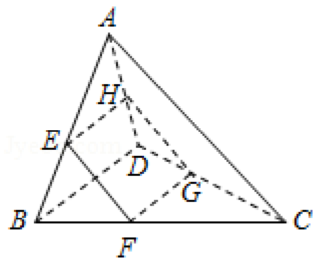
设$\alpha=\dfrac{r}{R}$．由于α的值很小，因此在近似计算中$\dfrac{3\alpha^3+3\alpha^4+\alpha^5}{(1+\alpha)^2}\approx 3\alpha^3$，则$r$的近似值为(　　)

A．$\sqrt{\dfrac{M_2}{M_1}}R$　　B．$\sqrt{\dfrac{M_2}{2M_1}}R$　　C．$\sqrt[3]{\dfrac{3M_2}{M_1}}R$　　D．$\sqrt[3]{\dfrac{M_2}{3M_1}}R$

解析：因为$\alpha=\dfrac{r}{R}$，所以$r=\alpha R,r$满足方程$\dfrac{M_1}{(R+r)^2}+\dfrac{M_2}{r^2}=(R+r)\dfrac{M_1}{R^3}$，所以

$\dfrac{M_2}{M_1}=\dfrac{3\alpha^3+3\alpha^4+\alpha^5}{(1+\alpha)^2}\approx 3\alpha^3$，所以$r=\alpha R=\sqrt[3]{\dfrac{M_2}{3M_1}}R$, 故选D.

例 20.（2019•西城区期末）如图，在空间四边形$ABCD$中，两条对角线AC，BD互相垂直，且长度分别为4和6，平行于这两条对角线的平面与边AB，BC，CD，DA分别相交于点E，F，G，H．记四边形$EFGH$的面积为y，设$\dfrac{BE}{AB}=x$，则(　　)



A．函数$y=f(x)$的值域为$(0，4]$　B．函数$y=f(x)$为偶函数

C．函数$y=f(x)$在$(0,\dfrac{2}{3})$上单调递减　　D．函数$y=f(x)$满足$f(x)=f(1-x)$

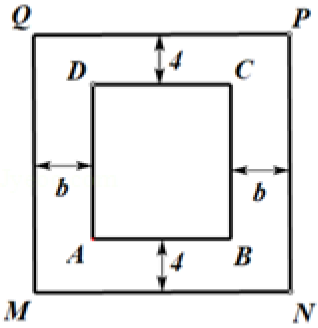
解析：因为$AC//$平面$EFGH,BD//$平面$EFGH$，所以$AC//EF,AC//HG,BD//EH,BD//FG$，

则四边形EFGH为平行四边形：因为两条对角线AC,BD互相垂直, 所以$EH\perp EF$, 则四边形EFGH为矩形；因为$\dfrac{BE}{AB}=x$, 所以$\dfrac{EH}{BD}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AB-BE}{AB}=1-\dfrac{BE}{AB}=1-x$; 即$EH=(1-x)BD=6(1-x)$, 同理$\dfrac{EF}{AC}=\dfrac{BE}{AB}=x$，则$EF=x\cdot AC=4x$, 则四边形$EFGH$的面积为$y=EH\cdot EF=4x\cdot 6(1-x)=24\left(x-x^2\right)=-24\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+6$, 因为$x\in(0,1)$, 所以当$x=\dfrac{1}{2}$时, 函数取得最大值为6, 故A,B错；函数的对称轴为$x=\dfrac{1}{2}$, 则函数在$\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$上不是单调函数, C错；又函数的对称轴为$x=\dfrac{1}{2}$, 所以函数$y=f(x)$满足$f(x)=f(1-x)$, 故D错，故选D.

例 21．（2019•无锡期末）一酒企为扩大生产规模，决定新建一个底面为长方形 $MNPQ$ 的室内发酵馆，发酵馆内有一个无盖长方体发酵池，其底面为长方形 $ABCD$（如图所示），其中 $AD\geqslant AB$．结合现有的生产规模，设定修建的发酵池容积为 450 米^3，深 2 米．若池底和池壁每平方米的造价分别为 200 元和 150 元，发酵池造价总费用不超过 65400 元

（1）求发酵池 AD 边长的范围；

（2）在建发酵馆时，发酵池的四周要分别留出两条宽为 4 米和 b 米的走道(b 为常数)．问：发酵池的边长如何设计，可使得发酵馆占地面积最小．



解析：(1) 由题知长方形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{450}{2}=225\text{m}^2$, 设 $AD=x$ 米, 则 $AB=\frac{225}{x}$ 米. 则 $x>\frac{225}{x}>0$，解得 $x\geq 15$. 设发酵池造价总费用为 $f(x)$,

则 $f(x)=225\times 200+150\times 2\cdot\left(2x+\frac{450}{x}\right)=600\left(x+\frac{225}{x}\right)+45000<65400$.

解得 $9\leq x\leq 25$, 又 $x\geq 15$, 故 $x\in[15,25]$.

(2) 由题意, 可设发酵馆的占地面积为 $S(x)$, 则 $S(x)=(x+8)\left(\frac{225}{x}+2b\right)=2bx+\frac{1800}{x}+16b+225$, $x\in[15,25]$. $S'(x)=\frac{2\left(bx^2-900\right)}{x^2}$, $x\in[15,25]$

①当 $b\geq 4$ 时, $S'(x)\geq 0$. 即 $S(x)$ 在 $[15,25]$ 上单调递增，此时当 $x=15$ 时，发酵馆的占地面积 $S(x)$ 最小, 即 $AB=AD=15$ 米时, 发酵馆的占地面积最小; ②当 $0<b\leq\frac{36}{25}$ 时, $S'(x)\leq 0$. 即 $S(x)$ 在 $[15,25]$ 上单调递减, 此时当 $x=25$ 时, 发酵馆的占地面积 $S(x)$ 最小, 即 $AD=25$ 米, $AB=9$ 米时，发酵馆的占地面积最小；

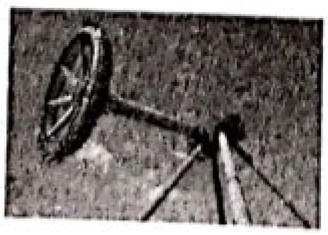
③ 当 $\frac{36}{25}<b<4$ 时，有当 $15\leq x<\frac{30}{\sqrt{b}}$ 时， $S'(x)<0$， $S(x)$ 单调递减；当 $\frac{30}{\sqrt{b}}<x\leq 25$

时，$S'(x)>0$，$S(x)$ 单调递增．当 $x=\dfrac{30}{\sqrt{b}}=\dfrac{30\sqrt{b}}{b}$ 时，$S'(x)=0$，$S(x)$ 取得极小值．即 $AD=\dfrac{30\sqrt{b}}{b}$，$AB=\dfrac{15\sqrt{b}}{2}$ 时，发酵馆的占地面积最小.

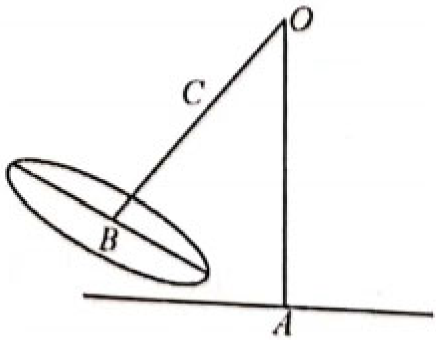
例 22.（2020•南通模拟）如图（1），大摆锤是深受年青人喜爱的一种大型游乐设施，考虑到空间和安全方面的问题，初步设计方案如下：如图（2），旋转筒中心 B 到摆臂中心 O 的距离为 18 米，摆背 OB 与 OA 形成的角度（记为 θ) 最大为 120°．在摆臂 OB 上有一个焊接点 C，点 C 与摆臂中心 O 的距离记为 x（米)，且焊接点 C 与其承受的应力 σ（单位：MPa) 来自两个部分的应力之和，一是来自 BC 段的应力 σ_1，经测算，σ_1 与 BC 和 $\sin\theta$ 的乘积成正比，比例系数为 $\dfrac{35\sqrt{3}}{2}$，二是来自旋转筒的应力 σ_2，经测算，σ_2 与 $\cos\theta$ 成正比，比例系数为 210.

（1）用 x 和 θ 表示焊接点 C 承受的应力 σ；

（2）根据焊接水平测算，焊接点 C 能承受的最大应力为 $420MPa$．在大摆锤安全运行前提下（即焊接点 C 所能承受的应力范围内)，求焊接点 C 与摆臂中心 O 的最小距离.



图(1)



图(2)

解析：(1) 因为 σ_1 与 BC 和 $\sin\theta$ 的乘积成正比, 比例系数为 $\dfrac{35\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\sigma_1=\dfrac{35\sqrt{3}}{2}(18-x)\sin\theta,\sigma_2$ 与 $\cos\theta$ 成正比，比例系数为 210, 所以 $\sigma_2=210\cos\theta$, 所以焊接点 C 承受的应力 $\sigma=\sigma_1+\sigma_2=\dfrac{35\sqrt{3}}{2}(18-x)\sin\theta+210\cos\theta$，$\theta\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$

（2）由于焊接点 C 承受的应力最大为 420MPa, 所以 $\dfrac{35\sqrt{3}}{2}(18-x)\sin\theta+210\cos\theta\leqslant 420$, 对于 $\theta\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 恒成立，当 $\theta=0$ 时，不等式显然成立；当 $\theta\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$, 则 $\sin\theta>0$, 所以

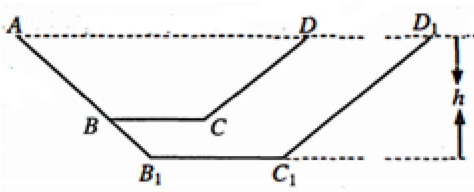
$\dfrac{35\sqrt{3}}{2}(18-x)\le 210\left(\dfrac{2-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$, 对于 $\theta\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 恒成立，所以 $\dfrac{35\sqrt{3}}{2}(18-x)\le 210\left(\dfrac{2-\cos\theta}{\sin\theta}\right)_{\min}$，$\theta\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$, 设 $y=\dfrac{2-\cos\theta}{\sin\theta}$， $\theta\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$, 则 $y'=\dfrac{1-2\cos\theta}{\sin^2\theta}$，令 $y'=0$, 则 $\cos\theta=\dfrac{1}{2},\theta=\dfrac{\pi}{3}$，当 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 时，$y'<0$, 函数递减；当 $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 时，$y'>0$，函数递增；故 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$y_{\min}=\sqrt{3}$, 所以 $\dfrac{35\sqrt{3}}{2}(18-x)\le 210\left(\dfrac{2-\cos\theta}{\sin\theta}\right)_{\min}=210\sqrt{3}$, 所以 $18-x\le 12$, 解得 $x\ge 6$，故在大摆钟安全运行前提下，炸接点 C 与摆臂中心 O 的最小距离为 6 米.

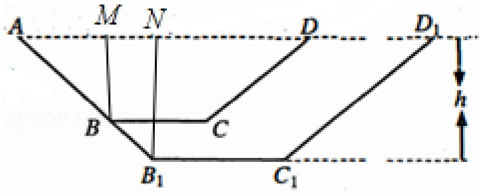
注意：此题同样可以利用直线圆的几何知识求解，具体过程留给读者们.

例 23.（2020•南通模拟）某农场灌溉水渠长为 $1000m$，横截面是等腰梯形 $ABCD$（如图），$AD//BC$，$AB=CD$，其中渠底 BC 宽为 $1m$，渠口 AD 宽为 $3m$，渠深 $\dfrac{3}{4}m$ 根据国家对农田建设补贴的政策，该农场计划在原水渠的基础上分别沿 AD 方向加宽、AB 方向加深，若扩建后的水渠横截面 $AB_1C_1D_1$ 仍是等腰梯形，且面积是原面积的 2 倍．设扩建后渠深为 $h\ m$，若挖掘费为 ah^2 元 $/m^3$，扩建后的水渠的内壁 AB_1，C_1D_1 和渠底 B_1C_1 铺设混凝土费为 $3a$ 元 $/m^2$．

（1）试用 h 表示渠底 B_1C_1 的宽，并确定 h 的取值范围；

（2）问：渠深 h 为多少时，可使总建设费最少？（注:总建设费为挖掘费与铺设混凝土费之和）





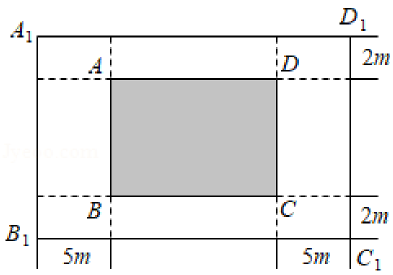
解析：(1) 作两个等腰梯形的高 BM, B_1N, 则 $AM=\dfrac{AD-BC}{2}=1, BM=\dfrac{3}{4}$, 由题意可知 $\triangle ABM\sim\triangle AB_1N$，故 $\dfrac{AM}{AN}=\dfrac{BM}{B_1N}$， 所以 $AN=\dfrac{AM\cdot B_1N}{BM}=\dfrac{4h}{3}$. 设 $B_1C_1=x$， 则 $AD_1=2AN+B_1C_1=\dfrac{8h}{3}+x$， 故梯形 $AB_1C_1D_1$ 的面积为 $S'=\dfrac{1}{2}\times\left[\left(x+\dfrac{8h}{3}\right)+x\right]\times h=h\left(x+\dfrac{4h}{3}\right)$. 梯形 $ABCD$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\times(1+3)\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$

所以 $h\left(x+\frac{4h}{3}\right)=3$，即 $x=\frac{3}{h}-\frac{4h}{3}\cdot x\begin{cases}h>\frac{3}{4}\\ \frac{3}{h}-\frac{4h}{3}>1\end{cases}$，解得 $\frac{3}{4}<h<\frac{-3+3\sqrt{17}}{8}$.

(2) 由题 $AB_1=\sqrt{AN^2+B_1N^2}=\frac{5h}{3}$，设建设费用为 y，则 $y=ah^2\times\left(3-\frac{3}{2}\right)\times1000+3a\times\left(\frac{10h}{3}+\frac{3}{h}-\frac{4h}{3}\right)\times$ $1000\ =1500ah^2+3000a\left(2h+\frac{3}{h}\right)=1500a\left(h^2+4h+\frac{6}{h}\right)$，其中 h 的范围为 $\frac{3}{4}<h<\frac{-3+3\sqrt{17}}{8}$，设 $f(h)=h^2+4h+\frac{6}{h}$，则 $f'(h)=2h-\frac{6}{h^2}+4=\frac{2(h-1)\left(h^2+3h+3\right)}{h^2}$，所以当 $\frac{3}{4}<h<1$ 时，$f'(h)<0$，当 $1<h<\frac{-3+3\sqrt{17}}{8}$ 时，$f'(h)>0$，所以当 $h=1$ 时，$f(h)$ 取得最小值，即总建设费用最小.

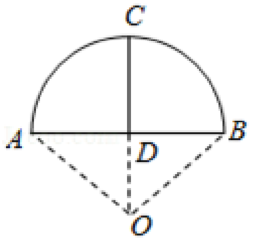
达标训练（适合高二复习）

28.（2019•广州期末）为了不断满足人民日益增长的美好生活需要，实现群众对舒适的居住条件、更优美的环境、更丰富的精神文化生活的追求，某大型广场正计划进行升级改造．改造的重点工程之一是新建一个长方形音乐喷泉综合体 $A_1B_1C_1D_1$，该项目由长方形核心喷泉区 $ABCD$（阴影部分）和四周绿化带组成．规划核心喷泉区的 $ABCD$ 面积为 $1000m^2$，绿化带的宽分别为 $2m$ 和 $5m$（如图所示）．当整个项目占地 $A_1B_1C_1D_1$ 面积最小时，则核心喷泉区 BC 的长度为(　　)



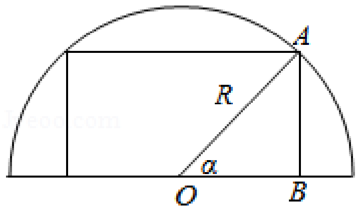
A．$20m$　　B．$50m$　　C．$10\sqrt{10}m$　　D．$100m$

29.（2019•徐州期末）《九章算术》是我国古代数学成就的杰出代表作，其中《方田》章给出计算弧田面积所用的经验方式为：弧田面积 $=\frac{1}{2}$（弦 $\times$ 矢 $+$ 矢 ^{2}），弧田（如图）由圆弧和其所对弦所围成，公式中“弦”指圆弧所对弦长，“矢”等于半径长与圆心到弦的距离之差，现有圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$，半径等于 4 米的弧田，按照上述经验公式计算所得弧田面积约是 $(\sqrt{3}\approx1.73)$(　　)



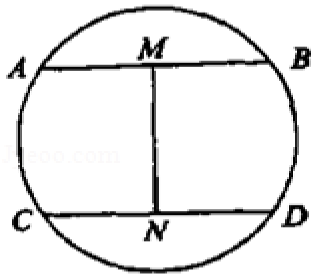
A．6 平方米　　B．9 平方米　　C．12 平方米　　D．15 平方米

30．（209•宁城县期末）要把半径为半圆形木料截成长方形，为了使长方形截面面积最大，则图中的$\alpha=($　　$)$



A．$\dfrac{\pi}{4}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{5\pi}{12}$　　D．$\dfrac{\pi}{6}$

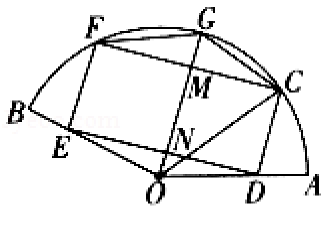
31．（2019•武汉月考）武汉是一座美丽的城市，这里湖泊众多，一年四季风景如画，尤其到了夏季到东湖景区赏景的游客络绎不绝．如图是东湖景区中一个半径为 100 米的圆形湖泊，为了方便游客观赏，决定在湖中搭建一个“工”字形栈道，其中$AB=CD$，M，N分别为AB．CD的中点，则栈道最长为__$200\sqrt{5}$__米．



32．（2019•邢台期末）如图，某小区为美化环境，建设美丽家园，计划在一块半径为$R(R$为常数）的扇形区域上，建个矩形的花坛$CDEF$和一个三角形的水池FCG．其中$GC=GF$，O为圆心，$\angle AOB=120^{\circ}$，C，G，F在扇形圆弧上，D，E分别在半径OA，OB上，记OG与CF，DE分别交于M，N，$\angle GOC=\theta$．

（1）求ΔFCG的面积S关于θ的关系式，并写出定义域；

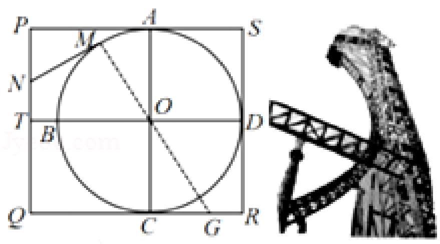
（2）若$R=10$米，花坛每平方米的造价是 300 元，试问矩形花坛的最高造价是多少？（取$\sqrt{3}=1.732)$



33．（2020•镇江一模）某游乐场过山车轨道在同一竖直钢架平面内，如图所示，矩形 $PQRS$ 的长 PS 为 130 米，宽 RS 为 120 米，圆弧形轨道所在圆的圆心为 O，圆 O 与 PS，SR，QR 分别相切于点 A，D，C，T 为 PQ 的中点．现欲设计过山车轨道，轨道由五段连接而成．出发点 N 在线段 PT 上（不含端点，游客从点 Q 处乘升降电梯至点 N)，轨道第一段 NM 与圆 O 相切于点 M，再沿着圆弧轨道 $\widehat{MA}$ 到达最高点 A，然后在点 A 处沿垂直轨道急速下降至点 O 处，接着沿直线轨道 OG 滑行至地面点 G 处（设计要求 M，O，G 三点共线），最后通过制动装置减速沿水平轨道 GR 滑行到达终点 R．记 $\angle MOT$ 为 α，轨道总长度为 l 米．

（1）试将 l 表示为 α 的函数 $l(\alpha)$，并写出 α 的取值范围；

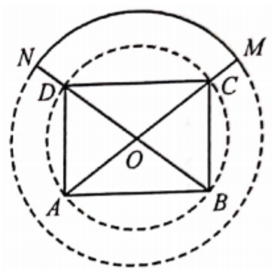
（2）求 l 最小时 $\cos\alpha$ 的值．



34．（2020•南通模拟）如图所示，南通绿博园拟在一块以 O 为圆心、半径 OM 为 3 百米的圆形地界上划出部分区域（图中实线及其围成的区域，其中实线表示道路）新建植物园供游客观赏．矩形 $ABCD$ 是以 O 为圆心、半径 OC 为 2 百米的圆的内接矩形，点 C，D 分别在半径 OM，ON 上，设 $\angle CAD=\theta$．

（1）当 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 时，求所划区域的面积 S 的值；

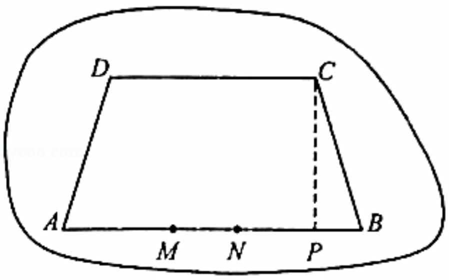
（2）游客在实线道路上观赏的同时，每年可给当地的旅游业带来服务创收，预计，直线道路上的年服务创收为 3 万元 / 百米，圆弧道路上的年服务创收为 $2\sqrt{2}$ 万元 / 百米，则当 θ 为何值时，当地年服务创收的总收入 W 最大？



35．（2020•南通模拟）现准备在一块玉上设计制作一个面积为 $200cm^2$，高 CP 为 $10cm$ 等腰梯形 $ABCD$ 工艺展品（如图），为了提升观赏度，将其加工成镶金工艺品，其中金丝部分为线段 AM，NB，BC，CD，DA，若 $\angle ABC=\theta(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$，$MN=BP$，金丝部分总长为 Lcm．

（1）试表示出关于θ的函数$L(\theta)$；

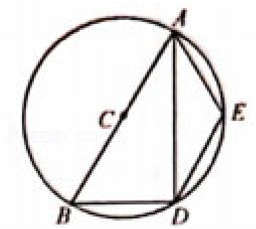
（2）当θ为何值时，L取得最小值？



36.（2020•南通模拟）因城市绿化需要，某政府要在市区一个圆形区域中建造一四边形区域绿化．已知圆形区域中心为C，且直径AB为$2r$米，点E在$\widehat{AB}$上（不与A，B两点重合），$\angle BAE$的平分线与圆C相交于点D，连结DE，BD．政府计划在四边形$ABDE$内建设绿化，设$\angle BAE=\theta$．

（1）试用θ表示四边形$ABDE$面积$S=f(\theta)$；

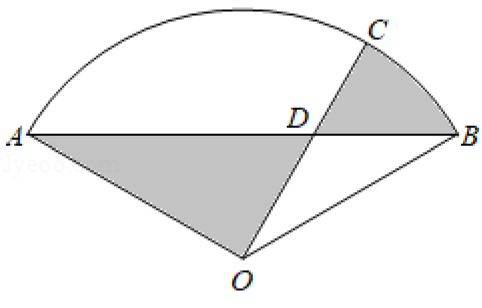
（2）当θ取何值时，四边形$ABDE$面积最大，并求其最大值．



37.（2019•苏州期末）为响应“生产发展、生活富裕、乡风文明、村容整洁、管理民主”的社会主义新农村建设，某自然村将村边一块废弃的扇形荒地（如图）租给蜂农养蜂、产蜜与售蜜．已知扇形AOB中，$\angle AOB=\dfrac{2}{3}\pi$，$OB=2\sqrt{3}$（百米），荒地内规划修建两条直路$AB$，$OC$，其中点$C$在$\widehat{AB}$上($C$与$A$，$B$不重合)，在小路$AB$与$OC$的交点$D$处设立售蜜点，图中阴影部分为蜂巢区，空白部分为蜂源植物生长区．设$\angle BDC=\theta$，蜂巢区的面积为S（平方百米）．

（1）求S关于θ的函数关系式；

（2）当θ为何值时，蜂巢区的面积S最小，并求此时S的最小值．



38.（2020•上海）有一条长为120米的步行道OA，A是垃圾投放点ω_1，若以O为原点，OA为x轴正半轴

建立直角坐标系，设点 $B(x,0)$，现要建设另一座垃圾投放点 $\omega_2(t,0)$，函数 $f_t(x)$ 表示与 B 点距离最近的垃圾投放点的距离．

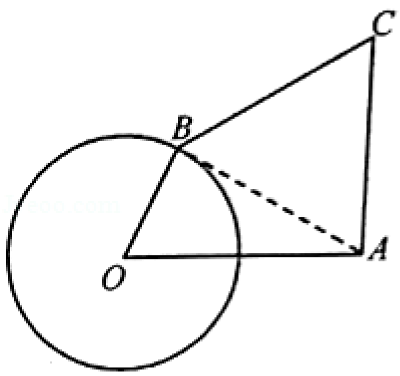
（1）若 $t=60$，求 $f_{60}(10)$、$f_{60}(80)$、$f_{60}(95)$ 的值，并写出 $f_{60}(x)$ 的函数解析式；

（2）若可以通过 $f_t(x)$ 与坐标轴围成的面积来测算扔垃圾的便利程度，面积越小越便利．问：垃圾投放点 ω_2 建在何处才能比建在中点时更加便利？

39.（2020•南通模拟）如图，某生态绿地内有一处景观位于点 O 处，景观离绿地出口 A 的距离 $OA=2km$，环形景观道是以 O 为圆心，$1km$ 为半径的圆．现欲在绿地的 C 处建一座发射塔，并从塔座 C 处出发建两条通道 CA，CB（其中点 B 在环形景观道上），且 $CA=CB$，$\angle ACB=60^\circ$．设 $\angle AOB=\theta$．

（1）试用 θ 表示出 $\angle OAB$ 的正弦值、余弦值；

（2）为降低发射塔对景观区域的影响，要求发射塔离景观最远（即 OC 最长），试确定此时 θ 的值，并求 OC 的最大值．



专题 10 数的三板斧之切线

切线、同构、分而治之被称为导数的三板斧，这也是导数求最值证明不等式的核心力量，如果需要一个打辅助的，那就是“指数找基友，对数单身狗”，以此作为本章开篇是因为这三板斧均在秒 1 和秒 2 中闪亮登场，作为指对跨阶新贵，同构更是大篇幅介绍，点燃了 2019 年的一把火，相比之下，有一个绝招却被大家忽视了，这就是分而治之。2020 年，三板斧聚齐，才能形成闭环效应，缺一不可。

第一讲切线找点原理

函数 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$, 我们通常表示为 $e^x\geq x+1$, 当且仅当 $x=0$ 时等号成立; 函数 $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=x-1$, 我们通常表示为 $\ln x\leq x-1$, 当且仅当 $x=1$ 时等号成立; 这两个切线方程众所周知，殊不知所有切线，都可以按照这个套路法进行求解. 函数 $y=e^x$ 在点 $(1,e)$ 处的切线方程我们可以按照不等式等效替换法求得，抓住 $x=1$ 是切点, 故将原来的 x 替换为 $x-1$, 即 $e^{x-1}\geq(x-1)+1\Rightarrow e^x\geq ex$. 故切线方程为 $y=ex$, 同理函数 $y=e^x$ 在点 $\left(-1,e^{-1}\right)$ 处的切线方程可以根据 $e^{x+1}\geq(x+1)+1\Rightarrow e^x\geq\frac{1}{e}x+\frac{2}{e}$ 求得 $y=\frac{1}{e}x+\frac{2}{e}$.

函数 $y=e^x$ 的切线方程为 $y=2x+b$, 抓住 $k=2$, 由于我们所知道的切线方程斜率为 1, 故可以通过除法变成熟悉形式: $e^x\geq 2x+b\Rightarrow\frac{e^x}{2}\geq x+\frac{b}{2}\Rightarrow e^{x-\ln 2}\geq x-\ln 2+1\Rightarrow e^x\geq 2x-2\ln 2+2\geq 2x+b$ 根据此不等式：我们可以得出以下三个结论:

变成熟悉形式: $e^x\geq 2x+b\Rightarrow\frac{e^x}{2}\geq x+\frac{b}{2}\Rightarrow e^{x-\ln 2}\geq x-\ln 2+1\Rightarrow e^x\geq 2x-2\ln 2+2\geq 2x+b$, 根据此不等式，我们可以得出以下三个结论:

(1) 函数 $y=e^x$ 在斜率为 2 的位置的切线方程为 $y=2x+2-2\ln 2$;

(2) 若不等式 $e^x\geq 2x+b$ 恒成立，则 $b\leq 2-2\ln 2$;

(3) 若不等式 $e^x\geq ax+2-2\ln 2$ 恒成立, 则 $0<a\leq 2$.

函数 $y=\ln x$ 的切线方程为 $y=2x+b$, 抓住 $2x$ 为整体，

$\ln 2x\leq 2x-1\Rightarrow\ln x\leq 2x-1-\ln 2\leq 2x+b$, 根据此不等式，我们可以得出以下三个结论:

(1) 函数 $y=\ln x$ 在斜率为 2 的位置的切线方程为 $y=2x-1-\ln 2$,

(2) 若不等式 $\ln x\leq 2x+b$ 恒成 $\dot{I}$, 则 $b\geq -1-\ln 2$; ;

(3) 若不等式 $\ln x\leq ax-1-\ln 2$ 恒成立，则 $a\geq 2$.

$y=\ln x$ 在点 $(2,\ \ln 2)$ 处的切线方程，我们抓住 $x=2$ 是切点, 即 $\frac{x}{2}=1$, 故将原来的 x 替换为 $\frac{x}{2}$, 即 $\ln\frac{x}{2}\leq\frac{x}{2}-1\Rightarrow\ln x-\ln 2\leq\frac{x}{2}-1\Rightarrow\ln x\leq\frac{x}{2}-1+\ln 2$, 故切线方程为 $y=\frac{x}{2}-1+\ln 2$, 同理, $y=\ln x$ 在点 $(e,1)$ 处的切线方程可以根据 $\ln ex\leq ex-1\Rightarrow\ln x\leq ex$, 求得切线为 $y=ex$.

秒杀秘籍：指数切线切点找点

指数切线切点找点: $e^{x-x_0} \geq x-x_0+1$, 转化为 $e^x \geq e^{x_0}x+e^{x_0}\left(-x_0+1\right)$.

对数切线切点找点: $\ln\frac{x}{x_0} \leq \frac{x}{x_0}-1$, 转化为 $\ln x \leq \frac{x}{x_0}-1+\ln x_0$.

指数切线斜率找点: $e^x \geq kx+b \Leftrightarrow x_0=\ln k,\quad b=k(1-\ln k)$.

对数切线斜率找点: $\ln x \leq kx+b \Leftrightarrow x_0=\frac{1}{k}, b=-1-\ln k$.

总结归纳起来，就是指数平移找点，对数倍缩找点，那么在一些其它常见函数, 是否也有类似性质呢?我们介绍几个常见的切线不等式,在 $x=1$ 作为切点时, $x^2 \geq 2x-1$, $\frac{1}{x} \geq 2-x$; 用 $\frac{x}{2}$ 替换 $x=1$ 当中切线不等式的 x,可得在 $x=2$ 作为切点时, $x^2 \geq 4x-4, \frac{1}{x} \geq 1-\frac{x}{4}$; 同理,当 $x=x_0$ 作为切点时，用 $\frac{x}{x_0}$ 替换 x 得: $x^2 \geq 2x_0x-x_0^2, \frac{1}{x} \geq \frac{2}{x_0}-\frac{x}{x_0^2}$; 这个都是倍缩找点,通常都是按照 $x=1$ 的切线方程进行 $\frac{x}{x_0}$ 替换，这种方式适合对数函数、反比例函数、对勾函数和谭带函数等，这一系列函数通常为凸函数，通常在 $x=0$ 处没有意义.

关于平移找点,通常出现在 $x=0$ 有切线的凹函数,比如指数函数，二次函数，三次函数等，关于 $e^x \geq x+1$，$x^2 \geq 0$ 和 $x^3 \geq 0$ 这三个在 $x=0$ 处的切线不等式, 为了求得 $x=1$ 处的切线不等式, 我们分别用 $x-1$ 替换，

$e^{x-1} \geq x \Leftrightarrow e^x \geq ex, (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 2x-1,\ (x-1)^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq 3x^2-3x+1 \geq 3\times(2x-1)-3x+1=3x-2$ 虽然三次函数切线式我们很少这样求，但我们仅用此来解释切线找点方法.当然，有的也需要根据题意去变化,如 $x \geq \ln(x+1)$ 和 $e^{2x} \geq 2x+1$，这些式子由于题目给到了 $\ln(x+1)$ 和 e^{2x} 这类非原始的指数对数函数，关键问题还是找准切点进行放缩.

秒杀秘籍：切线求和定理

函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在点 $x=x_0$ 的切线方程分别为 $y=I_1(x)$ 和 $y=l_2(x)$, $y=f(x)+g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的切线方程为 $y=l_1(x)+l_2(x)$. 例如函数 $y=e^x-\ln 2x=e^x+(-\ln x-\ln 2)$ 在点 $x=1$ 处切线方程为 $y=e^x$ 的切线 $y=ex$ 与 $y=-\ln x-\ln 2$ 的切线 $y=-(x-1+\ln 2)$ 的和，即 $y=(e-1)x+1-\ln 2$.

例 1.（2019•上高县校级月考）已知 $f(x)$ 为奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=\ln(-x)-x$, 则曲线 $y=f(x)$

在点（1，f（1））处的切线方程是（　　）

A．$2x+y-1=0$　B．$2x-y-1=0$　C．$2x+y+1=0$　D．$2x-y-3=0$

解析法一 $x>0$，则 $-x<0$，由 $f(x)$ 是奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=\ln(-x)-x$，得 $f(x)=-f(-x)=-\ln x-x$，$f'(x)=-\frac{1}{x}-1(x>0)$, 即 $f'(1)=-2$, 又 $f(1)=-1$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在,点 $(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y+1=-2(x-1)$, 巴 $2x+y-1=0$, 故选 A.

法二据奇函数可知 $x>0$ 时, $f(x)=-f(-x)=-\ln x-x$, 由于 $y=-x$ 切线为 $y=-x, y=-\ln x$ 在 $x=1$ 处切线为 $y=-x+1$, 即 $y=f(x)$ 切线为 $y=-2x+1$, 故选 A.

例 2（2019•南山期末）C 的方程为 $y=ln$（$x+1$）$+e^{2x}$，则曲线 C 在点 A（0，1）处的切线方程为（　　）

A．$y=3x+1$　B．$y=2x+1$　C．$y=-3x+1$　D．$y=-2x+1$

解析法一 $y=\ln(x+1)+e^{2x}$ 的导数为 $y'=\frac{1}{x+1}+2e^{2x}$,可得曲线在点 A(0,1)处的切线斜率为 $k=1+2=3$, 界曲线 C 在,点 $A(0,1)$ 处的切线方程为 $y=3x+1$, 故选 A.

法二根据切线水和定理得 $\ln(x+1)\le x$, $e^{2x}\ge 2x+1$, 故曲线 C 在,点 $A(0,1)$ 处的切线方程为 $y=3x+1$, 故选 A.

例 3.（2019•河南月考）若曲线 $y=e^x+1$ 在 $x=0$ 处的切线，也是 $y=lnx+b$ 的切线，则 $b=$（　　）

A．-1　B．2　C．e　D．3

解析法一求导 $y'=e^x$，$x=0$ 处的切线斜率为 $k=1$，又切点 $(0,2)$，则 $x=0$ 处切线方程为 $y=x+2$

$y=\ln x+b$ 的导数为 $y'=\frac{1}{x}$, 设切点坐标为 (x_0,y_0), 则 $\frac{1}{x_0}=1$, 得 $x_0=1, y_0=x_0+2=3$, 切点坐标为(1,3),

代入 $y=\ln x+b$, 得 $b=3$, 故选 D .

法二根据切线原理得 $e^x+1\ge x+1+1=x-1+3\ge \ln x+3$, 得 $b=3$, 故选 D.

（2019 ・河南月考）若函数 $f(x)=e^{2x+1}$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(-\frac{1}{2},f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ 处的切线方程为（　）

A．$2x+y+2=0$　B．$2x-y+2=0$　C．$2x+y-2=0$　D．$2x-y-2=0$

解析法一因为函数 $f(x)=e^{2x+1}$, 则 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=e^0=1$, 又因为 $f'(x)=2e^{2x+1}$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=2$, 所以曲线

$y=f(x)$

在点$\left(-\frac{1}{2},f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$处的切线方程为$y-1=2\left[x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$, 即$2x-y+2=0$, 故选B.

法二抓住切点$x=-\frac{1}{2}$, 即$2x+1=0$, 故$e^{2x+1}\ge 2x+1+1$, 即$2x-y+2=0$, 故选B.

例 5.(2019•南阳期中)设函数$f(x)=x+e^{x}$，直线$y=kx+b$是曲线$y=f(x)$的切线，则$k+b$的最大值为(　　)

A. e　　　　B. 2　　　　C. $1-e$　　　　D. $1+e$

解析法一因为$f(x)=x+e^{x}$, 所以$f'(x)=1+e^{x}$, 设切点为$\left(x_0,y_0\right)$, 则$k=1+e^{x_0}$，　又$y_0=x_0+e^{x_0}=$

$=kx_0+b$, 所以$x_0+e^{x_0}=\left(1+e^{x_0}\right)x_0+b$, 则$b=e^{x_0}-x_0\cdot e^{x_0}$, 即

$k+b=1+e^{x_0}+e^{x_0}-x_0\cdot e^{x_0}=1+2e^{x_0}-x_0\cdot e^{x_0}$，令$y=1+2e^{x}-xe^{x}$, 则$y'=2e^{x}-e^{x}-xe^{x}=(1-x)e^{x}$,

由$y'=0$,　得$x=1$.　当$x\in(-\infty,1)$时, $y'>0$, 当$x\in(1,+\infty)$时, $y'<0$,　当$x=1$时, $y=k+b$取最大值为$1+2e-e=1+e$, 故选D.

法二易知$(1,k+b)$为函数$y=f(x)$在,点$(1,f(x))$处切线的切,点, $f(x)=x+e^{x}\ge x+ex$, 即$y=k+b$取最大值为$1+e$, 故选D.

例6.(2019•烟台期中)已知函数$f(x)=x^{2}$的在$x=1$处的切线与函数$g(x)=\frac{e^{x}}{a}$的图象相切,则实数$a=$(　　)

A. $\sqrt{e}$　　　　B. $\frac{e\sqrt{e}}{2}$　　　　C. $\frac{\sqrt{e}}{2}$　　　　D. $e\sqrt{e}$

解析法一因为$f(x)=x^{2}$, 所以$f'(x)=2x$, 则$f'(1)=2$, 得函数$f(x)=x^{2}$的在$x=1$处的切线方程为

$y-1=2(x-1)$, 即 $y=2x-1$; 设直线 $y=2x-1$ 与函数 $g(x)=\frac{e^{x}}{a}$ 的图象相切于 $\left(x_0,\frac{e^{x_0}}{a}\right)$, 则

$g'\left(x_0\right)=\frac{e^{x_0}}{a}=2$, $\frac{e^{x_0}}{a}=2x_0-1$, 联立解得$x_0=\frac{3}{2}$, $a=\frac{e\sqrt{e}}{2}$, 故选B.

法二根据二次函数切线式$x^{2}\ge 2x-1$, 则$\frac{e^{x}}{a}\ge 2x-1\Rightarrow\frac{e^{x}}{2a}\ge x-\frac{1}{2}\Rightarrow \mathrm{e}^{x-\ln a-\ln 2}\ge x-\ln a-\ln 2+1=x-\frac{1}{2}$,

故$-\ln a-\ln 2+1=-\frac{1}{2}$,　即$\ln a=\frac{3}{2}-\ln 2$, $a=\frac{e\sqrt{e}}{2}$, 故选B.

例 7.（2019•昌江区校级期中）函数$f(x)=x^{2}$，$g(x)=2lnx+a$的图象有公共点，则$a\in$(　　)

A. $[e,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $[1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1]$

解析法一函数 $f(x)=x^2$，与 $g(x)=2\ln x+a$ 图象有公共点，即关于 x 的方程 $x^2-2\ln x-a=0$ 有实根，令 $h(x)=x^2-2\ln x-a,x>0$，　则 $h'(x)=2x-\frac{2}{x}(x>0)$，　令 $h'(x)=0$　得 $x=1$（$x=-1$ 不在范围内，舍去），所以当 $x>1$ 时，$h'(x)>0,h(x)$ 单调递增；当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0,h(x)$ 单调递减，所以 $h(x)_{\min}=h(1)=1-a$：为使关于 x 的方程 $x^2-2\ln x-a=0$ 有实根，只需 $h(x)_{\min}=1-a\le 0$，所以 $a\ge 1$，故选 C.

例 8.（2019•福建月考）若直线 $y=kx+b$ 既是曲线 $y=lnx+2$ 的切线，又是曲线 $y=ln(x+3)$ 的切线，则 $b=$____.

法一设直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=\ln x+2$ 相切于 $\left(x_1,\ln x_1+2\right)$，则直线方程为 $y-\ln x_1-2=\frac{1}{x_1}\left(x-x_1\right)$；设直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=\ln(x+3)$ 相切于，点 $\left(x_2,\ln\left(x_2+3\right)\right)$，则直线方程为 $y-\ln\left(x_2+3\right)=\frac{1}{x_2+3}\left(x-x_2\right)$ 得 $\begin{cases}\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2+3}\\ 1+\ln x_1=-\frac{x_2}{x_2+3}+\ln\left(x_2+3\right)\end{cases}$，得 $x_1=\frac{3}{2},x_2=-\frac{3}{2},k=\frac{2}{3}$，则直线 l 与曲线 $y=\ln x+2$ 相切于 $\left(\frac{3}{2},\ln\frac{3}{2}+2\right)$，即 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}+b=\ln\frac{3}{2}+2$，得 $b=1+\ln\frac{3}{2}$. 故答案为 $1+\ln\frac{3}{2}$.

法二根据 $\ln x\le x-1\Rightarrow\ln kx\le\ln kx-1\Rightarrow\ln x\le kx-1-\ln k$，所以 $\ln x+2\le kx+b\Rightarrow\ln x+2\le kx+1-\ln k$，显然 $b=1-\ln k$，再根据 $\ln(x+3)\le x+2\Rightarrow\ln k(x+3)\le kx+3k-1\Rightarrow\ln(x+3)\le kx+3k-1-\ln k$，即 $\ln(x+3)\le kx+b\Rightarrow\ln(x+3)\le kx+3k-1-\ln k$，显然 $b=3k-1-\ln k$，即 $3k-1-\ln k=1-\ln k$，得 $k=\frac{2}{3}$，$b=1+\ln\frac{3}{2}$. 故答案为 $1+\ln\frac{3}{2}$.

注意此题有一个结论，就是两个形状完全相同的函数公切线，斜率一定为平移的纵坐标（下移）比上横坐标（左移）的比值，本题 $k=\frac{2}{3}$，即为 $y=\ln x+2$ 经过下移 2 个单位和左移 3 个单位后得到 $y=\ln(x+3)$，这个具体的证明可以参考秒 1 的《数形结合秒杀公切线》专题.

第二讲　六大函数切线找点问题

在导数的学习过程中，一定要掌握常规的六大函数:(1) $y=xe^x$; (2) $y=\dfrac{x}{e^x}$;(3) $y=\dfrac{e^x}{x}$; (4) $y=x\ln x$

(5) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; (6) $y=\dfrac{x}{\ln x}$, 由于在秒 2 的同构式介绍了六大同构函数，这里就只介绍他们的切线表达式.如图 $10-2-1$ 所示，先选取函数 $y=xe^x$ 在 $x=0$ 处切线不等式 $xe^x\geq x$, 再选取 $x=1$ 处进行变换，根据切线找点定理，用 $x-1$ 替换 x 得: $(x-1)e^{x-1}\geq x-1\Leftrightarrow xe^x-e^x\geq ex-e$, 再根据切线求和定理得 $xe^x\geq e^x+ex-e\geq 2ex-e$，再同除以 x 得: $xe^x\geq 2ex-e\Rightarrow e^x\geq 2e-\dfrac{e}{x}$, 故 $e^{x-1}\geq 2-\dfrac{1}{x}$, 如图 $10-2-2$ 可知，由于 $y=e^x$ 和反比例函数属于凹凸不一致，故此函数的切线切点变化空间相对比较狭窄，变化更多的翔然在对数函数，这也印证了那句口决，指对混合型不等式，往往“放对再放指，不行找基友”.

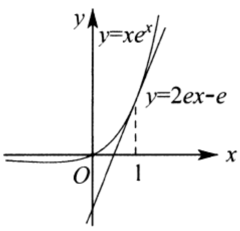


图 10-2-1

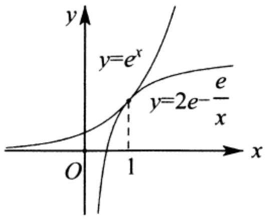


图 10-2-2

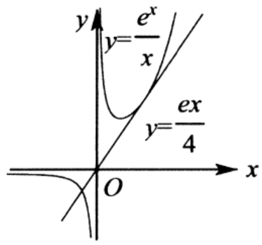


图 10-2-3

如图 $10-2-3$, 关于 $y=\dfrac{e^x}{x}$, 通常的切线在 $x=2$ 处,即 $\dfrac{e^x}{x}\geq\dfrac{e^2}{4}x$, 其实就是来自

$e^x\geq ex\Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}}\geq\dfrac{ex}{2}\Leftrightarrow e^x\geq\dfrac{e^2}{4}x^2$ 的推导式。.

如图 $10-2-4$, 关于对数切线，最常见的就是切线的不等式连串, $x^2-x\geq x\ln x\geq x-1\geq\ln x\geq\dfrac{\ln x}{x}$, 当仅当 $x=1$ 时等号成立，证明过程均来自不等式 $x-1\geq\ln x$ 的推导，具体切线放缩技巧我们会在例题中一一道来.

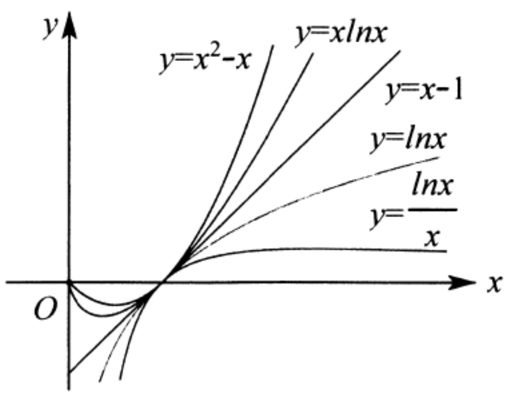


图 10-2-4

例 9.(2019•贵州期末)若曲线 $f(x)=mx•e^x+n$ 在点(1，$f(1)$)处的切线方程为 $y=ex$，则 $m+n$ 的值为(　　)

A. $\frac{e+1}{2}$　　B. $\frac{e-1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{e}{2}$

解析法一由 $f(x)=mx\cdot e^x+n$, 得 $f'(x)=m\cdot e^x+mx\cdot e^x$, 又曲线 $f(x)=mx\cdot e^x+n$ 在,点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y=ex$, 得 $\begin{cases}f(1)=me+m=e\\f'(1)=me+me=e\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}m=\dfrac{1}{2}\\n=\dfrac{e}{2}\end{cases}$, 所以 $m+n=\dfrac{e+1}{2}$, 故选 A.

法二由切线原理得 $xe^x\geq 2ex-e\Rightarrow me^x+n\geq 2\ mex-me+n=ex\Rightarrow m+n=\dfrac{1+e}{2}$, 故选 A.

例 10.（2019•香坊区校级期末）已知函数 $f(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x+1}$，则函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为(　　)

A. $x-4y+1=0$　　B. $x+4y+1=0$　　C. $x-y=0$　　D. $x-4y+3=0$

解析法一　由 $f(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x+1}$, 得 $f'(x)=\dfrac{(x+1)e^{x-1}-e^{x-1}}{(x+1)^2}=\dfrac{xe^{x-1}}{(x+1)^2}$, 则 $f'(1)=\dfrac{1}{4}$,　又 $f(1)=\dfrac{1}{2}$, 函数

$f(x)$ 在

$x=1$ 处的切线方程为 $y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}(x-1)$, 即 $x-4y+1=0$, 故选 A.

法二根据平移 $\dfrac{e^x}{x}\geq\dfrac{e^2}{4}x$ 可得: $f(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x+1}=\dfrac{1}{e^2}\cdot\dfrac{e^{x+1}}{x+1}\geq\dfrac{1}{e^2}\cdot\dfrac{e^2}{4}(x+1)=\dfrac{x+1}{4}$, 即 $x-4y+1=0$, 故选 A.

例 11.(2019•内考月考)曲线 $f(x)=x^2+xlnx$ 在点(1，$f(1)$)处的切线与直线 $x-ay-1=0$ 平行，则 $a=$(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

解析法一求导得 $f'(x)=2x+\ln x+1$,故曲线 $f(x)=x^2+x\ln x$ 在,点$(1,f(1))$处的切线斜

$k=f'(1)=2++0+1=3$, 该切线与直线 $x-ay-1=0$ 平行，而直线 $x-ay-1=0$ 的斜率 $k=\dfrac{1}{a}$, 得 $\dfrac{1}{a}=3$,

即 $a=\dfrac{1}{3}$, 故选 A.

法二由切线原理得 $f(x)=x^2+x\ln x\geq 2x-1+x-1=3x-2$, 故 $a=\dfrac{1}{3}$, 故选 A.

例 12.（2019•临夏市校级月考）函数 $f(x)=\dfrac{1+lnx}{x}$ 的图象在 $x=\dfrac{1}{e}$ 处的切线方程是(　　)

A. $ex-y-1=0$　　B. $ex+y-1=0$　　C. $e^2x+y-e=0$　　D. $e^2x-y-e=0$

解析法一因为函数 $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$, 所以 $f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$, 函数 $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$ 的图象在 $x=\dfrac{1}{e}$ 处的切线的

即 $e^2x-y-e=0$, 故选 D.

法二由 $\dfrac{\ln x}{x}\le x-1$, 得 $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}=e\dfrac{\ln ex}{ex}\le e\cdot(ex-1)$, 即 $e^2x-y-e=0$, 故选 D.

总结: $\dfrac{\ln x}{x}\le x-1\Leftrightarrow\dfrac{\ln\dfrac{x}{e^a}}{\dfrac{x}{e^a}}\le\dfrac{x}{e^a}-1\Leftrightarrow\dfrac{\ln x-a}{x}\le\dfrac{x}{e^{2a}}-\dfrac{1}{e^a}$, 切点当 $x=e^a$ 时取得.

例 13.（2019•南平期末）设函数 $f(x)=xlnx$ 的图象与直线 $y=2x+m$ 相切，则实数 m 的值为(　　)

A. e　　B. $-e$　　C. $-2e$　　D. $2e$

解析法一设切点为 (s,t), $f(x)=x\cdot\ln x$ 的导数为 $f'(x)=1+\ln x$, 可得切线的斜率为 $1+\ln s=2$, 解得 $s=e$, 则 $t=e\ln e=e=2e+m$, 即 $m=-e$, 故选 B .

法二由切线原理得 $x\ln x\ge 2x+m\Leftrightarrow\ln x\ge 2+\dfrac{m}{x}\Leftrightarrow\ln x-1\ge 1+\dfrac{m}{x}\Leftrightarrow\ln x-1=\ln\dfrac{x}{e}\ge 1-\dfrac{e}{x}=1+\dfrac{m}{x}$, 即 $m=-e$， 故选 B.

例 14.（2019•杏花岭区校级月考）若 P 是函数 $f(x)=xlnx$ 图象上的动点，点 $A(0,\ -1)$，则直线 AP 斜率的取值范围是(　　)

A. $[1,\ +\infty)$　　B. $[0,\ 1]$　　C. $(\dfrac{1}{e},\ e]$　　D. $(-\infty,\ \dfrac{1}{e}]$

解析法一因为 P 是函数 $f(x)=x\cdot\ln x$ 图象上的动,点,点 $A(0,-1)$, 设 $P\left(x_0,y_0\right)$, $x_0>0$, 则 $y_0=x_0\ln x_0$, 则直线 AP 斜率 $k=\dfrac{1+x_0\ln x_0}{x_0}$, 当 $x>1$ 时, $h'(x)>0$， $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增； 当 $0<x<1$ 时, $h'(x)<0$, $h(x)$ 在(0,1)上单调递减: 所以函数 $h(x)$ 的最小值为 $h(1)=1$, 所以 $h(x)\ge 1$, 即 $k\ge 1$, 直线 AP 斜率的取值范围是 $[1,+\infty)$, 故选 A.

法二根据切线原理得 $x\ln x\ge -1\ge kx-1$, 由此可知过点 $A(0,-1)$ 的直线当 $k<1$ 时与 $f(x)=x\ln x$ 无交点, 根据题意，直线 AP 要与 $f(x)=x\cdot\ln x$ 有交点,则斜率的取值范围是 $[1,+\infty)$, 故选 A.

例 15.（2019•沙坪坝区校级月考）曲线 $y=(2x-1)e^x$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程为____.

解析法一出 $y=(2x-1)e^x$, 得 $y'=2e^x+(2x-1)e^x=(2x+1)e^x$， 得 $y'\big|_{x=0}=1$, 则曲线 $y=(2x-1)e^x$ 在,点(0,-1)处的切线方程为 $y=x-1$. 故答案为 $y=x-1$.

法二由切线原理得 $(2x-1)e^x=2xe^x-e^x\ge 2x-(x+1)=x-1$. 故答案为 $y=x-1$.

例 16.（2019•安康月考）若曲线 $f(x)=(ax-1)e^{x-2}$ 在点 $(2，\ f(2)\ )$ 处的切线过点 $(3，\ 3)$，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为(　　)

A． $(0,+\infty)$　　B． $(-\infty,0)$　　C． $(2,+\infty)$　　D． $(-\infty,2)$

解析法一根据题意得 $f(2)=(2a-1)e^{2-2}=2a-1$, 求导 $f'(x)=ae^{x-2}+(ax-1)e^{x-2}=e^{x-2}(ax+a-1)$, 点 $(2,2a-1)$ 处的切线斜率为 $f'(2)=3a-1$, 因为切线过点 $(3,3)$, 所以 $\dfrac{(2a-1)-3}{2-3}=3a-1$, 解得 $a=1$, 得 $f'(x)=xe^{x-2}$，令 $f'(x)=0$, 解得 $x=0$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$, 故选 A.

法二由于我们熟知的切线方程一般在 $x=0$ 或者 $x=1$ 处，故此题可以考虑平移来减少运算，不妨左移 2 个单位，令 $g(x)=f(x+2)=(ax+2a-1)e^{x}$，则 $y=g(x)$ 在,点 $(0,g(0))$ 处切线过点 $(1,3)$, 根据 $x=0$ 处切线不等式 $xe^{x}\geq x$ 和 $e^{x}\geq x+1$, 则 $g(x)=(ax+2a-1)e^{x}\geq x+(2a-1)(x+1)=(3a-1)x+2a-1$, 即 $a=1$, 则 $f(x)=(x-1)e^{x-2}=\dfrac{1}{e}(x-1)e^{x-1}=\dfrac{1}{e}h(x-1)$, 同构，令 $h(x)=xe^{x}$, 易知 $h(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 单调递增, 则 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$, 故选 A.

第二讲双变量乘积最值问题

秒杀秘籍：找点+同构秒杀双变量乘积最值

根据指数切线斜率找点: $e^{x}\geq ax+b\Leftrightarrow x_0=\ln a,\quad b=a(1-\ln a)\Leftrightarrow ab=-a^2\ln\dfrac{a}{e}=-\dfrac{e^2}{2}\dfrac{a^2}{e^2}\ln\dfrac{a^2}{e^2}\leq\dfrac{e}{2}$.

根据对数切线斜率找点: $\ln x\leq ax+b\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{a},\quad b=-1-\ln a\Leftrightarrow ab=-a(1+\ln a)=-\dfrac{1}{e}ae\ln ae\leq\dfrac{1}{e^2}$.

有关 $e^{x}\geq ax+b$ 或者 $\ln x\leq ax+b$ 恒成立，求 ab 的最大值问题，最早来自于 2012 高考，此类型题就是切线+同构求出最值，在之前秒 1 里面，我们介绍了零点比大小来秒杀双变量比值以及双变量加法问题，其几何本质就是在零点位置相切，双变量乘法本质来自于切线斜率和截距乘积，在最后最值得处理中往往需要用到同构.

例 17.（2012•新课标）已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f'(1)\ e^{x-1}-f(0)x+\dfrac{1}{2}x^2$；

（1）求 $f(x)$ 的解析式及单调区间；

（2）若 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+ax+b$，求 $(a+1)b$ 的最大

解析（1）函数求导得 $f'(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)+x$，令 $x=1$，得 $f(0)=1$，所以 $f(x)=f'(1)e^{x-1}-x+\frac{1}{2}x^2$，令 $x=0$，则 $f(0)=f'(1)e^{-1}=1$，解得 $f'(1)=e$，故函数的解析式为 $f(x)=e^x-x+\frac{1}{2}x^2$，令 $g(x)=f'(x)=e^x-1+x$，得 $g'(x)=e^x+1>0$，由此知 $y=g(x)$ 在 $x\in R$ 上单调递增；当 $x>0$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$；当 $x<0$ 时，由 $f'(x)<f'(0)=0$ 得:函数 $f(x)=e^x-x+\frac{1}{2}x^2$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$,单调递减区间为 $(-\infty,0)$

(2)法一由 $f(x)\geq\frac{1}{2}x^2+ax+b\Leftrightarrow h(x)=e^x-(a+1)x-b\geq 0$ 得 $h'(x)=e^x-(a+1)$.

(1)当 $a+1\leq 0$ 时,$h'(x)>0$ 则 $y=h(x)$ 在 $x\in R$ 上单调递增,$x\to-\infty$ 时,$h(x)\to-\infty$ 与 $h(x)\geq 0$ 矛盾:(2)当 $a+1>0$ 时，$h'(x)>0\Leftrightarrow x>\ln(a+1)$，$h'(x)<0\Leftrightarrow x<\ln(a+1)$, 所以当 $x=\ln(a+1)$ 时，$h(x)_{\min}=(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-b\geq 0$, 即 $(a+1)-(a+1)\ln(a+1)\geq b$, 所以 $(a+1)b\leq(a+1)^2-(a+1)^2\ln(a+1)$，$(a+1>0)$,令 $F(x)=x^2-x^2\ln x(x>0)$ 则 $F'(x)=x(1-2\ln x)$,所以 $F'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\sqrt{e}$, $F'(x)<0\Leftrightarrow x>\sqrt{e}$, 当 $x=\sqrt{e}$ 时，$F(x)_{\max}=\frac{e}{2}$, 即当 $a=\sqrt{e}-1,b=\frac{\sqrt{e}}{2}$ 时, $(a+1)b$ 的最大值为 $\frac{e}{2}$

法二先如法一证明 $a+1>0$,令 $g(x)=e^x-x-1,g'(x)=e^x-1=0\Rightarrow x=0$,故 $g(x)_{\min}=g(0)=0$, 即 $e^x\geq x+1$ 恒成立，根据题意,$f(x)\geq\frac{1}{2}x^2+ax+b\Leftrightarrow c^x\geq(a+1)x+b\Leftrightarrow\frac{e^x}{a+1}=e^{x-\ln(a+1)}\geq x-\ln(a+1)+1=x+\frac{h}{a+1}$,根据切线意义可知: $-\ln(a+1)+1=\frac{b}{a+1}\Leftrightarrow b=(a+1)[1-\ln(a+1)]=-(a+1)\ln\frac{a+1}{e}$,由同构令 $h(x)=-x\ln x$,由 $h'(x)=-\ln x-1=0$ 得，$x=\frac{1}{e}$, 当 $x<\frac{1}{e}$ 时，$h'(x)>0$, 当 $x>\frac{1}{e}$ 时，, $h'(x)<0$, 故

$h(x)_{\max}=h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$, 所以 $(a+1)b=-(a+1)^2\ln\frac{a+1}{e}=-\frac{e^2}{2}\frac{(a+1)^2}{e^2}\ln\frac{(a+1)^2}{e^2}=\frac{e^2}{2}h\left(\frac{(a+1)^2}{e^2}\right)\le\frac{e}{2}$.

总结: $e^x\ge ax+b\Leftrightarrow e^{x-\ln a}\ge x-\ln a+1=x+\frac{b}{a}\Leftrightarrow ab=-a^2\ln\frac{a}{e}=-\frac{e^2}{2}\frac{a^2}{e^2}\ln\frac{a^2}{e^2}\le\frac{e}{2}$

同理: $x\ge\ln(ax+b)\Leftrightarrow e^x\ge ax+b\Leftrightarrow ab\le\frac{e}{2}$ (指对转化)也可以

$x\ge\ln(ax+b)\Leftrightarrow x=\ln a+x+\frac{b}{a}-1\ge\ln a+\ln\left(x+\frac{b}{a}\right)\Leftrightarrow ab=a^2(1-\ln a)\le\frac{e}{2}$

例 18.(2020•四川模拟)已知直线 $y=2x$ 与曲线 $f(x)=ln(ax+b)$ 相切，则 ab 的最大值为(　　)

A. $\frac{e}{4}$　　B. $\frac{e}{2}$　　C. e　　D. $2e$

解析法一设切点为 $\left(x_0,\ln\left(ax_0+\mathrm{b}\right)\right)$，则由 $\mathrm{f}'\left(x_0\right)=\frac{a}{ax_0+\mathrm{b}}=2$，得 $a_0+\mathrm{b}=\frac{1}{2}a(a>0)$，由 $\ln\left(\mathrm{ax}_0+\mathrm{b}\right)=2\mathrm{x}_0$，得 $x_0=\frac{1}{2}\ln\left(ax_0+b\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}$，则 $b=\frac{a}{2}-ax_0=\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}$，有 $ab=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2\ln\frac{a}{2}(a>0)$，$g(a)=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2\ln\frac{a}{2}$，则 $g'(a)=a\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{a}{2}\right)$. 故当 $0<a<2\sqrt{e}$ 时，$g'(a)>0$: 当 $a>2\sqrt{e}$ 时，$g'(a)<0$. 当 $a=2\sqrt{e}$ 时，$g(a)$ 取极大值也是最大值为 $g(2\sqrt{e})=e$, 故选 C.

法三由 $2x\ge\ln(ax+b)=\ln\left[\frac{a}{2}\cdot\left(2x+\frac{2b}{a}\right)\right]\Leftrightarrow 2x=\ln\frac{a}{2}+\left(2x+\frac{2b}{a}\right)-1\ge\ln\frac{a}{2}+\ln\left(2x+\frac{2b}{a}\right)\Leftrightarrow ab=\frac{a^2}{2}\left(1-\ln\frac{a}{2}\right)$ 同构有 $h(x)=-x\ln x\le\frac{1}{e}$, 则 $ab=\frac{a^2}{2}\left(1-\ln\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{2}\ln\frac{a}{2e}=-e^2\cdot\frac{a^2}{4e^2}\ln\frac{a^2}{4e^2}\le e^2\cdot\frac{1}{e}=e$, 故选 C.

法三由 $2x\ge\ln(ax+b)\Leftrightarrow e^{2x}\ge ax+b\Leftrightarrow e^{2x-\ln\frac{a}{2}}\ge 2x-\ln\frac{a}{2}+1=2x+\frac{2b}{a}\Leftrightarrow ab=\frac{a^2}{2}\left(1-\ln\frac{a}{2}\right)$,

以下同法二

法四暴力结论: $x\ge\ln(ax+b)\Leftrightarrow ab\le\frac{e}{2}$, 则 $2x\ge\ln(ax+b)\Leftrightarrow x\ge\ln\left(\frac{a}{2}x+b\right)\Leftrightarrow\frac{a}{2}b\le\frac{e}{2}\Leftrightarrow ab\le e$, 俗话说大题用套路，小题用结论，虽然某些老师反感用结论来秒杀，但在摸清楚结论来源后，才知道结论如何关键时候关键使用，从而达到高观点低运算.

例 19.（2019•沧州月考）已知常数 a，$b\in R$，且不等式 $x-alnx+a-b<0$ 解集为空集，则 ab 的最大值为____.

解析法一不等式 $x-a\ln x+a-b<0$ 的解集为空集，即任意的正数 x,都有 $x-a\ln x+a-b\geq 0$ 恒成立，即 $x+a-b\geq a\ln x$ 恒成立,当题目条件成立时, $a>0$ 是必然的，由 $a\leq 0$ 时, $f(x)=x-a\ln x+a-b$,导数为 $f'(x)=1-\dfrac{a}{x}>0$ 恒成立， $f(x)$ 单调递增，不可能不等式 $x-a\ln x+a-b<0$ 解集为空集，设曲线 $y=a\ln x$ 的切线 l 与直线 $y=x+a-b$ 平行，由 $\dfrac{a}{x}=1$, 解得 $x=a$,切点为 $(a,a\ln a)$, 则直线 l 方程为 $y=x+a\ln a-a$.于是必有 $x+a-b\geq x+a\ln a-a$, 即 $b\leq 2a-a\ln a$, 当 ab 取得最大值时，必然 $b>0$, 于是 $ab\leq a\cdot a(2-\ln a)$ ，构造函数 $f(x)=x^2(2-\ln x)$, 导数 $f'(x)=3x-\ 2x\ln x, x>0$, 当 $x>e^{\frac{3}{2}}$ 时, $f'(x)<0, f(x)$ 递减:当 $0<x<e^{\frac{3}{2}}$ 时, $f'(x)>0, f(x)$ 递增.则 $x=e^{\frac{3}{2}}$ 时，取得极大值，也为最大值 $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=e^3\left(2-\ln e^{\frac{3}{2}}\right)=\dfrac{1}{2}e^3$.故答案为 $\dfrac{1}{2}e^3$.

法二由切线原理 $x+a-b\geq a\ln x \Leftrightarrow \dfrac{x}{a}-\dfrac{b}{a}+1\geq \ln x$, 由手 $x-1\geq \ln x$, 故 $\dfrac{x}{a}-1\geq \ln\dfrac{x}{a}=\ln x-\ln a$, 所以原不等式可以转化为 $\dfrac{x}{a}-\dfrac{b}{a}+1\geq \ln x-\ln a-\dfrac{b}{a}+2=\ln x$, 故 $b=-a(\ln a-2)=-a\ln\dfrac{a}{e^2}$, 同构, $h(x)=-x\ln x$, 易得 $h(x)_{\max}=h\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}$, 故 $ab=-a^2\ln\dfrac{a}{e^2}=-\dfrac{e^4}{2}\cdot\dfrac{a^2}{e^4}\ln\dfrac{a^2}{e^4}\leq\dfrac{e^4}{2}\cdot\dfrac{1}{e}=\dfrac{e^3}{2}$. 故答案为 $\dfrac{1}{2}e^3$.

例 20.（2020•景德镇一模）已知函数 $f(x)=(\dfrac{1}{x}+a)ln(x+\dfrac{1}{a})(x>0)$

（1）当 $a\geqslant 1$ 时，证明函数 $f(x)$ 是增函数；

（2）是否存在实数 k，使得只有唯一的正数 a，当 $x>0$ 时恒有： $f(x)\leqslant k(x+\dfrac{1}{a})$，若这样的实数 k 存在，试求： k， a 的值，若不存在，请说明理由.

解析(1)因为函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}+a\right)\ln\left(x+\dfrac{1}{a}\right)(x>0)$, 所以 $f'(x)=-\dfrac{\ln\left(x+\dfrac{1}{a}\right)}{x^2}+\dfrac{\dfrac{1}{x}+a}{x+\dfrac{1}{a}}=\dfrac{ax-\ln\left(x+\dfrac{1}{a}\right)}{x^2}$,

令 $g(x)=ax-\ln\left(x+\dfrac{1}{a}\right)$ 且 $x>0$, 则 $g'(x)=a-\dfrac{a}{ax+1}=\dfrac{a^2x}{ax+1}>0$, 因此函数 $g(x)$ 为增函数， $g(x)>g(0)\ =\ln a\geq 0$,故 $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}>0$,因此函数 $f(x)$ 是增函数.

(2) 法一 令 $x=1$ 时，可知 $k>0$, 由 $x>0$ 时恒有 $f(x)\le k\left(x+\frac{1}{a}\right)$, 得 $\ln\left(x+\frac{1}{a}\right)\le\frac{kx}{a}$, 即 $\frac{kx}{a}-\ln\left(x+\frac{1}{a}\right)\ge 0$,令 $g(x)=\frac{kx}{a}-\ln\left(x+\frac{1}{a}\right)$ 且 $(x>0)$, $g'(x)=\frac{k}{a}-\frac{a}{ax+1}=\frac{akx-a^2+k}{a(ax+1)}(x>0)$, 由于 $g'\left(x_0\right)=0$, 得 $x_0=\frac{a^2-k}{ak}$.

①当 $0<k<a^2$ 时, $x\in\left(0,x_0\right)$ 时, $g'(x)<0, g(x)$ 在区间 $\left(0,x_0\right)$ 上为减数:当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 在区间 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上为增函数 ; $g(x)_{\min}=g\left(x_0\right)=1-\frac{k}{a^2}-\ln\frac{a}{k}\ge 0$, 所以 $\frac{k}{a^2}+\ln\frac{a}{k}\le 1$, 令 $h(a)=\frac{k}{a^2}+\ln\frac{a}{k}$, $(a>\sqrt{k})$, 因此存在唯一的正数 $a>\sqrt{k}$, 使得 $h(a)\le 1$, 故只能 $h(a)_{\min}=1$, $h'(a)=\frac{1}{a}-\frac{2k}{a^3}=\frac{a^2-2k}{a^3}$, $h'\left(a_0\right)=0$, 可得: $a_0=\sqrt{2k}(a>\sqrt{k})$: 当 $a\in\left(0,a_0\right)$ 时, $h'(a)<0$, $h(a)$ 在区间 $a\in\left(0,a_0\right)$ 上为减丞数:当 $a\in\left(a_0,+\infty\right)$ 时, $h'(a)>0, h(a)$ 在区间 $\left(a_0,+\infty\right)$ 上为增函数,故 $h(a)_{\min}=h\left(a_0\right)=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{\frac{2}{k}}=1$, 则 $k=\frac{2}{e}$,此时 a 只有唯一值 $\frac{2\sqrt{e}}{e}$;

②当 $k\ge a^2$ 时, $g'(x)>0$, 可得 $g(x)$ 为增函数, $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\ln a\ge 0, a\ge 1$, 故 $k\ge 1$;

(i) $k>1$ 给定时，满足 $1\le a<k$ 的 a 不唯一;

(ii) $k=1$ 时，满足 $k\ge a^2$ 的 a 只能 $a=1$, 但 $a=2$ 时满足 $k<a^2$,且 $\frac{1}{a^2}+\ln a\le 1$, 因此 $k=1$ 时, a 值也不唯一.综上,存在 $k=\frac{2}{e}$, a 只有唯一值 $\frac{2\sqrt{e}}{e}$, 当 $x>0$ 时恒有 $f(x)\le k\left(x+\frac{1}{a}\right)$

法二 令 $x+\frac{1}{a}=t$, 根据题意 $k\ge\frac{a\ln t}{t-\frac{1}{a}}$, 即 $\frac{k}{a}\left(t-\frac{1}{a}\right)\ge\ln t$ 对 $t\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 恒成立，构造切线不等式 $x\ge\ln x+1$ ，则 $\frac{k}{a}t-\frac{k}{a^2}\ge\ln\frac{k}{a}t+1-\frac{k}{a^2}=\ln t+\ln\frac{k}{a}+1-\frac{k}{a^2}=\ln t\Leftrightarrow\frac{1}{a}=\frac{a}{k}\left(\ln\frac{k}{a}+1\right)$, 令 $k=ma$, 即 $\frac{m}{k}=\frac{1}{m}(\ln m+1)$, 要使 a 取得唯一,即 $\frac{m}{k}=\frac{1}{m}(\ln m+1)\Leftrightarrow\frac{1}{k}=\frac{1}{m^2}(\ln m+1)=\frac{\ln em}{m^2}$ 仅有唯一解：同构,令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$, 求导后另得 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$, 故 $\frac{1}{k}=\frac{e^2}{2}\frac{\ln e^2m^2}{e^2m^2}=\frac{e^2}{2}h\left(e^2m^2\right)\le\frac{e}{2}$, 当仅当 $m=\frac{1}{\sqrt{e}}$, 即

存在唯一 $a=\frac{2}{\sqrt{e}}$，使得 $k=\frac{2}{e}$，满足当 $x>0$ 时恒有 $f(x)\le k\left(x+\frac{1}{a}\right)$.

法三切线原理得 $\ln\left(x+\frac{1}{a}\right)\le\frac{kx}{a}\Leftrightarrow\ln\left(\frac{ax}{k}+\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{a}{k}+\ln\left(x+\frac{k}{a^2}\right)\le\ln\frac{a}{k}+x+\frac{k}{a^2}-1=x\Leftrightarrow 1-\ln\frac{a}{k}=\frac{k}{a^2}$，令 $k=ma$，以下解法同法二。.

总结：利用 $\ln(ax+b)\le x$ 恒成立时，$ab_{\max}=\frac{e}{2}$，此题 $\ln\left(x+\frac{1}{a}\right)\le\frac{kx}{a}\Leftrightarrow\ln\left(\frac{ax}{k}+\frac{1}{a}\right)\le x$，本质就是 $\frac{1}{k}=\frac{a}{k}\cdot\frac{1}{a}$ 取得最大值 $\frac{e}{2}$ 时，k 唯一.

第三讲公切线问题

在之前例 8 介绍了同一函数平移前后公切线问题，在秒 1 中，我们谈到了数形结合来分析是否存在公切线，以及公切线的条数，现在我们来谈谈共点公切线和非共点公切线的解法。一旦遇到解答题，有的同学直接画个图，被阅卷老师扣分了，显然那样是不规范，只能拿答案分。

共切点公切线定理：当 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 与公切线切于同一点，设切点为 $P(x_0,y_0)$，则有 $\begin{cases}f'(x_0)=g'(x_0)\\f(x_0)=g(x_0)\end{cases}$

例 21.（2019•洛阳二模）已知 $a>0$，曲线 $f(x)=3x^2-4ax$ 与 $g(x)=2a^2lnx-b$ 有公共点，且在公共点处的切线相同，则实数 b 的最小值为(　　)

A．0　　B．$-\frac{1}{e^2}$　　C．$-\frac{2}{e^2}$　　D．$-\frac{4}{e^2}$

解析设 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)(x>0)$ 在公共,点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线相同，$f'(x)=6x-4a$，$g'(x)=\frac{2a^2}{x}$，

由题意 $f(x_0)=g(x_0)$，$f'(x_0)=g'(x_0)$，得 $3x_0^2-4ax_0=2a^2\ln x_0-b$，$6x_0-4a=\frac{2a^2}{x_0}$，由 $3x_0-2a=\frac{a^2}{x_0}$ 得 $x_0=a$ 或 $x_0=-\frac{1}{3}a$　(舍去)，即有 $b=a^2+2a^2\ln a$.

法一令 $h(t)=t^2+2t^2\ln t(t>0)$，则 $h'(t)=4t(1+\ln t)$，当 $4t(1+\ln t)>0$，即 $t>\frac{1}{e}$ 时，$h'(t)>0$：当 $4t(1+\ln t)<0$，即 $0<t<\frac{1}{e}$ 时，$h'(t)<0$. 故 $h(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 为减函数,在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 为增函数,于是 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最小值为 $h\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e^2}$，故 b 的最小值为 $-\frac{1}{e^2}$，故选 B.

法二同构，令 $h(x)=x\ln x,$ 显然 $h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e},\quad b=a^{2}\left(1+\ln a^{2}\right)=\frac{1}{e}ea^{2}\cdot\ln ea^{2}=\frac{1}{e}h\left(ea^{2}\right)\geq.-\frac{1}{e^{2}}$

例 22.（2019•安庆期末）若存在 $a>0$，使得函数 $f(x)=6a^{2}lnx$ 与 $g(x)=x^{2}-4ax-b$ 的图象在这两个函数图象的公共点处的切线相同，则 b 的最大值为(　　)

A. $-\frac{1}{3e^{2}}$　　B. $-\frac{1}{6e^{2}}$　　C. $\frac{1}{6e^{2}}$　　D. $\frac{1}{3e^{2}}$

解析设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的公共,点为 $\left(x_{0},y_{0}\right)$, 求导 $f^{'}(x)=\frac{6a^{2}}{x},g^{'}(x)=2x-4a$, 得 $2x_{0}-4a=\frac{6a^{2}}{x_{0}}$,则 $x^{2}-2ax_{0}-3a^{2}=0$, 解得 $x_{0}=-a$ 或 $3a$, 又因为 $x_{0}>0$, 且 $a>0$, 所以 $x_{0}=3a$. 由 $f\left(x_{0}\right)=g\left(x_{0}\right)$，得 $x_{0}^{2}-4ax_{0}-b=6a^{2}\ln x_{0}$，$b=-3a^{2}-6a^{2}\ln 3a(a>0)$，由同构函数，令 $h(x)=-x\ln x,\quad h(x)_{\max}=h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e},$ 则 $b=-3a^{2}(1+2\ln 3a)=-\frac{1}{3e}9ea^{2}\ln 9ea^{2}=\frac{1}{3e}h\left(9ea^{2}\right)\leq\frac{1}{3e^{3}}$,当仅当 $a=\frac{1}{3e}$ 等号成立，故选 D.

总结：同构并不神秘，同构帮助我们快速求出最值，快速时找问题的本质，导数的世界，并非一切都在找隐零点，并非一切都从多次求导开始，我们本节的切线算法，源于同构思想。

例 23.（2020•湖南师大附中高三月考）已知 $f(x)=e^{x}$(e 为自然对数的成数)，$g(x)=lnx+2$，直线 l 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公切线，则直线 l 的方程为____.

解析法一 根据题意, 设直线 l 与 $f(x)=e^{x}$ 相切于点 $\left(m,e^{m}\right)$, 与 $g(x)$ 相切于,点 $(n,\ln n+2)$, 对于 $f(x)=e^{x}$,其导数为 $f^{'}(x)=e^{x}$, 则有 $k=f^{'}(m)=e^{m}$, 则直线 l 的方程为 $y-e^{m}=e^{m}(x-m)$, 即 $y=e^{m}x+e^{m}(1-m)$, 对于 $g(x)=\ln x+2$, 其导函数为 $g^{'}(x)=\frac{1}{x}$, 则有 $k=g^{'}(n)=\frac{1}{n}$, 所以直线 l 的方程为 : $y-(\ln n+2)=\frac{1}{n}(x-n)$,即 $y=\frac{1}{n}x+(\ln n+1)$, 直线 l 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公切线, 则 $\begin{cases} e^{m}=\frac{1}{n} \\ (1-m)e^{m}=\ln n+1 \end{cases}$, 变形可得 $\frac{(1-m)(1-n)}{n}=0$, 则 $m=1$ 或 $n=1$, 当 $m=1$ 时,直线 / 的方程为 $y=ex$, 当 $n=1$ 时,直线 / 的方程为 $y=x+1$, 故直线 / 的方程为 $y=ex$ 或 $y=x+1$. 故答案为 $y=ex$ 或

$y=x+1$.

法二 设切线为 $y=ax+b$, 满足 $e^{x}\geq ax+b\geq \ln x+2, e^{x}\geq ax+b\Leftrightarrow e^{x-\ln a}\geq x-\ln a+1=x+\frac{b}{a}\Leftrightarrow b=a(1-\ln a)$，$ax+b\geq \ln x+2\Leftrightarrow ax-1+b-1\geq \ln ax+b-1=\ln x+\ln a+b-1=\ln x \Leftrightarrow b=1-\ln a$, 两式联立 $:a(1-\ln a)=1-\ln a$，即 $(a-1)(1-\ln a)=0$, 所以 $a=1$ 或 $a=e$, 故直线 l 的方程为 $y=ex$ 或 $y=x+1$. 故答案为 $y=ex$ 或 $y=x+1$.

总结:牛 $e^{x}\geq x+1\geq \ln x+2$ 可知，一条公切线为 $y=x+1$, 显然， $f(x)=e^{x}$ 与 $g(x)=\ln x+2$ 无公共点,且两

非共切点公切线定理:当 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 与公切线 l 分别切手点 $P(x_1,y_1)$ 和点 $Q(x_2,y_2)$, 则一定有

$$f^{'}(x_1)=g^{'}(x_2)=\frac{g(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

非共切点公切线定理：当 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 与公切线 l 分别切于点 $P(x_1,y_1)$ 和点 $Q(x_2,y_2)$，则一定有 $f'(x_1)=g'(x_2)=\frac{g(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

例 24.（2019•新课标Ⅱ）已知函数 $f(x)=lnx-\frac{x+1}{x-1}$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性，并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点；

（2）设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点，证明曲线 $y=lnx$ 在点 $A(x_0$， $lnx_0)$ 处的切线也是曲线 $y=e^{x}$ 的切线.

解析(1)函数 $f(x)=\ln x-\frac{x+1}{x-1}$, 定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$, 求导 $f^{'}(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}>0(x>0$ 且 $x\neq 1)$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增:

①在 $(0,1)$ 区间取值有 $\frac{1}{e^2},\frac{1}{e}$ 代入函数,得 $f\left(\frac{1}{e^2}\right)<0, f\left(\frac{1}{e}\right)>0$, $f\left(\frac{1}{e^2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{e}\right)<0$, 止函数零点的定义得, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 有且仅有一个零点;

②在 $(1,+\infty)$ 区间，区间取值有 e,e^2 代入函数,又因为 $f(e)<0$, $f\left(e^2\right)>0$, $f(e)\cdot f\left(e^2\right)<0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有且仅有一个零,点,故 $f(x)$ 在定义域内有且仅有两个零点;

(2)法一 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点,则有 $\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$, 曲线 $y=\ln x$, 则有 $y'=\dfrac{1}{x}$, 早直线的,点斜式可得曲线的切线方程，曲线 $y=\ln x$ 在,点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线方程为: $y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$, 即 $y=\dfrac{1}{x_0}x-1+\ln x_0$，将 $\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$ 代入,即有 $y=\dfrac{1}{x_0}x+\dfrac{2}{x_0-1}$, 而曲线 $y=e^x$ 的切线中，在,点 $\left(\ln\dfrac{1}{x_0},\dfrac{1}{x_0}\right)$,处的切线方程为: $y-\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}\left(x-\ln\dfrac{1}{x_0}\right)=\dfrac{1}{x_0}x+\dfrac{1}{x_0}\ln x_0$, 将 $\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$ 代入化简,即 $y=\dfrac{1}{x_0}x+\dfrac{2}{x_0-1}$,故曲线 $y=\ln x$ 在,点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线，故得证.

法二(逆向反推)因为 $k=(\ln x)'\big|_{x=x_0}=\dfrac{1}{x_0}$, 得 $k=e^m=\dfrac{1}{x_0}\Leftrightarrow m=-\ln x_0=-\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$, 故曲线 $y=e^x$ 在,点 (m,e^m) 的切线方程为 $y-e^m=e^m(x-m)$, 即 $y=\dfrac{1}{x_0}x+\dfrac{1+\ln x_0}{x_0}$, $x=x_0$ 时, $y=1+\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{1}{x_0}\cdot\dfrac{x_0+1}{x_0-1}=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}=\ln x_0$ 显然，切线过,点 $A(x_0,\ln x_0)$, 故曲线 $y=\ln x$ 在,点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线.

法三利用公式 $g'(x_0)=h'(m)=\dfrac{g(x_0)-h(m)}{x_0-m}$ 来证明，其中 $g(x)=\ln x$, $h(x)=e^x$, 令 $g'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}=h'(m)=e^m$ 即满足 $m=-\ln x_0$ 时, $\dfrac{g(x_0)-h(m)}{x_0-m}=\dfrac{\ln x_0-e^m}{x_0-m}=\dfrac{\ln x_0-\dfrac{1}{x_0}}{x_0+\ln x_0}=\dfrac{\dfrac{x_0+1}{x_0-1}-\dfrac{1}{x_0}}{x_0+\dfrac{x_0+1}{x_0-1}}$ $=\dfrac{x_0^2+1}{x_0(x_0^2+1)}=\dfrac{1}{x_0}$, 命题得证.

例 25.（2019•衢州期中）设函数 $f(x)=ax^2$， $g(x)=lnx$

（1）当 $a=-1$ 时，求函数 $F(x)=g(x)+f(x)+x$ 的单调区间;

（2）当 $a>0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 有两条公切线，求实数 a 的取值范围;

（3）若 $g(x)\geqslant m+1-x-\dfrac{m}{x}$ 对 $x\in[1，+\infty)$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

解析 （1）当 $a=-1$ 时，$F(x)=g(x)+f(x)+x=\ln x-x^2+x, F'(x)=\frac{1}{x}2x+1=\frac{-2x^2+x+1}{x}=\frac{-(x-1)(2x+1)}{x}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$F'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$；

(2)设公切线切 $y=f(x)$ 于点 $\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$，切 $y=g(x)$ 于 $\left(x_2,y_2\right)$，则 $f'\left(x_1\right)=g'\left(x_2\right)=\frac{g\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}$，即 $2ax_1=\frac{1}{x_2}=\frac{\ln x_2-ax_1^2}{x_2-x_1}$，得 $-\frac{1}{4a}=x_2^2\ln x_2-x_2^2$.

法一构造函数 $h(x)=x^2\ln x-x^2$，$h'(x)=x(2\ln x-1)$，$x>0$. 当 $x\in\left(0,e^{\frac{1}{2}}\right)$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 递减，当 $x\in\left(e^{\frac{1}{2}},+\infty\right)$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 递增. $h(x)_{\min}=h\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2}e$，又当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to+\infty$，当 $x\to0^+$ 时 $h(x)\to0$，即 $-\frac{1}{2}e<-\frac{1}{4a}<0$，得 $a>\frac{1}{2e}$；

法二同构，令 $h(x)=x\ln x$，$h'(x)=\ln x+1=0$ 时，$x=\frac{1}{e}$，当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>\frac{1}{e}$ 时，$h'(x)>0$，故 $h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$，且当 $x\to0$ 时，$h(x)\to0$ 当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to+\infty$，根据题意 $-\frac{1}{4a}=x_2^2\ln x_2-x_2^2$ 有两根，则 $-\frac{1}{4a}=x_2^2\ln x_2-x_2^2=x_2^2\ln\frac{x_2}{e}=\frac{e^2}{2}\frac{x_2^2}{e^2}\ln\frac{x_2^2}{e^2}=\frac{e^2}{2}h\left(\frac{x_2^2}{e^2}\right)\in\left(-\frac{e}{2},0\right)$，得 $a>\frac{1}{2e}$；

(3)法一由 $g(x)\geq m+1-x-\frac{m}{x}\Rightarrow\ln x+\frac{m}{x}+x-m-1\geq0$. 令 $h(x)=\ln x+\frac{m}{x}+x-m-1\Leftrightarrow h(x)_{\min}\geq0$ 恒成立；可得 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}+1=\frac{x^2+x-m}{x^2}$，再令 $k(x)=x^2+x-m(x\geq1)$，显然函数 $k(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数，则 $k(x)_{\min}=h(1)=2-m$；

①当 $m\leq2$ 时，函数 $k(x)\geq0$，则 $h'(x)\geq0$，得 $h(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)_{\min}=h(1)=0\geq0$ 恒成立，故满足题意.

②当 $m>2$ 时，令 $k(x)=x^2+x-m=0$，得 $x_1=\frac{-1+\sqrt{1+4m}}{2}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{1+4m}}{2}$（舍）. 所以当

$x\in\left[1,\frac{\sqrt{1+4m}-1}{2}\right)$ 时，$k(x)<0$, 则 $h(x)$ 在 $\left[1,\frac{\sqrt{1+4m}-1}{2}\right)$ 上单调递减，当 $x\in\left(\frac{\sqrt{1+4m}-1}{2},+\infty\right)$ 时，$k(x)>0$, 则 $h(x)$ 在 $\left(\frac{\sqrt{1+4m}-1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，又因为 $h(1)=0$, 所以极小值 $h\left(\frac{\sqrt{1+4m}-1}{2}\right)<0$, 不可能恒成立，不符合题意．综合上述，实数 m 的取值范围是 $(-\infty,2]$．则 $h(1)=0,\quad h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}+1=\frac{x^2+x-m}{x^2},\quad h'(1)=2-m;$

①当 $m\le 2$ 时,得 $h'(x)\ge 0$, 得 $h(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单增，$h(x)_{\min}=h(1)=0\ge 0$ 恒成立，故满足题意：

②当 $m>2$ 时，$\ln x\le x-1,\quad h(x)=\ln x+\frac{m}{x}+x-m-1\le 2(x-1)-\frac{m}{x}(x-1)=\frac{1}{x}(2x-m)(x-1)$, 显然 $\frac{1}{x}(2x-m)(x-1)\le 0$ 在区间 $\left[1,\frac{m}{2}\right]$ 恒成立，故与题意矛盾,综上实数 m 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

总结：在涉及“端,点效应"的题型中，通常通过洛必达法则水出参数取值范围，然后在写证明过程时，在证明矛盾区间时往往需要切线放缩，合理利用切线方程，能达到事半功倍。.

例 26.（2019•江苏期中）已知函数 $f(x)=e^x$，$g(x)=-x^2+bx+c$，其中 e 为自然对数的底数，b，$c\in R$．

（1）若 $b=c$，求函数 $y=f(x)g(x)$ 的单调增区间（用 b 表示）;

（2）若对任意的 $x\in R$，$f(x)\geqslant g(x)$（仅当 $x=1$ 时，“$=$”成立)，求 b，c 的值;

（3）若 $b=1$，试确定曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的公切线的条数．

解析 (1) 当 $b=c$ 时，$y=f(x)g(x)=e^x\left(-x^2+bx+c\right)=e^x\left(-x^2+bx+b\right),\quad y'=-e^x(x-b)(x+2)$, 当 $b<-2$ 时单调增区间为 $(b,-2)$，当 $b=-2$ 时，无单调增区间，当 $b>-2$ 时，单调增区间为 $(-2,b)$;

(2)令 $h(x)=f(x)-g(x)=e^x+x^2-bx-c,\quad h'(x)=e^x+2x-b,\quad h''(x)=e^x+2$, 所以 $h'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，又因为 $h(x)\ge 0$ 仅当 $x=1$ 时,"="成立,所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$h'(1)=0,\quad$ 所以 $b=e+2,\quad h(1)=e+1-e-2-c=0,\quad$ 所以 $c=-1$;

(3)法一设函数 $y=f(x)$ 上的切点为 (x_1,y_1), 函数 $y=g(x)$ 上的切点为 (x_2,y_2), 所以切线方程分别为 $y=e^{x_1}\left(x-x_1+1\right),\quad y=\left(-2x_2+1\right)\left(x-x_2\right)-x_2^2+x_2+c,\quad$ 所以可以解得 $e^{x_1}=-2x_2+1$, 即 $x_1=\ln\left(-2x_2+1\right)$, 所以 $\left(-2x_2+1\right)\left(1-x_1\right)=x_2^2+c,\quad$ 令 $t=1-2x_2>0,\quad c=t(1-\ln t)-\frac{t^2-2t+1}{4},\quad$ 令

$\varphi(t)=t(1-\ln t)-\dfrac{t^2-2t+1}{4}$, 所以 $\dot{\varphi}'(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{t}{2}-\ln t$, $\varphi''(t)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{t}<0$, 所以 $\varphi'(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$\varphi'(1)=0$, 所以 $\varphi(t)$ 在 $(0,1)$ 上 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减, $t\to 0$, $\varphi(t)\to -\dfrac{1}{4}$, $t\to+\infty$, $\varphi(t)\to-\infty$, 所以当 $c=1$ 或 $c\le -\dfrac{1}{4}$ 时有一条公切线,当 $-\dfrac{1}{4}<c<1$ 时有从条公切线.

法二设公切线方程为 $y=kx+m$，根据几何意义,此时一定满足 $e^x\ge kx+m\ge -x^2+x+c$, 早手 $e^x\ge x+1$, 故 $e^{x-\ln k}\ge x-\ln k+1=x+\dfrac{m}{k}\Leftrightarrow m=k(1-\ln k)$, 又 $kx+m\ge -x^2+x+c\Leftrightarrow x^2+(k-1)x+m-c\ge 0$ 时，此不等式 $\Delta=(k-1)^2-4(m-c)=0\Leftrightarrow c=m-\dfrac{(k-1)^2}{4}$ 解的情况即为公切线条数, 构造函数

$\varphi(t)=t(1-\ln t)-\dfrac{(t-1)^2}{4}$ 以下求导过程同法一..

例 27.（2019•东城区期末）已知函数 $f(x)=e^x$， $g(x)=lnx$.

（Ⅰ）当 $x>0$ 时，证明：$g(x)<x<f(x)$；

（Ⅱ）$f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象是否存在公切线（公切线：同时与两条曲线相切的直线）？如果存在，有几条公切线，请证明你的结论.

解析(1)当 $x>0$ 时,设函数 $h(x)=g(x)-x=\ln x-x$, 则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$, 当 $x>1$ 时, $h'(x)<0$, 则 $h(x)$ 单调递减;当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$, 则 $h(x)$ 单调递增：可得 $h(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值-1，所以 $h(x)\le -1<0$; 同构，$x-f(x)=x-e^x=\ln e^x-e^x=h\left(e^x\right)<0$, 综上可得当 $x>0$ 时, $g(x)<x<f(x)$;

(2)曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 公切线的条数是 2 条，证明如下:

法一设公切线与 $g(x)=\ln x, f(x)=e^x$ 的切,点分别为 $(m,\ln m),\left(n,e^n\right), m\ne n$, 因为 $g'(x)=\dfrac{1}{x}, f'(x)=e^x$,

可得 $\begin{cases}\dfrac{1}{m}=e \\ \dfrac{\ln m-e^n}{m-n}=\dfrac{1}{m}\end{cases}$, 化简得 $(m-1)\ln m=m+1$, 当 $m=1$ 时,式子 $(m-1)\ln m=m+1$ 不成立;当 $m\ne 1$

时，，

$y=\dfrac{2}{x-1}$ 的丞数图象，如图 $10-4-1$ 所示，则有图象可知 $y=\ln x-1$ 和 $y=\dfrac{2}{x-1}$ 的丞数图象有两个交点,

可得

方程 $\ln m=\dfrac{m+1}{m-1}$ 有两个实根,则曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 公切线的条数是 2 条.

法二设公切线为 $y=ax+b$, 满足 $e^{x}\geq ax+b\geq\ln x, e^{x}\geq ax+b\Leftrightarrow e^{x-\ln a}\geq x-\ln a+1=x+\dfrac{b}{a}\Leftrightarrow b=a(1-\ln a)$, $ax+b\geq\ln x\Leftrightarrow ax+b\geq\ln ax+1+b=\ln x+\ln a+b+1=\ln x\Leftrightarrow b=-1-\ln a$ 两式联立得 $a(1-\ln a)=-1-\ln a\Leftrightarrow a=\dfrac{\ln a+1}{\ln a-1}$, 令 $\ln a=t(t\in R)$, 即 $e^{t}=\dfrac{t+1}{t-1}=1+\dfrac{2}{t-1}$, 显然又两个交点.

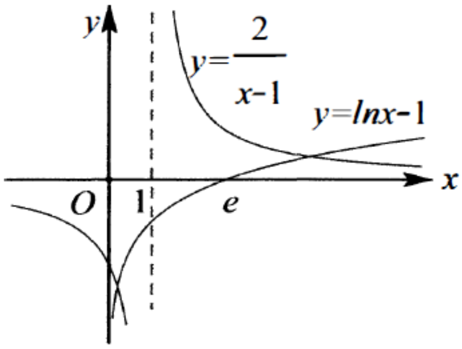


图 10-4-1

总结：非共切古公切线问题，涉及指数和对数，都可以采用切线放缩方式来避免找古运算，在二次函数计算中可以想到判别式，总之数学的世界，有通法，也有巧法，下面我们来看看高考压轴题的巧法，2018 年天津卷，难度很大，算是公切线的最难压轴题。.

例 28.（2018•天津）已知函数 $f(x)=a^{x}$， $g(x)=\log_{a}x$，其中 $a>1$.

（Ⅰ）求函数 $h(x)=f(x)-xlna$ 的单调区间；

（Ⅱ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_{1}$， $f(x_{1}))$ 处的切线与曲线 $y=g(x)$ 在点 $(x_{2}$， $g(x_{2}))$ 处的切线平行，证明 $x_{1}+g(x_{2})=-\dfrac{2lnlna}{lna}$；

（Ⅲ）证明当 $a\geqslant e^{\frac{1}{e}}$ 时，存在直线 l，使 l 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，也是曲线 $y=g(x)$ 的切线.

解析(1)由已知, $h(x)=a^{x}-x\ln a$, 有 $h'(x)=a^{x}\ln a-\ln a$, 令 $h'(x)=0$, 解得 $x=0$.

由 $a>1$, 可知当 x 变化时, $h'(x), h(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty，0)$	0	$(0，+\infty)$
$h'(x)$	−	0	+
$h(x)$	↓	极小值	↑

(2)证明：由 $f'(x)=a^{x}\ln a$, 可得曲线 $y=f(x)$ 在,点 $\left(x_{1}, f\left(x_{1}\right)\right)$ 处的切线的斜率为 $a^{x_{1}}\ln a$. 由

$g^{'}(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$ 可得曲线 $y=g(x)$ 在点 $\left(x_2,g\left(x_2\right)\right)$ 处的切线的斜率为 $\dfrac{1}{x_2\ln a}$.这两条切线平行,故有

$a^{x_1}\ln a=\dfrac{1}{x_2\ln a}$, 即 $x_2a^{x_1}(\ln a)^2=1$, 两边取以 a 为底数的对数,得 $\log_a x_2+x_1+2\log_a\ln a=0$, 所以

$x_1+g\left(x_2\right)=-\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}$;

(3)法一证明:曲线 $y=f(x)$ 在,点 $\left(x_1,a^{x_1}\right)$ 处的切线 $l_1:y-a^{x_1}=a^{x_1}\ln a\left(x-x_1\right)$, 曲线 $y=g(x)$ 在点 $\left(x_2,\right.$

$\left.\log_a x_2\right)$ 处的切线 $l_2:y-\log_a x_2=\dfrac{1}{x_2\ln a}\left(x-x_2\right)$.要证明当 $a\ge e^{\frac{1}{e}}$ 时,存在直线 l, 使 l 是曲线 $y=f(x)$

的切线,也是曲线 $y=g(x)$ 的切线,只需证明当 $a\ge e^{-1}e$ 时,存在 $x_1\in(-\infty,+\infty)$, $x_2\in(0,+\infty)$ 使得 l_1 与 l_2

重合，即只需证明当 $a\ge e^{\frac{1}{e}}$ 时,方程组 $\begin{cases}a^{x_1}\ln a=\dfrac{1}{x_2\ln a} ① \\ a^{x_1}-x_1a^{x_1}\ln a=\log_a x_2-\dfrac{1}{\ln a} ②\end{cases}$

由①得 $x_2=\dfrac{1}{a^{x_1}(\ln a)^2}$, 代λ(2)得: $a^{x_1}-x_1a^{x_1}\ln a+x_1+\dfrac{1}{\ln a}+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}=0$ ③

因此只需证明当 $a\ge e^{\frac{1}{e}}$ 时，关于 x_1 的方程(3)存在实数解， 设函数 $u(x)=a^x-xa^x\ln a+x+\dfrac{1}{\ln a}+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}$,

既妥证明当 $a\ge e^{\frac{1}{e}}$ 时，函敖 $y=u(x)$ 存在零点，$u^{'}(x)=1-(\ln a)^2xa^x$, 可知 $x\in(-\infty,0)$

时, $u^{'}(x)>0$; $x\in(0,+\infty)$ 时, $u^{'}(x)$ 单调递减, 又 $u^{'}(0)=1>0$, $u^{'}\left(\dfrac{1}{(\ln a)^2}\right)=1-a^{\frac{1}{(\ln a)^2}}<0$, 故存

在唯一的 x_0, 且 $x_0>0$ ，使得 $u^{'}\left(x_0\right)=0$, 即 $1-(\ln a)^2x_0a^{x_0}=0$. 由此可得, $u(x)$ 在 $\left(-\infty,x_0\right)$ 上单调递

增， 在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上单调递减， $u(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值 $u\left(x_0\right)$. 由 $a\ge e^{\frac{1}{e}}$, 故 $\ln\ln a\ge-1$.

$u\left(x_0\right)=a^{x_0}-x_0a^{x_0}\ln a+x_0+\dfrac{1}{\ln a}+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}=\dfrac{1}{x_0(\ln a)^2}+x_0+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}\ge\dfrac{2+2\ln\ln a}{\ln a}\ge 0$, 下面证明

存在实数 t, 使得 $u(t)<0$, {(1)\text}$ 可得 $a^x\ge 1+x\ln a$, 当 $x>\dfrac{1}{\ln a}$ 时，有

$u(x)\le(1+x\ln a)(1-x\ln a)+\quad x+\frac{1}{\ln a}+\frac{2\ln\ln a}{\ln a}$. 存在实数 t, 使得 $u(t)<0$. 因此, 当 $a\ge e^{\frac{1}{e}}$ 时, 存在 $x_1\in(-\infty,+\infty)$, 使得 $u\left(x_1\right)=0$. 当 $a\ge e^{\frac{1}{e}}$ 时，存在直线 l ,使 l 是曲线 $y=f(x)$ 的切线,也是曲线 $y=g(x)$ 的切线.

法二利用切线找，点不等式：$\{a^{x-x_1}\ge\ln a\left(x-x_1\right)+1\Leftrightarrow a^x\ge a^{x_1}\ln ax-x_1a^{x_1}\ln a+a^{x_1}$

$\log_a x\le\frac{x-1}{\ln a}\Leftrightarrow\log_a\frac{x}{x_2}\le\frac{\frac{x}{x_2}-1}{\ln a}\Leftrightarrow\log_a x\le\frac{x}{x_2\ln a}-\frac{1}{\ln a}+\log_a x_2$，故当 $a\ge e^{\frac{1}{e}}$ 时,方程组

$\begin{cases}a^{x_1}\ln a=\dfrac{1}{x_2\ln a}\ (1)\\ a^{x_1}-x_1a^{x_1}\ln a=\log_a x_2-\dfrac{1}{\ln a}(2)\end{cases}$，由①得 $x_2=\frac{1}{a^{x_1}(\ln a)^2}$，代入②得：

$a^{x_1}-x_1a^{x_1}\ln a+x_1+\frac{1}{\ln a}+\frac{2\ln\ln a}{\ln a}=0$ ③因此,只需证明当 $a\ge e^{\frac{1}{e}}$ 时,关于 x_1 的方程次存在实数解，即 $e^{x_1\ln a}-x_1\ln ae^{x_1\ln a}+x_1+\frac{1}{\ln a}+\frac{2\ln\ln a}{\ln a}=0$ 令 $e^{x_1\ln a}=m,\quad \ln a=n\ge\frac{1}{e}$, 即 $m-m\ln m+\frac{\ln m}{n}+\frac{1}{n}+\frac{2\ln n}{n}=0$, 当 $n=\frac{1}{e}$ 时，$m-m\ln m+e\ln m-e=0\Leftrightarrow(m-e)(1-\ln m)=0$, 此时有仅有 $m=e$ 一个解；由此发现 $mn=1$, 不妨令 $mn=k>0$，只要对于任意 k 值使得方程有解，即可证明此方程有解，$m-m\ln m+\frac{\ln m}{n}+\frac{1}{n}+\frac{2\ln n}{n}$

$=m-m\ln m+\frac{m\ln m}{k}+\frac{m}{k}+\frac{2m\ln k-2m\ln m}{k}=0\Leftrightarrow(1-\ln m)\left(1+\frac{1}{k}\right)=-\frac{2\ln k}{k}$, 即

$\ln m-1=\ln k-\ln n-1=\frac{2\ln k}{k+1}\Leftrightarrow\ln k\left(1-\frac{2}{k+1}\right)=\ln n+1\ge\ln\frac{1}{e}+1=0$, 即 $\ln k\cdot\frac{k-1}{k+1}\ge0$ 有解, $h(x)=\ln x\cdot\frac{x-1}{x+1}$,显然 $h(x)=\ln x\cdot\frac{x-1}{x+1}\ge0$ 恒成立,当仅当 $k=1$ 时 $h(1)=0$,故此方程一定有解.

总结：此类型题，总发现似曾相似，之前考 e^x 和 $\ln x$,这次加大了难度，其实还是证明恒成立，关键就是变量如何选取，函数如何寻找规律，同构思维不是难点,只是帮助我们的工具。

1.（2018•聊城期末）曲线 $y=x^2-2ln(x+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为(　　)

A. $y=-2x$　　B. $y=2x$　　C. $y=-x$　　D. $y=x$

2.（2019•福州期末）已知函数 $f(x)=lnx+\frac{a}{x}$，直线 $y=-x+3$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切，则 $a=($　　$)$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3.（2018•安徽期末）函数 $f(x)=xe^x$ 在 $(1$，$f(1)$ $)$ 处的切线方程为 $($　　$)$

A. $2ex-y-e=0$　　B. $x-2ey-e=0$　　C. $2ex-y-e+1=0$　　D. $x-2ey-e+1=0$

4.（2019•王益区期末）已知函数 $f(x)=lnx-ax(x\in[1$，$+\infty))$，若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为 $($　　$)$

A. $[1$，$+\infty)$　　B. $(-\infty,\frac{1}{e})$　　C. $[\frac{1}{e}$，$+\infty)$　　D. $[0$，$+\infty)$

5.（2019•沙坪坝区校级月考）已知曲线 f（x）$=ae^x$（$a>0$）与曲线 g（x）$=x^2-m$（$m>0$）有公共点，且在该点处的切线相同，则当 m 变化时，实数 a 的取值范围是（　　）

A. （0，$\frac{4}{e^2}$）　　B. （1，$\frac{6}{e}$）　　C. （0，$\frac{4}{e}$）　　D. （1，$\frac{8}{e^2}$）

6.（2019•驻马店期末）曲线 $y=e^x+\sin x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $($　　$)$

A. $y=x$　　B. $y=x+1$　　C. $y=2x+1$　　D. $y=3x-1$

7.（2019•邢台期末）已知函数 $f(x)=(2x-a)e^x$，且 $f'(1)=3e$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $($
$)$

A. $x-y+1=0$　　B. $x-y-1=0$　　C. $x-3y+1=0$　　D. $x+3y+1=0$

8.（2019•新课标III）已知曲线 $y=ae^x+xlnx$ 在点 $(1,ae)$ 处的切线方程为 $y=2x+b$，则 $($　　$)$

A. $a=e^{-1}$，$b=1$　　B. $a=e^{-1}$，$b=-1$　　C. $a=e$，$b=-1$　　D. $a=e$，$b=1$

9.（2019•南昌县校级期末）已知函数 $f(x)=lnx-kx^2(k\in R)$，若 $f(x)$ 在定义域内不大于 0，则实数 k 的取值范围为 $($　　$)$

A. $[\frac{1}{2e},+\infty)$　　B. $[\frac{1}{e},+\infty)$　　C. $[\frac{1}{2\sqrt{e}},+\infty)$　　D. $[\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty)$

10.（2019•湖北期中）已知函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象在点 $(x_0,\frac{1}{2}x_0^2)$ 处的切线为直线 l，若直线 l 与函数 $y=lnx$，$x\in(0$，$1)$ 的图象相切，则 x_0 必满足条件 $($　　$)$

A. $0<x_0<1$　　B. $1<x_0<\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{2}<x_0<\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}<x_0<2$

11.（2019•上城区校级期中）已知函数 $f(x)$ 的图象在点 $(x_0$，$y_0)$ 处的切线为 $l:y=g(x)$，若函数 $f(x)$ 满足

$\forall x \in I$（其中 I 为函数 $f(x)$ 的定义域，当 $x \neq x_0$ 时，$[f(x)-g(x)](x-x_0)>0$ 恒成立，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的“转折点”，已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}ax^2-2x$ 在区间 $[0，1]$ 上存在一个“转折点”，则 a 的取值范围是 (　　)

A．$[0，e]$　　B．$[1，e]$　　C．$[1，+\infty)$　　D．$(-\infty，e]$

12.（2019•衡阳二模）若函数 $f(x)=lnx+ax$ 与函数 $g(x)=x^2$ 存在公切线，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A．$(-\infty，-1]$　　B．$(-\infty，0]$　　C．$(-\infty，1]$　　D．$(-\infty，2]$

13.（2019•河南期末）若函数 $f(x)=ax-lnx$ 在区间 $(0，e]$ 上的最小值为 3，则实数 a 的值为 (　　)

A．e^2　　B．$2e$　　C．$\frac{e}{2}$　　D．$\frac{1}{e}$

14.（2019•齐齐哈尔期末）若函数 $f(x)=lnx+\frac{a}{x}$（a 为常数）存在两条均过原点的切线，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A．$(0,\frac{1}{2})$　　B．$(\frac{1}{2},+\infty)$　　C．$(-\infty,0)$　　D．$(0,1)$

15.（2020•资阳模拟）已知直线 $y=a(x+1)$ 与曲线 $f(x)=e^x+b$ 相切，则 ab 的最小值为 (　　)

A．$-\frac{1}{4e}$　　B．$-\frac{1}{2e}$　　C．$-\frac{1}{e}$　　D．$-\frac{2}{e}$

16.（2020•江西一模）设函数 $f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上是单调函数，且 $\forall x \in (0,+\infty)$，$f[f(x)-e^x+x]=e$．若不等式 $f(x)+f'(x)\geqslant ax$ 对 $x \in (0,+\infty)$ 恒成立，则 a 的取值范围是 (　　)

A．$(-\infty，e-2]$　　B．$(-\infty，e-1]$　　C．$(-\infty，2e-3]$　　D．$(-\infty，2e-1]$

17.（2018•山西期末）若 x_0 既是函数 $f(x)=ae^x-x-ka(a,k \in R)$ 的一个零点也是一个极值点，则实数 k 的取值范为 (　　)

A．$(-\infty，1]$　　B．$(-\infty，0]$　　C．$[0，+\infty)$　　D．$[1，+\infty)$

18.（2019•凤城市校级月考）函数 $f(x)=xe^{-ax}-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A．$(-\infty,\frac{2}{e})$　　B．$(0,\frac{2}{e})$　　C．$(1,e)$　　D．$(\frac{1}{e},\frac{2}{e})$

19.（2018•三明期末）若不等式 $3elnx\leqslant kx+b\leqslant\frac{2x^3+e^3}{ex}$ 对任意 $x \in (0,+\infty)$ 恒成立，则实数 $k+b$ 的值为 (　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

20.（2019•红塔区校级月考）已知直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=ln(2x)$ 和曲线 $y=ln(x+1)$ 都相切，则 $k=$ (　　)

A．$ln2$　　B．$\frac{1}{ln2}$　　C．$ln\frac{1}{2}$　　D．$ln\sqrt{2}$

21.（2019•深圳二模）已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{x}+lnx-1$ 有且仅有一个零点，则实数 a 的取值范围为 $(\quad)$

A．$(-\infty$，$0]\bigcup\{1\}$　B．$[0$，$1]$　C．$(-\infty$，$0]\bigcup\{2\}$　D．$[0$，$2]$

22.（2019•玉山县校级模拟）若存在斜率为 $3a(a>0)$ 的直线 l 与曲线 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2ax-2b$ 与 $g(x)=3a^2lnx$ 都相切，则实数 b 的取值范围为 $(\quad)$

A．$(-\infty,\dfrac{3}{4}e^{\frac{2}{3}}]$　B．$(-\infty,\dfrac{4}{3}e^{\frac{2}{3}}]$　C．$[\dfrac{3}{2}e^{\frac{3}{4}},+\infty)$　D．$[\dfrac{2}{3}e^{\frac{3}{4}},+\infty)$

23.（2019•雅礼中学模拟）已知函数 $f(x)=(e^x-a)(ax+\dfrac{1}{e})$．若 $f(x)\geqslant 0(x\in R)$ 恒成立，则满足条件的 a 的个数为 $(\quad)$

A．0　B．1　C．2　D．3

24.（2019•武侯区校级模拟）若直线 $y=2x+b$ 是曲线 $y=2alnx$ 的切线，且 $a>0$，则实数 b 的最小值是 $(\quad)$

A．1　B．-1　C．2　D．-2

25.（2019 春•安徽期末）已知直线 $y=ax+b$ 与曲线 $y=xe^x$ 相切，则 $a+b$ 的取值范围是 $(\quad)$

A．$(-\infty$，$-1]$　B．$(-\infty$，$0]$　C．$(-\infty$，$1]$　D．$(-\infty$，$e]$

26.（2019•湖北一模）已知 $a\neq 0$，函数 $f(x)=ae^x$，$g(x)=ealnx+b$，e 为自然对数的底数若存在一条直线与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 均相切，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围为 $(\quad)$

A．$(-\infty$，$e]$　B．$(0$，$e]$　C．$(-\infty$，$1]$　D．$(0$，$1]$

27.（2019•遂宁模拟）设函数 $y=|\dfrac{lnx+1}{ax^2}|-ax$ 有三个零点，则实数 a 的取值范围为 $(\quad)$

A．$(\dfrac{\sqrt{3}}{3}e,\sqrt{e})$　B．$(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}e,0)\bigcup(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}e)$

C．$(\dfrac{1}{\sqrt{e}},1)\bigcup\{\dfrac{\sqrt{3}}{3}e\}$　D．$(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}e)$

28.（2019•河南三模）若函数 $f(x)=e^x-(m+1)lnx+2(m+1)x-1$ 恰有两个极值点，则实数 m 的取值范围为 $(\quad)$

A．$(-e^2$，$-e)$　B．$(-\infty,-\dfrac{e}{2})$　C．$(-\infty,-\dfrac{1}{2})$　D．$(-\infty,-e-1)$

30.（2019•慈利县校级月考）已知函数 $f(x)=(e-a)e^x-ma+x$，$(m$，a 为实数)，若存在实数 a，使得 $f(x)\leqslant 0$ 对任意 $x\in R$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是 $(\quad)$

A．$[-\dfrac{1}{e}$，$+\infty)$　B．$[-e$，$+\infty)$　C．$[\dfrac{1}{e}$，$e]$　D．$[-e$，$-\dfrac{1}{e}]$

31.（2019•道里区校级三模）已知 $n\in N_{+}$，直线 $y=ax+b$ 与曲线 $f(x)=lnx-(n-2)$ 相切，设 ab 的最大值为 c_n，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则正确的是(　　)

A．存在 $n_0\in N_{+}$，$c_{n_0}<0$　　B．$\{c_n\}$ 为等差数列

C．对于 $n\in N_{+}$，$S_n<\dfrac{1}{e-1}$　　D．$S_3=\dfrac{e+1}{e^2}$

32.（2019•蚌埠二模）已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足：当 $x\geqslant 0$ 及 $m>0$ 时，不等式 $f(x+m)<f(x)$ 恒成立，若对任意的 $x\in R$，不等式 $f(2e^x-ax)-f(e^x+b)\leqslant 0(a>0$，$b\in R)$ 恒成立，则 ab 的最大值是(　　)

A．$\dfrac{\sqrt{e}}{2}$　　B．e　　C．$\dfrac{e}{2}$　　D．$\sqrt{e}$

33.（2019•台州期末）若关于 x 的不等式 $ln(x+1)+e^x\geqslant ax+b$ 对任意的 $x\geqslant 0$ 恒成立，则 a，b 可以是(　　)

A．$a=0$，$b=2$　　B．$a=1$，$b=2$　　C．$a=3$，$b=1$　　D．$a=2$，$b=1$

34.（2019•山东月考）直线 $y=x$ 与曲线 $y=2ln(x+m)$ 相切，则 $m=$____.

35.（2020•榆林一模）曲线 $C:y=xlnx$ 在点 $M(e,e)$ 处的切线方程为____.

36.（2019•张店区校级期末）已知函数 $f(x)=(2-a)(x-1)-2lnx$．若函数 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上无零点，则 a 的最小值为____.

37.（2020•佛山一模）函数 $f(x)=lnx$ 和 $g(x)=ax^2-x$ 的图象有公共点 P，且在点 P 处的切线相同，则这条切线方程为____.

38.（2019•江苏模拟）已知函数 $f(x)=e^x$（e 为自然对数的底数），$g(x)=a\sqrt{x}$．若对任意的 $x_1\in R$，存在 $x_2>x_1$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，且 x_2-x_1 的最小值为 $\dfrac{ln2}{2}$，则实数 a 的值为____.

39.（2020•涪城区校级模拟）已知恰有两条不同的直线与曲线 $y=e^{x-2}$ 和 $x^2=2py$ 都相切，则实数 p 的取值范围是____.

40.（2019•东湖区校级期末）已知函数 $f(x)=e^x-lnx-2$，下列说法正确的是____.

① $f(x)$ 有且仅有一个极值点；

② $f(x)$ 有零点；

③若 $f(x)$ 极小值点为 x_0，则 $0<f(x_0)<\dfrac{1}{2}$；

④若 $f(x)$ 极小值点为 x_0，则 $\dfrac{1}{2}<f(x_0)<1$．

41.（2019•绍兴一模）已知函数 $f(x)=2ln(ax+b)$，其中 a， $b\in R$．

（Ⅰ）若直线 $y=x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，求 ab 的最大值．

（Ⅱ）设 $b=1$，若方程 $f(x)=a^2x^2+(a^2+2a)x+a+1$ 有两个不相等的实根，求 a 的最大整数值．$(ln\frac{5}{4}\approx 0.223)$．

42.（2020•泸州模拟）已知函数 $f(x)=lnx$， $g(x)=\frac{1}{x}+a$（其中 a 是常数），

（Ⅰ）求过点 $P(0,-1)$ 与曲线 $f(x)$ 相切的直线方程；

（Ⅱ）是否存在 $k\neq 1$ 的实数，使得只有唯一的正数 a，当 $x>0$ 时，不等式 $f(x+\frac{1}{a})g(x)\leqslant k(x+\frac{1}{a})$ 恒成立，若这样的实数 k 存在，试求 k， a 的值；若不存在，请说明理由．

43.（2019 五华区校级月考）已知 $f(x)=e^x$，$g(x)=lnx$，若点 A 为函数 $f(x)$ 上的任意一点，点 B 为函数 $g(x)$ 上的任意一点．

（1）求 A， B 两点之间距离的最小值；

（2）若 A， B 为函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 公切线的两个切点，求证：这样的点 B 有且仅有两个，且满足条件的两个点 B 的横坐标互为倒数．

44.（2019•迎泽区校级月考）已知函数 $f(x)=lnx$， $g(x)=2-\frac{3}{x}(x>0)$．

（1）试判断当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系；

（2）试判断曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 是否存在公切线，若存在，求出公切线方程，若不存在，说明理由．

45.（2018•月湖区校级月考）已知函数 $f(x)=ae^x$， $g(x)=ln(ax)+\frac{5}{2}$， $a>0$．

（Ⅰ）若 $y=f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线过点 $(3,3)$，求 a 的值并讨论 $h(x)=xf(x)+m(x^2+2x-1)(m\in R)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调增区间；

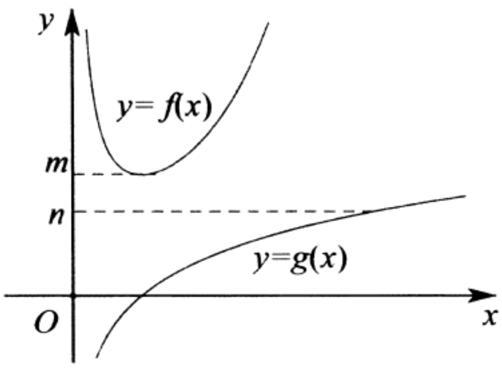
（Ⅱ）定义：若直线 $l:y=kx+b$ 与曲线 $C_1:f_1(x,y)=0$、 $C_2:f_2(x,y)=0$ 都相切，则我们称直线 l 为曲线 C_1、C_2 的公切线．若曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 存在公切线，试求实数 a 的取值范围．

专题 2 导数的三板斧之分而治之

分久必合，合久必分，某些题你用单个函数求导做，一脚油门踩到底，总会有各种隐零点代换，总会被各种复杂的分类讨论弄得浑身不自在。分而治之，分开来看，豁然开朗，既然风景这边独好，为什么我们不在这里多多停留呢？好的东西总是缺乏说明书，那么分而治之的说明书，它能否再给你打开一扇窗？

第一讲分而治之的原理

1.若 $F(x)>0$ 对 $x\in D$ 恒成立,且 $F(x)=f(x)-g(x)$, 我们可以转化为 $f(x)>g(x)$, 通过分别求出两个函数的最值，当 $f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$ 时一定成立，我们称之为高人一等，如图 $11-1-1$ 所示；或者 $f(x)_{\min}=f\left(x_1\right)\geq g(x)_{\max}=g\left(x_2\right)$， $x_1\neq x_2$ 时一定成立，我们称之为错位 PS, 如图 $11-1-2$ 所示. 通常我们将 $f(x)$ 叫做上函数, $g(x)$ 叫做下函数.



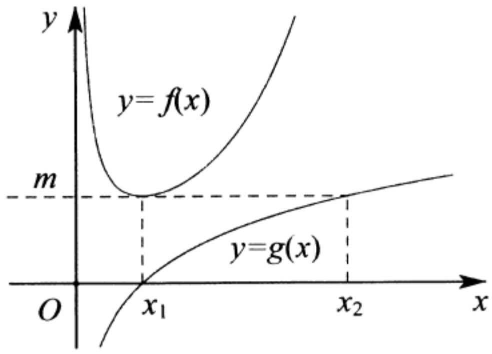
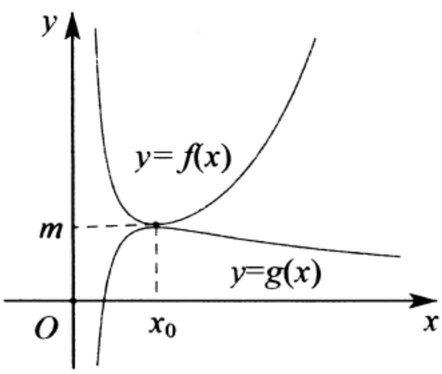


图 $11-1-1$ 图 $11-1-2$

2.若 $F(x)\geq 0$ 对 $x\in D$ 恒成立,且 $F(x)=f(x)-g(x)$, 我们可以转化为 $f(x)\geq g(x)$, 通过分别求出两个函数的最值，当 $f(x)_{\min}\geq g(x)_{\max}$， 且 $f(x)_{\min}=f\left(x_0\right)=g(x)_{\max}=g\left(x_0\right)$ 时一定成立，我们称之为亲密接触，如图 11-1-3 所示.



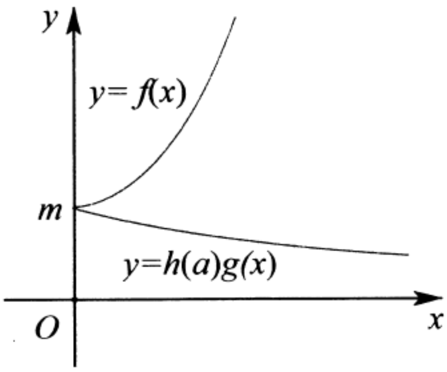


图 $11-1-3$ 图 $11-1-4$

3.若含参数 a 的函数 $F(x)\geq 0$ 对 $x\in\left[x_0,+\infty\right)$ 恒成立,且 $F(0)=0$, 构造 $F(x)=f(x)-h(a)g(x)$, 在这种情况下 $f(x)\geq h(a)g(x)$ 恒成立,且 $f(x)_{\min}=f\left(x_0\right)=m$, 只需 $h(a)g(x)$ 单调递减;或者 $y=f(x)$ 单调递增，且 $f'\left(x_0\right)=0$, 只需 $h(a)g(x)$ 单调递减，这也是我们通常讲到的端点效应（洛必达法则）; 此法叫做天各一方，如图 $11-1-4$ 所示，在端点效应中推导矛盾区间时往往需要切线放缩。.

第二讲高考中的分而治之

例 1：（2019•新课标Ⅰ）已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数．

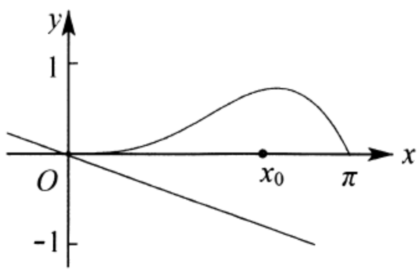
（1）证明： $f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 存在唯一零点；

（2）若 $x\in[0，\pi]$ 时， $f(x)\geqslant ax$，求 a 的取值范围．

解析 (1) 因为函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x,$ 求导得 $f^{'}(x)=2\cos x-\cos x+x\sin x-1=\cos x+x\sin x-1$，令 $g(x)=\cos x+x\sin x-1,$ 则 $g^{'}(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x,$ 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$x\cos x>0,$ 当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$x\cos x<0,$ 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，极大值为 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1>0,$ 又 $g(0)=0,$ $g(\pi)=-2,$ $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有唯一零点，即 $f^{'}(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有唯一零点;

(2)由(1)知，$f^{'}(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有唯一零点 x_0，使得 $f^{'}\left(x_0\right)=0,$ 且 $f^{'}(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 为正，在 $\left(x_0,\pi\right)$ 为负，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,x_0\right]$ 单调递增，在 $\left[x_0,\pi\right]$ 单调递减，结合 $f(0)=0,$ $f(\pi)=0,$ 可知 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上非负，令 $h(x)=ax,$ 则 $f(x)\geq h(x),$ 如图$11-2-1$所示，根据 $f(x)$ 和 $h(x)$ 的图象可知，$a\leq 0$，故 a 的取值范围是 $(-\infty,0]$.

总结：天各一方类型，左端点大小相等， $f(x)\geq h(x)=ax,$ 则 $h(x)$ 必为减函数.



图$11-2-1$

例 2.（2018•新课标Ⅰ）已知函数 $f(x)=ae^x-lnx-1$．

（1）设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a，并求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时， $f(x)\geqslant 0$．

解析(1)因为函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$, 定义域为 $x>0$, 则 $f'(x)=ae^x-\dfrac{1}{x}$, 所以 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点， $f'(2)=ae^2-\dfrac{1}{2}=0$, 解得 $a=\dfrac{1}{2e^2}$, 故 $f(x)=\dfrac{1}{2e^2}e^x-\ln x-1$, 求导 $f'(x)=\dfrac{1}{2e^2}e^x-\dfrac{1}{x}$, 当 $0<x<2$ 时， $f'(x)<0$, 当 $x>2$ 时， $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在(0,2)单调递减，在 $(2,+\infty)$ 单调递增.

(2) 法一证明：当 $a\geq\dfrac{1}{e}$ 时，$f(x)\geq\dfrac{e^x}{e}-\ln x-1$, 设 $g(x)=\dfrac{e^x}{e}-\ln x-1$, 则 $g'(x)=\dfrac{e^x}{e}-\dfrac{1}{x}$, 由 $g'(x)=\dfrac{e^x}{e}-\dfrac{1}{x}=0$,得 $x=1$, 当 $0<x<1$ 时， $g'(x)<0$, 当 $x>1$ 时， $g'(x)>0$, $x=1$ 是 $g(x)$ 的最小值点，故当 $x>0$ 时，$g(x)\geq g(1)=0$, 当 $a\geq\dfrac{1}{e}$ 时， $f(x)\geq 0$.

法二（分而治之）因为函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1\geq 0$, 所以有 $ae^x\geq\ln x+1$, 即 $\dfrac{ae^x}{x}\geq\dfrac{\ln x+1}{x}$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，令 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}, g'(x)=\dfrac{e^x x-e^x}{x^2}=0$ 时，$x=1, x<1$ 时 $g'(x)<0, x>1$ 时 $g'(x)>0$, 故 $g(x)_{\min}=g(1)=e$;再令 $h(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$, 则 $h'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}=0$ 时, $x=1, x<1$ 时 $h'(x)>0, x>1$ 时 $h'(x)<0$, 故 $h(x)_{\max}=h(1)=1$;故当 $a\geq\dfrac{1}{e}$ 时， $\dfrac{ae^x}{x}\geq\dfrac{1}{e}g(x)_{\min}=1\geq h(x)_{\max}$， 当且仅当 $x=1$ 时等号成立，如图 $11-2-2$ 所示.

总结：亲密接触模型，上函数和下函数选取很重要，我们必须熟悉六大函数模型.

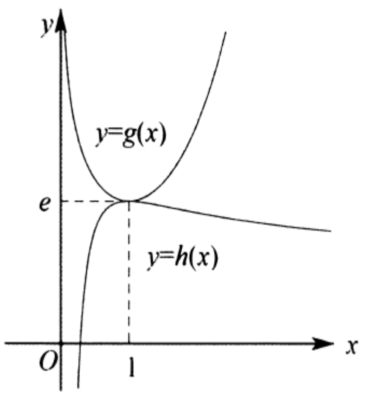


图 $11-2-2$

例 3.（2017•新课标 II）设函数 $f(x)=(1-x^2)e^x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性;

（2）当 $x\geqslant 0$ 时， $f(x)\leqslant ax+1$ ，求 a 的取值范围.

解析(1)因为 $f(x)=\left(1-x^{2}\right)e^{x}$，　$x\in R$，所以 $f^{'}(x)=\left(1-2x-x^{2}\right)e^{x}$，令 $f^{'}(x)=0$，可知 $x=-1\pm\sqrt{2}$，

当 $x<-1-\sqrt{2}$ 或 $x>-1+\sqrt{2}$ 时 $f^{'}(x)<0$，　当 $-1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2}$ 时 $f^{'}(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1-\sqrt{2})$，$(-1+\sqrt{2},+\infty)$ 上单调递减，在 $(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$ 上单调递增；

(2)由题意可知 $f(x)=(1-x)(1+x)e^{x}$，　要证 $f(x)\le ax+1$，即证 $(1-x)e^{x}\le\dfrac{ax+1}{x+1}$，故可以采用分而治之，令 $h(x)=(1-x)e^{x}$，则 $h^{'}(x)=-xe^{x}<0$，因此 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，故 $h(x)_{\max}=h(0)=1$，$g(x)=\dfrac{ax+1}{x+1}$，$g^{'}(x)=\dfrac{a-1}{(x+1)^{2}}$，当 $a\ge1$ 时，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)_{\min}=g(0)=1$，故 $f(x)\le ax+1$ 恒成立；当 $a<1$ 时，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，由于 $e^{x}\ge x+1$（请读者自己完成证明），$(1-x)e^{x}\ge1-x^{2}$，若要满足题意，一定有 $\dfrac{ax+1}{x+1}\ge(1-x)e^{x}\ge1-x^{2}$ 恒成立，但 $ax+1\ge1-x^{2}+x-x^{3}\Leftrightarrow x\left(a-1+x+x^{2}\right)\ge0$ 恒成立，显然 $a<1$ 时，取 $x_{0}=\dfrac{\sqrt{5-4a}-1}{2}\in(0,\ 1)$，一定存在 $x\in\left[0,x_{0}\right)$，使得 $x^{2}+x+a-1<0$ 恒成立，与题意不符：综上所述，a 的取值范围是 $[1,+\infty)$．

注意：此题得出答案简单，都知道端点效应，关键就在于找矛盾区间的证明，这里涉及了切线放缩和找点知识，我们在后续章节还会介绍.

例 4.（2016•四川）设函数 $f(x)=ax^{2}-a-lnx$，其中 $a\in R$．

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）确定 a 的所有可能取值，使得 $f(x)>\dfrac{1}{x}-e^{1-x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内恒成立 $(e=2.718\ldots$ 为自然对数的底数)．

解析(1)由题意求导得 $f^{'}(x)=2ax-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^{2}-1}{x}$，$x>0$，①当 $a\le0$ 时，$2ax^{2}-1\le0$，　$f^{'}(x)\le0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.②当 $a>0$ 时，$f^{'}(x)=\dfrac{2a\left(x+\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)}{x}$，当 $x\in\left(0,\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)$ 时，$f^{'}(x)<0$，当 $x\in\left(\sqrt{\dfrac{1}{2a}}+\infty\right)$ 时，　$f^{'}(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\sqrt{\dfrac{1}{2a}},+\infty\right)$ 上单调递增.

(2)令 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{x}+e^{1-x}=ax^{2}-\ln x-\dfrac{1}{x}+e^{1-x}-a>0$，所以 $g(x)>0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，$g(1)=0$，故 $g^{'}(x)$ 在 $x=1$ 处必大于等于 0，若 $g^{'}(1)<0$，令 $x_{0}>1$，则 $g(x)$ 在区间 $\left(1,x_{0}\right)$ 内单调递减，与题意不符.令

$g'(x)=2ax-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-e^{1-x},g'(1)\ge 0,$ 可得 $a\ge\frac{1}{2}$. 考虑端点处进行分而治之，令 $h(x)=\ln x+\frac{1}{x}-e^{1-x}-\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)$，$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+e^{1-x}-x,h'(1)=0,x>1$ 时, $h''(x)=\frac{2-x-x^3}{x^3}-e^{1-x}$, $x\in(1,+\infty)$, 故 $2-x-x^3<0$, 又 $e^{1-x}>0$，所以 $h''(x)<0$ 恒成立，故导函数 $h'(x)<0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恒成立，即函数 $h(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减, $g(x)>0\Leftrightarrow\varphi(x)=\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-1\right)>h(x)$ 恒成立, $\varphi(x)$ 单调递增,如图 $11-2-3$, 故 $g(x)>0$ 恒成立. 综上, $a\ge\frac{1}{2}$.

总结：端点效应，构造 $\varphi(x)=\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-1\right)>h(x)$, 天各一方，一边增，另一边减.

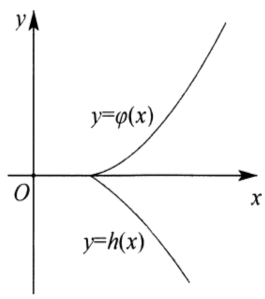


图 $11-2-3$

例 5.（2016•山东）已知 $f(x)=a(x-lnx)+\frac{2x-1}{x^2}$， $a\in R$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

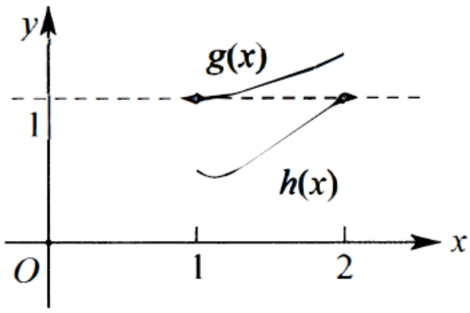
(II) 当 $a=1$ 时，证明 $f(x)>f'(x)+\frac{3}{2}$ 对于任意的 $x\in[1，2]$ 成立.

解析 (1) 因为函数 $f(x)=a(x-\ln x)+\frac{2x-1}{x^2}$, 所以 $f'(x)=a\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{2x^2-(2x-1)\cdot 2x}{x^4}=\frac{ax-a}{x}+\frac{2-2x}{x^3}=\frac{ax^3-ax^2+2-2x}{x^3}=\frac{(x-1)\left(ax^2-2\right)}{x^3}(x>0)$, 若 $a\le 0$, 则 $ax^2-2<0$ 恒成立,当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)>0,f(x)$ 为增函数,当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f'(x)<0,f(x)$ 为减函数;当 $a>0$, 若 $0<a<2$, 当 $x\in(0,1)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{2a}}{a},+\infty\right)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 为增函数,当 $x\in\left(1,\frac{\sqrt{2a}}{a}\right)$

时, $f^{'}(x)<0$, $f(x)$ 为减函数;若 $a=2$, $f^{'}(x)\geq 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数;若 $a>2$, 当 $x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2a}}{a}\right)$ 和 $(1,+\infty)$ 时, $f^{'}(x)>0$, 所以 $f(x)$ 为增函数，当 $x\in\left(\dfrac{\sqrt{2a}}{a},1\right)$ 时, $f^{'}(x)<0$, 所以 $f(x)$ 为减函数;

(2) 当 $a=1$ 时, 令 $F(x)=f(x)-f^{'}(x)-\dfrac{3}{2}=x-\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}-1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^3}=x-\ln x+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{5}{2}$ 令 $g(x)=x-\ln x$, 由 $g^{'}(x)=\dfrac{x-1}{x}\geq 0$, 可得 $g(x)\geq g(1)=1$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号 ; $h(x)=\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{2}$, $h^{'}(1)=1$, $t=\dfrac{1}{x}\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, $h(t)=2t^3-t^2-3t+1$, $h^{'}(t)=6t^2-2t-3$, 又 $h^{'}\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{5}{2}$, $h^{'}(1)=1$, 故存在 $t_0\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 使得 $h(t)=0$, $h(t)_{\max}=\max\left\{h\left(\dfrac{1}{2}\right),h(1)\right\}=h\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$, 如图 $11-2-4$, 即当且仅当 ${ x=2$ 取等号 , $f(x)-f^{'}(x)>g(1)-h(2)=0$, $F(x)>0$ 恒成立 , 即 $f(x)>f^{'}(x)+\dfrac{3}{2}$ 对手任意的 $x\in[1,2]$ 成立.

总结：分而治之+错位 PS 模型。



图$11-2-4$

例 6.（2015•新课标 I ）设函数 $f(x)=e^{2x}-alnx$.

（I）讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 零点的个数;

（II）证明：当 $a>0$ 时， $f(x)\geqslant 2a+aln\dfrac{2}{a}$.

解析(1)函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f^{'}(x)=2e^{2x}-\dfrac{a}{x}$, 当 $a\leq 0$ 时, $f^{'}(x)>0$ 恒成立，故 $f^{'}(x)$ 没有零点,当 $a>0$ 时, $y=e^{2x}$ 为单调递增, $y=-\dfrac{a}{x}$ 单调递增, $f^{'}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增,又 $f^{'}(a)>0$, 假设存在 b 满足 $0<b<\ln\dfrac{a}{2}$ 时,且 $b<\dfrac{1}{4}$, $f^{'}(b)<0$, 故当 $a>0$ 时，导函数 $f^{'}(x)$ 存在唯一的零点.

（2）法一（隐零点代换）由（1）知，可设导函数 $f^{'}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的唯一零点为 x_0, 当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时, $f^{'}(x)<0$, 当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时, $f^{'}(x)>0$, 故 $f(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 单调递减，在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 单调递增，所欲当 $x=x_0$

时，$f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f\left(x_0\right)$, 由于 $2e^{2x_0}-\dfrac{a}{x_0}=0$, 所以 $f\left(x_0\right)=\dfrac{a}{2x_0}+2ax_0+a\ln\dfrac{2}{a}\geq 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$.故当 $a>0$ 时，$f(x)\geq 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$.

法二（分而治之）要证 $f(x)\geq 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$, 即证 $e^{2x}-a\ln x\geq 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$, 只需 $e^{2x}\geq a\left(\ln x+2+\ln\dfrac{2}{a}\right)=a\ln\dfrac{2e^2x}{a}$，只需 $\dfrac{e^{2x}}{2x}\geq e^2\dfrac{a}{2e^2x}\ln\dfrac{2e^2x}{a}$, 由同构式可令 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$, 求导后可以得 $g(x)_{\min}=g(1)=e, h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, 易知 $h(x)_{\max}=h(e)=\dfrac{1}{e}$, 故 $\dfrac{e^{2x}}{2x}=g(2x)\geq e$, 当仅当 $x=\dfrac{1}{2}$ {$时等号成立; $e^2\dfrac{a}{2e^2x}\ln\dfrac{2e^2x}{a}=e^2h\left(\dfrac{2e^2x}{a}\right)\leq e^2\cdot\dfrac{1}{e}=e$ 恒成立，所以 $e^{2x}>a\left(\ln x+2+\ln\dfrac{2}{a}\right)$ 恒成立，当且仅当 $\dfrac{2e^2x}{a}=e\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ a=e\end{cases}$ 时，$e^{2x}\geq a\left(\ln x+2+\ln\dfrac{2}{a}\right)$ 取得等号；故当 $a>0$ 时, $f(x)\geq 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$.

例 7.（2014•新课标Ⅰ）设函数 $f(x)=ae^xlnx+\dfrac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 (1， f （1））处得切线方程为 $y=e(x-1)+2$.

（Ⅰ）求 a、b；

（Ⅱ）证明：$f(x)>1$.

解析(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 求导 $f^{'}(x)=ae^x\ln x+\dfrac{a}{x}\cdot e^x-\dfrac{b}{x^2}\cdot e^{x-1}+\dfrac{b}{x}\cdot e^{x-1}$, 由题意可得 $f(1)=2,\quad f^{'}(1)=e$, 故 $a=1,\quad b=2$:

(2)由（1）知，函数 $f(x)=e^x\ln x+\dfrac{2}{x}\cdot e^{x-1}$, 且 $f(x)>1$, 即 $e^x\ln x+\dfrac{2}{x}\cdot e^{x-1}>1$, 得 $\ln x>\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{2}{xe}$, 故 $f(x)>1$ 等价于 $x\ln x>xe^{-x}-\dfrac{2}{e}$, 设函数 $g(x)=x\ln x$, 则 $g^{'}(x)=1+\ln x$, 当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 时，$g^{'}(x)<0$; 当

$x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时, $g^{'}(x)>0$. 故 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，从而 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$. 函数 $h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{e}$, 则 $h^{'}(x)=e^{-x}(1-x)$. 当 $x\in(0,1)$ 时, $h^{'}(x)>0$; 当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $h^{'}(x)<0$，故 $h(x)$ 在 (0,1) 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,从而 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值为 $h(1)=-\frac{1}{e}$. 综上，当 $x>0$ 时， $g(x)>h(x)$, 即 $f(x)>1$.

第三讲分而治之上下函数选取技巧

不含参的不等式证明，一般不能选取直上直下的函数，上函数一般选取 $\frac{e^x}{x},\frac{x}{\ln x}$, $x-\ln x$, $x\ln x$ 这一系列函数的同构函数，他们都是高阶比低阶的函数，有一个极小值;下函数一般为 $\frac{\ln x}{x},\frac{x}{e^x},\frac{\sin x}{x},\frac{\sin x}{e^x}$ 这一些列的同构函数，这些函数都是低阶比高阶，有一个极大值;一般上函数选取范围优先,所以是否分而治之，上函数最关键，含参数的函数，先看参数是否能够参与同构，这样往往会构成亲密接触型的分而治之;参数在参与端点效应的时候，就要在端点进行一边递增一边地减的天各一方构造.

例 8.（2019•雅安模拟）设函数 $f(x)=x-alnx$，其中 e 为自然对数的底数.

（1）若 $a=1$，求 $f(x)$ 的单调区间;

（2）若 $g(x)=f(x)-x+e^{x-1}$， $0\leqslant a\leqslant e$，求证： $g(x)$ 无零点.

解析(1)若 $a=1$, 则 $f(x)=x-\ln x$, 水导 $f^{'}(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$, 当 $x\in(0,1)$ 时, $f^{'}(x)<0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f^{'}(x)>0$, $f(x)$ 单调递增， $f(x)$ 单调递减区间为 $(0,1)$, 单调递增区间为 $(1,+\infty)$.

（2）法一(隐零点代换)由 $g(x)=f(x)-x+e^{x-1}=e^{x-1}-a\ln x(x>0)$, 可知, $g^{'}(x)=\frac{xe^{x-1}-a}{x}(x>0)$, 当 $a=0$ 时, $g(x)=e^{x-1}$, 显然 $g(x)$ 没有零点;当 $0<a\leq e$ 时,设 $h(x)=xe^{x-1}-a$, $h^{'}(x)=e^{x-1}(x+1)>0$, 在 $[0,+\infty)$ $x_0e^{x_0}-1=a$, 当 $x\in(0,x_0)$ 时， $h(x)<0$, 即 $g^{'}(x)<0$, 当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时， $h(x)>0$, 即 $g^{'}(x)>0, g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增， $g(x)$ 的最小值为 $g(x_0)=x_0e^{x_0}-1-a\ln x_0$, $x_0e^{x_0}-1=a$, $e^{x_0-1}=\frac{a}{x_0}$, 两边取对数可得 $x_0-1=\ln a-\ln x_0$, 即 $\ln x_0=\ln a+1-x_0$, 则 $g(x_0)=\frac{a}{x_0}-a(\ln a+1-x_0)=\frac{a}{x_0}+ax_0$ $-a\ln a-a\geq 2a-a\ln a-a=a-a\ln a$,

当且仅当 $x_0=1$ 时取等号，令 $m(a)=a-a\ln a$，则 $m'(a)=-\ln a$，当 $m\left(e^{-n}\right)=\left(e^{-n}-1\right)(1-n)>0,\ m(e)=0$，当 $0<a\le e$ 时，$m(a)\ge 0$，当且仅当 $a=e$ 时取等号，由 $x_0e^{x_0}-1=a$ 可知当 $a=1$ 时，$x_0=1$，故当 $a=e$ 时，$x_0\ne 1$，故 $g\left(x_0\right)>m(a)\ge 0$，$g\left(x_0\right)>0$. 当 $0\le a\le e$ 时，$g(x)$ 没有零点.

法二(分而治之)要满足 $e^{x-1}-a\ln x=0$ 无解，则只需 $e^{x-1}>a\ln x$ 恒成立，只需 $g(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x}>a\dfrac{\ln x}{x}=h(x)$，即 $g(x)_{\min}=g(1)=1\ge h(x)_{\max}=h(e)=a\cdot\dfrac{1}{e}$(具体水导分析过程略去)，$0\le a\le e$，$g(x)>h(x)$ 恒成立，$g(x)$ 没有零点.

例 9.（2019•泰安二模）已知函数 $f(x)=(x-m)lnx(m\leqslant 0)$.

（1）若函数 $f(x)$ 存在极小值点，求 m 的取值范围；

（2）当 $m=0$ 时，证明：$f(x)<e^x-1$.

解析(1)函数 $f(x)=(x-m)\ln x(m\le 0)$，定义域为 $(0,+\infty)$，求导得 $f'(x)=\dfrac{x-m}{x}+\ln x=1-\dfrac{m}{x}+\ln x$，

① 当 $m=0$ 时，$f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{e}$，当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$x=\dfrac{1}{e}$ 是函数 $f(x)$ 的极小值，点，满足题意；② 当 $m<0$ 时，令 $g(x)=f'(x)$，$g'(x)=\dfrac{m}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+m}{x^2}$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=-m$，当 $x\in(0,-m)$ 时，$g'(x)<0$ 当 $x\in(-m,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)_{\min}=g(-m)=2+\ln(-m)$，若 $g(-m)\ge 0$，即 $m\le -e^{-2}$ 时，$f'(x)=g(x)\ge 0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无极值，点，不满足题意. 若 $g(-m)=2+\ln(-m)<0$，即 $-e^{-2}<m<0$ 时，$g(1-m)=1-\dfrac{m}{1-m}+\ln(1-m)>0$，则 $g(-m)\cdot g(1-m)<0$，又因为 $g(x)$ 在 $(-m,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)$ 在 $(-m,+\infty)$ 上恰有一个零点，x_1，当 $x\in\left(-m,x_1\right)$ 时，$f'(x)=g(x)<0$，当 $e\in\left(x_1,+\infty\right)$ 时，$f'(x)=g(x)>0$，x_1 是 $f(x)$ 的极小值,点,满足题意，综上：m 的范围为 $-e^{-2}<m\le 0$.

(2)法一当 $m=0$ 时，$f(x)=x\ln x$，①当 $x\in(0,1]$，$e^x-1>0$，$x\ln x\le 0$，$f(x)<e^x-1$，②当 $x\in(1,+\infty)$ 时，令 $h(x)=e^x-x\ln x-1$，$h'(x)=e^x-\ln x-1$，令 $\varphi(x)=h'(x)$，则 $\varphi'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$，$\varphi'(x)$ 在 $(1,+\infty)$

上是增函数, $\varphi'(x)>\varphi'(1)=e-1>0,\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增， $h'(x)=\varphi(x)>\varphi(1)=e-1>0,h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, $h(x)>h(1)=e-1>0,\quad x>1$ 时， $x\ln x<e^x-1$ 成立,综上 $f(x)<e^x-1$.

法二要证 $e^x-1>x\ln x$， 只需 $\dfrac{e^x-1}{x^2}>\dfrac{\ln x}{x}$, 构造函数 $g(x)=e^x-\dfrac{e}{2}x^2-1$, 显然 $g'(x)=e^x-ex\geq 0$ 恒成立， 故 $g(x)$ 单增恒成立, 当 $x>0$ 时, $g(x)>g(0)=0$, 即 $\dfrac{e^x-1}{x^2}>\dfrac{e}{2}$ 对 $x\in R$ 恒成立, 而 $\dfrac{\ln x}{x}\leq\dfrac{1}{e}$, 故 $\dfrac{e^x-1}{x^2}>\dfrac{\ln x}{x}$ 恒成立,故 $f(x)<e^x-1$.

总结:函数 $h(x)=\dfrac{e^x-1}{x^2}$, 虽然最小值难以求出精确值，但我们通常可以用 $\dfrac{e^x-1}{x^2}>\dfrac{e}{2}$ 来放缩，这也是一种常见的上函数.

例 9.（2019•济南模拟）已知函数 $f(x)=\dfrac{1+lnx}{x}$•

（1）求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）若 $a\geqslant 1$，求证: $ae^x>(1+\dfrac{1}{x})(1+lnx)$.

解析（1）函数的定义域为 $(0,+\infty)$, 函数的导数 $f'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$, 由 $f'(x)>0$ 得, $0<x<1$，即函数 $f(x)$ 为增函数,由 $f'(x)<0$ 得 $x>1$，即函数 $f(x)$ 为减函数,即当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 取得极大值，极大值为 $f(1)=1$. 无极小值.

(2)当 $a\geq 1$ 时,有 $ae^x\geq e^x$, 所以要证明不等式 $ae^x\geq\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(1+\ln x)$ 成立，即证明 $e^x\geq\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(1+\ln x)$ 成立, 即 $\dfrac{e^x}{1+x}>\dfrac{1+\ln x}{x}$, 令 $g(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$, 则 $g'(x)=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}>0$, 函数 $g(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上为增函数, 故 $g(x)>g(0)=1$，即 $\dfrac{e^x}{1+x}>1$, 由(1)得 $\dfrac{1+\ln x}{x}\leq 1$, 则 $\dfrac{e^x}{1+x}>\dfrac{1+\ln x}{x}$ 成立,即 $ae^x\geq\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(1+\ln x)$ 成立.

例 10.（2018•常德一模）已知函数 $f(x)=lnx-ax+1(a\in R)$.

（Ⅰ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若对任意的 $x>0$， $f(x)\leqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（Ⅲ）求证：当 $x>0$ 时， $e^x-xlnx+x>0$.

解析(1)求导得 $f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}(x>0)$,①若 $a<0$, 则 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

②若 $a>0$, 止 $f'(x)>0$, 得 $0<x<\frac{1}{a}$; 由 $f'(x)<0$, 得 $x>\frac{1}{a}$.所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增:

在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

(2)法一若 $a\le 0$, 则 $f(1)=-a+1>0$, 不满足 $f(x)\le 0$ 恒成立;若 $a>0$, 止（1）可知，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$

上单调递增：在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减, $f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}$, 又 $f(x)\le 0$ 恒成立, $f(x)_{\max}\le 0$, 即

$\ln\frac{1}{a}\le 0$，解得 $a\ge 1$.综上所述，实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

法二由同构式令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$, 显然 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$, $a\ge\frac{\ln x+1}{x}=e\frac{\ln ex}{ex}=e\cdot h(ex)=1$.

(3)法一由(2)可知, 当 $a=1$ 时, 函数 $f(x)\le 0$ 恒成立, 即 $\ln x-x+1\le 0$, 即 $\ln x\le x-1$, 又当 $x>0$, 有

$-x\ln x\ge -x^2+x, e^x-x\ln x+x-1\ge e^x-x^2+2x-1$. 记 $g(x)=e^x-x^2+2x-1(x>0)$, 则

$g'(x)=e^x-2x+2$，记 $h(x)=e^x-2x+2$, 则 $h'(x)=e^x-2$, 由 $h'(x)=0$, 得 $x=\ln 2$. 当 $x\in(0,\ln 2)$

时, $h'(x)<0$; 当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时, $h'(x)>0$, 函数 $h(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递减:在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增,故

$h(x)_{\min}=h(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2+2=4-2\ln 2>0$, $h(x)>0$, 即 $g'(x)>0$, 函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递

增.故 $g(x)>g(0)=e^0-1=0$, 即 $e^x-x^2+2x-1>0$, $e^x-x\ln x+x>0$.

例 11.（2018•漳州二模）已知函数 $f(x)=aln2x-e^{\frac{2x}{e}}$.

（1）当 $a=e^2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(e,\ f(e))$ 处的切线方程;

（2）当 $a\leqslant e$ 时，求函数 $f(x)$ 的零点的个数.

解析(1)当 $a=e^2$ 时,由 $f(x)=e^2\ln 2x-e^{\frac{2x}{e}}$, 得 $f'(x)=\frac{e^2}{x}-\frac{2}{e}e^{\frac{2x}{e}}$, 所以 $f'(e)=-e$. 因为 $f(e)=e^2\ln 2$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(e,f(e))$ 处的切线方程是 $ex+y-e^2\ln 2e=0$.

(2)法一求导得 $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{2}{e}e^{\frac{2x}{e}}(x>0)\cdot$(i) 当 $a=0$ 时, $f(x)=-e^{\frac{2x}{e}}$, 因为 $f(x)=-e^{\frac{2x}{e}}<0$, 所以函数 $f(x)$

的零点的个数为0;(ii) 当 $a<0$ 时, $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{2}{e}e^{\frac{2x}{e}}<0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是减函数.所以函数 $f(x)$ 至多有一个零点.又因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=a\ln 1-e^{\frac{1}{e}}=-e^{\frac{1}{e}}<0$, 所以函数 $f(x)$ 的零点个数为1.

(iii) 当 $0<a\le e$ 时，令 $t=2x$, $g(t)=a\ln t-e^{\frac{t}{e}}$, 显然， $g(t)$ 与 $f(x)$ 的零点个数相等．令 $h(t)=g'(t)=\frac{a}{t}-\frac{1}{e}e^{\frac{t}{e}}$, 则 $h'(t)=-\frac{a}{t^2}-\frac{1}{e^2}e^{\frac{t}{e}}<0$. 所以 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是减函数.取 $0<t_0<\min\{e,a\}$, 则 $h(t_0)=\frac{a}{t_0}-\frac{1}{e}e^{\frac{t_0}{e}}>\frac{a}{t_0}-1>0$;取 $t_1>ea$, 则 $h(t_1)=\frac{a}{t_1}-\frac{1}{e}e^{\frac{t_1}{e}}<\frac{1}{e}-\frac{1}{e}e^{a}=\frac{1}{e}\left(1-e^{a}\right)<0$. 所以 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个实根,设为 t_a，且 $t\in(0,t_a)$, 当 $h(t)>0$ 时, $t\in(0,t_a)$, 当 $h(t)<0$ 时, $t\in(t_a,+\infty)$, 所以 $g(t)$ 在 $(0,t_a)$ 内是增函数,在 $(t_a,+\infty)$ 内是减函数,在 $t=t_a$ 时，取得最大值 $g(t_a)$. ①当 $a=e$ 时,由 $\begin{cases} h(e)=\frac{e}{e}-\frac{1}{e}e^{\frac{e}{e}}=0 \\ g(e)=e\ln e-e^{\frac{e}{e}}=0 \end{cases}$ 可知 $t_a=e$, $g(t_a)=0$, 所以 $g(t)$ 的有且只有一个零,点.所以当 $a=e$ 时，函数 $f(x)$ 的零,点个数为1. ②由 $\frac{a}{t_a}-\frac{1}{e}e^{\frac{t_a}{e}}=0$ 可得: $a=\frac{t_a}{e}e^{\frac{t_a}{e}}$. 因为 $\left(xe^{x}\right)'=e^{x}+xe^{x}$, 所以当 $x>0$ 时, $\left(xe^{x}\right)'>0$, 即 xe^{x} 是一个增函数.所以当 $0<a<e$ 时， $t_a<e$. 因为 $\left(\frac{x}{e}\ln x-1\right)'=\frac{1}{e}\ln x+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}\ln ex$, 所以当 $x>\frac{1}{e}$ 时， $\left(\frac{x}{e}\ln x-1\right)'>0$, 即 $\frac{x}{e}\ln x-1$ 是增函数.所以当 $1<t_a<e$ 时, $\frac{t_a}{e}\ln t_a-1<\frac{e}{e}\ln e-1=0$. 又当 $0<t_a\le 1$ 时,, $\frac{t_a}{e}\ln t_a-1<0$, 则 $g(t_a)=\frac{t_a}{e}e^{\frac{t_a}{e}}\ln t_a-e^{\frac{t_a}{e}}=e^{\frac{t_a}{e}}\left(\frac{t_a}{e}\ln t_a-1\right)<0$. 所以函数 $g(t)$ 没有零点,即函数 $f(x)$ 的零,点个数为0. 综上所述:当 $0\le a<e$ 时，函数 $f(x)$ 的零,点个数为 0;当 $a<0$ 或 $a=e$ 时，函数 $f(x)$ 的零点个数为 1.

法二（分而治之）变形 $a\ln 2x=e^{\frac{2x}{e}}\Leftrightarrow a\frac{\ln 2x}{2x}=\frac{e^{\frac{2x}{e}}}{2x}\Leftrightarrow ae\frac{\ln 2x}{2x}=\frac{e^{\frac{2x}{e}}}{\frac{2x}{e}}$，令 $g(x)=\frac{e^{x}}{x}$，易知 $g(x)_{\min}=g(1)=e$，函数 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$， 易得 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$ ①当 $0\le a<e$ 时,故无交点; ②当 $a=e$ 时,

可得 $ae\dfrac{\ln 2x}{2x}=ae\cdot h(2x)\le e$, 当仅当 $x=\dfrac{e}{2}$ 时等号成立, $\dfrac{e^{e}}{2x}=g\left(\dfrac{2x}{e}\right)\ge e$, 当且仅当 $x=\dfrac{e}{2}$ 时等号成立, 故此时它们相交于唯一点$\left(\dfrac{e}{2},\ e\right)$;③ $a<0$ 时, $a\ln 2x=e^{\frac{2x}{e}}$,一个递增一个递减,一定存在零点.

总结：零点问题，不要忽略了参数 $a<0$ 的情况.高人一等意味着没有零点亲密接触就是顶点（极值点）相接触，分而治之，恰到好处拿捻这种类型题.

例 12.（2019•桃城区校级月考）已知函数 $f(x)=x^{2}e^{ax}-1$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

（2）当 $a>\dfrac{1}{3}e$ 时，求证： $f(x)>lnx$.

解析(1) 由 $f(x)=x^{2}e^{ax}-1$, 得 $f^{'}(x)=2xe^{ax}+ax^{2}e^{ax}=x(ax+2)e^{ax}$, ①当 $a=0$ 时, $f(x)=x^{2}-1$, 则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，令 $f^{'}(x)=0$, 解得 $x=0$ 或 $x=-\dfrac{2}{a}$;②当 $a<0$ 时，则当 $x<0$ 或 $x>-\dfrac{2}{a}$ 时， $f^{'}(x)<0$, 当 $0<x<-\dfrac{2}{a}$ 时， $f^{'}(x)>0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$, $\left(-\dfrac{2}{a},\ +\infty\right)$ 上单调递减,在 $\left(0,-\dfrac{2}{a}\right)$ 上单调递增;③当 $a>0$ 时，则当 $x>0$ 或 $x<-\dfrac{2}{a}$ 时, $f^{'}(x)>0$, 当 $-\dfrac{2}{a}<x<0$ 时, $f^{'}(x)<0$,函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{2}{a}\right)$, $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{2}{a},\ 0\right)$ 上单调递减.

(2)由题设 $f(x)>\ln x$, 可得 $x^{2}e^{ax}>\ln x+1$, 即 $\dfrac{e^{ax}}{x}>\dfrac{\ln x+1}{x^{3}}$, 设 $g(x)=\dfrac{\ln x+1}{x^{3}}$, 对函数 $g(x)$ 求导得 $g^{'}(x)=\dfrac{x^{2}-3x^{2}(\ln x+1)}{x^{6}}=-\dfrac{3\ln x+2}{x^{4}}=-\dfrac{3}{x^{4}}\left(\ln x-\ln e^{-\frac{2}{3}}\right)$, 当 $0<x<e^{-\frac{2}{3}}$ 时, $g^{'}(x)>0$, 函数 $g(x)$ 单调递增，当 $x>e^{-\frac{2}{3}}$ 时，$g^{'}(x)<0$, 函数 $g(x)$ 单调递减，$g(x)_{\max}=g\left(e^{-\frac{2}{3}}\right)=\dfrac{1}{3}e^{2}$, 设 $h(x)=\dfrac{e^{ax}}{x}, x>0, h^{'}(x)=\dfrac{(ax-1)e^{ax}}{x^{2}}$, $a>\dfrac{1}{3}e$, 令 $h^{'}(x)=0$, 解得 $x=\dfrac{1}{a}$, 当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时, $h^{'}(x)>0$, 函数 $h(x)$ 单调递增, 当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时, $h^{'}(x)<0$,函数 $h(x)$ 单调递减, $h(x)_{\min}=h\left(\dfrac{1}{a}\right)=ae>\dfrac{1}{3}e^{2}$, 综上所述 $f(x)>\ln x$.

总结：x^2e^{ax} 是一个上函数，但由于其对应的 $\ln x+1$ 无极值，不具备成为下函数形式，故无法进行分而治之，如果同乘以 x，那丸 $x(\ln x+1)=x\ln ex=\frac{1}{e}ex\ln ex$ 将变成一个有极小值的函数，无法完成构造，故只能同除，若只除以 x，xe^{ax} 极小值为负数，并且取得极小值的位置不再本题定义域内，最终经过几次尝试，得出了一个结果：$\frac{e^{ax}}{x}=a\cdot\frac{e^{ax}}{ax}\geq ae>\frac{e^2}{3}$，$\frac{\ln ex}{x^3}=\frac{e^3}{3}\cdot\frac{\ln e^3x^3}{e^3x^3}\leq\frac{e^2}{3}$，两组分别来自六大函数的同构函数进行了分而治之的表演，所以分而治之只有一种形式进行函数分离，左边留谁，右边剩谁？这个是我们在秒 1 中提到并一直保留了悬念，终结这个悬念，还是靠了同构思想。

下面介绍一个分而治之出现“车祸现场”的题，数学是灵活的，辨别模型与模型之间的关键往往在一些小细节.

例 13.（2019•越秀区校级期中）设 $f(x)=ax+bxlnx$，$f(x)$ 在 $x=e$ 处的切线方程是 $x+y-e=0$，其中 $e=2.718\ldots$ 为自然对数的底数

（1）求 a，b 的值

（2）证明：$f(x)\leqslant\frac{1}{e^x}+x^2$

解析(1)求导 $f^{'}(x)=a+b+b\ln x$，由题得 $\begin{cases}f^{'}(e)=a+b+b=-1\\ f(e)=ae+be=0\end{cases}$，解得 $a=1$，$b=-1$；

(2)由(1)知函数 $f(x)=x-x\ln x$，令 $h(x)=x-x\ln x-\frac{1}{e^x}-x^2$，且函数 $h(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以 $h^{'}(x)=-\ln x+\frac{1}{e^x}-2x$，$h^{''}(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x}-2<0, h^{'}(1)<0$，当 $x\to 0, h^{'}(x)>0, g^{'}(x)\leq g^{'}(0)=1$，又 $g^{'}(1)<0$ 所以 $\exists x_0\in(0,1)$，使得 $h^{'}\left(x_0\right)=0$ 即 $2x_0=-\ln x_0+\frac{1}{e^{x_0}}$，所以 $h(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 上单调递增，在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h\left(x_0\right)=x_0-x_0\ln x_0-\frac{1}{e^{x_0}}-x_0^2=x_0+x_0\left(2x_0-\frac{1}{e^{x_0}}\right)-\frac{1}{e^{x_0}}-x_0^2=x_0+x_0^2-\frac{x_0}{e^{x_0}}-\frac{1}{e^{x_0}}=\left(x_0+1\right)\left(x_0-\frac{1}{e^{x_0}}\right)$，令 $m\left(x_0\right)=x_0-\frac{1}{e^{x_0}}$，$m^{'}\left(x_0\right)=1+\frac{1}{e^{x_0}}>0$，又 $m(0)<0$，$m(1)>0$ 所以 $\exists x_1\in(0,\ 1)$，使 $m\left(x_1\right)=0$，此时 $x_1=\frac{1}{e^{x_1}}\ln\left(x_1\right)=-x_1$ 且 $h^{'}\left(x_1\right)=0$，$x_0=x_1, m\left(x_0\right)\leq 0, h(x)\leq h\left(x_0\right)\leq 0$，故 $f(x)\leq\frac{1}{e^x}+x^2$. 这是传统的隐零点代换，我们可以试一下分而治之，$x-x\ln x\leq\frac{1}{e^x}-x^2$，首先是不等式有取等，而取等条件却不在 $x=1$，$x=\frac{1}{e}$，e 这些特殊点，其次很难找到拥有最小值的上函数和拥有最大值的下函数，更重要的是一旦有等号，就必须是“亲密接触”

型，分而治之一旦遇到不含参且有等号的题目基本上被束缚住了手脚，还是得找到三板斧的另外两兄弟一同构+切线放缩：$\frac{1}{e^x}+x^2+x\ln x-x=x\left(e^{-x-\ln x}+x+\ln x-1\right)$，同构，令函数 $h(x)=e^x-x-1$，显然 $h(x)\ge h(0)=0$，故 $\frac{1}{e^x}+x^2+x\ln x-x=xh(-x-\ln x)\ge 0$，当仅当 $x_0+\ln x_0=0$ 时,等号成立，也是朗博函数处理方法一一同构式之改头换面.

例 14.（2020•江西一模）已知函数 $f(x)=\frac{lnx+a}{e^x}$.

（1）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

（2）设 $g(x)=xe^{-x}-a$，对任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$ 都有 $x_1e^{x_1}f(x_1)-ax_1>g(x_2)$ 成立，求实数 a 的取值范围.

解析 (1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{1+\ln x}{e^x}$，函数的定义域为 $(0,+\infty)$，所以 $f'(x)=\frac{1-x-x\ln x}{xe^x}$，且令 $h(x)=1-x-x\ln x$，所以当 $0<x<1$ 时，$1-x>0,x\ln x<0$，所以 $h(x)>0$，又 $h'(x)=-2-\ln x$，所以当 $x>1$ 时，$h'(x)=-2-\ln x<0$，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $h(x)<h(1)=0$，同理当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在(0,1)上是单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减,所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 的极大值为 $f(1)=\frac{1}{e}$，无极小值.

(2)令 $m(x)=xe^xf(x)-ax$，因为对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 都有 $x_1e^{x_1}f\left(x_1\right)-ax_1>g\left(x_2\right)$ 成立,所以 $m\left(x_1\right)_{\min}>g\left(x_2\right)_{\max}$，因为 $m(x)=xe^xf(x)-ax=x\ln x$，所以 $m'(x)=1+\ln x$. 令 $m'(x)>0$，即 $1+\ln x>0$，解得 $x>\frac{1}{e}$，此时 $m(x)$ 单调递增；故 $0<x<\frac{1}{e}$，此时 $m(x)$ 单调递减，所以 $m(x)_{\min}=m\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$，因为 $g'(x)=(1-x)e^{-x}$，令 $g'(x)>0$，即 $1-x>0$，解得 $0<x<1$；令 $g'(x)<0$，即 $1-x<0$，解得 $x>1$，所以 $g(x)$ 在(0,1)上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $g(x)_{\max}=g(1)=\frac{1}{e}-a$，所以 $-\frac{1}{e}>\frac{1}{e}-a$，所以 $a>\frac{2}{e}$，即实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{2}{e},+\infty\right)$.

例 15.（2019•安庆期末）设函数 $f(x)=alnx+x$，$g(x)=e^x+x$.

（Ⅰ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）令 $h(x)=f(x)-g(x)$，当 $a=2$ 时，证明 $h(x)<2ln2-4$.

解析(1)求导得 $f'(x)=\frac{a}{x}+1=\frac{a+x}{x}$，当 $a\ge 0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$ 可得 $x=-a$，当 $f'(x)>0$ 时,解得 $x>-a$，令 $f'(x)<0$ 可得，$0<x<-a$，所以函数 $f(x)$

在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,-a)$ 上单调递减,

(2)法一令 $h(x)=f(x)-g(x)=a\ln x-e^{x}$， 当 $a=2$ 时, $h(x)=2\ln x-e^{x}$， 则 $h^{'}(x)=\dfrac{2}{x}-e^{x}$， 令 $y=h^{'}(x)=\dfrac{2}{x}-e^{x}$, 则 $y^{'}=-\dfrac{2}{x^{2}}-e^{x}<0$, 所以 $h^{'}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 取 $x_1=\dfrac{1}{2}$， $x_2=1$， 则 $h^{'}\left(\dfrac{1}{2}\right)=4-\sqrt{e}>0$， $h^{'}(1)=2-e<0$， 所以函数 $h^{'}(x)$ 存在唯一的零点， $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$， 即 $h^{'}\left(x_0\right)=\dfrac{2}{x_0}-e^{x_0}=0$, 故当 $x\in\left(0,x_0\right)$， $h^{'}(x)>0$， 当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$， $h^{'}(x)<0$, 故函数 $h(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 单调递增,在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 单调递减,所以当 $x=x_0$ 时,函数 $h(x)$ 取得极大值，也是最大值 $h\left(x_0\right)=2\ln x_0-e^{x_0}$, 由 $\dfrac{2}{x_0}-e^{x_0}=0$ 可得 $e^{x_0}=\dfrac{2}{x_0}$，两边同时取对数可得 $x_0=\ln 2-\ln x_0$， 所以 $\ln x_0=\ln 2-x_0$， 故 $h\left(x_0\right)=2\ln x_0-e^{x_0}=2\left(\ln 2-x_0\right)-\dfrac{2}{x_0}=2\ln 2-2\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)$， 由基本不等式可得 $x_0+\dfrac{1}{x_0}\geq 2\sqrt{x_0\cdot\dfrac{1}{x_0}}=2$， 因为 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$， 所以 $x_0+\dfrac{1}{x_0}>2$， 所以 $h\left(x_0\right)=2\ln 2-2\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)<2\ln 2-4$， 又 $h(x)\leq h\left(x_0\right)$ 即 $h(x)<2\ln 2-4$， 所以当 $a=2$ 时, $h(x)<2\ln 2-4$ 成立.

法二（同构）题目可以转化为证 $e^{x}-2\ln x>4-2\ln 2$, 即证 $\dfrac{e^{x}}{2}-\ln x>2-\ln 2$, 令 $\varphi(x)=e^{x}-x-1$, 易知 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(0)=0$， $\dfrac{e^{x}}{2}-\ln x=e^{x-\ln 2}-(x-\ln 2)-1+x-\ln x-1+2-\ln 2=\varphi(x-\ln 2)+\varphi(\ln x)+2-\ln 2$, 由于 $\varphi(x-\ln 2)\geq 0$, 当 $x=\ln 2$ 时取得最小值, $\varphi(\ln x)\geq 0$, 当 $x=1$ 时取得最小值，显然两个同构的函数取得最值得条件不一致，故 $\varphi(x-\ln 2)+\varphi(\ln x)+2-\ln 2>2-\ln 2$, 即 $h(x)<2\ln 2-4$ 成立.

法三（分而治之）题目可以转化为证 $e^{x}>4-2\ln 2+2\ln x=2\ln 2e^{2}x\Leftrightarrow\dfrac{e^{x}}{x}>\dfrac{2\ln\dfrac{e^{2}x}{2}}{x}$, 山于 $\dfrac{e^{x}}{x}\geq e$, 当仅

当$x=1$时取得最小值,$\dfrac{2\ln\frac{e^2x}{2}}{x}=e^2\dfrac{\ln\frac{e^2x}{2}}{\frac{e^2x}{2}}\le e^2\cdot\dfrac{1}{e}=e,$ 当仅当$\dfrac{e^2x}{2}=e\Rightarrow x=\dfrac{2}{e}$等号成立,显然两式取等条件不一致,故$\dfrac{e^x}{x}>\dfrac{2\ln\frac{e^2x}{2}}{x}$恒成立,即$h(x)<2\ln2-4$成立.

例 16.（2020•黄山一模）已知曲线$f(x)=\dfrac{mx-m}{e^x}$在点$(1$，$f(1)$)处的切线斜率为$-\dfrac{1}{e}$.

（1）求m的值，并求函数$f(x)$的极小值；

（2）当$x\in(0,\pi)$时，求证：$e^x\sin x-x+e^{x-2}+1>e^xx\cos x$.

解析(1)由题意,$f(x)$的定义域为R. $f'(x)=-\dfrac{m(x-2)}{e^x}$, $f'(1)=\dfrac{m}{e}=-\dfrac{1}{e}$, $m=-1$. $f(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$, $f'(x)=\dfrac{x-2}{e^x}$, 当$x>2$时, $f'(x)>0$, $f(x)$单调递增;当$x<2$时, $f'(x)<0$, $f(x)$单调递减, $x=2$是$f(x)$的极小值,点, $f(x)$的极小值为$f(2)=-\dfrac{1}{e^2}$.

(2)证明:要证$e^x\sin x-x+e^{x-2}+1>e^xx\cos x$,两边同除以$e^x$,只需证$\dfrac{1-x}{e^x}+\dfrac{1}{e^2}>x\cos x-\sin x$即可.即$x\in(0,\pi)$,则$g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x, x\in(0,\pi), g'(x)<0, g(x)$在区间$(0,\pi)$上单调递减,从而$g(x)<g(0)=0$, $f(x)+\dfrac{1}{e^2}>x\cos x-\sin x$,即$e^x\sin x-x+e^{x-2}+1>e^xx\cos x$

总结：三角函数加入导数压轴题，就经常围绕着几个放缩式子进行或者经过“指数找基友”来确定恒定单调性，此处又在分而治之的夭各一方来闪亮登场，三角函数并不复杂，仔细折摩，总能发现简单的套路。.

分而治之，一定要区别朗博函数同构式,即$x^me^x\ge x+m\ln x+1$与$xe^x\ge m\ln x+n$区别，前者靠切线同构，，后者可以分而治之，数学学习的最终目的则是形成思维闭环。

达标训练

1.（2019•郑州期中）已知函数$f(x)=xlnx+ae^x$有两个极值点，则实数a的取值范围是(　　)

A．$(-\infty,\dfrac{1}{e})$　　B．$(0,\dfrac{1}{e})$　　C．$(-\dfrac{1}{e},+\infty)$　　D．$(-\dfrac{1}{e},0)$

2.（2019•雁峰区校级期中）已知函$f(x)=e^x-aln(ax-a)+a(a>0)$，若关于$x$的不等式$f(x)>0$恒成立，则实数$a$的取值范围为(　　)

A．$(0$，$e^2]$　　B．$(0,e^2)$　　C．$[1$，$e^2]$　　D．$(1,e^2)$

3.（2019•路南区校级月考）设函数 $f(x)=(e^{x-m}-ax)(lnx-ax)$，若存在实数 a 使得 $f(x)<0$ 恒成立，则 m 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty，\ 0]$　　B．$[0，\ 2)$　　C．$(2,+\infty)$　　D．$(-\infty,2)$

4.（2018•福州期末）已知函数 $f(x)=x^3-2ex^2+mx-lnx$，若 $f(x)>x$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是(　　)

A．$(e^2+\frac{1}{e}+1,+\infty)$　　B．$(0,e^2+\frac{1}{e}+1]$

C．$(-\infty,e^2+\frac{1}{e}+1]$　　D．$(-\infty,e^2+\frac{1}{e}]$

5.（2020•内江模拟）已知函数 $f(x)=\frac{lnx}{x}$．

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：对一切 $x\in(0,+\infty)$，都有 $lnx<\frac{2x}{e}-\frac{x^2}{e^x}$ 成立．

6.（2018•双流区校级模拟）已知函数 $f(x)=alnx-e^x$；

（1）讨论 $f(x)$ 的极值点的个数；

（2）若 $a=2$，求证：$f(x)<0$．

7.（2020•绵阳模拟）已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$，$a\in R$，$x\in(0,+\infty)$．

（1）若 $f(x)$ 存在极小值，求实数 a 的取值范围；

（2）若 $0<a\leqslant\frac{e^2}{2}$，求证：$f(x)>ax(lnx-x)$．

8.（2019•山西二模）已知函数 $f(x)=e^x-alnx(a\in R,a>0)$．

（1）若 $a=e$，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：$f(x)\geqslant a(2-lna)$．

10.（2019•深圳月考）已知函数 $f(x)=x^2e^x$，其中 $e=2.718\ldots$为自然对数的底数．

（1）求函数 $f(x)$ 在 $[-5，\ -1]$ 上的最值；

（2）若函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x+1}-alnx$，求证：当 $a\in(0,2e)$ 时，函数 $g(x)$ 无零点．

11.（2019•南康区校级月考）已知函数 $f(x)=xlnx$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数．

（1）令 $g(x)=f'(x)-ax^2$，试讨论函数 $g(x)$ 的单调区间；

（2）证明：$f(x)<2e^{x-2}$．

12.（2018•郴州三模）已知函数 $f(x)=e^x(alnx-bx)$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1，\ f(1))$ 处的切线方程为

$y=(e-4)x-e+2$.

（1）求 a， b 的值；

（2）证明： $f(x)+x^2<0$.

13.（2018•唐山模拟）函数 $f(x)=x^2(lnx-1)$，

（Ⅰ）求函数 $y=f(x)$ 在点 $(1$， f （1） $)$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $m>0$ 时，有 $mf(x)+e^x\geqslant0$ 成立，求 m 的取值范围.

14.（2020•淮南一模）设函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{e^a}-blnx$，且 f （1） $=1$（其中 e 是自然对数的底数）.

（Ⅰ）若 $b=1$，求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $0\leqslant b\leqslant e$，求证： $f(x)>0$.

15.（2019•辽阳一模）已知函数 $f(x)=xlnx$.

（1）若函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}-\dfrac{1}{x}$，求 $g(x)$ 的极值；

（2）证明： $f(x)+1<e^x-x^2$.

（参考数据： $ln2\approx0.69$， $ln3\approx1.10$， $e^{\frac{3}{2}}\approx4.48$， $e^2\approx7.39$)

16.（2019•临沂期末）已知函数 $f(x)=2ln(x+1)+\sin x+1$，函数 $g(x)=ax-1-blnx(a$， $b\in R$， $ab\neq0)$

（1）讨论 $g(x)$ 的单调性；

（2）证明：当 $x\geqslant0$ 时， $f(x)\leqslant3x+1$.

（3）证明：当 $x>-1$ 时， $f(x)<(x^2+2x+2)e^{\sin x}$.

17.（2020•凉山州模拟）已知函数 $f(x)=\dfrac{ae^x}{x}(e=2.71828\ldots$ 为自然对数的底数).

（1）若 $a\neq0$，试讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）对任意 $x\in(0,+\infty)$ 均有 $(x^2+1)e^x-ax^3-x^2-ax\geqslant0$，求 a 的取值范围.

18.（2020•九江一模）已知函数 $f(x)=alnx+x(a\in R)$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若对 $\forall x\in(0,+\infty)$， $f(x)-e^x-ax<0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

19.（2018•太原期末）已知函数 $f(x)=e^x-ax-1(a\in R)$.

（1）当 $a>0$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $g(x)=elnx-ax+e-1$，求证：当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$．

20.（2019•长沙二模）已知函数 $f(x)=1+lnx-ax^2$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：$xf(x)<\dfrac{2}{e^2}\bullet e^x+x-ax^3$．

21.（2019•黔东南州一模）已知函数 $f(x)=x^2lnx$．

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：$lnx>\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{3}{4x^2}$．

22.（2019•益阳期末）已知 $f(x)=x+\dfrac{1-m}{x}-mlnx$，$m\in R$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $0<m\leqslant\dfrac{e^2}{2}$ 时，证明 $e^x>x^2-xf(x)+1-m$．

23.（2019•顺德区期末）已知函数 $f(x)=lnx-a^2x^2+ax$．

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(II) 若 $a=1$，求证：当 $x>0$ 时，$f(x)<e^{2x}-x^2-2$．

24.（2019•辽宁期末）已知 $f(x)=e^x-alnx-a$，其中常数 $a>0$．

（1）若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（2）若函数 $y=f(x)$ 有两个零点 x_1，$x_2(0<x_1<x_2)$，求证：$\dfrac{1}{a}<x_1<1<x_2<a$．

25.（2019•亳州期末）已知函数 $f(x)=(x+a)e^x-1$．

（1）证明：$f(x)$ 存在唯一零点；

（2）若 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 2ax$，求 a 的取值范围．

26.（2019•湖北期末）已知 $f(x)=\dfrac{e^x}{e}-a(x-1)+lnx-1(a\in R)$，其中 e 为自然对数的底数．

（1）设 $g(x)=f'(x)$，求 $g(x)$ 的单调区间；

（2）若 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

专题 3 导数中的差值比值问题

完成了外函数分而治之，那么同个函数内部的那些构造也被拿上了台面，关于 $f(x_1)-f(x_2)$ 极值之差问题，还有 $f(x_1)+f(x_2)$ 极值之和问题，这里我们会简单介绍一下极值偏移和拐点偏移的原理。关于 x_1/x_2 的比值代换，甚至需要切线夹放缩的 x_1-x_2。这些题起源于高考，反复演变，正在逐渐取代之前传统的利用导数求函数单调性和极值的问题，知识反复更新和迭代的过程中，我们确实需要更新数学模型和方法.

第一讲极值之差

若函数 $y=f(x)$ 的两个极值点为 x_1,x_2，则 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)$ 称为极值之差.通常解决这类问题需要用到函数的内构造，一般求导后会构成二次函数，必有 $\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1x_2=n\end{cases}$，其中 m 与 n 中必有一个是常数，这样将参数和 x_2 通过韦达定理替换成 x_1，最后构成一个在已知范围的新函数 $y=h\left(x_1\right)$，然后求导即可求出最值.或者利用比值换元，$t=\dfrac{x_2}{x_1}$，这里通常 n 为常数.

秒杀秘籍:改造成飘带函数与对数式放缩

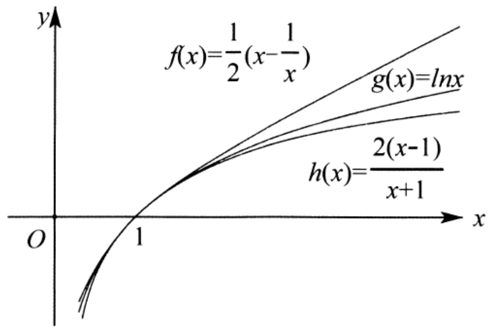


图 12-1-1

如图 12-1-1，函数 $y=ax-\dfrac{b}{x}(a>0,\quad b>0)$ 图像由于长得像两条抄带，故称抄带函数，尤其是 $y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$，与对数函数形成紧密型放缩关系，我们通常将抄带函数另外一个反比例函数 $y=\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ 对 $y=\ln x$ 进行曲线逼近放缩，即有结论：① $\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)<\ln x<\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，$x\in(0,1)$； ② $\dfrac{2(x-1)}{x+1}\le\ln x\le\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$，$x\in[1,+\infty)$.

证明①构造函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2x^2}=-\dfrac{(x-1)^2}{2x^2}\le0$，而 $f(1)=0$，故当

$0<x<1$ 时， $\ln x>\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$; 当 $x\geq 1$ 时 $\ln x\leq\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$. ②构造函数 $g(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$, 则 $g^{'}(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}==\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geq 0$, 而 $f(1)=0$, 故当 $0<x<1$ 时， $\ln x<\frac{2(x-1)}{x+1}$; 当 $x\geq 1$ 时， $\ln x\geq\frac{2(x-1)}{x+1}$.

在函数 $f(x)=\ln x+ax^2+bx$ 或者 $f(x)=\ln x+ax+\frac{b}{x}$ 中，经常出现 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=m\left(2\ln nx_1^2+\frac{1}{nx_1^2}-nx_1^2\right)$这样的式子，单调性基本固定，只看端点值来求最值，此为经典考题，抄带函数放缩无处不在.

例 1.（2020•攀枝花一模）已知函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}-a\ln x\,(a\in R)$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(e，-\frac{1}{e})$ 处的切线方程;

（Ⅱ）若函数 $g(x)=x^2\cdot f'(x)+2\ln x-ax$（其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数）有两个极值点 x_1、x_2，且 $x_1<x_2<e$，求 $g(x_1)-g(x_2)$ 的取值范围.

解析(1)因为 $f(e)=e-\frac{1}{e}-a=-\frac{1}{e}\Rightarrow a=e$, 求导 $f^{'}(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}$, 即 $f^{'}(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{e}{x}$, 故所求切线的斜率为 $f^{'}(e)=1+\frac{1}{e^2}-\frac{e}{e}=\frac{1}{e^2}$, 所以切线方程为 $y+\frac{1}{e}=\frac{1}{e^2}(x-e)\Rightarrow y=\frac{x}{e^2}-\frac{2}{e}\Rightarrow x-e^2y-2e=0$.

(2) 由 $g(x)=x^2\cdot f^{'}(x)+2\ln x-ax=x^2-2ax+2\ln x+1$, 求导 $g^{'}(x)=2x-2a+\frac{2}{x}=\frac{2\left(x^2-ax+1\right)}{x}$, 若 $g(x)$ 有两个极值，点 x_1,x_2, 且 $x_1<x_2<e$, 则方程 $x^2-ax+1=0$ 的判别式 $\Delta=a^2-4>0$, 故 $x_1+x_2=a>0$, $x_1x_2=1$， $x_2=\frac{1}{x_1}<e$, 得 $a>2$, $a=x_1+\frac{1}{x_1}$, 且 $\frac{1}{e}<x_1<1$. 所以 $g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)=x_1^2-2ax_1+2\ln x_1-x_2^2+2ax_2-2\ln x_2=\left(x_1+x_2\right)\left(x_1-x_2\right)-2a\left(x_1-x_2\right)+4\ln x_1=-\left(x_1+x_2\right)\left(x_1-x_2\right)+4\ln x_1=\frac{1}{x_1^2}-x_1^2+4\ln x_1\left(\frac{1}{e}<x_1<1\right)$, 构造函数得 $h(t)=\frac{1}{t^2}-t^2+4\ln t\left(\frac{1}{e}<t<1\right)$, 则 $h^{'}(t)=-\frac{2}{t^3}-2t+\frac{4}{t}=-\frac{2\left(t^2-1\right)^2}{t^3}<0$ 在 $t\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ 上恒成立, 故 $h(t)$

在 $t\in(0,1)$ 单调递减,从而 $h(t)>h(1)=0$, $h(t)<h\left(\frac{1}{e}\right)=e^2-\frac{1}{e^2}-4$, 所以 $g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)$ 的取值范围是 $\left(0,e^2-\frac{1}{e^2}-4\right)$.

总结：将 x ,和 a 转化为 x_1 成为解题关键，本题中，构造了一个单调的函数，其实这个函数来自函带函数与对数的放缩式 $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\leq\ln x$ 对 $x\in(0,1]$ 恒成立,同时 $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\geq\ln x$ 对 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立,从而得到当 $x\in(0,1]$ 时， $\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\leq\ln x^2\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}-x^2+4\ln x\geq 0$ 恒成立.

例 2.（2019•广东期末）已知函数 $f(x)=2\ln x+x^2-ax(a\in R)$ 有两个极值点 x_1， x_2，其中 $x_1<x_2$.

（Ⅰ）求实数 a 的取值范围；

（Ⅱ）当 $a\geq 2\sqrt{e}+\frac{2}{\sqrt{e}}$ 时，求 $f(x_1)-f(x_2)$ 的最小值.

解析(1)易知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=\frac{2x^2-ax+2}{x}$, 函数 $f(x)$ 有两个极值,点 $x_1,x_2,x_1<x_2$ 故方程 $2x^2-ax+2=0$ 有两个不相等的正根 $x_1,x_2,x_1<x_2$, 所以 $-\frac{-a}{2}>0$, $\Delta=a^2-16>0$, 解得 $a>4$，此时 $f(x)$ 在 $\left(0,x_1\right)$ 和 $\left(x_2,+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(x_1,x_2\right)$ 上单调递减，所以实数 a 的取值范围是 $(4,+\infty)$.

(2)法一(比值代换)因为 x_1,x_2 是方程 $2x^2-ax+2=0$ 的两个根,所以 $x_1+x_2=\frac{a}{2}$, $x_1x_2=1$, 因为 $2x_1^2-ax_1+2=0,2x_2^2-ax_2+2=0$, 所以 $ax_1=2x_1^2+2,ax_2=2x_2^2+2$, 所以

$$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=$$

$$\left(2\ln x_1+x_1^2-ax_1\right)-\left(2\ln x_2+x_2^2-ax_2\right)=\left[2\ln x_1+x_1^2-\left(2x_1^2+2\right)\right]-\left[2\ln x_2+x_2^2-\left(2x_2^2+2\right)\right]=$$

$x_2^2-x_1^2+\quad 2\ln x_1-2\ln x_2=\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1x_2}+2\ln\frac{x_1}{x_2}\quad=\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_1}{x_2}+2\ln\frac{x_1}{x_2}$, 令 $t=\frac{x_1}{x_2}(0<t<1)$, 则 $h(t)=\frac{1}{t}-t+2\ln t$, 则 $h'(t)=-\frac{1}{t^2}-1+\frac{2}{t}=\frac{-t^2+2t-1}{t^2}=\frac{-(t-1)^2}{t^2}<0$,即 $h(t)$ 在(0,1)上单调递减. 因为 $a\geq 2\sqrt{e}+\frac{2}{\sqrt{e}}$, 所以 $x_1+x_2=\frac{a}{2}\geq\sqrt{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}$, 所以 $\frac{\left(x_1+x_2\right)^2}{x_1x_2}\geq\left(\sqrt{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2$ ，即

$\dfrac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2}{x_1x_2}\ge e+\dfrac{1}{e}+2,$所以$\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}\ge e+\dfrac{1}{e},$即$t+\dfrac{1}{t}\ge e+\dfrac{1}{e},$所以$(t-e)\left(t-\dfrac{1}{e}\right)\ge 0,\quad 0<t<1,$所以

$0<t\le\dfrac{1}{e}.$因为$h(\mathrm{t})$在$\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$上单调递减，所以$h(t)$的最小值为$h\left(\dfrac{1}{e}\right)=e-\dfrac{1}{e}-2,$即$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)$的最小值为$e-\dfrac{1}{e}-2$.

法二 因为x_1,x_2是方程$2x^2-ax+2=0$的两个根，所以$x_1+x_2=\dfrac{a}{2},x_1x_2=1,$其中$x_1<x_2$. 因为$a\ge 2\sqrt{e}+\dfrac{2}{\sqrt{e}}$，所以$x_1+x_2=\dfrac{a}{2}\ge\sqrt{e}+\dfrac{1}{\sqrt{e}},$即$x_1+\dfrac{1}{x_1}\ge\sqrt{e}+\dfrac{1}{\sqrt{e}}\Leftrightarrow 0<x_1\le\dfrac{1}{\sqrt{e}},$又因为

$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\left(2\ln x_1+x_1^2-ax_1\right)-\left(2\ln x_2+x_2^2-ax_2\right)=\left[2\ln x_1+x_1^2-x_1\left(2x_1+\dfrac{2}{x_1}\right)\right]-$

$\left[2\ln\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_1^2}-\dfrac{1}{x_1}\left(2x_1+\dfrac{2}{x_1}\right)\right]=4\ln x_1-x_1^2+\dfrac{1}{x_1^2}=2\ln x_1^2-x_1^2+\dfrac{1}{x_1^2}$，令$t=x_1^2,$则

$t\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right],\quad h(t)=2\ln t-t+\dfrac{1}{t},\quad h'(t)=\dfrac{2}{t}-1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{-(t-1)^2}{t^2}\le 0,$ 故$h(t)_{\min}=h\left(\dfrac{1}{e}\right)=e-\dfrac{1}{e}-2.$

总结：最终还是抄带函数与对数函数构成的整体递减函数.

例 3.（2020•绵阳模拟）已知函数$f(x)=2\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-ax$，其中$a\in R$.

（1）讨论函数$f(x)$的单调性；

（2）设函数$f(x)$有两个极值点x_1，x_2（其中$x_2>x_1$），若$f(x_2)-f(x_1)$的最大值为$2\ln 2-\dfrac{3}{2}$，求实数a的取值范围.

解析(1)求导$f'(x)=\dfrac{x^2-ax+2}{x},x>0,$令$g(x)=x^2-ax+2,\Delta=a^2-8$，①当$a\le 0$或$\Delta\le 0$即$a\le 2\sqrt{2}$时,$f'(x)\ge 0$恒成立,此时函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;②当$\begin{cases}a>0\\ \Delta>0\end{cases}\Leftrightarrow a>2\sqrt{2}$时,则$f'(x)>0\Rightarrow$

$0<x<\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}$或$x>\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{2};f'(x)<0\Rightarrow\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}<x<\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{2}$，所以$f(x)$在

$\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}\right)$和$\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{2}\right)$上单调递减：综上,当$a\le 2\sqrt{2}$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；当$a>2\sqrt{2}$时，$f(x)$在

$\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2}\right),\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{2},+\infty\right)$上单调递增，$\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{2}\right)$上单调递减..

（2）法一出（1）知,当 $a>2\sqrt{2}$ 时, $f(x)$ 有两极值,点 $x_1,x_2\left(x_2>x_1\right)$, 止(1)得 x_1,x_2 为 $g(x)=x^2-ax+2=0$ 的两根，于是 $x_1+x_2=a,\quad x_1x_2=2,$ 即 $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=2\ln\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{1}{2}\left(x_2^2-x_1^2\right)-\quad a\left(x_2-x_1\right)=\quad 2\ln\dfrac{x_2}{x_1}-\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}$，令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}(t>1),$ 则 $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=h(t)=2\ln t-t+\dfrac{1}{t},$ 因为导函数 $h'(t)=\dfrac{2}{t}-1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{-(t-1)^2}{t^2}<0,$ 所以函数 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,凶已知 $h(t)=f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)$ 的最大值为 $2\ln 2-\dfrac{3}{2}$, 而 $h(2)=2\ln 2-\dfrac{3}{2}$, 所以 $t=2$，设 t 的取值集合 T, 则只要满足 $T\subseteq[2,+\infty]$ 且 T 中的最小元素为 2 的 T 集合都满足题意, 又 $\dfrac{1}{2}a^2=\dfrac{\left(x_1+x_2\right)^2}{x_1x_2}=t+\dfrac{1}{t}+2,$ 易知 $\varphi(t)=t+\dfrac{1}{t}+2$ 在 $[2,+\infty]$ 上单调递增,结合 $a>2\sqrt{2}$, 可得 a 与 t 是一一对应关系,而当 $t=2$,即 $\dfrac{x_2}{x_1}=2$ 时,联合 $x_1x_2=2,$ 解得 $x_2=2,\quad x_1=1,$ 进而可得 $a=3$,所以实数 a 的取值范围为 $[3,+\infty)$ 或 $[3,+\infty)$ 的任意最小元素为 3 的子集.

法二根据 $x_1+x_2=a,x_1x_2=2,$ 得 $0<x_1<\sqrt{2},x_2=\dfrac{2}{x_1},$ 所以 $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=2\ln\dfrac{2}{x_1}+\dfrac{2}{x_1^2}-\left(x_1+\dfrac{2}{x_1}\right)\dfrac{2}{x_1}\quad -2\ln x_1-\dfrac{x_1^2}{2}+x_1\left(x_1+\dfrac{2}{x_1}\right)=2\ln\dfrac{2}{x_1^2}-\dfrac{2}{x_1^2}+\dfrac{x_1^2}{2},$ 令 $t=\dfrac{2}{x_1^2},$ 则 $t\in(1,+\infty),\quad h(t)=2\ln t-t+\dfrac{1}{t},\quad h'(t)=\dfrac{2}{t}-1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{-(t-1)^2}{t^2}\le 0$，根据题意 $h(t)_{\max}=2\ln 2-\dfrac{3}{2}=h(2).$ 故 $t\ge 2,\dfrac{2}{x_1^2}\ge 2\Leftrightarrow x_1\le 1\Leftrightarrow\ a=x_1+\dfrac{2}{x_1}\ge 3,$ 实数 a 的取值范围为 $[3,+\infty)$ 或 $[3,+\infty)$ 的任意最小元素为 3 的子集.

例 4.（2018•四川模拟）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-ax+\ln x(a\in R)$.

（1）当 $a=-1$ 时，求曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1， $x_2(x_1<x_2)$，求 a 的取值范围，并证明 $f(x_1)-f(x_2)<\dfrac{1}{2}a^2+2\ln\dfrac{2}{ae}$.

解析(1)当 $a=-1$ 时,函 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\ln x, \quad (x>0)$, 求导 $f'(x)=x+1+\frac{1}{x}, \quad f'(1)=3, f(1)=\frac{3}{2}$,

所以曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-\frac{3}{2}=3(x-1)$, 即 $y=3x-\frac{3}{2}$.

(2)由 $f'(x)=\frac{x^2-ax+1}{x}$ 知,若函数 $f(x)$ 有两个极值点, $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$, 则方程 $x^2-ax+1=0$ 有两个不等

所以 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\frac{1}{2}x_1^2-\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)x_1+\ln x_1-\frac{1}{2}x_2^2+\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)x_2-\ln x_2=\ln x_1^2-\frac{1}{2}\left(x_1^2-\frac{1}{x_1^2}\right)$, 要证

$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<\frac{1}{2}a^2+2\ln\frac{2}{ae}$, 只需

$\ln x_1^2-\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2x_1^2}<\frac{1}{2}a^2+2\ln\frac{2}{ae}=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+2\ln 2-2 \quad -2\ln\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)$ 故只需

$2\ln\left(x_1^2+1\right)-x_1^2+1-2\ln 2<0$, 令 $h(t)=2\ln t-t+2-2\ln 2, t=x_1^2+1\in(1,2)$. $h'(t)=\frac{2}{t}-1=\frac{2-t}{t}>0$,

则 $h(t)$ 在(1,2)单调递增, $h(t)<h(2)=2\ln 2-2\ln 2=0$, 即 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<\frac{1}{2}a^2+2\ln\frac{2}{ae}$ 成立.

总结：虽然还是抄带函数和对数，但加 λ 了新的参数元素，不到最后转化为只有 x_1 的函数式，就不能罢休，

以下例题虽然构造的不是贩带函数，但也换汤不换药.

例 5.（2019•长沙期末）已知 $f(x)=x^2-2ax+\ln x$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间;

（Ⅱ）若 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，$f(x)$ 有两个不相等的极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，求 $2f(x_1)-f(x_2)$ 的最小值.

解析(1)当 $a=1$ 时, $\quad f(x)=x^2-2x+\ln x(x>0), \quad f'(x)=\frac{(x-1)^2+x^2}{x}>0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(2)求导得 $f'(x)=2x-2a+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-2ax+1}{x}, \quad x_1$ 和 x_2 是方程 $2x^2-2ax+1=0$ 的两个不相等的正实根,

则 $x_1+x_2=a>0, \quad x_1x_2=\frac{1}{2}, \quad \Delta=4a^2-8>0$, 解得: $\quad a>\sqrt{2}, \quad 2ax_1=2x_1+1, \quad 2ax_2=2x_2^2+1$, 由

于 $\frac{a}{2}>\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $x_1\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right), x_2\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$, 故

$2f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=-2x_1^2+x_2^2-\ln\frac{x_2}{x_1^2}-1= \quad -\frac{1}{2x_2^2}+x_2^2-\frac{3}{2}\ln x_2^2-2\ln 2-1$ ， 令 $t=x_2^2\left(t>\frac{1}{2}\right)$, 则

$g(t)=-\frac{1}{2t}+t-\frac{3}{2}\ln t-2\ln 2-1$, 求导 $g^{'}(t)=\frac{(2t-1)(t-1)}{2t^2}$, 当 $\frac{1}{2}<t<1$ 时, $g^{'}(t)<0$; 当 $t>1$ 时, $g^{'}(t)>0$, 所以 $g(t)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, 则 $g(t)_{\min}=g(1)=-\frac{1+4\ln 2}{2}$, 所以 $2f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)$ 的最小值为 $-\frac{1+4\ln 2}{2}$.

例 6.(2019•芜湖校级模拟)已知函数 $f(x)=(ax-1)\ln x+\frac{x^2}{2}$.

(I)若 $a=2$,求曲线 $y=f(x)$ 在点(1,$f(1)$)处的切线 l 的方程;

(II)设函数 $g(x)=f'(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2,其中 $x_1\in(0,e]$,求 $g(x_1)-g(x_2)$ 的最小值.

解析(1)当 $a=2$ 时,可知 $f^{'}(x)=2\ln x+x-\frac{1}{x}+2, f^{'}(1)=2, f(1)=\frac{1}{2}$, 得切线 l 的方程为 $y-\frac{1}{2}=2(x-1)$ 即 $4x-2y-3=0$.

(2)函数 $g(x)=a\ln x+x-\frac{1}{x}+a$, 定义域为 $(0,+\infty)$, 求导 $g^{'}(x)=1+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+ax+1}{x^2}$, 令 $g^{'}(x)=0$ 得 $x^2+ax+1=0$, 其两根为 x_1,x_2, 且 $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=1$, 故 $x_2=\frac{1}{x_1}, a=-\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)$, 则 $g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)$

$=g\left(x_1\right)-g\left(\frac{1}{x_1}\right)=x_1-\frac{1}{x_1}+a\ln x_1-\left(\frac{1}{x_1}-x_1+a\ln\frac{1}{x_1}\right)=2\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)+2a\ln x_1=2\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)+2\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\ln x_1$

令 $h(x)=2\left(x-\frac{1}{x}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x, x\in(0,e]$. 则 $\left(g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)\right)_{\min}=h(x)_{\min}$, $h^{'}(x)=\frac{2(1+x)(1-x)\ln x}{x^2}$, 当 $x\in(0,1]$ 时, 恒有 $h^{'}(x)\le 0, x\in(0,e]$ 时, 恒有 $h^{'}(x)<0$, 当 $x\in(1,e]$ 时, $h(x)$ 在 $x\in(0,e]$ 上单调递减, 所以 $h(x)_{\min}=h(e)=-\frac{4}{e}$, 即 $\left(g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)\right)_{\min}=-\frac{4}{e}$.

例 7.(2019•新课标III)已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+2$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)当 $0<a<3$ 时,记 $f(x)$ 在区间[0,1]的最大值为 M,最小值为 m,求 $M-m$ 的取值范围.

解析(1)求导 $f^{'}(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$, 令 $f^{'}(x)=0$, 得 $x=0$ 或 $x=\frac{a}{3}$.

若 $a>0$, 则当 $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 时, $f^{'}(x)>0$: 当 $x\in\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 时, $f^{'}(x)<0$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$, $\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 上单调递减；

若 $a=0$, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；

若 $a<0$, 则当 $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 时, $f'(x)>0$: 当 $x\in\left(\frac{a}{3},0\right)$ 时, $f'(x)<0$.

故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)$, $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{a}{3},0\right)$ 上单调递减；

(2)当 $0<a<3$ 时,由(1)知, $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{a}{3},1\right)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在区间[0,1]的最小值为 $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+2$, 最大值为 $f(0)=2$ 或 $f(1)=4-a$.

于是, $m=-\frac{a^3}{27}+2$, $M=\begin{cases}4-a,0<a<2\\2,2\le a<3\end{cases}$. 即 $M-m=\begin{cases}2-a+\frac{a^3}{27},0<a<2\\\frac{a^3}{27},2\le a<3\end{cases}$

当 $0<a<2$ 时,可知 $2-a+\frac{a^3}{27}$ 单调递减,即 $M-m$ 的取值范围是 $\left(\frac{8}{27},2\right)$;

当 $2\le a<3$ 时, $\frac{a^3}{27}$ 单调递增，即 $M-m$ 的取值范围是 $\left[\frac{8}{27},1\right)$. 综上, $M-m$ 的取值范围 $\left[\frac{8}{27},2\right)$.

例 8.（2019•和平区校级月考）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+a\ln(1-x)$， a 为常数.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1， x_2，且 $x_1<x_2$，求证： $f(x_2)-x_1>-\frac{3+\ln 4}{8}$.

解析(1)函数的定义域为 $(-\infty,1)$, 由题意, $f'(x)=x-\frac{a}{1-x}=\frac{-x^2+x-a}{1-x}$, ①若 $a\ge\frac{1}{4}$, 则 $-x^2+x-a\le 0$,

于是 $f'(x)\le 0$, 当且仅当 $a=\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{2}$ 时, $f'(x)=0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减;②若 $0<a<\frac{1}{4}$,

由 $f'(x)=0$, 得 $x=\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$ 或 $x=\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$, 当 $x\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},1\right)$

时， $f'(x)<0$; 当 $x\in\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 时， $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在

$\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2},1\right)$ 单调递减, $\left(\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 单调递增; ③若 $a\le 0$, 则 $x=\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\ge 1$, 当 $x\in\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 时, $f'(x)<0$; 当 $x\in\left(\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2},1\right)$ 时, $f'(x)>0$; 所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 单调递减, $\left(\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2},1\right)$ 单调递增.综上,当 $a\ge\dfrac{1}{4}$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(-\infty$, 1)上单调递减; 当 $0<a<\dfrac{1}{4}$ 时,, 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2},1\right)$ 上单调递减, $\left(\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 上递增; 当 $a\le 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 上单调递减, $\left(\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2},1\right)$ 上单调递增.

(2)由(1)知, $f(x)$ 有两个极值,点,当且仅当 $0<a<\dfrac{1}{4}$, 由于 $f(x)$ 的两个极值,点 x_1,x_2 满足 $-x^2+x-a=0$, 所以 $x_1+x_2=1$, $x_1x_2=a=x_1\left(1-x_1\right)$, 当 $0<x_1<\dfrac{1}{2}$ 时, 则 $f\left(x_2\right)-x_1=\dfrac{1}{2}x_2^2+a\ln\left(1-x_2\right)-x_1=\dfrac{1}{2}\left(1-x_1\right)^2+x_1x_2\ln x_1-x_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x_1^2-2x_1+x_1\left(1-x_1\right)\ln x_1$

设 $g(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x^2-2x+x(1-x)\ln x$, $\left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)$, 得 $g'(x)=x-2+(1-2x)\ln x+x(1-x)\cdot\dfrac{1}{x}=(1-2x)\ln x-1$, 当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时, $(1-2x)\ln x<0$, 所以 $g'(x)<0$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减, 又 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3+\ln 4}{8}$, 所以 $g(x)>g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3+\ln 4}{8}$, 即 $f\left(x_2\right)-x_1>-\dfrac{3+\ln 4}{8}$.

总结不是极值之差类型，当两根之积不为常数，而两根之和为常数的情况，比值代换不好使了，解决问题的关键还是一切转化为 x_1 的单变量函数，那么当 x_1+x_2 与 x_1x_2 都含有参数怎么办呢？我们看下一题.

例 9.（2020•遂宁模拟）已知函数 $f(x)=a\ln x-ax+1$

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

（2）若函数 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x^2-1$ 有两个极值点 x_1， $x_2(x_1\ne x_2)$．且不等式 $g(x_1)+g(x_2)<\lambda(x_1+x_2)$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围．

解析(1) $f(x)=a\ln x-ax+1$, 所以 $f'(x)=\dfrac{a}{x}-a=\dfrac{a(1-x)}{x}(x>0)$,

①当 $a=0$ 时, $f(x)=1(x>0)$ 是常数函数，不具备单调性;

②当 $a>0$ 时, $f'(x)>0\Rightarrow 0<x<1$; $f'(x)<0\Rightarrow x>1$.故 $f(x)$ 在(0,1)单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减;

③当 $a<0$ 时, $f'(x)>0\Rightarrow x>1$; $f'(x)<0\Rightarrow 0<x<1$.故 $f(x)$ 在(0,1)单调递减,在 $(1,+\infty)$ 单调递增.

(2)因为 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x^2-1=a(\ln x-x)+\dfrac{1}{2}x^2$, 所以 $g'(x)=\dfrac{x^2-ax+a}{x}(x>0)$, 由题意可得 $g'(x)=0$ 有两个不同的正根,则 $x^2-ax+a=0$ 有两个不同的正根,则 $\begin{cases}\Delta=a^2-4a>0\\ x_1+x_2=a>0\\ x_1x_2=a>0\end{cases}$,可得 $a>4$，不等式 $g(x_1)+g(x_2)<\lambda(x_1+x_2)$ 恒成立等价于 $\lambda>\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{x_1+x_2}=\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{a}$ 恒成立,

又 $g(x_1)+g(x_2)=a(\ln x_1-x_1)+\dfrac{1}{2}x_1^2+a(\ln x_2-x_2)+\dfrac{1}{2}x_2^2=a(\ln x_1+\ln x_2)-a(x_1+x_2)+\dfrac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$

$=a\ln x_1x_2-a(x_1+x_2)+\dfrac{1}{2}\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]=a\ln a-a^2+\dfrac{1}{2}(a^2-2a)=a\ln a-\dfrac{1}{2}a^2-a$

所以 $\dfrac{g(x_1)+g(x_2)}{x_1+x_2}=\ln a-\dfrac{1}{2}a-1$, 令 $y=\ln a-\dfrac{1}{2}a-1(a>4)$, 则 $y'=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2}<0$

则 $y=\ln a-\dfrac{1}{2}a-1$ 在 $(4,+\infty)$ 上单调递减,故 $y<2\ln 2-3$, 所以 $\lambda\geq 2\ln 2-3$.

总结：如果题目中 x_1+x_2 与 x_1x_2 都含有相同参数，那么就以这个参数作为单变量的主元来进行函数构造,通常这类型题技巧不多，更多在运算和基本功打造上，极值既然有差，也会有和，下面我们来介绍一下极值之和问题的处理方法.

第二讲极值之和

极值之和问题最早出现在 2014 年湖南高考自主命题卷中，解决问题的关键就是将 $f(x_1)+f(x_2)$ 转化为统一参数 a 后，构造新函数 $h(a)$ 求出极值之和取值范围.

例 10.（2014•湖南）已知常数 $a>0$，函数 $f(x)=\ln(1+ax)-\dfrac{2x}{x+2}$.

（I）讨论 $f(x)$ 在区间 $(0，+\infty)$ 上的单调性;

（II）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1， x_2，且 $f(x_1)+f(x_2)>0$，求 a 的取值范围.

解析 (1) 因为 $f(x)=\ln(1+ax)-\dfrac{2x}{x+2}$. 所以 $f'(x)=\dfrac{a}{1+ax}-\dfrac{4}{(x+2)^2}=\dfrac{ax^2-4(1-a)}{(1+ax)(x+2)^2}$, 又由 $(1+ax)(x+2)^2>0$, 所以当 $1-a\le 0$ 时, 即 $a\ge 1$ 时, $f'(x)\ge 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增, 当 $0<a\le 1$ 时, 由 $f'(x)=0$ 得 $x=\pm\dfrac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$, 则函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}\right)$ 单调递减, 在 $\left(\dfrac{2\sqrt{a(1-a)}}{a},+\infty\right)$ 单调递增.

(2) 由 (1) 知, 当 $a\ge 1$ 时, $f'(x)\ge 0$，此时 $f(x)$ 不存在极值点.因此要使 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2, 则必有 $0<a<1$, 又 $f(x)$ 的极值点值是 $x_1=\dfrac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$, $x_2=-\dfrac{2\sqrt{a(1-a)}}{a}$, 且 $x>-\dfrac{1}{a}$ 且 $x\ne -2$, 所以

$$f(x_1)+f(x_2)=\ln(1+ax_1)-\frac{2x_1}{x_1+2}+\ln(1+ax_2)-\frac{2x_2}{x_2+2}=\ln\left[1+a(x_1+x_2)+a^2x_1x_2\right]-\frac{4x_1x_2+4(x_1+x_2)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=\ln(2a-1)^2-\frac{4(a-1)}{2a-1}=\ln(2a-1)^2+\frac{2}{2a-1}-2$$

令 $2a-1=t$, 由 $0<a<1$ 且 $a\ne\dfrac{1}{2}$ 得, 当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时, $-1<t<0$；当 $\dfrac{1}{2}<a<1$时, $0<t<1$. 令 $h(t)=\ln t^2+\dfrac{2}{t}-2$

(i) 当 $-1<t<0$ 时, $h(t)=2\ln(-t)+\dfrac{2}{t}-2$, $h'(t)=\dfrac{2}{t}-\dfrac{2}{t^2}=\dfrac{2x-2}{t^2}<0$, 故函数 $h(t)$ 在(-1,0)上单调递减, 所以 $h(t)<h(-1)=-4<0$, 即当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时, $f(x_1)+f(x_2)<0$;

(ii)当 $0<t<1$. $h(t)=2\ln t+\dfrac{2}{t}-2$, $h'(t)=\dfrac{2}{t}-\dfrac{2}{t^2}=\dfrac{2t-2}{t^2}<0$, 故 $h(t)$ 在(0,1)上单调递减, $h(t)>h(1)=0$, 所以当 $\dfrac{1}{2}<a<1$时, $f(x_1)+f(x_2)>0$; 综上所述, a 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

例 11.（2020•郑州一模）已知函数 $f(x)=ax^2-x-\ln\dfrac{1}{x}$.

（I）若 $f(x)$ 在点 (1，$f(1)$) 处的切线与直线 $y=2x+1$ 平行，求 $f(x)$ 在点 (1，$f(1)$) 的切线方程;

（II）若函数 $f(x)$ 在定义域内有两个极值点 x_1，x_2，求证：$f(x_1)+f(x_2)<2\ln 2-3$.

解析(1)因为 $f(x)=ax^2-x-\ln\dfrac{1}{x}$, 所以 $f'(x)=2ax+\dfrac{1}{x}-1$, $k=f'(1)=2a$, 因为 $f(x)$ 在点 $(1,\ f(1))$ 的切线与直线 $y=2x+1$ 平行，则 $2a=2$ 即 $a=1$, 所以 $f(1)=0$，故切点 $(1,0)$, 切线方程 $y=2x-2$,

(2)因为 $f'(x)=2ax-1+\frac{1}{x}=\frac{2ax^2-x+1}{x}$，所以 $2ax^2-x+1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不等的实数根 x_1,x_2，

即 $\Delta=1-8a>0\Rightarrow 0<a<\frac{1}{8},\quad x_1+x_2=\frac{1}{2a}>0,\quad x_1x_2=\frac{1}{2a}>0,$ 又 $f(x_1)+f(x_2)=ax_1^2+ax_2^2-(x_1+x_2)+\ln x_1+\ln x_2=a\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]-(x_1+x_2)+\ln x_1x_2=\ln\frac{1}{2a}-\frac{1}{4a}-1$，令 $t=\frac{1}{2a}$，则函数 $h(t)=\ln t-\frac{1}{2}t-1,\quad t>4$，则 $h(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}=\frac{2-t}{2t}<0$，则 $h(t)$ 在 $(4,+\infty)$ 上单调递减，$h(t)<h(4)=\ln 4-3=2\ln 2-3$，即 $f(x_1)+f(x_2)<2\ln 2-3$.

例 12.（2019•湖南期末）已知函数 $f(x)=\ln x+1-2a-x+\frac{a}{x}$ 有两个不同的极值点 x_1， x_2.

（1）求 a 的取值范围．

（2）求 $f(x)$ 的极大值与极小值之和的取值范围．

（3）若 $m\in(0，\frac{1}{2})$，$n\in(\frac{1}{2}，+\infty)$，则 $f(m)-f(n)$ 是否有最小值？若有，求出最小值；若没有，说明理由．

解析 (1) 求导得 $f'(x)=\frac{1}{x}-1-\frac{a}{x^2}=\frac{-x^2+x-a}{x^2},x>0$，因为 $f(x)$ 有两个不同的极值，点 x_1,x_2．所以 $x^2-x+a=0$ 有两个不同的正根，故 $0<a<\frac{1}{4}$.

(2) 因为 $x_1x_2=a,\quad x_1+x_2=1,$ 不妨设 $x_1<x_2,$ 所以 $f(x_1)+f(x_2)=\ln x_1x_2+2(1-2a)+\frac{a(x_1+x_2)}{x_1x_2}-(x_1+x_2)=\ln a+2-4a$，令 $g(a)=\ln a-4a+2,$ 则 $g'(a)=\frac{1}{a}-4>0,$ 所以 $g(a)$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 上单调递增， 则 $g(a)<g\left(\frac{1}{4}\right)=1-2\ln 2$，即 $f(x)$ 的极大值与极小值之和的取值范围是 $(-\infty,1-2\ln 2)$.

(3) 由 (2) 知 $x_1+x_2=1,\quad x_1x_2=a\Rightarrow a=x_2+\frac{1}{x_2}$．因为 $m\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\quad n\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right),\quad x_1<\frac{1}{2}<x_2,$ 所以 $f(x)_{\min}=f(x_1),\quad f(x)_{\max}=f(x_2)$，即 $[f(m)-f(n)]_{\max}=\ln\frac{1-x_2}{x_2}+2(x_2-1)=\ln(1-x_2)-\ln x_2+\quad 4x_2-2\left(\frac{1}{2}<x_2<1\right),$ 令

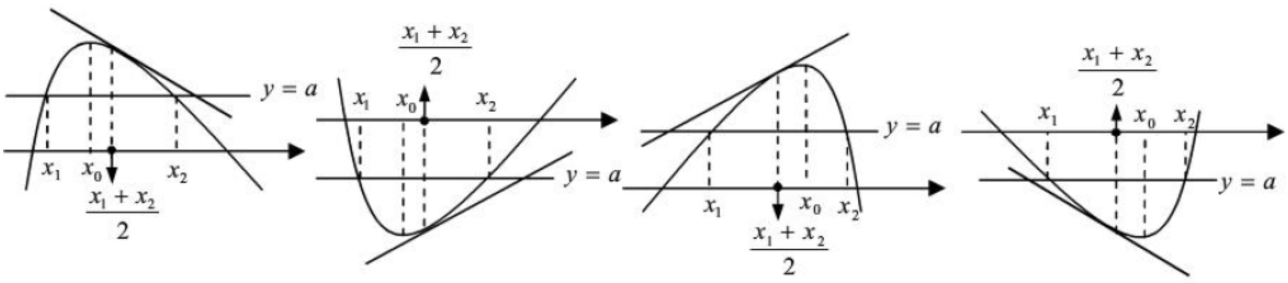
$h(x)=\ln(1-x)-\ln x+4x-2\left(\dfrac{1}{2}<x<1\right)$,则 $h^{'}(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}+4=\dfrac{(2x-1)^2}{x(x-1)}<0$, $h(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上单调递减, $h(x)$ 无最小值，故 $f(m)-f(n)$ 没有最小值.

秒杀秘籍：极值之和，极值点和拐点共点取最值

根据琴生（Jensen）不等式，当 $f''(x)<0$ 时， $f(x_1)+f(x_2)\le f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$，我们称之为上凸函数，通常对数函数，二四象限的反比例函数均为上凸函数；当 $f''(x)>0$ 时， $f(x_1)+f(x_2)\ge f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$，我们称之为下凹函数，通常指数函数，开口向上二次函数均为下凹函数.

极值偏移：若 $f(x)$ 有极值 $f(x)_{\max}=f(x_0)$，若存在 $f(x_1)=f(x_2)$，当 $\dfrac{x_1+x_2}{2}>x_0$ 时，称为极大值左偏，当 $\dfrac{x_1+x_2}{2}<x_0$ 时，称为极大值右偏；同理，若 $f(x)$ 有极值 $f(x)_{\min}=f(x_0)$，若存在 $f(x_1)=f(x_2)$，当 $\dfrac{x_1+x_2}{2}>x_0$ 时，称为极小值左偏，当 $\dfrac{x_1+x_2}{2}<x_0$ 时，称为极小值右偏.

由于篇幅关系，本篇不做极值偏移的详细介绍，我们近期将推出一本导数的专题新书，会系统介绍极值偏移和拐点偏移的解题方法。



极值点左偏　　　　极值点右偏

图 1 图 2

极值点左偏： $x_1+x_2>2x_0$， $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 处切线与 x 轴不平行；（图 1）

若 $f(x)$ 上凸（ $f'(x)$ 递减），则 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<f'(x_0)=0$，若 $f(x)$ 下凸（ $f'(x)$ 递增），则 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>f'(x_0)=0$.

极值点右偏： $x_1+x_2<2x_0$， $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 处切线与 x 轴不平行；（图 2）

若 $f(x)$ 上凸（ $f'(x)$ 递减），则 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>f'(x_0)=0$，若 $f(x)$ 下凸（ $f'(x)$ 递增），则 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<f'(x_0)=0$.

极值偏移的本质：函数 $f'''(x)>0$ 时，则极大值左偏，极小值右偏；函数 $f'''(x)<0$ 时，则极大值右偏，极小值左偏（正负号由极小值偏移方式决定，极大值则相反方向偏移）；

我们可以这么来理解， $f^{''}(x)$ 代表函数斜率的变化，如果斜率越来越大，则会形成下回函数，若斜率越来越小，则形成上凸函数，这就是琴生不等式，在解决一些复杂的不等式证明当中，琴生不等式就是一种秒

杀.那么三阶导，则代表着斜率变化的快慢，类似物理学科理解加速度，如果三阶导大于零，则当斜率变化为正时，变化越来越快;当斜率变化为负时，变化越来越快（物理学当中，位移方向和速度方向为正时，，加速度大于零时加速：位移方向和速度方向相反时，加速度大于零则减速）.极小值左偏，则导函数从负到正的变化过程中，变化越来越慢，故出现斜率为零的位置 $x=x_0$ 一定在区间中点 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ 的左边，从而形成极小值左偏;同理，极大值右偏，就是导函数从正到负的变化过程中，变化越来越快，故出现斜率为零的位置 $x=x_0$ 一定在区间中点 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ 的右边;反之亦然.

类似观点我们可以得到抛点偏移的理论，抛点即为函数回凸的分界点，我们以先凸后凹作为参照，当 $f^{''''}(x)<0$ 时，抛点左偏，同理，$f^{''''}(x)>0$ 时，抛点右偏.

极值之和最值定理

当 $\frac{x_1+x_2}{2}=x_0$ 时,若 $f^{'}\left(x_1\right)=f^{'}\left(x_2\right)=0$, 且 $f^{n''}\left(x_0\right)<0$ 时,－一定有 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)<2f\left(x_0\right)$, 相反，若 $f^{'}\left(x_1\right)=f^{'}\left(x_2\right)=0$, 且 $f^{''''}\left(x_0\right)>0$ 时,－定有 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)>2f\left(x_0\right)$;

例 10 中，极值之和要大于零，显然 a 越大越好；例 11 中，显然 $f^{'''}(x)<0$，故 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)<2f\left(\frac{1}{4a}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$.

只是计算工具。.

例 13.（2018•浙江）已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

（I）若 $f(x)$ 在 $x=x_1$，$x_2(x_1\neq x_2)$ 处导数相等，证明：$f(x_1)+f(x_2)>8-8\ln 2$；

（II）若 $a\leq 3-4\ln 2$，证明：对于任意 $k>0$，直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 有唯一公共点.

解析(1)因为函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$, 所认 x $x>0$, $f^{'}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$,

又由 $f(x)$ 在 $x=x_1$, $x_2\left(x_1\neq x_2\right)$ 处导数相等,则 $\frac{1}{2\sqrt{x_1}}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{2\sqrt{x_2}}-\frac{1}{x_2}$,

因为 $x_1\neq x_2$, 所以 $x_1x_2>256$, 由题意得 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=\sqrt{x_1}-\ln x_1+\sqrt{x_2}-\ln x_2=\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}-\ln\left(x_1x_2\right)$

设 $g(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}-\ln x$, 则 $g^{'}(x)=\frac{1}{4x}(\sqrt{x}-4)$, 所以列表讨论

x	$(0,16)$	16	$(16,+\infty)$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↓	$2-4\ln 2$	↑

所以 $g(x)$ 在 $[256,+\infty)$ 上单调递增,即 $g\left(x_1x_2\right)>g(256)=8-8\ln 2$,则 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)>8-8\ln 2$.

(2)法一令 $m=e^{-(|a|+k)}$, $n=\left(\dfrac{|a|+1}{k}\right)^2+1$, 则 $f(m)-km-a>|a|+k-k-a\geq 0$,

$f(n)-kn-a<n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{a}{n}-k\right)\leq n\left(\dfrac{|a|+1}{\sqrt{n}}-k\right)<0$, 所以存在 $x_0\in(m,n)$, 使 $f\left(x_0\right)=kx_0+a$,

则对于任意的 $a\in R$ 及 $k\in(0,+\infty)$, 直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 有公共点, 由 $f(x)=kx+a$, 得

$k=\dfrac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}$, 设 $h(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}$, 则 $h'(x)=\dfrac{\ln x-\dfrac{\sqrt{x}}{2}-1+a}{x^2}=\dfrac{-g(x)-1+a}{x^2}$, 其中

$g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\ln x$, 由 (1) 知 $g(x)\geq g(16)$, 又 $a\leq 3-4\ln 2$, 则

$-g(x)-1+a\leq -g(16)-1+a=-3+4\ln 2+a\leq 0$, 所以 $h'(x)\leq 0$, 即函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

则方程 $f(x)-kx-a=0$ 至多有一个实根,综上, $a\leq 3-4\ln 2$ 时,对于任意 $k>0$,直线 $y=kx+a$ 与曲线

$y=f(x)$ 有唯一公共点.

法二令 $t=\sqrt{x}$, 则 $kt^2+a=t-2\ln t\Leftrightarrow -a=kt^2-t+2\ln t$ 有仅有一个交点,

即 $g(t)=kt^2-t+2\ln t\geq 4\ln 2-3$ 时有仅有一个 t 与之对应, $g'(t)=2kt+\dfrac{2}{t}-1$,

①当 $2kt+\dfrac{2}{t}\geq 2\sqrt{4k}\geq 1$ 时,即 $k\geq\dfrac{1}{16}$ 时,则 $g(x)\uparrow$ 对 $t\in(0,+\infty)$ 恒成立,当 $t\to 0$ 时, $g(t)\to-\infty$,

同时当 $t\to+\infty$ 时, $g(t)>\dfrac{1}{16}t^2-t\to+\infty$, 故 $g(t)=kt^2-t+2\ln t=-a$ 一定有一个交点;

②当 $0<k<\dfrac{1}{16}$ 时, $g'\left(t_0\right)=2kt_0+\dfrac{2}{t_0}-1=0\Leftrightarrow kt_0^2=\dfrac{t_0-2}{2}$, $g'(4)=8k-\dfrac{1}{2}<0\Rightarrow t_0>4$

$g\left(t_0\right)=kt_0^2-t_0+2\ln t_0=-\dfrac{t_0}{2}-1+2\ln t_0=h\left(t_0\right), h'\left(t_0\right)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{t_0}=0$ 时, $t_0=4$, 故

$h\left(t_0\right)<h(4)=2\ln 4-3$，故当 $t\geq t_0$ 时, $g(t)\uparrow$, 且 $-a=g(t)\geq h(4)=2\ln 4-3$ 有唯一公共点.

总结:可以尝试把 $t=\sqrt{x}$, 求四阶导即可知道第一问原理，题目背景总有高等数学的影子.

第三讲比值函数

最早出现在 2014 天津卷，涉及参变分离和基础找点比大小，有关 x_1+x_2，要转化为 x_1+tx_1 来进行构造成 $h(t)$ 的函数，之前在证明对数平均不等式用到比值换元函数，比值换元一般用在对数函数里面，指数函数都需要转化为对数来进行构造，类似于指数平均不等式可以用对数来证明一样。我们先看几个例题.

例 14.（2014•天津）设 $f(x)=x-ae^x(a\in R)$，$x\in R$，已知函数 $y=f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$.

（I）求 a 的取值范围;

（II）证明：$\dfrac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大;

（III）证明 x_1+x_2 随着 a 的减小而增大.

解析（1）法一因为 $f(x)=x-ae^x$,所以 $f'(x)=1-ae^x$;下面分两种情况讨论:

① $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 R 上恒成立,所以 $f(x)$ 在 R 上是增函数,不合题意:

② $a>0$ 时,止 $f'(x)=0$,得 $x=-\ln a$，当 x 变化时，$f'(x)$、$f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-\ln a)$	$-\ln a$	$(-\ln a,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	递增	极大值 $-\ln a-1$	递减

所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty,-\ln a)$,减区间是 $(-\ln a,+\infty)$;即函数 $y=f(x)$ 有两个零点等价于如下条件同时成立:① $f(-\ln a)>0$;②存在 $s_1\in(-\infty,-\ln a)$,满足 $f(s_1)<0$;③存在 $s_2\in(-\ln a,+\infty)$,满足 $f(s_2)<0$;由 $f(-\ln a)>0$,即 $-\ln a-1>0$,解得 $0<a<e^{-1}$;取 $s_1=0$，满足 $s_1\in(-\infty,-\ln a)$，且 $f(s_1)=-a<0$，取 $s_2=\dfrac{2}{a}+\ln\dfrac{2}{a}$,满足 $s_2\in(-\ln a,+\infty)$，且 $f(s_2)=\left(\dfrac{2}{a}-e^{\frac{2}{a}}\right)+\left(\ln\dfrac{2}{a}-e^{\frac{2}{a}}\right)<0$;所以 a 的取值范围是 $\left(0,e^{-1}\right)$.

法二参变分离,构造 $a=\dfrac{x}{e^x}$，求导后易证 $\left(\dfrac{x}{e^x}\right)_{\max}=1$（详细过程参考(2)的答案),$x\to+\infty$，$y\to 0$，$x=0$ 时，$y=0$，$x=1$，$a_{\max}=\dfrac{1}{e}$，所以 a 的取值范围是 $\left(0,e^{-1}\right)$.

(2) 由 $(x)=x-ae^x=0$,得 $a=\dfrac{x}{e^x}$,设 $g(x)=\dfrac{x}{e^x}$,由 $g'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$,得 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,并且当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$g(x)\le 0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)\ge 0$,如图 $12-2-5$ 所

示, x_1,x_2 满足 $a=g\left(x_1\right)$, $a=g\left(x_2\right)$, $a\in\left(0,e^{-1}\right)$ 及 $g(x)$ 的单调性,可得 $x_1\in(0,1)$, $x_2\in(1,+\infty)$; 对于任意的 a_1、$a_2\in\left(0,e^{-1}\right)$, 设 $a_1>a_2$, $g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)=a_1$, 其中 $0<x_1<1<x_2$; $g\left(x_3\right)=g\left(x_4\right)=a_2$, 其中 $0<x_3<1<x_4$; $x_1,x_2,x_3,x_4>0$, 得 $\frac{x_2}{x_1}<\frac{x_4}{x_1}<\frac{x_4}{x_3}$; 所以 $\frac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大

(3)因为 $x_1=ae^{x_1}$, $x_2=ae^{x_2}$, 所以 $\ln x_1=\ln a+x_1$, $\ln x_2=\ln a+x_2$; 即 $x_2-x_1=\ln x_2-\ln x_1=\ln\frac{x_2}{x_1}$,

设 $\frac{x_2}{x_1}=t$, 则 $t>1$, 所以 $\begin{cases}x_2-x_1=\ln t\\ x_2=x_1t\end{cases}$, 解得 $x_1=\frac{\ln t}{t-1}$, $x_2=\frac{t\ln t}{t-1}$, 则 $x_1+x_2=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}\ldots$①; 令 $h(x)=\frac{(x+1)\ln x}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$, 则 $h'(x)=\frac{-2\ln x+x-\frac{1}{x}}{(x-1)^2}$: 令 $u(x)=-2\ln x+x-\frac{1}{x}$, 得 $u'(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$, 当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $u'(x)>0$, 所以 $u(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数, 即对任意的 $x\in(1,+\infty)$, $u(x)>u(1)=0$, 所以 $h'(x)>0$, 即 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数; 则由 1 得 x_1+x_2 随着 t 的增大而增大.由（2）知，t 随着 a 的减小而增大，所以 x_1+x_2 随着 a 的减小而增大.

总结：本题作为比值换元的模型题，充分挖掘了六大函数当中 $y=\frac{x}{e^x}$ 的性质，并且在 x_1+x_2 构造当中遇到了老朋友 $h'(x)=\frac{x-\frac{1}{x}-2\ln x}{(x-1)^2}$, 分子又是抄带函数遇上了对数函数，老朋友相见，总会告诉你，它们的故事还在继续.

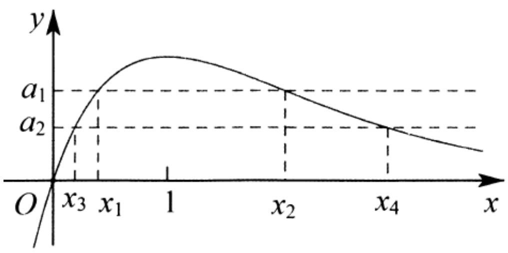


图 12-2-5

例 15.（2019•邢台期末）已知函数 $f(x)=x^2-2ae^x+b(a,b\in R)$，若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，且 $x_2<2x_1$，则 a 的取值范围是(　　)

A. $(0,\frac{1}{e})$　　B. $(-\infty,\frac{\ln 2}{2})$　　C. $(\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{e})$　　D. $(0,\frac{\ln 2}{2})$

解析因为函数 $f(x)$ 有从个极值,点, x_1,x_2, 所以 $f'(x)=2x-2ae^x=0$ 有两个零,点 x_1,x_2, 即 $ae^{x_1}=x_1$，$ae^{x_2}=x_2, a=\frac{x}{e^x}$, 令 $g(x)=\frac{x}{e^x}$, 则 $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$, 可得 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 递减,即 $0<a<\frac{1}{e}$,

$x_1<x<x_2$, 因为 $x_2<2x_1$, 则 $\frac{x_2}{x_1}=e^{x_2-x_1}<2$.

法一 令 $x_2-x_1=t$. 则 $e^t<2, 0<t<\ln 2$, 可得 $x_1=\frac{t}{e^t-1}$, 令 $g(t)=\frac{t}{e^t-1},(0<t<\ln 2)$. 则 $g'(t)=\frac{e^t-1-te^t}{\left(e^t-1\right)^2}$, 令 $h(t)=e^t-1-te^t$, 则 $h'(t)=-te^t<0$, 所以 $h(t)$ 单调递减,即 $h(t)<h(0)=0$, 则 $g(t)$ 单调递减,所以 $g(t)>g(\ln 2)=\ln 2$, 即 $x_1>\ln 2$, $a=\frac{x_1}{e^{x_1}}>\frac{\ln 2}{2}$, 所以 a 的取值范围为 $\left(\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{e}\right)$, 故选C.

法二令 $t=\frac{x_2}{x}\in(1,2), x_2=tx_1$, 故 $\ln a+x_1=\ln x_1, \ln a+tx_1=\ln tx_1=\ln t+\ln x_1$, 两式相减得: $(t-1)x_1=\ln t$，

即 $x_1=\frac{\ln t}{t-1}$, 令 $h(t)=\frac{\ln t}{t-1}$, $h'(t)=\frac{1-\frac{1}{t}-\ln t}{(t-1)^2}<0$ （由于 $\ln t>1-\frac{1}{t}$ 恒成立）, 故 $x_1=h(t)\in(\ln 2,1)$, $a\in\left(\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{e}\right)$, 故选C.

总结：比值代换总能处理成为单调函数，也是学习找点的基础.\${

\end{aligned}

例 16.（2018•武昌区校级模拟）已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{m}{e^x}-1(m\in R)$，其中无理数 $e=2.718\ldots$.

（1）若函数 $f(x)$ 有两个极值点，求 m 的取值范围.

（2）若函数 $g(x)=(x-2)e^x-\frac{1}{3}mx^3+\frac{1}{2}mx^2$ 的极值点有三个，最小的记为 x_1，最大的记为 x_2，若 $\frac{x_1}{x_2}$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$，求 x_1+x_2 的最小值.

解析(1) $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{m}{e^x}=\frac{e^x-mx}{xe^x}$, 令 $\varphi(x)=e^x-mx$, $x>0$, 因为 $f(x)$ 有两个极值,点, 所以 $\varphi(x)=0$ 有两个不等的正实根, $\varphi'(x)=e^x-m$, 当 $m\le 1$ 时, $\varphi'(x)>0, \varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不符合题意.当 $m>1$ 时,当 $x\in(0,\ln m)$ 时, $\varphi'(x)<0$, 当 $x\in(\ln m,+\infty)$ 时, $\varphi'(x)>0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,\ln m)$ 上单调递

减,在 $(\ln m,+\infty)$ 上单调递增.又 $\varphi(0)=1$, 当 $x\to+\infty$ 时, $\varphi(x)\to+\infty$, 即 $\varphi(\ln m)=m-m\ln m<0$, 可得 $m>e$.综上, m 的取值范围是 $(e,+\infty)$.

(2)由 $g'(x)=e^x(x-1)-mx^2+mx=(x-1)\left(e^x-mx\right)=(x-1)\varphi(x)$. 因为 $g(x)$ 有三个极值,点,所以 $g'(x)$ 有三个零点,1 为一个零,点,其他两个则为 $\varphi(x)$ 的零点,由(1)知 $m>e$, 因为 $\varphi(1)=e-m<0$, 所以 $\varphi(x)$ 的两个玲,点即为 $g(x)$ 的最小和最大极值,点 x_1,x_2, 即 $\begin{cases}e^{x_1}=mx_1\\e^{x_2}=mx_2\end{cases}$, 即 $\dfrac{x_1}{x_2}=e^{x_1-x_2}$, 令 $\dfrac{x_1}{x_2}=t$, 主题知 $0<t\le\dfrac{1}{e}$, 所以 $t=e^{tx_2-x_2}=e^{(t-1)x_2}$, $x_2=\dfrac{\ln t}{t-1}$, $x_1=\dfrac{t\ln t}{t-1}$, 即 $x_1+x_2=\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}$, 令 $h(t)=\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}$, $0<t\le\dfrac{1}{e}$, 则 $h'(t)=\dfrac{t-\frac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}$, 令 $m(t)=t-\dfrac{1}{t}-2\ln t$, 则 $m'(t)=1+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}=\left(\dfrac{1}{t}-1\right)^2>0$. 即 $m(t)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$ 上单调递增则 $m(t)\le m\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}-e+2<0$, 即 $h(t)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$ 上单调递减,所以故 x_1+x_2 的最小值为 $\dfrac{e+1}{e-1}$.

第四讲切线夹放缩解决 x_2-x_1 问题

最早出现切线夹放缩在 2015 年天津高考卷，我们先来看一下这一文一理两题，然后逐步寻找这类题背后的逻辑.

例 17.（2015•天津）已知函数 $f(x)=4x-x^4$， $x\in R$.

（I）求 $f(x)$ 的单调区间；

（II）设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P，曲线在点 P 处的切线方程为 $y=g(x)$，求证：对于任意的实数 x，都有 $f(x)\le g(x)$；

（III）若方程 $f(x)=a(a$ 为实数）有两个实数根 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，求证：$x_2-x_1\le-\dfrac{a}{3}+4^{\frac{1}{3}}$.

解析 (1)由 $f(x)=4x-x^4$, 可得 $f'(x)=4-4x^3$. 当 $f'(x)>0$,即 $x<1$时,函数 $f(x)$ 单调递增;当 $f'(x)<0$, 即 $x>1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减.所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,1)$, 单调递减区间为 $(1,+\infty)$.

(2)证明:设点, P 的坐标为 $\left(x_0,0\right)$, 则 $x_0=4^{\frac{1}{3}}$, $f'\left(x_0\right)=-12$,

曲线 $y=f(x)$ 在,点 P 处的切线方程为 $y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$, 即 $g(x)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$,

令函数 $F(x)=f(x)-g(x)$, 即 $F(x)=f(x)-f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$, 则 $F'(x)=f'(x)-f'\left(x_0\right)$.

因为 $F'(x_0)=0$, 所以当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时, $F'(x)>0$; 当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时, $F'(x)<0$,

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减,则对于任意实数 x, $F(x)\le F(x_0)=0$, 即对任意实数 x, 都有 $f(x)\le g(x)$;

(3)证明:由 (2)知, $g(x)=-12\left(x-4^{\frac{1}{3}}\right)$, 设方程 $g(x)=a$ 的根为 x_2', 可得 $x_2'=-\frac{a}{12}+4^{\frac{1}{3}}$.

因为 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减, 又由(2)知 $g(x_2)\ge f(x_2)=a=g(x_2')$, 因此 $x_2\le x_2'$.

类似地,设曲线 $y=f(x)$ 在原,点处的切线方程为 $y=h(x)$, 可得 $h(x)=4x$,

对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$, 有 $f(x)-h(x)=-x^4\le 0$, 即 $f(x)\le h(x)$.

设方程 $h(x)=a$ 的根为 x_1', 可得 $x_1'=\frac{a}{4}$, 因为 $h(x)=4x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，且 $h(x_1')=a=f(x_1)\le h(x_1)$，因此 $x_1'\le x_1$, 如图 12-2-6 所示,由此可得 $x_2-x_1\le x_2'-x_1'=-\frac{a}{3}+4^{\frac{1}{3}}$.

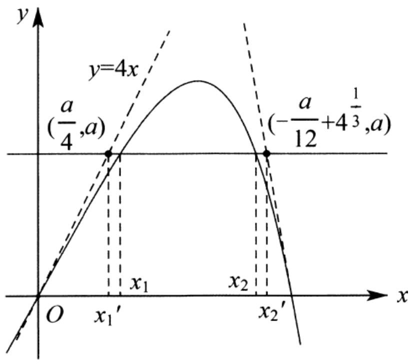


图 12-2-6

例 18.（2015•天津）已知函数 $f(x)=nx-x^n$， $x\in R$，其中 $n\in N^*$，且 $n\ge 2$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性;

（Ⅱ）设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P，曲线在点 P 处的切线方程为 $y=g(x)$，求证：对于任意的正实数 x，都有 $f(x)\le g(x)$;

（Ⅲ）若关于 x 的方程 $f(x)=a(a$ 为实数）有两个正实数根 x_1， x_2，求证：$|x_2-x_1|<\frac{a}{1-n}+2$.

解析(1)由 $f(x)=nx-x^n$, 可得 $f'(x)=n-nx^{n-1}=n(1-x^{n-1})$, 其中 $n\in N^*$, 且 $n\ge 2$.

下面分两种情况讨论:

①当 n 为奇数时,令 $f'(x)=0$, 解得 $x=1$, 或 $x=-1$, 当 x 变化时, $f'(x)<0\Leftrightarrow x<-1$ 或 $x>1$, 所以, $f(x)$

在 $(-\infty,-1),(1,+\infty)$ 上单调递减，同理, $f'(x)<0 \Leftrightarrow -1<x<1$, 故 $f(x)$ 在(-1,1)单调递增.

②当 n 为偶数时,当 $f'(x)>0$, 即 $x<1$ 时,函数 $f(x)$ 单调递增;当 $f'(x)<0$, 即 $x>1$ 时,函数 $f(x)$ 单调递减;所以, $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减;

(2)设点 P 的坐标为 $\left(x_0,0\right)$, 则 $x_0=n^{\frac{1}{n-1}}$, $f'\left(x_0\right)=n-n^2$, 曲线 $y=f(x)$ 在,点 P 处的切线方程为 $y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$, 即 $g(x)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$, 令 $F(x)=f(x)-g(x)$, 即 $F(x)=f(x)-f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$, 则 $F'(x)=f'(x)-f'\left(x_0\right)$. 由于 $f'(x)=-nx^{n-1}+n$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 故 $F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又因为 $F'\left(x_0\right)=0$, 所以当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时, $F'(x)>0$, 当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时, $F'(x)<0$, 所以 $F(x)$ 在 $\in\left(0,x_0\right)$ 内单调递增，在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上单调递减，所以对应任意的正实数 x, 都有 $F(x)\leq F\left(x_0\right)=0$, 即对于任意的正实数 x, 都有 $f(x)\leq g(x)$.

(3)不妨设 $x_1\leq x_2$, 由(2)知 $g(x)=\left(n-n^2\right)\left(x-x_0\right)$, 设方程 $g(x)=a$ 的根为 x_2', 可得 $x_2'=\frac{a}{n-n^2}+x_0$ 由 (2)知 $g\left(x_2\right)\geq f\left(x_2\right)=a=g\left(x_2'\right)$, 可得 $x_2\leq x_2$ '.类似地,设曲线 $y=f(x)$ 在原,点处的切线方程为 $y=h(x)$ ，可得 $h(x)=nx$, 当 $x\in(0,+\infty)$, $f(x)-h(x)=-x^n<0$, 即对于任意的 $x\in(0,+\infty)$, $f(x)<h(x)$, 设方程 $h(x)=a$ 的根为 x_1', 可得 $x_1'=\frac{a}{n}$, 因为 $h(x)=nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增, 且 $h\left(x_1'\right)=a=f\left(x_1\right)<h\left(x_1\right)$, 因此 $4x_1'<x_1$, 由此可得: $x_2-x_1<x_2'-x_1'=\frac{a}{1-n}+x_0$, 因为 $n\geq 2$, 所以 $2^{n-1}=(1+1)^{n-1}\geq 1+C_{n-1}^1=1+n-1=n$, 故: $2\geq n^{\frac{1}{n-1}}=x_0$, 所以 $\left|x_2-x_1\right|<\frac{a}{1-n}+2$.

总结：题目第一问第三问给到了切线的提示，就抓住零点位置的两条切线形成切线夹，这样构成双切线放缩，导数,源于切线，寻找切点进行切线放缩文然成为一种文备技能.此题属于两条切线都以零点作为切点，那么零点不是切点改如何呢?我们看下一例题.

例 19.（2020•合肥一模）已知函数 $f(x)=\frac{1-x^2}{e^x}$(e 为自然对数的底数).

（1）求函数 $f(x)$ 的零点 x_0，以及曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线方程;

（2）设方程 $f(x)=m(m>0)$ 有两个实数根 x_1， x_2，求证: $|x_1-x_2|<2-m(1+\frac{1}{2e})$.

解析 (1) 由 $f(x)=\frac{1-x^2}{e^x}=0$, 得 $x=\pm 1$, 所以函数的零点 $x_0=\pm 1$, $f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{e^x}$, $f'(-1)=2e$,

$f(-1)=0$. 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=-1$ 处的切线方程为 $y=2e(x+1)$, $f'(1)=-\dfrac{2}{e}$, $f(1)=0$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=-\dfrac{2}{e}(x-1)$;

(2) 由 $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{e^x}$, 当 $x\in(-\infty,1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2},+\infty)$ 时, $f'(x)>0$: 当 $x\in(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$ 时, $f'(x)<0$. 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,1-\sqrt{2}),(1+\sqrt{2},+\infty)$, 单调递减区间为 $(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$.

由(1)知,当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时, $f(x)<0$;当 $-1<x<1$ 时, $f(x)>0$.

下面证明:当 $x\in(-1,1)$ 时, $2e(x+1)>f(x)$.

当 $x\in(-1,1)$ 时, $2e(x+1)>f(x)\Leftrightarrow 2e(x+1)+\dfrac{x^2-1}{e^x}>0\Leftrightarrow e^{x+1}+\dfrac{x-1}{2}>0$. 易知, $g(x)=e^{x+1}+\dfrac{x-1}{2}$ 在 $x\in[-1,1]$ 上单调递增, 而 $g(-1)=0$, 即 $g(x)>g(-1)=0$ 对 $\forall x\in(-1,1)$ 恒成立,所以当 $x\in(-1,1)$ 时,

即 $|x_1-x_2|<|x_1'-x_2|=x_2-x_1'=x_2-\left(\dfrac{m}{2e}-1\right)$. 要证 $|x_1-x_2|<2-m\left(1+\dfrac{1}{2e}\right)$, 只要证 $x_2-\left(\dfrac{m}{2e}-1\right)\le 2-m\left(1+\dfrac{1}{2e}\right)$, 即证 $x_2\le 1-m$. 又因为 $m=\dfrac{1-x_2^2}{e^{x_2}}$, 所以只要证 $x_2\le 1-\dfrac{1-x_2^2}{e^{x_2}}$, 即 $(x_2-1)\cdot\left(e^{x_2}-(x_2+1)\right)\le 0$.

因为 $x_2\in(1-\sqrt{2},1)$, 即证 $e^{x_2}-(x_2+1)\ge 0$. 令 $\varphi(x)=e^x-(x+1)$, $\varphi'(x)=e^x-1$. 当 $x\in(1-\sqrt{2},0)$ 时, $\varphi'(x)<0$, $\varphi(x)$ 为单调递减函数;当 $x\in(0,1)$ 时, $\varphi'(x)>0$, $\varphi(x)$ 为单调递增函数.所以 $\varphi(x)\ge\varphi(0)=0$, 则 $e^{x_2}-(x_2+1)\ge 0$, 故 $|x_1-x_2|<2-m\left(1+\dfrac{1}{2e}\right)$.

秒杀秘籍：切线夹放缩，拐点是关键

例题 19 虽然是根据执果索因得出要证明当 $1-\sqrt{2}<x_2<1$ 时，$f(x)\le 1-x$，但是再解完题反思的过程中，我们发现 $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{e^x}$， $f''(x)=\dfrac{-x^2+4x-1}{e^x}=0\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{3}$，显然 $x=2-\sqrt{3}\in(1-\sqrt{2}，1)$，也就是说在 $x_1\in(-1，1-\sqrt{2})$ 这个区间，没有拐点，函数的切线斜率一直递减，故在 $x=-1$ 处取得的切线就一定恒在函数 $f(x)$ 上方；但 $x_2\in(1-\sqrt{2}，1)$ 这个区间有了一个拐点，斜率先减后增，所以在 $x=1$ 处的切线方程

不满足恒在函数 $f(x)$ 上方，所以转化为函数 $f(x)$ 过点(1，0)处的切线方程，即构造切线不等式 $f(x)\le 1-x$.

例 20.已知函数 $f(x)=ax-1$， $g(x)=\ln x-1(a\in R)$；

（1）设函数 $F(x)=f(x)-g(x)$，若在定义域内 $F(x)\ge 0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（2）当 $a=1$ 时方程 $f(x)\cdot g(x)-m=0(0\le m\le 1)$ 有两个实数根 x_1， x_2 且 $x_1<x_2$． 证明：$\frac{x_2}{x_1}\le\frac{e}{1-m}(1+\frac{m}{e-1})$

解析(1) $F(x)=f(x)-g(x)=ax-1-(\ln x-1)=ax-\ln x\ge 0$ 恒成立,因为定义域为 $(0,+\infty)$,所以 $a\ge\frac{\ln x}{x}$ 恒成立,令 $t(x)=\frac{\ln x}{x}$,原问题转化为求函数 $t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最大值,则 $t'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,令 $t'(x)>0$,则 $0<x<e$,所以函数 $t(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增;令 $t'(x)<0$,则 $x>e$,所以函数 $t(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $t(x)_{\max}=t(e)=\frac{1}{e}$,　所以 $a\ge\frac{1}{e}$,故 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

(2)当 $a=1$ 时,令 $h(x)=f(x)\cdot g(x)=(x-1)(\ln x-1)$, 则 $h'(x)=\ln x-\frac{1}{x}$, 显然该函数在定义域内单调递增,而 $h'(1)=-1<0,h'(e)=1-\frac{1}{e}>0$, 所以存在 $x_0\in(1,e)$, 使 $h'\left(x_0\right)=0$,因此当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时, $h'(x)<0,h(x)$ 单调递减：当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时, $h'(x)>0,h(x)$ 单调递增.令 $h(x)=0$，解得 $x=1$ 或 e.设函数 $h(x)$ 在两个零点处的切线方程与直线 $y=m$ 的交点的横坐标分别为 x_1' 和 x_2', 则 $x_1\ge x_1'$,　$x_2\le x_2'$,　易计算函数 $h(x)$ 在(1,0)处的切线方程为 $y_1=-x+1$; 在 $(e,0)$ 处的切线方程为 $y_2=\left(1-\frac{1}{e}\right)(x-e)$, 令 $y_1=m$, 得 $x_1'=1-m$; 令 $y_2=m$ 得 $x_2'=\frac{em}{e-1}+e=e\left(\frac{m}{e-1}+1\right)$, 因为 $x_1\ge x_1'$, $x_2\le x_2'$，所以

$$\frac{x_2}{x_1}\le\frac{x_2'}{x_1'}=\frac{e\left(\frac{m}{e-1}+1\right)}{1-m}=\frac{e}{1-m}\left(\frac{m}{e-1}+1\right),$$

故命题得证.

有了切线夹放缩，还会有割线夹放缩，由于出现的考题较少，限于篇幅，我们在这里不再讲述。.

达标训练

1.（2019•新课标III）已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+b$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）是否存在 a， b，使得 $f(x)$ 在区间[0，1]的最小值为 -1 且最大值为 1？若存在，求出 a， b 的所有值；若不存在，说明理由.

2.（2019•思明区校级月考）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+mx+lnx$.

（1）若 $m=-3$，讨论函数 $f(x)$ 的单调性，并写出单调区间；

（2）若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，且 $m\le -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，求 $f(x_1)-f(x_2)$ 的最小值．

3.（2018•开封三模）已知函数 $f(x)=x+\ln x$，$g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x^2-bx$ 与直线 $x+2y=0$ 垂直．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $b=4$ 时，求函数 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x^2-bx$ 的单调递减区间；

（Ⅲ）设 x_1，$x_2(x_1<x_2)$ 是函数 $g(x)$ 的两个极值点，若 $b\ge\dfrac{7}{2}$，求 $g(x_1)-g(x_2)$ 的最小值．

4.（2019•乌鲁木齐模拟）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-ax+a\ln x(a\ne 0)$．

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $a\ge\dfrac{9}{2}$，且 x_1，$x_2(x_1<x_2)$ 是函数 $f(x)$ 的两个极值点，求 $f(x_1)-f(x_2)$ 的最小值．

5.（2019•浙江模拟）已知函数 $f(x)=x^2-bx+a\ln x(a>0,b\in R)$．

（Ⅰ）设 $b=a+2$，若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，且 $|x_1-x_2|>1$，求证：$|f(x_1)-f(x_2)|>3-4\ln 2$；

（Ⅱ）设 $g(x)=xf(x)$，$g(x)$ 在 $[1，e]$ 上不单调，且 $2b+\dfrac{1}{a}\le 4e$ 恒成立，求 a 的取值范围．（e 为自然对数的底数）

6.（2020•镇江一模）已知函数 $f(x)=\ln x+a(x^2-x)(a\in R)$．

（1）当 $a=0$，证明：$f(x)\le x-1$；

（2）如果函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，且 $f(x_1)+f(x_2)<k$ 恒成立，求实数 k 的取值范围；

（3）当 $a<0$ 时，求函数 $f(x)$ 的零点个数．

7.（2018•菏泽期末）已知函数 $f(x)=4x-a\ln x-\dfrac{1}{2}x^2-2$，其中 a 为正实数．

（1）若函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线斜率为 2，求 a 的值；

（2）求函数 $y=f(x)$ 的单调区间；

（3）若函数 $y=f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，求证：$f(x_1)+f(x_2)<6-\ln a$．

8.（2019•湖南月考）已知函数 $f(x)=x^2-2x+a\ln x(a\in R)$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，且不等式 $f(x_1)\ge mx_2$ 恒成立，求实数 m 的取值范围．

9.（2019•烟台期中）已知函数 $f(x)=m\ln x-x+\frac{m}{x}(m\in R)$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，不等式 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{x_1^2+x_2^2}<a$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

10.（2019•崂山区校级期中）已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{ax^2+bx+1}$，其中 $a>0$．$b\in R$．e 为自然对数的底数．

（1）若 $b=1$，且当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq 1$ 总成立，求实数 a 的取值范围；

（2）若 $b=0$，且 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，求证：$1+\frac{3}{2a}<f(x_1)+f(x_2)<e$．

11.（2018•海淀区校级三模）已知函数 $f(x)=-\ln x-ax^2+x$ 在点 $(1，f(1))$ 处的切线斜率为负值．

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(II) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，求证：$f(x_1)+f(x_2)>3-2\ln 2$

12.（2019•宁乡市模拟）已知函数 $f(x)=\frac{mx^2+1}{e^x}$，其中 $m\in R$．

（1）当 $m=2$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $m>1$，并且 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1、x_2，求证：$\frac{4}{e}<f(x_1)+f(x_2)<\frac{4m}{e}$．

13.（2019 秋•常德期末）已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$．

（1）讨论 $f(x)$ 的极值点的个数；

（2）当 $a=1$ 时，若存在实数 x_1，x_2，使得 $f(\frac{x_1}{2e})+\frac{x_1^{\ 2}}{4e^2}=\ln\frac{x_2}{2}$，求 x_2-x_1 的最小值．

14.（2018•合肥三模）已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-ax$ 有两个极值点 x_1，x_2（e 为自然对数的底数）．

（Ⅰ）求实数 a 的取值范围；

（Ⅱ）求证：$f(x_1)+f(x_2)>2$．

15.已知函数 $f(x)=a\cdot e^x-\frac{1}{2}x^2-b(a$，$b\in R$，$e$ 是自然对数的底数）．

（1）若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=x-1$，求实数 a，b 的值；

（2）若函数 $f(x)$ 在 x_1 和 x_2 处取得极值，且 $\frac{x_2}{x_1}\geq 2$，求实数 a 的取值范围．

16.（2019•和平区校级月考）已知函数 $f(x)=\ln x-mx$，$m\in R$．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）证明：$m=0$ 时，$e^x>f(x+2)$

（III）若函数 $g(x)=(x-e)f(x)$ 有且只有三个不同的零点，分别记为 x_1， x_2， x_3，设 $x_1<x_2<x_3$ 且 $\dfrac{x_3}{x_1}$ 的最大值是 e^2，证明： $x_1x_3\le e^{\frac{2(e^2+1)}{e^2-1}}$.

17．已知函数 $f(x)=x-ae^x$ 有两个零点 x_1， x_2，且 $x_1<x_2$，则下列说法中正确的是(　　)

A． $a>\dfrac{1}{e}$　　B． x_1-x_2 随着 a 的增大而减小

C． $x_1x_2<1$　　D． x_1+x_2 随着 a 的增大而增大

18.（2019•郑州二模）已知函数 $f(x)=ae^x-\dfrac{1}{2}x^2-b(a，b\in R)$，若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，且 $\dfrac{x_2}{x_1}\ge 2$，则实数 a 的取值范围是__.

19.（2019•岳麓区校级模拟）已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{1}{2x}-ax^2+x$.

（Ⅰ）当 $a>0$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的极值点的个数；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1， x_2，证明： $f(x_1)+f(x_2)>3-4\ln 2$.

20.（2019•天心区校级月考）已知函数 $f(x)=\ln x-ax$ 有两个零点 x_1， x_2，且 $x_1<x_2$.

（1）求 a 的取值范围；

（2）证明： $\dfrac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的增大而减小；

（3）证明： x_1x_2 随着 a 的增大而减小．

21.（2019•上虞区二模）已知 $f(x)=ae^{-x}+x$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x-b(a,b\in R)$.

（Ⅰ）若 $f(x)$， $g(x)$ 在 $x=2$ 处有相同的切线．求 a， b 的值；

（Ⅱ）设 $F(x)=f(x)-g(x)$，若函数 $F(x)$ 有两个极值点 x_1， $x_2(x_1>x_2)$，且 $3x_1-x_2\ge 0$，求实数 a 的取值范围．

22.（2019•吴江区月考）已知函数 $f(x)=(x-m)\ln x(x>0)$， $m>0$.

（1）当 $m=1$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）当 $x\in[1，e]$ 时，恒有 $f(x)\le 0$ 成立，求满足条件的 m 的范围；

（3）当 $m=e$ 时，令方程 $f(x)=t$ 有两个不同的根 x_1， x_2，且满足 $x_1<x_2$，求证： $x_2-x_1\le\dfrac{et}{e-1}+e-1$.

23.（2017•深圳一模）已知函数 $f(x)=x\ln x$， e 为自然对数的底数．

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=e^{-2}$ 处的切线方程；

（2）关于 x 的不等式 $f(x) \geq \lambda(x-1)$ 在 $(0，+\infty)$ 上恒成立，求实数 λ 的值；

（3）关于 x 的方程 $f(x)=a$ 有两个实根 x_1， x_2，求证：$|x_1-x_2|<2a+1+e^{-2}$.

24.（2019•南开区校级月考）已知函数 $f(x)=(x+b)(e^x-a)(b>0)$ 在点 $(-1，f(-1))$ 处的切线方程为 $(e-1)x+ey+e-1=0$.

（1）求 a， b；

（2）设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴负半轴的交点为点 P，曲线在点 P 处的切线方程为 $y=h(x)$，求证：对于任意的实数 x，都有 $f(x) \geq h(x)$；

（3）若关于 x 的方程 $f(x)=m$ 有两个实数根 x_1， x_2，且 $x_1<x_2$，证明：$x_2-x_1 \leq 1+\dfrac{m(1-2e)}{1-e}$.

25.（2017•临汾三模）已知函数 $f(x)=(x^2-x)e^x$

（1）求 $y=f(x)$ 在点 $(1，f(1))$ 处的切线方程 $y=g(x)$，并证明 $f(x) \geq g(x)$

（2）若方程 $f(x)=m(m \in R)$ 有两个正实数根 x_1， x_2，求证：$|x_1-x_2|<\dfrac{m}{e}+m+1$.

26（2018•道里区校级期中）已知函数 $f(x)=ax-e^x+1$， $\ln 3$ 是 $f(x)$ 的极值点.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P，曲线在点 P 处的切线为直线 l .求证：曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方；

（Ⅲ）若关于 x 的方程 $f(x)=m(m>0)$ 有两个不等实根 x_1， $x_2(x_1<x_2)$，求证：$x_2-x_1<2-\dfrac{7m}{10}$.

27.（2018•淄博二模）已知函数 $g(x)=x^4$， $x \in R$，在点 $(1，g(1))$ 处的切线方程记为 $y=m(x)$，令 $f(x)=m(x)-g(x)+3$.

（I）设函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴正半轴相交于 P， $f(x)$ 在点 P 处的切线为 l，证明：曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方；

（II）关于 x 的方程 $f(x)=a$（a 为正实数）有两个实根 x_1， x_2，求证：$|x_2-x_1|<2-\dfrac{a}{3}$.

28.（2019•嘉善县校级月考）已知函数 $f(x)=(x+1)(e^x-1)$.

（1）求 $f(x)$ 在点 $(-1，f(-1))$ 处的切线方程；

（2）若 $a \leq e-1$，证明：$f(x) \geq a\ln x+2ex-2$ 在 $x \in [1，+\infty)$ 上恒成立；

（3）若方程 $f(x)=b$ 有两个实数根 x_1， x_2，且 $x_1<x_2$，证明：$x_2-x_1 \leq 1+\dfrac{b+e+1}{3e-1}+\dfrac{eb}{e-1}$.

专题 4 导数中 ATM 找点法

函数中存在零点，通常我们寻找这个零点，需要用到二分法来卡点，就是当 $b<x_0<a$ 时，一定有 $f(a)\cdot f(b)<0$,这样说明 $y=f(x)$在区间（a,b）内一定有一个零点.这是一个被神话的玩意，我们连隐零点都能跳过，至于找点，当然会有巧妙绕过的方案.如果你的切线和同构功底足够，根本无需害怕找点，因为研究导数，本来就是循序渐进，没必要一下子很突兀，让人觉得晦涩难懂.ATM 找点，其实就是一种逆向思维来说明，脑海里多装几个函数图像，参变分离瞬间找到最值，一切迎刃而解.

第一讲指对互找原理

$e^{\ln a}=a,\ln e^{b}=b,$ 这两个等式，瞬间去掉了函数法则，就是指数函数里面加入对数，则把指数法则给去掉了，对数函数里面加入指数，则把对数法则给去了，这是找点的基本法则.

我们先说 $e^x=ax$ 的零点问题，参变分离可以得到 $a=\dfrac{e^x}{x}$, 我们可以根据以下函数图像来分析.

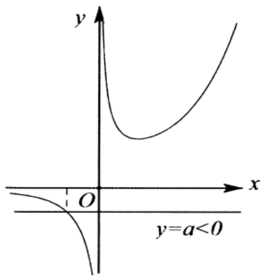


图 13-1-1

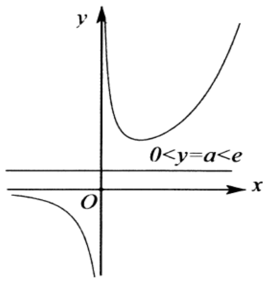


图 13-1-2

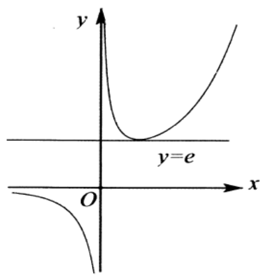


图 13-1-3

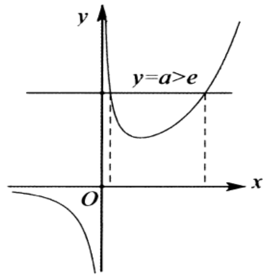


图 13-14

当 $a<0$ 时，如图$13-1-1$, 有仅有一个交点,我们需要找到那个比 0 小的点,显然 $f(x)=e^x-ax$ 当中，

$f(0)=1-a>0,$ 我们需要找到一个 x_0, 使得 $f\left(x_0\right)<0$，在这个过程中，一切都只能围绕着参数 a 做文章，

$f(a)=e^a-a^2$ 与 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=e^{\frac{1}{a}}-1$ 当中选取一个方案，显然选取 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$ 更合适，更方便证明, $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=e^{\frac{1}{a}}-1<0$ 是显而易见的;当然 $f(\ln(-a))=-a-a\ln(-a)=-a(1+\ln(-a))$ 也因为不能证明恒负而不选取;

当 $a=0$ 时，显然无交点;

当 $0<a<e$ 时，显然也无交点，如图 2, 此时只需要找到最小值大于零即可, $f(\ln a)=a-a\ln a=a(1-\ln a)>0$;

当 $a=e$ 时，如图$13-1-3$, 唯一交点 $(1,e)$, 故 $f(1)=0$;

当 $a>e$ 时，如图$13-1-4$, 易知有两个交点,一个位于 $(0,1)$, 一个位于 $(1,+\infty)$, 此时，指找对原理充分

体现，$f(0)=1>0$，$f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a=a(1-\ln a)<0$，或者 $f(1)=e-a<0$，我们要找一个肯定比 $\ln a$ 更大的点，显然 $\ln a^2$ 是一个可以使用的，$f\left(\ln a^2\right)=a^2-a\ln a^2=a^2\left(1-\dfrac{2\ln a}{a}\right)$，根据 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 函数图像可得，$\dfrac{2\ln a}{a}<\dfrac{2}{e}$，故 $f\left(\ln a^2\right)>0$，下面我们完善一下书写讨程。

例 1.讨论函数 $f\left(x\right)=e^x-ax$ 的零点个数.

解：因为 $f'(x)=e^x-a$，$f'(x)=0$ 时，$x=\ln a(a>0)$，① $a<0$ 时，1 个零点. $f'\left(x\right)=e^x-a>0$，$f\left(x\right)=e^x-ax$ 单调递增.且 $f(0)=1-a>0$，$f(\dfrac{1}{a})=e^{\frac{1}{a}}-1<0$，所以 $f(x)$ 在 $(\dfrac{1}{a}，0)$ 上有一个零点；② $a=0$ 时，无零点. $f\left(x\right)=e^x>0$ 恒成立；③ $0<a<e$ 时，无零点. $f\left(x\right)_{\min}=f\left(\ln a\right)=a\left(1-\ln a\right)>0$；④ $a=e$ 时，有唯一零点 $x=1$；⑤ $a>e$ 时，2 个零点. $f(0)=1>0$，$f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a=a(1-\ln a)<0$，由 $f(\ln a^2)=a^2(1-\dfrac{2\ln a}{a})>a^2(1-\dfrac{2}{e})>0$，故 $\exists x_1\in(0，\ln a)$，$\exists x_2\in(\ln a，\ln a^2)$，使得 $f(x)=0$.

总结：找点的关键还是放缩思想，所谓放缩，就是你知道了答案才能用的，就好比本题关键在于找到点 $f\left(\ln a^2\right)$，尚若不知道 $\dfrac{2\ln a}{a}$ 的最值，那么这个点就很难找到.之所以找点难度大，给人一种像雾像雨又像风的感觉，其实本质还是要提前预知结果，然后构造以参数为变量的函数，好比你账户有了钱，要去提款，只需要去找一台 ATM 提款机，这种预知结果来反过来找点的方法叫做 ATM 找点法.

我们接着来分析 $\ln x=ax$ 零点个数问题，$a=\dfrac{\ln x}{x}$，我们通过图像来进行分析:

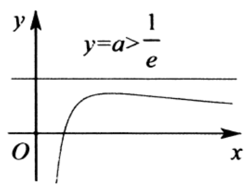


图 13-1-5

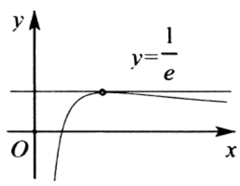


图 13-1-6

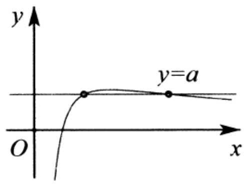


图 13-1-7

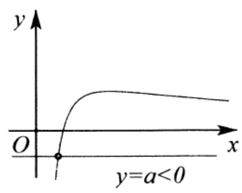


图 13-1-8

构造 $f(x)=\ln x-ax$，可知 $f^{'}(x)=\dfrac{1}{x}-a=0$ 时，$x=\dfrac{1}{a}(a>0)$，即 $f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}-1=\ln\dfrac{1}{ae}$.

当 $a>\dfrac{1}{e}$ 时，我们根据图 $13-1-5$ 可知，无交点，此时我们只需要找到最大值，即 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}-1=\ln\dfrac{1}{ae}<\ln 1=0$；

当 $a=\dfrac{1}{e}$ 时，如图 $12-1-6$ 所示，有一个交点，此时 $f(e)=0$；

当 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时，如图 $13-1-7$ 所示，易知有两个交点，一个位于区间 $(1,e)$，一个位于区间 $(e,+\infty)$，故

$f(1)=-a<0,\quad f(e)=1-ae>0,$ 我们不能选取一个无穷大的数，故此时指对互找的威力就显示出来，由于 $e^a<e<\frac{1}{a}<e^{\frac{1}{a}}$，故我们考虑 $f\left(e^{\frac{1}{a}}\right)=\frac{1}{a}-ae^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{e^{\frac{1}{a}}}{\frac{1}{a^2}}\right)<\frac{1}{a}\left(1-\frac{e^2}{4}\right)<0$，这里用到了函数 $h(x)=\frac{e^x}{x^2}\geq h(2)=\frac{e^2}{4}$，也可以考虑 $\frac{1}{a}<\frac{1}{a^2}$，即 $f\left(\frac{1}{a^2}\right)=\ln\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}=2\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{a}=\frac{1}{a}(-a\ln a-1)<\frac{1}{a}\left(\frac{1}{e}-1\right)<0$，这里用到 $h(x)=-x\ln x\leq h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$，总之，找点的世界里,就是切线放缩，就是六大函数的最值选取。当 $a=0$ 时，有仅有一个零点 $x=1$；当 $a<0$ 时，如图 $13-1-8$ 所示，有一个交点在(0,1)之间，$f(1)=-a>0$，显然我们不能找点找到 $f(0)$，这时候首先考虑指对互找，显然 $0<e^a<1$，故 $f\left(e^a\right)=a-ae^a=a\left(1-e^a\right)<0.$

下面来完善此题道题的书写过程:

例 2.讨论函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax$ 的零点个数.

解：$f'\left(x\right)=\frac{1}{x}-a$，$f\left(x\right)_{\max}=f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1$；①$a>\frac{1}{e}$ 时，无零点. $f\left(x\right)_{\max}=f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1<0$；②$a=\frac{1}{e}$ 时，1 个零点. $f(x)_{\max}=f(e)=\ln e-1=0$；③当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，2 个零点. $f(1)=-a<0$，$f(e)=1-ae>0$（或 $f\left(x\right)_{\max}=f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1>\ln e-1=0$），$f(e^{\frac{1}{a}})=\frac{1}{a}-ae^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}(1-\frac{e^{\frac{1}{a}}}{\frac{1}{a^2}})<\frac{1}{a}(1-\frac{e^2}{4})<0$，故 $\exists x_1\in(1，e)$，$\exists x_2\in(e，e^{\frac{1}{a}})$，使得 $f(x)=0$；④当 $a=0$ 时，有仅有一个零点 $x=1$；⑤当 $a<0$ 时，1 个零点. $f(1)=-a>0$，$f(e^a)=a-ae^a=a(1-e^a)<0$，故 $\exists x_0\in(e^a，1)$，使得 $f(x_0)=0$；

\text{我们接着来讨论}\lnx=\frac{a}{x}\text{的零点问题，参变分离得}a=x\lnx,\text{作出图像如下:}

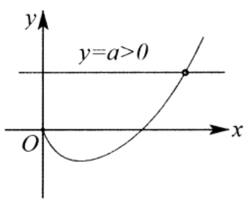


图 13-1-9

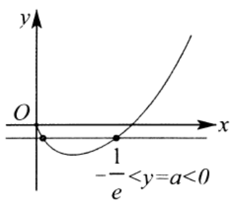


图 13-1-10

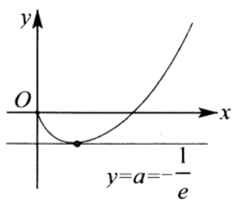


图 13-1-11

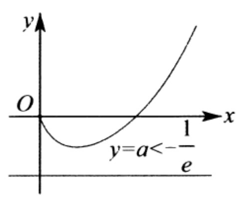


图 13-1-12

构造 $f(x)=\ln x-\frac{a}{x}$，可知 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}=0$ 时，$x=-a(a<0)$，即 $f(x)_{\min}=f(-a)=\ln(-a)+1=\ln(-ae)$，当 $a>0$ 时，如图 $13-1-9$ 所示，有一个交点位于

$(1,+\infty)$, $f(1)=-a<0$, 这时候首先考虑指对互找, 显然 $e^a>1$, 故 $f\left(e^a\right)=a-\frac{a}{e^a}=a\left(1-\frac{1}{e^a}\right)>0$, 或者 $f(1+a)=\ln(1+a)-\frac{a}{1+a}>1-\frac{1}{1+a}-\frac{a}{1+a}=0$ （利用 $\ln x>1-\frac{1}{x}$ ）; 当 $a=0$ 时, 显然只有一个零点 $x=1$; 当 $-\frac{1}{e}<a<0$ 时, 如图 13－1－10 所示, 有两个交点, 一个位于区间 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$, 一个位于区间 $\left(\frac{1}{e},1\right)$, 故 $f(1)=-a>0$, $f\left(\frac{1}{e}\right)=-1-ae<0$(或者 $f(-a)=\ln(-a)+1=\ln(-ae)<0$), 显然我们不能选取 $f(0)$, 由于 $0<a^2<-a$, $f\left(a^2\right)=2\ln(-a)-\frac{1}{a}=\frac{1}{a}(-2\cdot(-a)\cdot\ln(-a)-1)>\frac{1}{a}\left(\frac{2}{e}-1\right)>0$; 当 $a=-\frac{1}{e}$ 时，如图 13－1－11 所示，有一个交点，此时 $f\left(\frac{1}{e}\right)=0$; 当 $a<-\frac{1}{e}$ 时，如图 13－1－12, 我们考虑 $f(x)_{\min}=f(-a)=\ln(-ae)>\ln 1=0$, 无交点. 下面我们来完善这道题的书写过程:

例 3.讨论函数 $f(x)=\ln x-\frac{a}{x}$ 的零点个数.

解： $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}=0$ 时， $x=-a(a<0)$ ， 即 $f(x)_{\min}=f(-a)=\ln(-a)+1=\ln(-ae)$. ① $a>0$ 时， 1 个零点. $f(1)=-a<0$， $f(e^a)=a-\frac{a}{e^a}=a(1-\frac{1}{e^a})>0$； ② $a=0$ 时， 1 个零点 $(x=1)$； ③ $a=-\frac{1}{e}$ 时， 1 个零点. $x=\frac{1}{e}$. $f(x)_{\min}=f(\frac{1}{e})=\ln\frac{1}{e}+1=0$； ④ $-\frac{1}{e}<a<0$ 时， 2 个零点. $f(1)=-a>0$， $f(-a)=\ln(-a)+1<0$， $f(a^2)=2\ln(-a)-\frac{1}{a}>\frac{1}{a}(\frac{2}{e}-1)>0$； ⑤ $a<-\frac{1}{e}$ 时， 无零点. $f(x)_{\min}=f(-a)=\ln(-a)+1>0$.

找点问题，很多都可以用之前的三道例题的同构方式完成，我们来了解一下同构的几大形式：

1. $h(x)=xe^x \xrightarrow{h(\ln x)} x\ln x \xrightarrow{h\left(\ln\frac{1}{x}\right)} \frac{\ln x}{x} \xrightarrow{\frac{1}{h\left(\ln\frac{1}{x}\right)}} \frac{x}{\ln x} \xrightarrow{-h(-x)} \frac{x}{e^x} \xrightarrow{\frac{1}{-h(-x)}} \frac{e^x}{x}$ (六大函数之间同构)

2. $h(x)=xe^x \xleftrightarrow{h(x+a)} (x+a)e^{x+a} \xleftrightarrow{e^{\frac{h(x+a)}{a}}} (x+a)e^x$ (指数平移同构)

3. $h(x)=\frac{x}{e^x} \xleftrightarrow{h(x+a)} \frac{x+a}{e^{x+a}} \xleftrightarrow{e^{a}h(x+a)} \frac{x+a}{e^x}$ (指数平移同构)

4. $h(x)=\frac{x}{e^x} \xleftrightarrow{h\left(\frac{x}{n}\right)} \frac{\frac{x}{n}}{e^{\frac{x}{n}}} \xleftrightarrow{h\left(\frac{x}{n}\right)^n} \frac{x^n}{n^n e^x}$ (指数次方同构)

5. $h(x)=x\ln x \xleftrightarrow{h\left(x^n\right)} x^n\ln x^n \xleftrightarrow{\frac{h\left(x^n\right)}{n}} x^n\ln x$ (对数次方同构)

6. $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}\xleftrightarrow{h\left(x^n\right)}\dfrac{\ln x^n}{x^n}\xleftrightarrow{\frac{h\left(x^n\right)}{n}}\dfrac{\ln x}{x^n}$ (对数次方同构)

7. $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}\xleftrightarrow{h\left(e^n x\right)}\dfrac{\ln e^n x}{e^n x}\xleftrightarrow{e^n h\left(e^n x\right)}\dfrac{\ln x+n}{x}$ (对数乘法同构)}

例 4.讨论以下找点问题与之同构母函数的关系.

(1)讨论 $f(x)=e^{2x}-mx$ 的零点个数;

(2)讨论 $f(x)=\ln x-m\sqrt{x}$ 的零点个数;

(3)讨论 $f(x)=x-\dfrac{a}{e^x}$ 的零点个数.

解析(1)令 $2x=t$, $\dfrac{m}{2}=a$, 等价于 $f(t)=e^t-at$, ①当 $m<0$ 时,有 1 个零,点. $f'(x)=2e^{2x}-m>0$, $f(x)$ 单调递增.且 $f(0)=1-m>0$, $f\left(\dfrac{1}{m}\right)=e^{\frac{2}{m}}-1<0$, 所以在 $\left(\dfrac{1}{m},0\right)$ 上有一个零点;②当 $m=0$ 时,无零点. $f(x)=e^{2x}>0$ 恒成立;③当 $0<m<2e$ 时,无零点. $f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{\ln\frac{m}{2}}{2}\right)=\dfrac{m}{2}-m\dfrac{\ln\frac{m}{2}}{2}=\dfrac{m}{2}\left(1-\ln\dfrac{m}{2}\right)>0$;

④当 $m=2e$ 时,有唯一玲点 $x=\dfrac{1}{2}$;⑤当 $m>2e$ 时,2 个零点. $f\left(\dfrac{\ln\frac{2}{m}}{2}\right)=\dfrac{2}{m}-\dfrac{m}{2}\ln\dfrac{2}{m}=\dfrac{2}{m}+\dfrac{m}{2}\ln\dfrac{m}{2}>0$

$f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{\ln\frac{m}{2}}{2}\right)=\dfrac{m}{2}\left(1-\ln\dfrac{m}{2}\right)<0$, $f\left(\dfrac{\ln\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}\right)=\left(\dfrac{m}{2}\right)^2\left(1-\dfrac{2\ln\frac{m}{2}}{\frac{m}{2}}\right)>\left(\dfrac{m}{2}\right)^2\left(1-\dfrac{2}{e}\right)>0$.

本题也可以直接引用例题一解答过程，最后把 a 换成 m, t 换成 x 即可.

(2)令 $\sqrt{x}=t$, $\dfrac{m}{2}=a$, 等价于 $f(t)=\ln t-at$ 零点问题, $f'(t)=\dfrac{1}{t}-a$, $f(t)_{\max}=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}-1$;

①当 $a>\dfrac{1}{e}$ 时,即 $m>\dfrac{2}{e}$, 无零点. $f(t)_{\max}=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}-1<0$;

②当 $a=\dfrac{1}{e}$ 时, 即 $m=\dfrac{2}{e}$, 有 1 个玲点. $f(t)_{\max}=f(e)=\ln e-1=0$, 此时 $x=e^2$;

③当 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时，即 $0<m<\dfrac{2}{e}$, 有 2 个零，点. $f(1)=-a<0$, $f(e)=1-ae>0$ (或

$f(t)_{\max}=f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1>\ln e-1=0\Bigg)$, $f\left(e^{\frac{1}{a}}\right)=\frac{1}{a}-ae^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{e^{\frac{1}{a}}}{\frac{1}{a^2}}\right)<\frac{1}{a}\left(1-\frac{e^2}{4}\right)<0$, 此 时 $1<x_1<e^2$, $e^2<x_2<e^{\frac{4}{m}}$

④当 $a=0$ 时,即 $m=0$,有且仅有一个零,点,$x=1$;

⑤当 $a<0$ 时,即 $m<0$,有 1 个零,点. 又 $f(1)=-a>0$, $f\left(e^a\right)=a-ae^a=a\left(1-e^a\right)<0$,即 $e^m<x<1$;

(3)令 $e^x=t$,转化为讨论函数 $f(t)=\ln t-\frac{a}{t}$ 的零点个数,参考例 3 的方法不再详述，我们尝试一下构造指对互找来解此题，由于 xe^x 与 $x\ln x$ 属于同构关系，找,点基本上属于定区间后卡根，在高考当中也是一种必备技能，此题可以知道分为 $a<-\frac{1}{e}$(无解), $a=-\frac{1}{e}$(唯一解), $-\frac{1}{e}<a<0$(两解), $a\geq 0$（一解）,具体分类讨论如下: $f'(x)=1+\frac{a}{e^x}$, 当 $x=\ln(-a)(a<0)$ 时, $f'(x)=0$, $f(x)_{\min}=f(\ln(-a))$,

①当 $a<-\frac{1}{e}$ 时，无解, $f(x)_{\min}=f(\ln(-a))=\ln(-a)+1>0$;

②当 $a=-\frac{1}{e}$ 时,有唯一解,此时 $f(x)_{\min}=f(\ln(-a))=\ln(-a)+1=0$， $x=-1$;

③当 $-\frac{1}{e}<a<0$ 时,有两解, $f(0)=-a>0$, $f(x)_{\min}=f(\ln(-a))=\ln(-a)+1<0$,

$f\left(\ln a^2\right)=2\ln(-a)-\frac{1}{a}=\frac{1}{a}(-2\cdot(-a)\ln(-a)-1)>\frac{1}{a}\left(\frac{2}{e}-1\right)>0$;

④当 $a=0$ 时,有唯一解: $x=0$;

⑤当 $a>0$ 时,有唯一解, $f(0)=-a<0$, $f(a)=a-\frac{a}{e^a}=a\left(1-\frac{1}{e^a}\right)>0$.

第二讲高考中的找点

例 5.（2018•新课标 II）已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$.

（1）若 $a=1$，证明：当 $x\geq 0$ 时， $f(x)\geq 1$；

（2）若 $f(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 只有一个零点，求 a.

解: (1)当 $a=1$ 时,函数 $f(x)=e^x-x^2$. 则 $f'(x)=e^x-2x$, 令 $g(x)=e^x-2x$, 则 $g'(x)=e^x-2$, 令 $g'(x)=0$, 所以 $x=\ln 2$. 当 $x\in(0,\ln 2)$ 时, $g'(x)<0$, 当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时, $g'(x)>0$, 所以 $g(x)\geq g(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\cdot\ln 2=2-2\ln 2>0$, 则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，即 $f(x)\geq f(0)=1$;

(2)法一(指数找基友)函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点 $\Leftrightarrow$ 方程 $e^x-ax^2=0$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个根,则

$\frac{1}{a}=\frac{x^2}{e^x}$ 在有一个根,即函数 $y=\frac{1}{a}$ 与 $h(x)=\frac{x^2}{e^x}$ 的图象在 $(0,+\infty)$ 只有一个交点. $h'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}$, 当 $x\in(0,2)$ 时, $h'(x)>0$, 当 $\in(2,+\infty)$ 时, $h'(x)<0$, 所以 $h(x)$ 在(0,2)递增，在 $(2,+\infty)$ 递减, 当 $x\to 0$ 时, $h(x)\to 0$, 当 $x\to+\infty$ 时, $h(x)\to 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点时, $\frac{1}{a}=h(2)=\frac{4}{e^2}\Leftrightarrow a=\frac{e^2}{4}$

法二（ATM 找,点）①当 $a\le 0$ 时, $f(x)=e^x-ax^2>0$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 没有零点.

②当 $a>0$ 时，令 $\frac{x}{2}=t$, 即 $f(t)=e^{2t}-4at^2=\left(e^t+2\sqrt{a}t\right)\left(e^t-2\sqrt{a}t\right)=0$, 令 $h(t)=e^t-2\sqrt{a}t$, 故此题可以转化为 $h(t)=0$ 只有一个零点的问题, $h'(t)=e^t-2\sqrt{a}(t>0)$, $t=\ln 2\sqrt{a}$ 时, $h(t)_{\min}=2\sqrt{a}(1-\ln 2\sqrt{a})$,

i)当 $2\sqrt{a}=e$ 时，有唯一零点,此时 $h(t)_{\min}=h(e)=0$, 故 $a=\frac{e^2}{4}$ 时满足题意;

ii）当 $0<2\sqrt{a}<e$ 时，无交点,因为 $h(t)_{\min}=2\sqrt{a}(1-\ln 2\sqrt{a})>0$;

iii）当 $2\sqrt{a}>e$ 时,两个交点, $h(0)=1>0$, $h(t)_{\min}=2\sqrt{a}(1-\ln 2\sqrt{a})<0$,

$h(\ln 4a)=4a-2\sqrt{a}\ln 4a=4a\left(1-\frac{\ln 4a}{2\sqrt{a}}\right)$, 构造函数 $F(x)=\frac{\ln x}{x}$, 显然 $F'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, 当 $x>e$ 时, $F(x)\downarrow$, 且当 $x\to\infty$ 时, $F(x)\to 0$, 故 $\frac{\ln 4a}{2\sqrt{a}}=2F(2\sqrt{a})\in\left(0,\frac{2}{e}\right)$, 所以 $h(\ln 4a)=4a\left(1-\frac{\ln 4a}{2\sqrt{a}}\right)>4a\left(1-\frac{2}{e}\right)>0$, $\exists x_1\in(0,\ln 2\sqrt{a})$, 使 $h\left(x_1\right)=0$, 且 $\exists x_2\in(\ln 2\sqrt{a},\ln 4a)$, 使 $h\left(x_2\right)=0$, 此时不符合题意;

综上, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点时, $a=\frac{e^2}{4}$.

法三（常规找,点）

①当 $a\le 0$ 时, $f(x)=e^x-ax^2>0$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 没有零点.

②当 $a>0$ 时,设函数 $h(x)=1-ax^2e^{-x}$. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零,点 $\Leftrightarrow h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点.

设函数 $h(x)=1-a\dfrac{x^2}{e^x}\cdot f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零,点 $\Leftrightarrow h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点.

$h'(x)=ax(x-2)e^{-x}$,当 $x\in(0,2)$ 时,$h'(x)<0$,当 $x\in(2,+\infty)$ 时,$h'(x)>0$,所以 $h(x)$ 在(0,2)递减,在 $(2,+\infty)$ 递增,则 $h(x)_{\min}=h(2)=1-\dfrac{4a}{e^2},(x\geq 0)$. 当 $h(2)<0$ 时,即 $a>\dfrac{e^2}{4}$, 田于 $h(0)=1$, 当 $x>0$ 时,$e^x>x^2$,可得 $h(4a)=1-\dfrac{16a^3}{e^{4a}}=1-\dfrac{16a^3}{\left(e^{2a}\right)^2}>1-\dfrac{16a^3}{(2a)^4}=1-\dfrac{1}{a}>0\cdot h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有 2 个零,点,当 $h(2)>0$ 时,即 $a<\dfrac{e^2}{4}$,$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 没有零点,当 $h(2)=0$ 时,即 $a=\dfrac{e^2}{4}$,$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点,综上,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点时,$a=\dfrac{e^2}{4}$.

例 6.(2017•新课标 II)已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$,且 $f(x)\geq 0$.

(1)求 a;

(2)证明:$f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0,且 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

解:(1) 法一 因为 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x=x(ax-a-\ln x)(x>0)$, 则 $f(x)\geq 0$ 等价于 $h(x)=ax-a-\ln x\geq 0$,求导可知 $h'(x)=a-\dfrac{1}{x}$. 则当 $a\leq 0$ 时 $h'(x)<0$, 即 $y=h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,所以当 $x_0>1$ 时,$h\left(x_0\right)<h(1)=0$, 矛盾,故 $a>0$. 因为当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时 $h'(x)<0$,当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时 $h'(x)>0$, 所以 $h(x)_{\min}=h\left(\dfrac{1}{a}\right)$, 又因为 $h(1)=a-a-\ln 1=0$, 所以 $\dfrac{1}{a}=1$, 解得 $a=1$;

法二(对数单身狗)因为 $f(x)=x(ax-a-\ln x)\geq 0\Leftrightarrow g(x)=ax-a-\ln x\geq 0$ 恒成立,$g'(x)=a-\dfrac{1}{x}$, 且 $g(1)=0$,故 $g(x)_{\min}=g(1)\Leftrightarrow a=1$;

(2)由(1)可知 $f(x)=x^2-x-x\ln x$, $f'(x)=2x-2-\ln x$, 令 $f'(x)=0$, 可得 $2x-2-\ln x=0$, 记 $h(x)=2x-2-\ln x$, 则 $h'(x)=2-\dfrac{1}{x}$, 令 $h'(x)=0$, 解得 $x=\dfrac{1}{2}$, 所以 $h(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增,所以 $h(x)_{\min}=h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln 2-1<0$, 又 $h\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\dfrac{2}{e^2}>0$, 所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上存

在唯一实点,所以 $h(x)=0$ 有解，即 $f'(x)=0$ 存在两根 x_0,x_2,不妨设 $f'(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 上为正,在 $\left(x_0,x_2\right)$ 上为负，在 $\left(x_2,+\infty\right)$ 上为正,所以 $f(x)$ 必存在唯一极大值,点 x_0,且 $2x_0-2-\ln x_0=0$,所以 $f\left(x_0\right)=x_0^2-x_0-x_0\ln x_0=x_0^2-x_0+2x_0-2x_0^2=x_0-x_0^2$，由 $x_0<\frac{1}{2}$ 可知 $f\left(x_0\right)<\left(x_0-x_0^2\right)_{\max}=-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$；由 $f'\left(\frac{1}{e}\right)<0$ 可知 $x_0<\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$,所以 $f(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 上单调递增，在 $\left(x_0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减,所以 $f\left(x_0\right)>f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^2}$;综上所述， $f(x)$ 存在唯一的极大值,点 x_0,且 $e^{-2}<f\left(x_0\right)<2^{-2}$.

例 7.（2017•新课标Ⅰ）已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性;

（2）若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

解：(1)由 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$,水于 $f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^x-1$;当 $a=0$ 时, $f'(x)=-2e^x-1<0$,所以当 $x\in R$, $f(x)$ 单调递减； 当 $a>0$ 时， $f'(x)=\left(2e^x+1\right)\left(ae^x-1\right)=2a\left(e^x+\frac{1}{2}\right)\left(e^x-\frac{1}{a}\right)$， 令 $f'(x)=0$,解得 $x=\ln\frac{1}{a}$; 当 $f'(x)>0$,解得 $x>\ln\frac{1}{a}$, 当 $f'(x)<0$,解得 $x<\ln\frac{1}{a}$,所以 $x\in\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ 时， $f(x)$ 单调递减, $x\in\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 单调递增； 当 $a<0$ 时， $f'(x)=2a\left(e^x+\frac{1}{2}\right)\left(e^x-\frac{1}{a}\right)<0$ 恒成立,所以当 $x\in R$, $f(x)$ 单调递减,综上可知:当 $a\le 0$ 时, $f(x)$ 在 R 单调减函数，当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ 是减函数，在 $\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 是增函数：;

(2)法一①若 $a\le 0$ 时,止(1)可知 $f(x)$ 最多有一个零,点,当 $a>0$ 时, $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$,当 $x\to-\infty$ 时, $e^{2x}\to 0$, $e^x\to 0$,所以当 $x\to-\infty$ 时， $f(x)\to+\infty$, 当 $x\to\infty$, $e^{2x}\to+\infty$, 且远远大于 e^x 和 x,所以当 $x\to\infty$, $f(x)\to+\infty$,即函数有两个零点， $f(x)$ 的最小值小于 0 即可,田 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$ 是减函数，在 $\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 是增函数， 所以 $f(x)_{\min}=f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=a\times\left(\frac{1}{a^2}\right)+(a-2)\times\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}<0$， 则

$1-\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}<0,$ 即 $\ln\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-1>0,$ 设 $t=\frac{1}{a},$ 则 $g(t)=\ln t+t-1,\quad (t>0),$ 求导 $g'(t)=\frac{1}{t}+1,$ 止 $g(1)=0,$ 所以 $t=\frac{1}{a}>1,$ 解得 $0<a<1,$ 即 a 的取值范围(0,1).

方法二(ATM 找,点)若 $a\le 0$ 时,由(1)可知 $f(x)$ 最多有一个零点,当 $a>0$ 时,由(1)可知:当 $x=-\ln a$ 时, $f(x)$ 取得最小值, $f(x)_{\min}=f(-\ln a)=1-\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}$,①当 $a=1$ 时, $f(-\ln a)=0$,故 $f(x)$ 只有一个零点,②当 $a\in(1,+\infty)$ 时,十 $f(x)_{\min}=1-\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}>0,$ 故 $f(x)$ 没有零,点,③当 $a\in(0,1)$ 时, $f(x)_{\min}=f(-\ln a)=1-\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}<0$ 由 $f(-1)=ae^{-2}+(a-2)e^{-1}+1=\frac{(e-1)^2+a+ae-1}{e^2}>\frac{(e-1)^2-1}{e^2}>0,$ 故 $f(x)$ 在 $(-1,-\ln a)$ 有一个零,点, 又由于 $e^x>x,$ 当 $x\to\infty$ 时, $ae^{2x}+(a-2)e^x-x=e^x\left(ae^x+a-2\right)-x>x\left(ae^x+a-3\right),$ 故只需找到 $x_0,$ 满足 $x_0>\ln\left(\frac{3}{a}-1\right),$ 则 $f\left(x_0\right)=e^{x_0}\left(ae^{x_0}+a-2\right)-\ x_0>e^{x_0}-x_0>0,$ 止 $\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)>-\ln a,$ 因此在 $(-\ln a,+\infty)$ 有一个零点.故 a 的取值范围(0,1).

总结：这道找点的好题算得上经典，在有两个零点的处理上，可以催生出很多可以找的点,比如 $f(-2)<0$,比如 $f\left(\ln\frac{3}{a}\right)>0,$ 比如 $f(0)<0,$ 找点无定法，放缩使关键.

例 8.（2016•新课标III）设函数 $f(x)=\ln x-x+1$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明当 $x\in(1，+\infty)$ 时， $1<\frac{x-1}{\ln x}<x$ ；

（3）设 $c>1$ ，证明当 $x\in(0，1)$ 时， $1+(c-1)x>c^x$.

解：(1)函数 $f(x)=\ln x-x+1$ 的导数为 $f'(x)=\frac{1}{x}-1,$ 由 $f'(x)>0,$ 可得 $0<x<1$;由 $f'(x)<0,$ 可得 $x>1$. 即有 $f(x)$ 的增区间为(0,1);减区间为 $(1,+\infty)$;

(2)证明:当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $1<\frac{x-1}{\ln x}<x,$ 即为 $\ln x<x-1<x\ln x.$ 由（1）可得 $f(x)=\ln x-x+1$ 在 $(1,+\infty)$ 递减,可得 $f(x)<f(1)=0,$ 即有 $\ln x<x-1;$ 设 $F(x)=x\ln x-x+1,\quad x>1,\quad F'(x)=1+\ln x-1=\ln x,$ 当 $x>1$ 时, $F'(x)>0,$ 可得 $F(x)$ 递增, 即有 $F(x)>F(1)=0,$ 即有 $x\ln x>x-1,$ 则原不等式成

立;

(3)证明:设 $h(x)=1+(c-1)x-c^{x}$, 则需要证明:当 $x\in(0,1)$ 时, $h(x)>0(c>1)$; 求导 $h'(x)=c-1-c^{x}\ln c$, $h''(x)=-(\ln c)^{2}c^{x}<0$, 所以 $h'(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减, 而 $h'(0)=c-1-\ln c, h'(1)=c-1-c\ln c$, 由 (1) 中 $f(x)$ 的单调性, 可得 $h'(0)=c-1-\ln c>0$ ， 由 (2) 可得 $h'(1)=c-1-c\ln c=c(1-\ln c)-1<0$, 所以 $\exists t\in(0,1)$, 使得 $h'(t)=0$, 即 $x\in(0,t)$ 时, $h'(x)>0$, $x\in(t,1)$ 时, $h'(x)<0$; 即 $h(x)$ 在 $(0,t)$ 递增, 在 $(t,1)$ 递减; 又因为 $h(0)=h(1)=0$, 所以 $x\in(0,1)$ 时 $h(x)>0$ 成立, 不等式得证; 即 $c>1$, 当 $x\in(0,1)$ 时, $1+(c-1)x>c^{x}$.

例 9.（2016•新课标I）已知函数 $f(x)=(x-2)e^{x}+a(x-1)^{2}$.

（I）讨论 $f(x)$ 的单调性;

（II）若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

解：(1)由 $f(x)=(x-2)e^{x}+a(x-1)^{2}$, 可得 $f'(x)=(x-1)e^{x}+2a(x-1)=(x-1)\left(e^{x}+2a\right)$, ①当 $a\geq 0$ 时, 由 $f'(x)>0$, 可得 $x>1$; 由 $f'(x)<0$, 可得 $x<1$, 即有 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 递减：在 $(1,+\infty)$ 递增，如图 $13-1-13$ 所示：②当 $a<0$ 时, 如图 $13-1-14$, 若 $a=-\frac{e}{2}$, 则 $f'(x)\geq 0$ 恒成立, 即有 $f(x)$ 在 R 上递增; 若 $a<-\frac{e}{2}$ 时, 由 $f'(x)>0$ ， 可得 $x<1$ 或 $x>\ln(-2a)$; 由 $f'(x)<0$, 可得 $1<x<\ln(-2a)$. 即有 $f(x)$ 在 $(-\infty,1),(\ln(-2a),+\infty)$ 递增：在 $(1,\ln(-2a))$ 递减; 若 $-\frac{e}{2}<a<0$, 十 $f'(x)>0$, 可得 $x<\ln(-2a)$ 或 $x>1$; 由 $f'(x)<0$, 可得 $\ln(-2a)<x<1$. 即有 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-2a))$, $(1,+\infty)$ 递增; 在 $(\ln(-2a),1)$ 递减:

(2)法一①由（1）可得当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 递减：在 $(1,+\infty)$ 递增， 且 $f(1)=-e<0, f(2)=a>0$, $x<1$ 时， $f(x)=(x-2)\left(e^{x}+ax\right)+a$, 故只需我到 x_{0}, 使得 $h\left(x_{0}\right)=e^{x_{0}}+ax_{0}<0$ 成立, 由于 $h(-1)=\frac{1}{e}-a$, 故当 $a\geq\frac{1}{e}$ 时， $h(-1)\leq 0\Leftrightarrow f(-1)>0$, 当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时, $h(\ln a)=a(1+\ln a)<0\Leftrightarrow f(-1)>0$ ， 所以总能找到一个 $x<1$ 使得 $f(x)>0$ 对于 $a>0$ 恒成立， $f(x)$ 有两个零点;②当 $a=0$ 时, $f(x)=(x-2)e^{x}$, 所以 $f(x)$ 只有一个零,点 $x=2$;③当 $a<0$ 时, 若 $a<-\frac{e}{2}$ 时， $f(x)$ 在 $(1,\ln(-2a))$ 递减, 在 $(-\infty,1)$, $(\ln(-2a),+\infty)$ 递增，又当 $x\leq 1$ 时， $f(x)<0$, 所以 $f(x)$ 不存在两个零点; 当 $a\geq-\frac{e}{2}$ 时, 在 $(-\infty,\ln(-2a))$ 单调增，在 $(1,+\infty)$ 单调增，在 $(\ln(-2a),1)$ 单调减，只

有 $f(\ln(-2a))=0$ 才有两个零点,而当 $x\le 1$ 时, $f(x)<0$，所以只有一个零点.不符题意.综上可得, $f(x)$ 有两个零点时, a 的取值范围为 $(0,+\infty)$.

法二(指数找基友）由 $f(x)=(x-2)e^{x}+a(x-1)^{2}=0$ 得: $\frac{1}{a}=\frac{(x-1)^{2}}{e^{x}(2-x)}(x\ne 2)$, 令 $g(x)=\frac{(x-1)^{2}}{e^{x}(2-x)}$

①当 $x=2$ 时,当 $a=0$ 时,有仅有 $f(2)=0$;

②当 $x>2$ 时, $g(x)<0$,　当 $x<2$ 时，$g^{'}(x)=\frac{(x-1)\left(x^{2}-4x+5\right)}{e^{x}(2-x)^{2}}$,　当 $x=1$ 时，$g^{'}(x)=0$, 故 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在区间(1,2)上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(1)=0$, 且在 $x\to 2$ 以及 $x\to -\infty$ 时, $g(x)\to +\infty$,故 $\frac{1}{a}\in(0,+\infty)$ 时,即 $a>0$,　$f(x)=(x-2)e^{x}+a(x-1)^{2}$ 有两个零点,且当 $\frac{1}{a}\in(-\infty,0)$ 时,函

数 $f(x)=(x-2)e^{x}+a(x-1)^{2}$ 有且仅有一个零,点 x_{0}, 且 $x_{0}>2$, 不合题意：当 $a=0$ 时仅有一个零,点,且 $x=2$,不合题意，综上 $a>0$.

总结:这道题是高考题当中必刷题，本人给到的两种方法均不是标准答案给出的，法一当中，因式分解成为了关键武器，类似例 5，找点一定要降维思考，拆项和分解因式是一种常用技巧，而“指数找基友”则利用参变分离巧妙避开了找点，关于“指数找基友",我们还会经常用到它，找点不是什么神秘绝招，而且方案很多，答案开放，动手反复操作，总能找到方向。

所谓 ATM 找点，就是大胆放缩，大胆因式分解，大胆分类讨论知道大致区间，代入端点,特殊点,再考虑指对互找.下一讲三角函数的系列也要岸到找点知识，相对而言，三角函数套路不如指对跨阶那么深，但总会难倒一群好汉，所以找点对于三角函数而言非常重要.

第三讲找点新题型——极值点与零点比大小

秒杀秘籍：构造成 $e^{x_0-x_1}$ 与 1 比大小或者 $\ln x_0-\ln x_1$ 与 0 比大小

在一些新题的压轴问，经常要证明 $x_{0}>x_{1}$ 或者 $x_{0}<x_{1}$，其中 $f'(x_{0})=0$， $f(x_{1})=0$，这种类型可以通过分离函数得到 $e^{x_{0}}=m(x_{0})$， $e^{x_{1}}=n(x_{1})$，构造 $e^{x_{0}-x_{1}}=\frac{m(x_{0})}{n(x_{1})}$ 与 1 比大小，或者 $\ln x_{0}=m(x_{0})$， $\ln x_{1}=n(x_{1})$，构造 $\ln\frac{x_{0}}{x_{1}}=m(x_{0})-n(x_{1})$ 与 0 比大小;

例 10.（2019•滨州期末）已知函数 $f(x)=e^{x}(1+m\ln x)$，其中 $m>0$， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数. 设 $h(x)=\frac{f'(x)}{e^{x}}$，且 $h(x)\ge\frac{5}{2}$ 恒成立.

（1）求 m 的取值范围；

（2）设函数 $f(x)$ 的零点为 x_0，函数 $f'(x)$ 的极小值点为 x_1，求证：$x_0 > x_1$.

解：(1)由题设知，$f'(x)=e^x\left(1+\frac{m}{x}+m\ln x\right)(x>0)$，$h'(x)=\frac{m(x-1)}{x^2}(x>0)$，由 $h'(x)>0$，得 $x>1$，所以函数 $h(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上是增函数：止 $h'(x)<0$，得 $0<x<1$，所以函数 $h(x)$ 在区间(0,1)上是减函数. 故 $h(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值,且 $h(1)=1+m$. 由于 $h(x)\geq\frac{5}{2}$ 恒成立,所以 $1+m\geq\frac{5}{2}$，得 $m\geq\frac{3}{2}$.所以 m 的取值范围为 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

(2)法一设 $g(x)=f'(x)=e^x\left(1+\frac{m}{x}+m\ln x\right)$，则 $g'(x)=e^x\left(1+\frac{2m}{x}-\frac{m}{x^2}+m\ln x\right)$.

设 $H(x)=1+\frac{2m}{x}-\frac{m}{x^2}+m\ln x(x>0)$，则 $H'(x)=-\frac{2m}{x^2}+\frac{2m}{x^3}+\frac{m}{x}=\frac{m\left(x^2-2x+2\right)}{x^3}>0$，故函数 $H(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，由(1)知，$m\geq\frac{3}{2}$，所以 $H(1)=m+1>0$，$H\left(\frac{1}{2}\right)=1-m\ln 2\leq 1-\ln 2\sqrt{2}<0$，故存在 $x_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $H\left(x_2\right)=0$，所以，当 $0<x<x_2$ 时，$H(x)<0$，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 单调递减；当 $x>x_2$ 时，$H(x)>0, g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增.所以 x_2 是函数 $g(x)$ 的极小值点.因此 $x_2=x_1$，即 $x_1\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. 由(1)可知当 $m=\frac{3}{2}$ 时，$h(x)\geq\frac{5}{2}$，即 $1+\frac{2}{x}+\frac{3}{2}\ln x\geq\frac{5}{2}$，整理得 $\ln x+\frac{1}{x}\geq 1$，所以 $m\ln x+\frac{m}{x}\geq m$.

因此 $g(x)\geq g\left(x_1\right)=e^{x_1}\left(1+\frac{m}{x_1}+m\ln x_1\right)\geq e^{x_1}(1+m)>0$，即 $f'(x)>0$. 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.由于 $H\left(x_1\right)=0$，即 $1+\frac{2m}{x_1}-\frac{m}{x_1^2}+m\ln x_1=0$，即 $1+m\ln x_1=\frac{m}{x_1^2}-\frac{2m}{x_1}$，

所以 $f\left(x_1\right)=e^{x_1}\left(1+m\ln x_1\right)=me^{x_1}\frac{1-2x_1}{x_1^2}<0=f\left(x_0\right)$. 又函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

法二因为函数 $f(x)$ 的零点为 x_0，所以 $e^{x_0}\left(1+m\ln x_0\right)=0$，所以 $1+m\ln x_0=0$，解得 $x_0=e^{-\frac{1}{m}}$，由(1)知

$f'(x)=e^x\left(1+\frac{m}{x}+m\ln x\right)$，设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^x\left(1+\frac{2m}{x}-\frac{m}{x^2}+m\ln x\right)$

设 $H(x)=1+\frac{2m}{x}-\frac{m}{x^2}+m\ln x(x>0)$, 则 $H^{'}(x)=-\frac{2m}{x^2}+\frac{2m}{x^3}+\frac{m}{x}=\frac{m\left(x^2-2x+2\right)}{x^3}>0$, 故函数 $H(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增．止 (1) 知，$m\geq\frac{3}{2}$, 所以 $H(1)=m+1>0$, $H\left(\frac{1}{2}\right)=1-m\ln 2\leq 1-\ln 2\sqrt{2}<0$, 故存在 $x_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 使得 $H\left(x_2\right)=0$, 所以，当 $0<x<x_2$ 时, $H(x)<0$, $g^{'}(x)<0$, 函数 $g(x)$ 单调递减；当 $x>x_2$ 时，$H(x)>0$, $g^{'}(x)>0$, 函数 $g(x)$ 单调递增．所以 x_2 是函数 $g(x)$ 的极小值点．因此 $x_2=x_1$, 即 $x_1\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. 又 $H\left(x_0\right)=1+\frac{2m}{x_0}-\frac{m}{x_0^2}+m\ln x_0=\frac{m\left(2x_0-1\right)}{x_0^2}$. 因为 $e<2\sqrt{2}$, 所以 $e^{-2}>\frac{1}{8}$, 所以 $e^{-\frac{2}{3}}>\frac{1}{2}$. 又由 (1) 知，$m\geq\frac{3}{2}$，所以 $2x_0-1=2e^{-\frac{1}{m}}-1\geq 2e^{-\frac{2}{3}}-1>0$, 所以 $H\left(x_0\right)>0$. 因为 $H\left(x_1\right)=0$, 所以 $H\left(x_0\right)>H\left(x_1\right)$, 因为函数 $H(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.所以 $x_0>x_1$.

法三 $1+m\ln x_0=0$, 且 $1+\frac{m}{x_1}+m\ln x_1=0$, 止 (1) 知 $m\geq\frac{3}{2}$, 故 $\ln x_0=\frac{1}{x_1}+\ln x_1$, 显然 $\ln\frac{x_0}{x_1}=\frac{1}{x_1}>0$, 即 $\frac{x_0}{x_1}>1$，故只需证明 x_1 是极小值,点,剩下步骤同法二的构造 $H(x)=1+\frac{2m}{x}-\frac{m}{x^2}+m\ln x(x>0)$.

总结：找点放缩很多时候都是因为知道答案后的义要探路，并非那种非它不可的绝招，很多时候可以巧妙绕过，相比之下，同构、切线找点和分而治之为什么被称为“三板斧",就是因为非它们不可.

例 11.（2020•茂名一模）设函数 $g(x)=\ln x+ae^x$，$h(x)=axe^x$，$0<a<\frac{1}{e}$，

（1）求 $g(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的一般式方程;

（2）请判断 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的图象有几个交点?

（3）设 x_0 为函数 $g(x)-h(x)$ 的极值点，x_1 为 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的图象一个交点的横坐标，且 $x_1>x_0$，证明：$3x_0-x_1>2$.

解：(1)由 $g^{'}(x)=\frac{1}{x}+ae^x$ 得切线的斜率为 $k=g^{'}(1)=1+ae$, 切点为 $(1,ae)$.所以切线方程为 $y-ae=(1+ae)(x-1)$, 即所求切线的一般式方程为 $(1+ae)x-y-1=0$.

(2)法一令 $f(x)=g(x)-h(x)=\ln x+ae^x-axe^x$ 由题意可知, $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

且 $f'(x)=\frac{1}{x}+ae^{x}-a(1+x)e^{x}=\frac{1-ax^{2}e^{x}}{x}$. 令 $m(x)=1-ax^{2}e^{x}$, 得 $m'(x)=-a\left(2xe^{x}+x^{2}e^{x}\right)$, 由 $0<a<\frac{1}{e},x>0$ 得，可知 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减， 又 $m(1)=1-ae>0$, 且 $m\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1-a\left(\ln\frac{1}{a}\right)^{2}\frac{1}{a}=1-\left(\ln\frac{1}{a}\right)^{2}<0$, 故 $m(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一解, 从而 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一解，不妨设为 x_0, 则 $1<x_0<\ln\frac{1}{a}$, 当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时， $f'(x)=\frac{m(x)}{x}>\frac{m\left(x_0\right)}{x}=0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 内单调递增； 当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时, $f'(x)=\frac{m(x)}{x}<\frac{m\left(x_0\right)}{x}=0$, 则 $f(x)$ 在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 内单调递减, 即 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值,点.令 $\varphi(x)=\ln x-x+1$，则当 $x>1$ 时, $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-1<0$, 故 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递减，所以当 $x>1$ 时，$\varphi(x)<\varphi(1)=0$, 即 $\ln x<x-1$，从而 $f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=\ln\ln\frac{1}{a}+a\left(1-\ln\frac{1}{a}\right)e^{\ln\frac{1}{a}}=\ln\ln\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}+1=\varphi\left(\ln\frac{1}{a}\right)<0$, 又因为 $f\left(x_0\right)>f(1)=0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 内有唯一零点,又 $f(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 内有唯一零点,1, 从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内恰有两个零点.

所以 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的图象有 2 交点;

法二(分而治之）显然 $g(1)=h(1)=a$, 故 $x_1=1$ 是它们的交点,当 $x\neq1$ 时,此题可以转化为 $m(x)=\frac{\ln x}{x-1}$ 与 $n(x)=ae^{x}$ 交点问题,由于 $m'(x)=\frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^{2}}$, $\ln x\le x-1\Leftrightarrow\ln\frac{1}{x}\le\frac{1}{x}-1\Leftrightarrow\ln x\ge\frac{1}{x}-1$, 故 $m'(x)<0$, 则一定有 $m(x)$ 单调递减，\$而 $n(x)$ 单调递增， $x\to1$, 由于 $\ln x\le x-1$, $m(x)\to1$, $n(x)\to ae<1$, 故 $m(x)>n(x)$，当 $x\to+\infty$ 时， $m(x)\to0$, $n(x)\to+\infty$, 我们可以找 $m\left(\ln\frac{1}{a}\right)<n\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1$, 如图 $13-1-15$ 所示， 一定存在 $x_2\in\left(1,\ln\frac{1}{a}\right)$, 使 $m\left(x_2\right)=n\left(x_2\right)$, 所以 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的图象有 2 交点;

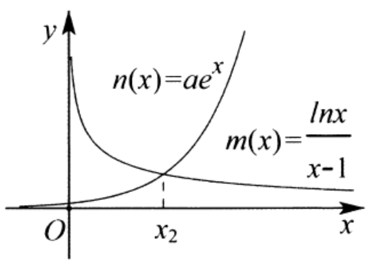


图 13-1-15

(3)由(2)及题意,$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f(x_1)=0 \end{cases}$,即$\begin{cases} ax_0^2e^{x_0}=1 \\ \ln x_1=a(x_1-1)e^{x_1} \end{cases}$,所以 $\ln x_1=\dfrac{x_1-1}{x_0^2}e^{x_1-x_0}$,则 $e^{x_1-x_0}=\dfrac{x_0^2\ln x_1}{x_1-1}$，因为当

$x>1$ 时, $\ln x<x-1$, 又 $x_1>x_0>1$, 故 $e^{x_1-x_0}<\dfrac{x_0^2(x_1-1)}{x_1-1}=x_0^2$, 两边取对数,得 $\ln e^{x_1-x_0}<\ln x_0^2$，于是

$x_1-x_0<2\ln x_0<2(x_0-1)$, 整理得 $3x_0-x_1>2$, 命题得证.

例 12.（2019•湖北期末）已知函数 $f(x)=a\ln x-(x-1)e^x$，其中 a 为非零常数.

（1）讨论 $f(x)$ 的极值点个数，并说明理由；

（2）若 $a>e$，(i) 证明：$f(x)$ 在区间 $(1，+\infty)$ 内有且仅有 1 个零点；(ii) 设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，x_1 为 $f(x)$ 的零点且 $x_1>1$，求证：$x_0+2\ln x_0>x_1$.

解析(1)由已知, $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 因为 $f'(x)=\dfrac{a}{x}-xe^x=\dfrac{a-x^2e^x}{x}$, ①当 $a<0$ 时, $a-x^2e^x<0$,

从而 $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内戦调递减，无极值点,②当 $a>0$ 时,令 $g(x)=a-x^2e^x$, 则十于 $g(x)$

在 $[0,+\infty)$ 上单调递减, $g(0)=a>0$, $g(\sqrt{a})=a-ae^{\sqrt{a}}=a\left(1-e^{\sqrt{a}}\right)<0$, 所以存在唯一的 $x_0\in(0,+\infty)$, 使

得 $g(x_0)=0$, 故当 $x\in(0,x_0)$ 时, $g(x)>0$, 即 $f'(x)>0$; 当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时, $g(x)<0$, 即 $f'(x)<0$, 所以当

$a>0$ 时, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且仅有一个极值点.

(2)法一由(1)知 $f'(x)=\dfrac{a-x^2e^x}{x}$. 令 $g(x)=a-x^2e^x$, 由 $a>e$ 得 $g(1)=a-e>0$, 所以 $g(x)=0$ 在 $(1,+\infty)$

内有唯一解,从而 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一解,不妨设为 x_0, 则 $f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递增,在 $(x_0,+\infty)$

上单调递减,所以 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值,点.令 $h(x)=\ln x-x+1$, 则当 $x>1$ 时, $h'(x)=\dfrac{1}{x}-1<0$, 故 $h(x)$ 在

$(1,+\infty)$ 内单调递减，从而当 $x>1$ 时，$h(x)<h(1)=0$，所以 $\ln x<x-1$. 从而当 $a>e$ 时，$\ln a>1$，且 $f(\ln a)=a\ln(\ln a)-(\ln a-1)e^{\ln a}<a(\ln a-1)-(\ln a-1)a=0$，又因为 $f(1)=0$，故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内有唯一的零点.

法二(分而治之)令 $h(x)=\dfrac{a\ln x}{x-1}$，则 $h(x)$ 单调递减，$t(x)=e^x$ 单调递增（参考例11），$x\to 1$时，$h(1)\to a$，$t(1)\to e$，故此时 $h(x)>t(x)$，当 $x>1$ 时，$h(\ln a)<t(\ln a)=a$，一定存在 $x_1\in\left(1,\ln\dfrac{1}{a}\right)$，使 $h(x_1)=t(x_1)$，函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有且仅有 1 个零点；由题意得 $\begin{cases}f'(x_0)=0\\f(x_1)=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}a-x_0^2e^{x_0}=0\\a\ln x_1-(x_1-1)e^{x_1}=0\end{cases}$，从而 $x_0^2e^{x_0}\ln x_1=(x_1-1)e^{x_1}$，即 $\ln x_1=\dfrac{x_1-1}{x_0^2}e^{x_1-x_0}$. 因为当 $x_1>1$ 时，$\ln x_1<x_1-1$，又 $x_1>x_0>1$，故 $\dfrac{x_1-1}{x_0^2}e^{x_1-x_0}<x_1-1$，即 $e^{x_1-x_0}<x_0^2$，两边取对数得：$\ln e^{x_1-x_0}<\ln x_0^2$，于是 $x_1-x_0<2\ln x_0$，整理得 $x_0+2\ln x_0>x_1$.

秒杀秘籍：两不同函数零点比大小

$f(x)=h(x)-m(x)=0$ 与 $g(x)=h(x)-n(x)=0$ 在区间 (a,b) 的零点分别为 x_0 和 x_1，求证 $x_1>x_0$ 的问题，可以转化为 $h(x)$ 分别与 $m(x)$ 和 $n(x)$ 交点问题，利用数形结合，若满足 $h(x)\uparrow$，且 $h(a)<m(a)=n(a)$，则仅当 $m(x)<n(x)$ 在区间 (a,b) 恒成立时，$x_1>x_0$，反之亦然；

例 13.（2020•永州二模）已知函数 $f(x)=e^{1-x}(x^2+x-1)+1+x$，$g(x)=(2-x)e^{x-1}-(3-x)\ln(3-x)$．证明：

（1）存在唯一 $x_0\in(0,1)$，使 $f(x_0)=0$；

（2）存在唯一 $x_1\in(1,2)$，使 $g(x_1)=0$，且对（1）中的 x_0，有 $x_0+x_1<2$．

解析(1)当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)=e^{1-x}\left(-x^2+x+2\right)+1=e^{1-x}(2-x)(x+1)+1>0$，函数 $f(x)$ 在(0,1)上为增函数.又 $f(0)=-e+1<0$，$f(1)=3>0$，所以存在唯一 $x_0\in(0,1)$，使 $f(x_0)=0$；

(2)要证 $x_0+x_1<2$，即证 $x_0<2-x_1=t_1$，当 $x\in(1,2)$ 时，$g(x)=(2-x)e^{x-1}-(3-x)\ln(3-x)$，令 $t=2-x$，$x=2-t$，$x\in(1,2)$，$t\in(0,1)$，$g(2-t)=te^{1-t}-(t+1)\ln(t+1)$，$t\in(0,1)$；

法一（转换变量+对数单身狗）记函数 $h(t)=\frac{g(2-t)}{t+1}=\frac{te^{1-t}}{t+1}-\ln(t+1),\quad t\in(0,1)$,（注：对数单身狗，指数找基友不会改变零点的大小和位置，减少运算量提高解题效率，更多详情请看秒 1）

则 $h^{'}(t)=\frac{e^{1-t}\left(-t^2-t+1\right)-t-1}{(t+1)^2}=\frac{-f(t)}{(t+1)^2}$, 由(1)得,当 $t\in\left(0,x_0\right)$ 时, $f(t)<0,h^{'}(t)>0$, 当 $t\in\left(x_0,1\right)$ 时, $f(t)>0,h^{'}(t)<0$, 故在 $\left(0,x_0\right)$ 上 $h(t)$ 是增函数,又 $h(0)=0$,从而可知当 $t\in\left(0,x_0\right)$ 时, $h(t)>0$, 所以 $h(t)$ 在 $\left(0,x_0\right]$ 上无零点.在 $\left(x_0,1\right)$ 上 $h(t)$ 为减函数,由 $h\left(x_0\right)>0,\quad h(1)=\frac{1}{2}-\ln 2<0$, 故存在唯一 $t_1\in\left(x_0,1\right)$, 使 $h\left(t_1\right)=0$, 因此存在唯一的 $x_1=2-t_1\in(1,2)$, 使 $g\left(x_1\right)=g\left(2-t_1\right)=h\left(t_1\right)=0$. 因为当 $t\in(0,1)$ 时, $1+t>0$,故 $h(t)=\frac{g(2-t)}{t+1}$ 与 $g(2-t)$ 有相同的零,点,所以存在唯一的 $x_1\in(1,2)$, 使 $g\left(x_1\right)=0$, 因为 $x_1=2-t_1,t_1>x_0$ ，所以 $x_0+x_1<2$.

法二（分而治之）令 $2-x=t,te^{1-t}=(t+1)\ln(t+1)\Leftrightarrow e^{1-t}=\left(1+\frac{1}{t}\right)\ln(t+1)$, 令 $h(t)=\left(1+\frac{1}{t}\right)\ln(t+1)$, $m(t)=e^{1-t}$ ， $h^{'}(t)=\frac{t-\ln(t+1)}{t^2}\geq 0$, 故 $m(t)$ 单调递减, $h(t)$ 单调递增, $m(0)=e$, 当 $x\to 0$ 时, $\ln(t+1)\to t$, 由于故 $h(0)\to 1$, 所以在 $x\to 0$ 时, $m(t)>h(t),\quad h(1)=2\ln 2>m(1)=1$（如图左）, 故存在 $t_1\in(0,1)$, 使 $t_1e^{1-t_1}=\left(t_1+1\right)\ln\left(t_1+1\right)$ 成立，即行在唯一 $x_1\in(1,2)$, 使 $g\left(x_1\right)=0$; 由于 $e^{1-x_0}=-\frac{1+x_0}{x_0^2+x_0-1}$, $e^{1-t_1}=\left(1+\frac{1}{t_1}\right)\ln\left(t_1+1\right)$, 若要证明 $t_1>x_0$ ，则只需证明 $-\frac{x+1}{x^2+x-1}>\frac{x+1}{x}\ln(x+1)$ 对 $t_1\in(0,1)$ 且 $-\frac{x+1}{x^2+x-1}>0$ 时恒成立（如图右），故只需 $\frac{1}{-x^2-x+1}>\frac{\ln(x+1)}{x}$ 恒成立，构造 $p(x)=\frac{1}{-x^2-x+1}=\frac{1}{-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}$, $p(0)=1$, $p(x)$ 单调递增，再去造 $q(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$, $q^{'}(x)=\frac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2}<0$, $q(x)$ 单调递减,且 $x\to 0$ 时, $q(x)\to 1$, 故 $p(x)>q(x)$ 恒成立, 所以 $t_1>x_0$, 因为 $x_1=2-t_1$, 即 $x_0+x_1<2$.

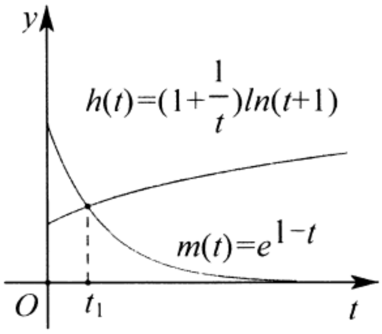


图 13-1-16

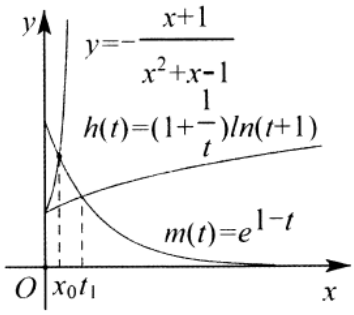


图 13-1-17

例 14.（2014•辽宁）已知函数 $f(x)=(\cos x-x)(\pi+2x)-\frac{8}{3}(\sin x+1)$，$g(x)=3(x-\pi)\cos x-4(1+\sin x)\ln(3-\frac{2x}{\pi})$

证明：（Ⅰ）存在唯一 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使 $f(x_0)=0$；

（Ⅱ）存在唯一 $x_1\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，使 $g(x_1)=0$，且对（Ⅰ）中的 x_0，有 $x_0+x_1<\pi$．

解析(1)因为当 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x)=-(1+\sin x)(\pi+2x)-2x-\frac{2}{3}\cos x<0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上为减函数, 又 $f(0)=\pi-\frac{8}{3}>0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\pi^2-\frac{16}{3}<0$; 故存在唯一的 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 使 $f\left(x_0\right)=0$;

(2)考虑函数 $h(x)=\frac{3(x-\pi)\cos x}{1+\sin x}-4\ln\left(3-\frac{2}{\pi}x\right)$, $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, 令 $t=\pi-x$, 则 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

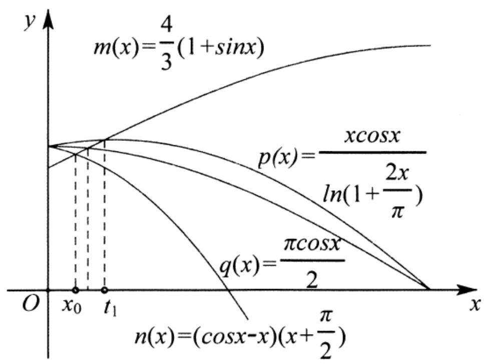
记函数 $u(t)=h(\pi-t)=\frac{3t\cos t}{1+\sin t}-4\ln\left(1+\frac{2}{\pi}t\right)$

法一 (转换变量+对数单身狗)则 $u'(t)=\frac{(3\cos t-3t\sin t)(1+\sin t)-3t\cos t\cdot\cos t}{(1+\sin t)^2}-\frac{4}{1+\frac{2}{\pi}t}\cdot\frac{2}{\pi}$

$=\frac{3\cos t-3t\sin t+3\sin t\cos t-3t}{(1+\sin t)^2}-\frac{8}{\pi+2t}=\frac{3(\cos t-t)(1+\sin t)}{(1+\sin t)^2}-\frac{8}{\pi+2t}=\frac{3f(t)}{(\pi+2t)(1+\sin t)}$, (注:对数单身狗,指数找基友不会改变零点的大小和位置，减少运算量提高解题效率，更多详情请看秒 1）,由（1）得当 $t\in\left(0,x_0\right)$ 时, $u'(t)>0$; 在 $\left(0,x_0\right)$ 上 $u(x)$ 是增函数, 又 $u(0)=0$, 所以当 $t\in\left(0,x_0\right]$ 时, $u(t)>0$, 所以 $u(t)$ 在 $\left(0,x_0\right]$ 上无零点;在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上 $u(t)$ 是减函数,且 $u\left(x_0\right)>0$, $u\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4\ln 2<0$, 所以存在唯一的 $t_1\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$, 使 $u\left(t_1\right)=0$; 则存在唯一的 $t_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 使 $u\left(t_1\right)=0$; 即存在唯一的 $x_1=\pi-t_1\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, 使

$h\left(x_1\right)=h\left(\pi-t_1\right)=u\left(t_1\right)=0$; 所以当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时, $1+\sin x>0$, 即 $g(x)=(1+\sin x)h(x)$ 与 $h(x)$ 有相同的零点,所以存在唯一的 $x_1\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, 使 $g\left(x_1\right)=0$, 因为 $x_1=\pi-t_1$, $t_1>x_0$, 所以 $x_0+x_1<\pi$.

法二（分而治之+放缩）抓住函数共有部分，构造 $m(x)=\frac{4}{3}(1+\sin x)$, $n(x)=(\cos x-x)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $p(x)=\frac{x\cos x}{\ln\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)}$, $q(x)=\frac{\pi\cos x}{2}$ (如 图 $13-1-18$), 根 据 题 意, $f\left(x_0\right)=0\Leftrightarrow m\left(x_0\right)=n\left(x_0\right)$, $u(t)=0$ $\Leftrightarrow m(t)=p(t)$, $m(0)=\frac{4}{3}$, $n(0)=\frac{\pi}{2}$, $t\to 0$ 时， $p(t)\to\frac{\pi}{2}$ （因为 $x\to 0$ 时， $\ln\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\to\frac{2x}{\pi}$), 所以 $m(0)<p(0)$, 当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时, $m\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{8}{3}>p\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, 故存在唯一的 $t_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 使 $u\left(t_1\right)=0$: 若要证 $t_1>x_0$, 则只需 $p(x)>n(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立，由于 $p(x)=\frac{x\cos x}{\ln\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)}\geq\frac{x\cos x}{\frac{2x}{\pi}}=q(x)$, 故只需 $q(x)>n(x)$, 只需 $x\cos x-x^2-\frac{\pi}{2}x<0$ 对 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立，显然 $\cos x-x-\frac{\pi}{2}<0$, 故 $\exists x_2\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$, 使 $q\left(x_2\right)=m\left(x_2\right)$ 成立,故 $t_1>x_2>x_0$, 所以存在唯一的 $x_1\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, 使 $g\left(x_1\right)=0$, 所以 $x_0+x_1<\pi$.



如图$13-1-18$

总结：例题 13 和 14,利用对数单身狗的方式找点，能发现两个函数的零点或极值点有着一种内部公因式

关系，是一步步计算后找到的套路规律，付出的代价就是计算和时间成本.任何一种题都不是单一的方法,使用分而治之中的天各一方，高观点低运算，必要时候放缩式子信手据来，解题，也是一种江湖.

达标训练

1.（2019•东湖区校级期末）已知函数 $f(x)=e^{x}-\ln x-2$，下列说法正确的是____.

① $f(x)$ 有且仅有一个极值点；

② $f(x)$ 有零点；

③若 $f(x)$ 极小值点为 x_0，则 $0<f(x_0)<\frac{1}{2}$；

④若 $f(x)$ 极小值点为 x_0，则 $\frac{1}{2}<f(x_0)<1$.

2.（2015•北京）设函数 $f(x)=\frac{x^2}{2}-k\ln x$，$k>0$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（2）证明：若 $f(x)$ 存在零点，则 $f(x)$ 在区间 $(1，\sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

3.（2019•桂平市期末）已知函数 $f(x)=xe^{x}-\frac{1}{2}a(x+1)^2$.

（1）若 $a=e$，求 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 在区间 $(0，1)$ 上有零点，求 a 的取值范围.

4.（2019•池州期末）设函数 $f(x)=x^2-a(\ln x+1)$.

（1）当 $a=1$ 时，求 $y=f(x)$ 在点 $(1，f(1))$ 处的切线方程；

（2）当 $a>\frac{2}{e}$ 时，判断函数 $f(x)$ 在区间 $(0，\sqrt{\frac{a}{2}})$ 是否存在零点？并证明.

5.（2014•新课标Ⅰ）设函数 $f(x)=a\ln x+\frac{1-a}{2}x^2-bx(a\neq 1)$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1，f(1))$ 处的切线斜率为 0，

（1）求 b；

（2）若存在 $x_0\geq 1$，使得 $f(x_0)<\frac{a}{a-1}$，求 a 的取值范围.

6.（2015•四川）已知函数 $f(x)=-2(x+a)\ln x+x^2-2ax-2a^2+a$，其中 $a>0$.

（Ⅰ）设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，讨论 $g(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）证明：存在 $a\in(0，1)$，使得 $f(x)\geq 0$ 在区间 $(1，+\infty)$ 内恒成立，且 $f(x)=0$ 在 $(1，+\infty)$ 内有唯一解.

7.（2019•东莞市期末）已知函数 $f(x)=e^{2x}+mx$，$x\in(0，+\infty)$（其中 e 为自然对数的底数）.

（1）求 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $m=-2$，$g(x)=\frac{a}{2}x^2e^x$，对于任意 $a\in(0,1)$，是否存在与 a 有关的正常数 x_0，使得 $f(\frac{x_0}{2})-1>g(x_0)$ 成立？如果存在，求出一个符合条件 x_0；否则说明理由．

8.（2019•厦门期末）函数 $f(x)=x-\log_a x(a>0，a\neq 1)$．

（1）当 $a=3$ 时，求方程 $f(x)=1$ 的根的个数；

（2）若 $f(x)\geq\frac{e}{a}$ 恒成立，求 a 的取值范围．注：$e=2.71828\ldots$ 为自然对数的底数

9.（2020•莆田期末）已知函数 $f(x)=ax\ln x+ax+1$．

（1）函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线 l 过点 $(2，-2)$，求 l 的方程；

（2）若 $a\in N^*$ 且函数 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的最小值．

10.（2020•乌鲁木齐模拟）已知函数 $f(x)=\frac{2x^2-1}{x}-a\ln x(a\in R)$．

（Ⅰ）若 $a>0$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x)-2x$，若 $g(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围．

11.（2020•漳州一模）已知函数 $f(x)=\frac{2^x}{x}+a(x-\log_2 x)(a\in R)$．

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 $(1，4)$ 上有三个零点，求实数 a 的取值范围．

12.（2019•潮州期末）已知函数 $f(x)=x-a\ln x(a\in R)$．

（1）当 $a>0$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）讨论函数 $f(x)$ 的零点个数．

13.（2019•安徽期末）已知函数 $f(x)=ax-a-\ln x$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a=1$，函数 $g(x)=xf(x)$，证明：$g(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0，且 $g(x_0)<\frac{1}{4}$．

14.（2019•惠州月考）已知实数 $a\neq 0$，设函数 $f(x)=e^{ax}-ax$．

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $a>\frac{1}{2}$ 时，若对任意的 $x\in[-1，+\infty)$，均有 $f(x)\geq\frac{a}{2}(x^2+1)$，求 a 的取值范围．

注：$e=2.71828\ldots$ 为自然对数的底数．

15.（2020•河南一模）已知函数 $f(x)=xe^{x-1}-a(x+\ln x)$，$a\in R$．

（1）若 $f(x)$ 存在极小值，求实数 a 的取值范围；

（2）设 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，且 $f(x_0)\geq 0$，证明：$f(x_0)\geq 2(x_0^2-x_0^3)$．

16.（2019•秦州区校级月考）已知函数 $g(x)=x\ln x$．

（1）求 $g(x)$ 的最小值．

（2）若 $f(x)=x^2-x-g(x)$，求证：$f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0，且 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$．

17.（2020•安阳一模）已知直线 $y=x-1$ 是曲线 $f(x)=a\ln x$ 的切线．

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）若 $t\leq 3-4\ln 2$，证明：对于任意 $m>0$，$h(x)=mx-\sqrt{x}+f(x)+t$ 有且仅有一个零点．

18.（2020•吕梁一模）已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{ae^x}{x^2}(a\in R)$．

（1）若 $a\leq 0$，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 在区间 $(0，2)$ 内有两个极值点，求实数 a 的取值范围．

19.（2020•天河区二模）已知函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}a(x-1)^2+(x-2)e^x(a>0)$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性：

（2）若关于 x 的方程 $f(x)+\dfrac{1}{2}a=0$ 存在 3 个不相等的实数根，求实数 a 的取值范围．

20.（2019•吉安期末）已知函数 $f(x)=(x-\ln x-1)\cdot e^{ax}$，其中 $a\geq 0$．

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当函数 $f(x)$ 在区间 $(\dfrac{1}{2}，+\infty)$ 上有且只有 2 个极值点时，求 a 的取值范围．

21.（2019•芜湖期末）已知函数 $f(x)=a^x-2x(a>1)$．

（1）当 $a=e$ 时，求证：$f(x)-\ln x+2x>2$；

（2）讨论函数 $f(x)$ 的零点个数．

22.（2019•开封期末）已知函数 $f(x)=x^2-3x-a\ln x$ 的一个极值点为 2．

（1）求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）求证：函数 $f(x)$ 有两个零点．

23.（2020•乐山模拟）已知函数 $f(x)=(3m-2)e^x-\dfrac{1}{2}x^2(m\in R)$．

（1）若 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的一个极值点，试讨论 $h(x)=b\ln x+f(x)(h\in R)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 在 R 上有且仅有一个零点，求 m 的取值范围.

24.（2019•沙坪坝区校级月考）已知函数 $f(x)=e^{x}(1+a\ln x)$，设 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

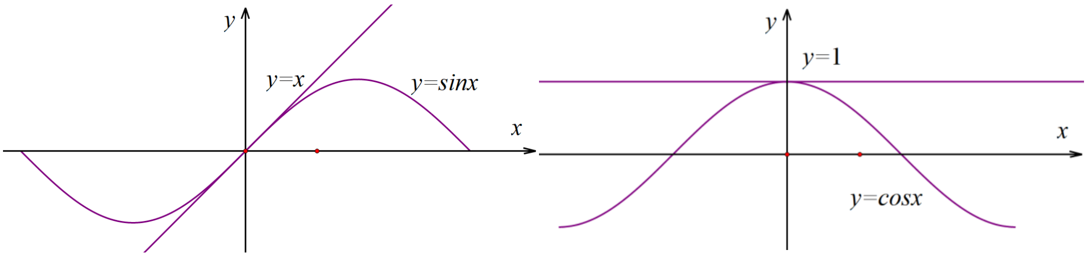
（1）设 $g(x)=e^{-x}f(x)+x^{2}-x$ 在区间 $[1，2]$ 上单调递增，求 a 的取值范围；

（2）若 $a>2$ 时，函数 $f(x)$ 的零点为 x_{0}，函 $f'(x)$ 的极小值点为 x_{1}，求证：$x_{0}>x_{1}$.

专题 5 导数与三角函数的交汇

导数找到了三角函数，成为了指对跨阶的后花园，形成了指数、对数、三角的三足鼎立之势，尤其在 2019 全国新课标一卷的导数题出现了三角函数找点，大家开始对导数和三角函数的交汇类型题进行疯狂研究，这一部分到底有什么秘密呢？还是从高考原题开始研究，再通过一些最新模拟题寻找一个变化趋势，我们尽量给到您展现那种可以触摸得到的简单。

第一讲一切从切线开始



三角函数的切线方程，按照平移体系得到，当 $x\ge 0$ 时，$\sin x\le x$，$\cos x\le 1$；按照这个原理来进行平移计算，当切点为 $x=x_0$ 时，得到 $\sin(x-x_0)\le x-x_0$，$\cos(x-x_0)\le 1$；

例 1.（2019•新课标 II）曲线 $y=2\sin x+\cos x$ 在点 $(\pi，-1)$ 处的切线方程为(　　)

A．$x-y-\pi-1=0$　B．$2x-y-2\pi-1=0$　C．$2x+y-2\pi+1=0$ D．$x+y-\pi+1=0$

解析法一由曲线 $y=2\sin x+\cos x$, 得 $y'=2\cos x-\sin x$, 所以 $y'|_{x=\pi}=2\cos\pi-\sin\pi=-2$, 所以曲线 $y=2\sin x+\cos x$ 在点 $(\pi,-1)$ 处的切线方程为 $y+1=-2(x-\pi)$, 即 $2x+y-2\pi+1=0$, 故选 C .

法二由于 $\sin x\le x,\cos x\le 1$, 故当切点 $x_0=\pi$ 时，则有 $2\sin(x-\pi)+\cos(x-\pi)=-2\sin x-\cos x\le 2(x-\pi)+1$，故 $2\sin x+\cos x\ge -2(x-\pi)-1$, 即 $y=-2x+2\pi-1$, 故选 C .

法三直接平移到原点来秒杀，由 $f(x+\pi)=-2\sin x-\cos x\ge -2x-1$, 得 $f(x)=f(x+\pi-\pi)\ge -2(x-\pi)-1$，故选 C.

例 2.（2019•天津）曲线 $y=\cos x-\frac{x}{2}$ 在点 (0，1) 处的切线方程为____.

解析法一由题意,可知 $y'=-\sin x-\frac{1}{2}$, 所以 $y'|_{x=0}=-\sin 0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$, 曲线 $y=\cos x-\frac{x}{2}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y-1=-\frac{1}{2}x$, 整理得 $x+2y-2=0$.故答案为 $x+2y-2=0$.

法二由 $\cos x-\frac{x}{2}\le 1-\frac{x}{2}$ 可直接算出切线放程为 $x+2y-2=0$. 故答案为 $x+2y-2=0$.

虽然切线方程可以通讨求导直接得到，计算起来非常简单，但是通过切线得到的不等式对解题的帮助至

关重要.当三角函数是一个求 n 次导都没有终点的函数时，通常我们把 $\exists x_0 \in R$, 使得 $f''\left(x_0\right)=0$ 时的点 $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ 叫做函数 $f(x)$ 的拋点（$f''(x)$ 在 $x=x_0$ 的两侧异号），所以导致 $x \geq 0$ 时, $x \geq \sin x$, $x<0$ 时, $x<\sin x$, 即在一些解决三角函数恒成立的问题时，通常都会给到限制范围.

如图 $14-1-3$ 和图 $14-1-4$ 所示，关于函数 $y=x\cos x$ 与 $y=x\sin x$, 它们都与直线 $y=x$ 相切,函数 $y=x\cos x$ 与直线 $y=x$ 相切于点 $x_0=0$, $x_1=2\pi$, $x_2=4\pi$, 主于函数 $y=x\cos x$ 为奇函数,故 $x<0$ 时的切点和 $x>0$ 时的切点完全关于原点对称，显然当 $x>0$ 时, $x \geq x\cos x$; 当 $x<0$ 时, $x \leq x\cos x$; $y=x\sin x$ 与 $y=x$ 相切

于点 $x_1=\dfrac{\pi}{2}$, $x_2=\dfrac{5\pi}{2}$, $x_3=\dfrac{9\pi}{2}\cdots$, 由于 $y=x\sin x$ 是偶函数,故 $x<0$ 的切点分别为 $x_0=-\dfrac{3\pi}{2}$, $-\dfrac{7\pi}{2}\cdots$, 显然 $x>0$ 时, $x \geq x\sin x$, $x<0$ 时, $x \leq x\sin x$, 当然不要忘记，函数 $y=x\sin x$ 在原点的切线是

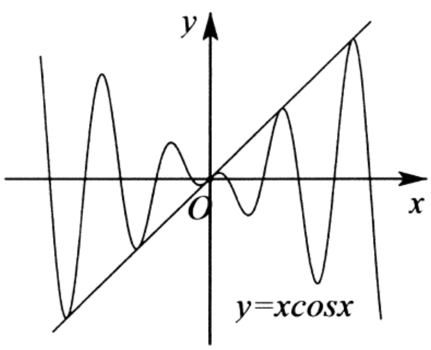


图 14-1-3

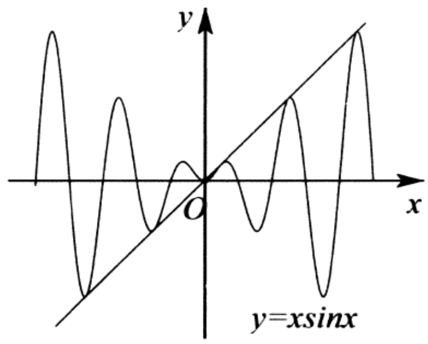


图 14-1-4

$y=0$.

例 3.（2013•全国）曲线 $y=x\cos x$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为____.

解析法一由曲线 $y=x\cos x$ 得它的导数为 $y'=\cos x-x\sin x$, 可得曲线 $y=x\cos x$ 在,点(0,0)处的切线斜率为 $k=1$, 则曲线 $y=x\cos x$ 在,点(0,0)处的切线方程为 $y=x$. 故答案为 $y=x$.

法二根据切线模型,当 $x \geq 0$ 时, $x \geq x\cos x$.故答案为 $y=x$.

例 4.（2019•金台区月考）已知曲线 $f(x)=x\cos x+3x$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线与直线 $ax+2y+1=0$ 垂直，则实数 a 的值为(　　)

A. -4　　B. -1　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 4

解析法一由 $f(x)=x\cos x+3x$, 得 $f^{'}(x)=\cos x-x\sin x+3$, 所以 $f^{'}(0)=4$, 又曲线 $f(x)=x\cos x+3x$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与直线 $ax+2y+1=0$ 垂直，所以 $4\times\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-1$, 即 $a=\dfrac{1}{2}$, 故选 C .

法二由 $f(x)=x\cos x+3x\le x+3x=4x$, 得 $4\times\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-1$, 即 $a=\dfrac{1}{2}$, 故选 C .

例 5.（2019•蚌埠期末）曲线 $y=ax\cos x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线与直线 $y=2x+1$ 垂直，则实数 a 的值为(　　)

A. $\dfrac{1}{\pi}$　　B. $-\dfrac{1}{\pi}$　　C. $\dfrac{4}{\pi}$　　D. $-\dfrac{4}{\pi}$

解析法一由 $y=ax\cos x$ 的导数为 $y^{'}=a(\cos x-x\sin x)$, 可得曲线 $y=ax\cos x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线的斜率为 $k=-\dfrac{\pi}{2}a$, 由切线与直线 $y=2x+1$ 垂直,可得 $-\dfrac{\pi}{2}a=-\dfrac{1}{2}$, 解得 $a=\dfrac{1}{\pi}$, 故选 A.

法二由于此题只考虑斜率，故将整个函数向左平移音个单位，所求出函数的在原点的切线斜率与之前斜率不变, 由 $a\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-a\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin x$, 得 $a\left(-x-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin x=-ax\sin x-a\dfrac{\pi}{2}\sin x\ge 0-\dfrac{\pi}{2}ax$, 故 $-\dfrac{\pi a}{2}=-\dfrac{1}{2}$，解得 $a=\dfrac{1}{\pi}$, 故选 A.

总结：我们要的就是把这些切线的切点通过平移到原点来构造切线，先把$$y=ax\cosx$向左平移亮后寻找在原点位置的切线，这是一种切线的玩法.

例 6.（2019•青羊区校级期中）曲线 $y=x\sin x$ 在点 $(\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{\pi}{2})$ 处的切线方程为(　　)

A. $x-y=0$　　B. $x+y-\pi=0$　　C. $2x-4y+\pi=0$　　D. $2x+4y-3\pi=0$

解析法一曲线的导函数为 $y^{'}=\sin x+x\cos x$, 所以曲线 $y=x\sin x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的料率为1, 所以切线方程为 $x-y=0$,故选 A.

法二由函数模型 $y=x\sin x\le x$, 所以切线方程为 $x-y=0$, 故选 A.

例 7.（2019 秋•廊坊月考）函数 $f(x)=x+\sin x(1-\cos x)$ 的图象在点 $(\pi，\pi)$ 处的切线方程是____.

解析法一由 $f(x)=x+\sin x(1-\cos x)$, 得 $f^{'}(x)=1+\cos x(1-\cos x)+\sin x\cdot\sin x=1-\cos 2x+\cos x$, 所以 $f^{'}(\pi)=1-\cos 2\pi+\cos\pi=-1$, 则 $f(x)=x+\sin x(1-\cos x)$ 的图象在点 (π,π) 处的切线方程是 $y-\pi=-1\times(x-\pi)$,即 $x+y-2\pi=0$.故答案为 $x+y-2\pi=0$.

法二构造切线不等式，用 $x-\pi$ 替换后得: $x-\pi+\sin(x-\pi)-\frac{1}{2}\sin(2(x-\pi))\le 2x-2\pi-(x-\pi)=x-\pi$,

即 $x-\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x\le x \Leftrightarrow x-\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x-2\sin(x-\pi)=f(x)\le x-2x+2\pi=-x+2\pi$. 答案为 $x+y-2\pi=0$.

例 8.（2011•湖南）曲线 $y=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\frac{1}{2}$ 在点 $M(\frac{\pi}{4}, 0)$ 处的切线的斜率为（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析因为曲线 $y=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\frac{1}{2}$, 得 $y'=\frac{\cos x(\sin x+\cos x)-(\cos x-\sin x)\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$,

所以 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$, 故选 B.

总结：函数图像相对复杂的，直接求导，因为我们研究图像切线不等式终究是为了后面写解答题有再的.

三角函数中的同构式

一：找基友同构

如图 14-2-1 所示，已知函数 $h(x)=e^x\cos x$, 则函数 $h(x)$ 的图象在点(0,1)处的切线方程为 $y=x+1$, 也可以写成 $e^x\cos x\le x+1\left(0\le x\le\frac{3}{2}\pi\right)$,即 $e^x\cos x\ge x+1(x\le 0)$, 则 $h(-x)=\frac{\cos x}{e^x}$, 如图 $14-2-2$ 所示,它在 (0,1) 处的切线方程为 $y=-x+1$, 也可以写成 $\frac{\cos x}{e^x}\le -x+1\left(-\frac{3}{2}\pi\le x\le 0\right)$, 即 $\frac{\cos x}{e^x}\ge -x+1(x\ge 0)$; 且函数 $y=e^x\cos x$ 的图象与函数 $y=\frac{\cos x}{e^x}$ 的图象关于 y 轴对称.

如图 $14-2-3$ 所示, 函数 $h(x)=e^x\sin x$, 在(0,0)处的切线为方程 $y=x$, 也可以写成 $e^x\sin x\ge x\left(x\le\frac{3}{4}\pi\right)$,

则 $-h(-x)=\frac{\sin x}{e^x}$, 如图 $14-2-4$ 所示, 它在 (0,1) 处的切线方程为 $y=x$, 也可以写成 $\frac{\sin x}{e^x}\le x\left(x\ge -\frac{3\pi}{4}\right)$; 且函数 $y=e^x\sin x$ 的图象与函数 $y=\frac{\sin x}{e^x}$ 的关于原点对称.

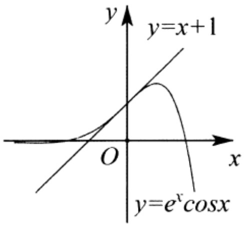


图 14-2-1

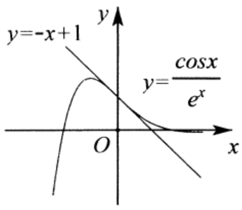


图 14-2-2

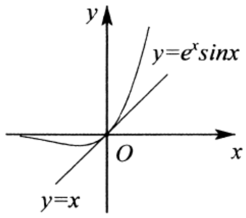


图 14-2-3

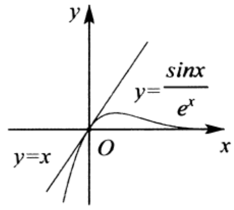


图 14-2-4

例 9.（2019•大理州月考）若函数 $f(x)=e^x\cos x$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与直线 $2x-ay+1=0$ 互相垂直，则实数 a 等于()

A.-2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

解析法一由 $f(x)=e^x\cos x$, 得 $f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x$, 所以 $f'(0)=e^0\cos 0-e^0\sin 0=1$, 又函数 $f(x)=e^x\cos x$ 在,点 $(0,f(0))$ 处的切线与直线 $2x-ay+1=0$ 互相垂直,所以 $1\times\dfrac{2}{a}=-1$, 即 $a=-2$. 故选 A.

法二由 $e^x\cos x\ge x+1(x\le 0)\Leftrightarrow \dfrac{2}{a}=-1$, 即 $a=-2$. 故选 A .

例 10.（2019•汉中月考）过原点作函数 $y=e^x\sin x$ 的图象的切线，则切线方程是____.

解析法一由 $y'=e^x\sin x+e^x\cos x$, 当原,点为切点时, $y'\big|_{x=0}=1$, 得到切线的斜率为 1, 所求的切线方程为 $y=x$, 当原点不是切点时,设切点为 $\left(m,e^m\sin m\right)$, 则切线的斜率为 $e^m\sin m+e^m\cos m$, 切线方程为 $y-e^m\sin m=\left(e^m\sin m+e^m\cos m\right)(x-m)$, 而切线过 $(0,0)$, 可得 $\sin m=(\sin m+\cos m)m$, 解得 $m=0,k=1$,所以切点为 $(0,0)$, 斜率为 0, 所求的切线方程为 $y=x$. 故答案为 $x-y=0$.

法二由 $e^x\sin x\ge x\left(x\le\dfrac{3}{4}\pi\right)$, 所水的切线方程为 $y=x$. 故答案为 $x-y=0$.

二差 $\dfrac{\pi}{2}$ 同构（正余弦互换同构）以及抽象函数同构，由 $f(x)\ge f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow h(x)=\sin x+f(x)\ge\cos x+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=h\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$,

抓住 $x\ge\dfrac{\pi}{4}$ 时, $\sin x\ge\cos x$, 多多考虑导数逆运既一不定积分.

例 11.（2019•烟台期中）定义在 $(-1,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)+\cos x<0$，且 $f(0)=1$，则不等式 $f(x)+\sin x<1$ 的解集为(　　)

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-1,0)$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $(-1,1)$

解析令 $F(x)=f(x)+\sin x$, 得 $F'(x)=f'(x)+\cos x$, 又 $f'(x)+\cos x<0$, 得 $F'(x)<0$, 所以 $F(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递减, 又 $f(0)=1$, 所以 $F(0)=f(0)+\sin 0=1$, 故不等式 $f(x)+\sin x<1$, 即为 $F(x)<F(0)$, 得 $x>0$. 故选 C.

解析 由 $f(x)=f(-x)+2\sin x$, 得 $f(x)-f(-x)=2\sin x$, 令 $g(x)=f(x)-\sin x$, 则 $g(-x)=f(-x)-\sin(-x)=f(-x)+\sin x$, 由 $f(x)-f(-x)=2\sin x$, 得 $g(-x)=g(x)$, 所以 $g(x)$ 是偶函数, 当 $x\geq 0$ 时 $f'(x)\geq 1$, 得 $g'(x)=f'(x)-\cos x\geq 1-\cos x\geq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，故 $f(x)\geq f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin x-\cos x$ 得 $f(x)-\sin x\geq f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, 即 $g(x)\geq g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，所以 $|x|\geq\left|\frac{\pi}{2}-x\right|$, 解得 $x\geq\frac{\pi}{4}$. 所以不等式的解集为 $\left[\frac{\pi}{4},+\infty\right)$, 故选 A.

例 13.（2020•天心区校级月考）已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)-f(-x)-6x+2\sin x=0$，且 $x\geq 0$ 时，$f'(x)\geq 3-\cos x$ 恒成立，则不等式 $f(x)\geq f(\frac{\pi}{2}-x)-\frac{3\pi}{2}+6x+\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$ 的解集为(　　)

A. $(\frac{\pi}{4}，0)$　　B. $[\frac{\pi}{4}，+\infty)$　　C. $(\frac{\pi}{6}，0)$　　D. $[\frac{\pi}{6}，+\infty)$

解析 $x\geq 0$ 时，$f'(x)\geq 3-\cos x$ 恒成立，即 $f'(x)-3+\cos x\geq 0$ 恒成立，由 $f(x)-f(-x)-6x+2\sin x=0$ 构造 $f(x)-3x+\sin x=f(-x)+3x-\sin x$, 令 $g(x)=f(x)-3x+\sin x$, $g(x)=g(-x)$, 则 $g(x)$ 为偶函数, 且 $x\geq 0$，$g(x)$ 单调递增，结合偶函数的对称性可知 $g(x)$ 在 $x<0$ 时单调递减，由 $f(x)\geq f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\frac{3\pi}{2}+6x+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，化简得 $f(x)-3x+\sin x\geq f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, 即 $g(x)\geq g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $|x|\geq\left|\frac{\pi}{2}-x\right|$, 解得 $x\geq\frac{\pi}{4}$，故选 B.

例 14.（2019•抚州期末）已知定义域为 R 的函数 $f(x)$，对任意的 $x\in R$ 都有 $f'(x)>4x$，且 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. 当 $\alpha\in[0，2\pi]$ 时，不等式 $f(\sin\alpha)+\cos 2\alpha-1>0$ 的解集为(　　)

A．$(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6})$　　B．$(\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3})$　　C．$(\frac{\pi}{3},-\frac{2\pi}{3})$　　D．$(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$

解析 令 $g(x)=f(x)-2x^2$，由 $f'(x)>4x$，则 $g'(x)=f'(x)-4x>0$，即 $g(x)$ 单调递增，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},g\left(\frac{1}{2}\right)=0$，当 $\alpha\in[0,2\pi]$ 时，由 $f(\sin\alpha)+\cos 2\alpha-1>0$ 可得 $f(\sin\alpha)>-\cos 2\alpha+1=2\sin^2\alpha$，即 $g(\sin\alpha)>0$，故 $\sin\alpha>\frac{1}{2},\alpha\in[0,2\pi]$，故 $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{5\pi}{6}$，故选 D.

关于 $\sin xf'(x)\pm\cos xf(x)$ 或 $\cos xf'(x)\pm\sin xf(x)$

1. $\sin xf'(x)+\cos xf(x)>0\Leftrightarrow[\sin xf(x)]'>0$，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，有 $\tan xf'(x)+f(x)>0\Leftrightarrow[\sin xf(x)]'>0$

2. $\sin xf'(x)-\cos xf(x)>0\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{\sin x}\right]'>0$，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，有 $\tan xf'(x)-f(x)>0\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{\sin x}\right]'>0$

3. $\cos xf'(x)-\sin xf(x)>0\Leftrightarrow[\cos xf(x)]'>0$，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$f'(x)-\tan xf(x)>0\Leftrightarrow[\cos f(x)]'>0$

4. $\cos xf'(x)+\sin xf(x)>0\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]'>0$，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$f'(x)+\tan xf(x)>0\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]'>0$

口诀：正弦同号，余弦反号

记忆方法:看 $f'(x)\to\sin x\to$ 同号：加是乘，减是除；$f'(x)\to\sin x\to$ 反号：加是除，减是乘，遇正切时化切为弦，请自己证明相关结论.

三．抽象函数单调性构造

例 15.（2019•辽源期末）定义在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的函数 $f(x)$，$f'(x)$ 是它的导函数，且恒有 $f'(x)>f(x)\cdot\tan x$ 成立．则有(　　)

A．$\sqrt{3}f(\frac{\pi}{6})>2\cos 1\cdot f(1)$ B．$\sqrt{3}f(\frac{\pi}{6})<f(\frac{\pi}{3})$ C．$2f(\frac{\pi}{4})<\sqrt{6}f(\frac{\pi}{6})$　　D．$\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})>f(\frac{\pi}{3})$

解析由题意得,当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\cos x>0$，则不等式 $f'(x)>f(x)\cdot\tan x$ 等价为 $f'(x)>f(x)\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$,即 $\cos xf'(x)-\sin xf(x)>0$，设 $g(x)=f(x)\cos x$，则 $g'(x)=\cos xf'(x)-\sin xf(x)>0$，即函数 $g(x)$ 在

$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$单调递增,因为$\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{3}$,所以$g\left(\frac{\pi}{6}\right)<g\left(\frac{\pi}{4}\right)<g(1)<g\left(\frac{\pi}{3}\right)$,所以即

$\frac{\sqrt{3}}{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)<f(1)\cos 1<\frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，即$\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right)<\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)<2f(1)\cos 1<f\left(\frac{\pi}{3}\right)$,故选 B．

例 16.（2019•十堰月考）设$f(x)$是定义在$(-\frac{\pi}{2}，0)\cup(0，\frac{\pi}{2})$上的奇函数，其导函数为$f'(x)$，当$x\in(0，\frac{\pi}{2})$时，$f'(x)-f(x)\frac{\cos x}{\sin x}<0$，则不等式$f(x)<\frac{2\sqrt{3}}{3}f(\frac{\pi}{3})\sin x$的解集为(　　)

A．$(-\frac{\pi}{3}，0)\cup(0，\frac{\pi}{3})$ B．$(-\frac{\pi}{3}，0)\cup(\frac{\pi}{3}，\frac{\pi}{2})$ C．$(-\frac{\pi}{2}，-\frac{\pi}{3})\cup(\frac{\pi}{3}，\frac{\pi}{2})$ D．$(-\frac{\pi}{2}，-\frac{\pi}{3})\cup(0，\frac{\pi}{3})$

解析由题意可知,当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,有$f'(x)-f(x)\frac{\cos x}{\sin x}<0$, 令$h(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$, 因为函数$f(x)$是定义在$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的奇函数,即$h(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$是定义在$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的偶函数,当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时, $\sin x>0$, 由 $f'(x)-f(x)\frac{\cos x}{\sin x}<0$, 得 $f'(x)\sin x-f(x)\cos x<0$, 故 $h'(x)=\frac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2 x}<0$, 则$h(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，将$f(x)<\frac{2\sqrt{3}}{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x$化为$:\frac{f(x)}{\sin x}<\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}$,即$h(x)<h\left(\frac{\pi}{3}\right)$,则$\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$,又因为$h(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$是定义在$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的偶函数,所以$h(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$上单调递增，且$h\left(\frac{\pi}{3}\right)=h\left(-\frac{\pi}{3}\right)$,当$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$时, $\sin x<0$, 将$f(x)<\frac{2\sqrt{3}}{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x$化为$\frac{f(x)}{\sin x}>\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}$,即$h(x)>h(3)=h\left(\frac{\pi}{3}\right)$,则$-\frac{\pi}{3}<x<0$,综上，所求不等式的解集为$\left(-\frac{\pi}{3},0\right)\cup\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$,故选 B.

例 17.（2019•6 月份模拟）设奇函数$f(x)$的定义域为$(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$，且$f(x)$的图象是连续不间断，$\forall x\in(-\frac{\pi}{2}，0)$，有$f'(x)\cos x+f(x)\sin x<0$，若$f(m)<2f(\frac{\pi}{3})\cos m$，则$m$的取值范围是(　　)

A．$(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{3})$　　B．$(0，\frac{\pi}{3})$　　C．$(-\frac{\pi}{2}，-\frac{\pi}{3})$　　D．$(\frac{\pi}{3}，\frac{\pi}{2})$

解析奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，且 $f(x)$ 的图象是连续不间断，令 $g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$，则 $g^{'}(x)=\frac{f^{'}(x)\cos x+f(x)\sin x}{\cos^2 x}$．因为 $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，有 $f^{'}(x)=\cos x+f(x)\sin x<0$，所以当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，$g^{'}(x)<0$，则 $g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减．又函数 $f(x)$ 是定义域在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的奇函数，所以 $g(-x)=\frac{f(-x)}{\cos(-x)}=-\frac{f(x)}{\cos x}=-g(x)$，则 $g(x)=\frac{f(x)}{\cos(x)}$ 是在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的奇函数，且函数 $g(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减．又 $f(m)<2f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos m$ 等价于 $\frac{f(m)}{\cos m}<\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{3}}$，即 $g(m)<g\left(\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $m>\frac{\pi}{3}$，又 $-\frac{\pi}{2}<m<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}<m<\frac{\pi}{2}$，故选 D．

例 18.（2020•开福区校级月考）定义在 $(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$ 上的奇函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且 $f(1)=0$．当 $x>0$ 时，$f'(x)\tan x-f(x)>0$，则不等式 $f(x)<0$ 的解集为____．

解析当 $x>0$ 时，有 $f^{'}(x)\tan x-f(x)>0$，所以 $f^{'}(x)\sin x-f(x)\cos x>0$，构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，易知函数 $g(x)$ 为禹函数，且当 $x>0$ 时，$g^{'}(x)=\frac{f^{'}(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2 x}>0$，即偶函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，则在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 单调递减，止 $f(1)=0$，可知 $g(1)=g(-1)=0$，则不等式 $f(x)<0$ 即为 $g(x)\sin x<0$，故 $\begin{cases}g(x)>0\\ \sin x<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin x>0\\ g(x)<0\end{cases}$，所以 $-\frac{\pi}{2}<x<-1$ 或 $0<x<1$，故答案为 $\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)\cup(0,1)$．

第三讲极值和最值

一．求导后需要借助辅助角公式

$f(x)=a\sin\omega x+b\cos\omega x$，$f(x)=e^x(a\sin x+b\cos x+c)$ 或者 $f(x)=\frac{a\sin x+b\cos x+c}{e^x}$，这类型函数的特点就是三角函数齐次或者齐角，求完导都和辅助角公式又关联．

例 19.(2020•重庆模拟)若函数 $f(x)=\frac{\sin 2x}{2}+2\cos^2 x+ax$ 存在单调递减区间,则实数 a 的取值范圄是 ( )

A. $a\geq 1$ B. $a\geq\sqrt{5}$ C. $a<1$ D. $a<\sqrt{5}$

解析由题意可得 $f'(x)=\cos 2x-2\sin 2x+a<0$ 有解, 则 $a<2\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{5}\sin(2x+\varphi)$ 有解,

即 $a<[\sqrt{5}\sin(2x+\varphi)]_{\max}$,所以 $a<\sqrt{5}$, 故选 D .

例 20.(2019•香坊区校级月考)已知函数 $f(x)=3e^x(\sin x-a)$ 有极值,则实数 a 的取值范围为 ( )

A. $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ B. $(-1,1)$ C. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ D. $[-1,1]$

解析函数 $f(x)=3e^x(\sin x-a)$ 有极值,所以 $f'(x)=3e^x(\sin x+\cos x-a)$ 有零,点,故方程 $3e^x(\sin x+\cos x-a)=0$ 有根,即 $a=\sin x+\cos x$ 有根,令 $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, $a\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. 故选 A .

例 21.(2019•萍乡一模)已知函数 $f(x)$ 在定义域 R 上的导函数为 $f'(x)$,若函数 $y=f'(x)$ 没有零点,且 $f[f(x)-2019^x]=2019$,当 $g(x)=\sin x-\cos x-kx$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上与 $f(x)$ 在 R 上的单调性相同时,则实数 k 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,1]$ B. $(-\infty,\sqrt{2}]$ C. $[-1,\sqrt{2}]$ D. $[\sqrt{2},+\infty)$

解析若方程 $f'(x)=0$ 无解,则 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$ 恒成立,所以 $f(x)$ 为 R 上的单调函数, $\forall x\in R$ 都有 $f\left[f(x)-2019^x\right]=2019$, 则 $f(x)-2019^x$ 为定值,设 $t=f(x)-2019^x$, 则 $f(x)=t+2019^x$, 易知 $f(x)$ 为 R 上的增函数,由 $g(x)=\sin x-\cos x-kx$, 得 $g'(x)=\sin x+\cos x-k=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-k$, 又 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的单调性相同,所以 $g(x)$ 在 R 上单调递增,则当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $g'(x)\geq 0$ 恒成立,当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时, $x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$, 故 $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1,\sqrt{2}]$, 此时 $k\leq -1$, 故选 A.

例 22.(2019•蚌山区校级月考)已知函数 $f(x)=a\sin x+\cos x$, $x\in(0,\frac{\pi}{6})$,若 $\exists x_1\neq x_2$,使得 $f(x_1)=f(x_2)$,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$ B. $(0,\sqrt{3})$ C. $(\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3})$ D. $(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$

解析若$\exists x_1 \neq x_2$,使得$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$,则等价为函数$f(x)$在$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$不是单调函数,即存在对称轴,

函数的导数$f'(x)=a\cos x-\sin x$,若函数为单调递增函数,则$f'(x)\geq 0$恒成立,即$a\cos x-\sin x\geq 0$,

得$a\cos x\geq \sin x$,得$a\geq \dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x$在$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$恒成立,当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$时,$0<\tan x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,则此时

$a\geq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,若函数为单调递减函数,则$f'(x)\leq 0$恒成立,即$a\cos x-\sin x\leq 0$,得$a\cos x\leq \sin x$,得

$a\leq \dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x$在$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$恒成立,当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$时,$0<\tan x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,则此时$a\leq 0$,即若函数$f(x)$为单

调递增则$a\geq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$或$a\leq 0$,则若函数在$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$不是单调函数,则$0<a<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,即实数$a$的取值范围是

$\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$,故选D.

二．求导后需要借助三角函数有界性或者二次函数

$f(x)=a\sin 2\omega x+b\cos\omega x+cx^n$或者$f(x)=a\sin\omega x+b\cos 2\omega x+cx^n$，这类型函数的特点就是三角函数非齐次或者倍角关系，求完导需要利用二次函数甚至对勾函数性质.

例 23.（2018•新课标Ⅰ）已知函数$f(x)=2\sin x+\sin 2x$，则$f(x)$的最小值是____.

解析由题意可得$T=2\pi$是$f(x)=2\sin x+\sin 2x$的一个周期，故只需考虑$f(x)=2\sin x+\sin 2x$在$[0,2\pi)$上的值域，先来求该函数在$[0,2\pi)$上的极值，点，求导数可得

$f'(x)=2\cos x+2\cos 2x=2\cos x+2\left(2\cos^2 x-1\right)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$,,令$f'(x)=0$,则$\cos x=\dfrac{1}{2}$

或$\cos x=-1$,此时$x=\dfrac{\pi}{3},\pi$或$\dfrac{5\pi}{3}$,故$y=2\sin x+\sin 2x$的最小值只能在点$x=\dfrac{\pi}{3},\pi$或$\dfrac{5\pi}{3}$和边界点

$x=0$中取到,计算可得$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,$f(\pi)=0$,$f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,$f(0)=0$,函数的最小值为$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.故答

案为$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

例 24.（2019•安徽期末）若函数$f(x)=x-\dfrac{1}{4}\sin 2x-a\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，则实数$a$的取值范围是

(　　)

A．$[-\frac{1}{2}，\frac{1}{2}]$　　B．$[-1，\frac{1}{2}]$　　C．$[-1，1]$　　D．$[-1，-\frac{1}{2}]$

解析函数 $f(x)=x-\frac{1}{4}\sin 2x-a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，$f'(x)=1-\frac{1}{2}\cos 2x-a\cos x=-\cos^2 x-a\cos x+\frac{3}{2}\geq 0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恒成立，设 $\cos x=t$，$-1\leq t\leq 1$，则 $g(t)=-t^2-at+\frac{3}{2}\geq 0$ 在

$[-1,1]$上恒成立，由二次函数性质有 $\begin{cases} g(-1)=a+\frac{1}{2}\geq 0 \\ g(1)=-a+\frac{1}{2}\geq 0 \end{cases}$，解得 $-\frac{1}{2}\leq a\leq\frac{1}{2}$，所以实数 a 的取值范围是

$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，故选 A.

例 25.（2019•七星区校级期中）若函数 $f(x)=x+a\sin 2x$ 在 $[0，\frac{\pi}{4})$ 上单调递增，则 a 的取值范围是（　　）

A．$[-\frac{1}{2}，0]$　　B．$[-1，+\infty)$　　C．$[-\frac{1}{2}，+\infty)$　　D．$(-\infty，-\frac{1}{2}]$

解析根据题意，函数 $f(x)=x+a\sin 2x$，其导数 $f'(x)=1+2a\cos 2x$，若函数 $f(x)=x+a\sin 2x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，则 $f'(x)=1+2a\cos 2x\geq 0$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上恒成立，又因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，则有 $0<\cos 2x\leq 1$，所以 $f'(x)=1+2a\cos 2x\geq 0\Rightarrow 2a\geq\frac{-1}{\cos 2x}$，又因为 $0<\cos 2x\leq 1$，则 $\frac{-1}{\cos 2x}\leq -1$，即 $\frac{-1}{\cos 2x}$ 有最大值为 -1，若 $f'(x)=1+2a\cos 2x\geq 0$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上恒成立，则 $a\geq -\frac{1}{2}$，故选 C.

例 26.（2019•福州期末）已知函数 $f(x)=\sin x+x^3-ax$，则下列结论正确的是（　　）

A．$f(x)$ 是奇函数　B．若 $f(x)$ 是增函数，则 $a\leq 1$

C．当 $a=-3$ 时，函数 $f(x)$ 恰有两个零点　D．当 $a=3$ 时，函数 $f(x)$ 恰有两个极值点

解析若 $f(x)$ 为增函数，则 $f'(x)=\cos x+3x^2-a\geq 0$ 恒成立，故 $a\leq\cos x+3x^2$ 恒成立，令 $g(x)=\cos x+3x^2$，则可得 $g(x)$ 为偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，故当 $x=0$ 时，$g(x)$ 取得最小值 $g(0)=1$，所以 $a\leq g(x)_{\min}=1$，B 正确；当 $a=-3$ 时，$f(x)=\sin x+x^3+3x$ 为奇函数，且 $f(0)=0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)=\cos x+3x^2+3>0$ 恒成立，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，根据奇

函数的对称性可知函数在 $(-\infty,0)$ 单调递增，故 $f(x)$ 在 R 上单调递增, $f(0)=0$, 即只有一个零点, C 错误；

$a=3$ 时，$f(x)=\sin x+x^3-3x$ 为奇函数，故先考虑 $x>0$ 时，函数极值存在情况，则 $f'(x)=\cos x+3x^2-3$, 因为 $f''(x)=6x-\sin x$ 单调递增，则 $f''(x)>f''(0)=0$, 故 $f'(x)$ 单调递增,且 $f''(0)=-2<0$, $f''(1)=\cos 1>0$, 故存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f'(x_0)=0$, 因此,当 $0<x<x_0$, $f'(x)<0$, 函数单调递减,当 $x>x_0$ 时, $f'(x)>0$，函数单调递增，故 $x=x_0$ 为函数在 $x>0$ 时的唯一的极小值，根据奇函数的对称性可知，当 $x<0$ 时，存在极大值，D 正确，故选 ABD.

例 27.（2019•河南一模）若函数 $f(x)=mx+(m+\sin x)\cos x$ 在 $(-\infty，+\infty)$ 单调递减，则 m 的取值范围是____.

解析由题意得 $f(x)=mx+(m+\sin x)\cos x=mx+m\cos x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$, 故 $f'(x)=m-m\sin x+\cos 2x$, 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减，所以 $m-m\sin x+\cos 2x\le 0$，即 $m(1-\sin x)\le -\cos 2x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒成立，若 $1-\sin x=0$, 则 $-\cos 2x=1$, 对于任意 $m\in R$, 上式恒成立；若 $1-\sin x\ne 0$, 则 $m\le\dfrac{-\cos 2x}{1-\sin x}=-\dfrac{2\sin^2 x-1}{\sin x-1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒成立，令 $\sin x=t(-1\le t\le 1)$, 则 $g(t)=-\dfrac{2t^2-1}{t-1}=$，由 $-\dfrac{2(t-1)^2+4(t-1)+1}{t-1}=-\left[2(t-1)+\dfrac{1}{t-1}+4\right]$ $-1\le t<1$, 得 $-2\le t-1<0$, 则当 $t-1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $t=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $g(t)$ 有最小值为 $2\sqrt{2}-4$. 所以 $m\le 2\sqrt{2}-4$. 故答案为 $(-\infty,2\sqrt{2}-4]$.

三．单调性和对称性综合

定理 1：原函数的中心对称位置将成为导函数的对称轴，原函数的对称轴位置上，必然出现对称中心，这个定理对三角函数百试不爽；

定理 2：$f(x)+f(-x)=f(0)\Leftrightarrow M+m=2f(0)$，其中 $M=f(x)_{\max}$，$m=f(x)_{\min}$（参考本书函数奇偶性专题）；

例 28.（2019•娄底期末）已知函数 $f(x)=\dfrac{4}{e^x+1}+x^3+\sin x$，其导函数为 $f'(x)$，则 $f(2020)+f'(2020)+f(-2020)-f'(-2020)$ 的值为（　　）

A．4040　　B．4　　C．2　　D．0

解析函数 $f(x)=\dfrac{4}{e^x+1}+x^3+\sin x$, 可得 $f(x)+f(-x)=\dfrac{4}{e^x+1}+x^3+\sin x+\dfrac{4e^x}{e^x+1}-x^3-\sin x=4$；

$f^{'}(x)=-\frac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}+3x^2+\cos x$, $f^{'}(x)-f^{'}(-x)=-\frac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}+3x^2+\cos x+\frac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}-3x^2-\cos x=0$

$f(2020)+f^{'}(2020)+f(-2020)-f^{'}(-2020)=4$, 故选 B

例 29.（2019•重庆模拟）若函数 $f(x)=(\cos x-\sin x)e^x$， $x\in(0，10\pi)$，则 $f(x)$ 的所有极大值点之和与所有极小值点之和的差为(　　)

A. -5π　　B. 5π　　C. 55π　　D. -55π

解析因为函数 $f(x)=e^x(\cos x-\sin x)$, 所以导数 $f^{'}(x)=\left(e^x\right)^{'}(\cos x-\sin x)+e^x(\cos x-\sin x)^{'}$ $=-2e^x\sin x$，$x\in(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)(k\in Z)$ 时, $f^{'}(x)>0$, $x\in(2k\pi,2k\pi+\pi)(k\in Z)$ 时, $f^{'}(x)<0$, 所以 $x\in(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)(k\in Z)$ 时, $f(x)$ 递增, $x\in(2k\pi,2k\pi+\pi)(k\in Z)$ 时, $f(x)$ 递减,当 $x=2k\pi+\pi(k\in Z)$ 时, $f(x)$ 取极小值，当 $x=2k\pi(k\in Z)$ 时, $f(x)$ 取极大值,则 $f(x)$ 的所有极大值点之和与所有极小值点为计算 $\sin x=0,x\in(0,10\pi)$ 时可得; $f(x)$ 的所有极大值点：$x=2\pi,4\pi,6\pi,8\pi$, $f(x)$ 的所有极小值点：$x=\pi,3\pi,5\pi,7\pi,9\pi$, 故: $(2\pi+4\pi+6\pi+8\pi)-(\pi+3\pi+5\pi+7\pi+9\pi)=-5\pi$, 故选 A.

例 30.（2019•沙坪坝区校级月考）设函数 $f(x)=e^{-x}(\sin x-\cos x)(x\in[-2019\pi，2020\pi]$．过点 $A(\frac{\pi+1}{2}，0)$ 作函数 $f(x)$ 图象的所有切线，则所有切点的横坐标之和为(　　)

A. 2019π　　B. 2020π　　C. $\frac{2019}{2}\pi$　　D. 1010π

解析函数 $f(x)=e^{-x}(\sin x-\cos x)$, 求导得 $f^{'}(x)=2e^{-x}\cos x$, 设切点为 $\left(x,e^{-x_0}\left(\sin x_0-\cos x_0\right)\right)$, 切线的斜率为 $k=2e^{-x_0}\cos x_0$, 故切线方程为 $y-e^{-x_0}\left(\sin x_0-\cos x_0\right)=2e^{-x_0}\cos x_0\left(x-x_0\right)$; 所以 $0-e^{-x_0}\left(\sin x_0-\cos x_0\right)=2e^{-x_0}\cos x_0\left(\frac{\pi+1}{2}-x_0\right)$, 所以方程 $\tan x_0=2\left(x_0-\frac{\pi}{2}\right)$, 令 $y_1=\tan x, y_2=2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$;这两个函数的图象关于 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 对称，所以他们交点的横坐标关于点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 对称：从而所做所有切点的横坐标也关于点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 成对出现;又在区间 $[-2019\pi,2020\pi]$ 内共有 2019 对，每对和为 π，所有切点的横坐标之和为 2019π ,故选 A .

例 31.（2019•叶集区校级月考）若关于 x 的函数 $f(x)=\dfrac{2tx^2+\sqrt{2}t\sin(x+\frac{\pi}{4})+x}{2x^2+\cos x}(t\neq 0)$ 的最大值和最小值之和为 4，则 $t=$____.

解析 由题意得 $f(x)=\dfrac{2tx^2+\sqrt{2}t\left(\frac{\sqrt{2}}{2}xinx+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)+x}{2x^2+\cos x}=\dfrac{t\left(2x^2+\cos x\right)+(t\sin x+x)}{2x^2+\cos x}=\quad t+\dfrac{t\sin x+x}{2x^2+\cos x}$，设 $g(x)=\dfrac{t\sin x+x}{2x^2+\cos x}$，则 $g(-x)=\dfrac{-t\sin x-x}{2x^2+\cos x}=-g(x)$；所以 $g(x)$ 为奇函数：设 $g(x)$ 的最大数值为 M，最小值为 N， 则 $M+N=0$， 则 $f(x)$ 的最大数值为 $M+t$，最小值为 $N+t$，所以的最大值与最小值之和为 $M+N+2t=4$，得 $t=2$. 故答案为 2.

例 32.（2019•博望区校级模拟）已知函数 $f(x)=ax^3-3ax^2+bx+1+2a-b$，若 $g(x)=f(x+1)+\dfrac{e^x-e^{-x}}{\cos x+2}(x\in[-a，a]，a>0)$ 的最大值为 M，则下列说法正确的是(　　)

A． M 的值与 a，b 均无关，且函数 $g(x)$ 的最小值为 $-M$

B． M 的值与 a，b 有关，且函数 $g(x)$ 的最小值为 $-M$

C． M 的值与 a，b 有关，且函数 $g(x)$ 的最小值为 $2-M$

D． M 的仅与 a 有关，且函数 $g(x)$ 的最小值为 $2-M$

解析 由题得 $f(x+1)=a(x+1)^3-3a(x+1)^2+b(x+1)+2a-b=a\left(x^3+3x^2+3x+1\right)-3a\left(x^2+2x+1\right)$

$+b(x+1)+2a-b$，所以 $f(x+1)=ax^3+(b-3a)x+1$；故 $g(x)=ax^3+(b-3a)x+\dfrac{e^x-e^{-x}}{2+\cos x}+1$，设 $h(x)=ax^3+(b-3a)x+\dfrac{e^x-e^{-x}}{2+\cos x}$，则 $h(x)$ 为奇函数，$g(x)=h(x)+1$；当 $h(x)$ 取得最大值时，$g(x)$ 最大；显然 a,b 的取值不同时，$h(x)$ 的最大值不同；所以 $h(x)$ 取得最大值时与 a,b 有关，且 $h(x)$ 的最大值与最小值互为相反数：所以 $g(x)$ 最大值与最小值之和为 2，则最小值为 $2-M$，故选 C.

例 33.（2019•吉安模拟）已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{2}{\pi}x-\ln x+\ln\dfrac{\pi}{2}$，则函数 $g(x)=f(x)-\sin x$（e 为自然对数的底数）的零点个数是(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．5

解析函数 $f(x)$ 为 R 上的奇函数,则 $f(0)=0$, 又由 $h(0)=\sin 0=0$, 则函数 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 存在交点 $(0,0)$, 当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{2}{\pi}x-\ln x+\ln\frac{\pi}{2}$, 其导数 $f'(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{x}$, 分析可得在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上, $f'(x)<0$, $f(x)$ 为减函数，在区间 $\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 上, $f'(x)>0$, $f(x)$ 为增函数,则 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在最小值，且其最小值为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{2}-\ln\frac{\pi}{2}-\ln\frac{\pi}{2}=1$, 又由 $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$, 则函数 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 存在交点 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 又由 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 都是奇函数,则函数 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 存在交点 $\left(\frac{\pi}{2},-1\right)$, 综合可得:函数 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 有 3 个交点,则函数 $g(x)=f(x)-\sin x$ 有 3 个零点,故选 C.

四．三倍角公式和三次函数转换

$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos^2\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$；

$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$；

由此得到降幂公式：$\sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}$，$\cos^3\alpha=\frac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{4}$

秒杀秘籍：最值界定

当 $x\in[-m,m]$ 时，可以设 $x=m\cos\alpha(\alpha\in[0,\pi])$, 当 $x\in\left[\frac{-m}{2},m\right]$ 时，可以设 $x=m\cos\alpha\left(\alpha\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]\right)$, 以此类推：$\left|\frac{a}{4}\cos 3\alpha+\left(b+\frac{3a}{4}\right)\cos\alpha+c\right|\le\left|\frac{a}{4}\cos 3\alpha\right|+\left|b+\frac{3a}{4}\right|\cdot|\cos\alpha|+|c|$, 往往 $b+\frac{3}{4}a=0$, $c=0$ 时取得最值.当 $f(\alpha)=a\cos 3\alpha+b\cos 2\alpha+(c+3a)\cos\alpha$, 且 $a>0$, $c+3a>0$, 则 $b\le 0$ 时, $f(\alpha)_{\min}=f(\pi)$, 当 $b\ge 0$ 时, $f(\alpha)_{\max}=f(0)$, 这个方法通常在一些选填甚至解答压轴题中给你一种秒得很爽的感觉.

例 34.（2019•黄浦区期末）已知公式 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$，$\theta\in R$，借助这个公式，我们可以求函数 $f(x)=4x^3-3x-2(x\in[0,\frac{\sqrt{3}}{2}])$ 的值域．则该函数的值域是_____.

解析设 $x=\cos\theta$, $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right]$. 则 $f(x)=4x^3-3x-2=4\cos^3\theta-3\cos\theta-2=\cos 3\theta-2$. 由于

$-\frac{3\pi}{2}\le\theta\le-\frac{\pi}{2}$， $\cos 3\theta\in[-1,0]$, 所以 $\cos 3\theta-2\in[-3,-2]$. 故答案为 $[-3,2]$.

例 35.（2019•广东模拟）已知 $a\ge-\frac{3}{4}$，$b\ge 0$，函数 $f(x)=x^3+ax+b$，$-1\le x\le 1$，设 $|f(x)|$ 的最大值为 M，且对任意的实数 a，b 恒有 $M\ge K$ 成立，则实数 K 的最大值为(　　)

A. 4　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

解析法一 (端,点控制+绝对值不等式）令 $x=1$,则 $|1+a+b|\le M$, 令 $x=-1$,则 $|-1-a+b|\le M$, 又对任意的实数 a, b 恒有 $M\ge K$ 成立, 故 $k\le 1+a+b|$, $k\le|-1-a+b|$, 可得 $2k\le|1+a+b|+|-1-a+b|$, 所以 $|1+a+b|+|-1-a+b|\ge|(1+a+b)-(-1-a+b)|=|2+2a|$, 因为 $a\ge-\frac{3}{4}$, 所以 $|2+2a|\ge\frac{1}{2}$, 得 $2k\le\frac{1}{2}$, 即 $k\le\frac{1}{4}$, 所以 k 最大值为 $\frac{1}{4}$, 故选 D.

法二（平口单峰函数+四段论）根据四段论的最佳控制方式(参考秒 2), $M=f(1)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f(-1)=-f\left(\frac{1}{2}\right)$，易知 $b=0$, $a=-\frac{3}{4}$, $M=\frac{1}{4}$, 得 $k\le\frac{1}{4}$, 所以 k 最大值为 $\frac{1}{4}$, 故选 D.

法三（三倍角公式）因为 $-1\le x\le 1$, 令 $x=\cos\alpha$, 则 $f(x)=\cos^3\alpha+a\cos\alpha+b=\frac{1}{4}\cos 3\alpha+\left(a+\frac{3}{4}\right)\cos\alpha+b$，有 $|f(x)|\le\frac{1}{4}|\cos 3\alpha|+\left(a+\frac{3}{4}\right)|\cos\alpha|+b\le\frac{1}{4}+\left(a+\frac{3}{4}\right)+b\le\frac{1}{4}$, 当仅当 $a=-\frac{3}{4}$, $b=0$ 时等号成立,故选 D

例 36.（2020•武汉 3 月调研）如果关于 x 的不等式 $x^3-ax^2+1\ge 0$ 在 $[-1，1]$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（）

A. $a\le 0$　　B. $a\le 1$　　C. $a\le 2$　　D. $a\le\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

解析法一（参变分离）$g(x)=x+\frac{1}{x^2}\ge ax\in[-1,0)\cup(0,1]$, $g'(x)=1-\frac{2}{x^3}$, 当 $x<\sqrt[3]{2}$ 时, $g(x)$ 单调递增, 当 $x\ge\sqrt[3]{2}$, $g(x)\downarrow$ 则 $g(x)\_\{\min=\min\{g(-1),g(1)\}=0$, 故选 A.

法二（直接讨论）$f(x)=x^3-ax^2+1$, $f'(x)=3x^2-2ax=x(3x-2a)$, $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}a$, 当 $a>\frac{3}{2}$ 时,

$f(x)_{\min}=\min\{f(-1),f(1)\}\geq 0$, 即 $a\leq 0$, 矛盾；当 $0<a\leq\frac{3}{2}$ 时, $f(x)_{\min}=\min\left\{f(-1),f\left(\frac{2a}{3}\right)\right\}\geq 0$, 即 $a\leq 0$ 矛盾：当 $-\frac{3}{2}<a\leq 0$ 时，$f(x)$_{min $=\min\{f(-1),\ f(0)\}\geq 0$, 即 $-\frac{3}{2}<a\leq 0$; 当 $a\leq-\frac{3}{2}$ 时, $f(x)_{\min}=f(0)=1\geq 0$，即 $a\leq-\frac{3}{2}$;综上 $a\leq 0$, 故选 A .

法三 (三倍角公式)令 $x=\cos\alpha$, $\cos^3\alpha-a\cos^2\alpha+1=\frac{1}{4}\cos 3\alpha-\frac{a}{2}(\cos 2\alpha+1)+\frac{3}{4}\cos\alpha+1$, 显然 $\alpha=\pi$ 时取得最小值, $\frac{1}{4}\cos 3\alpha-\frac{a}{2}(\cos 2\alpha+1)+\frac{3}{4}\cos\alpha+1\geq-\frac{1}{4}-\frac{a}{2}(1+1)-\frac{3}{4}+1\geq 0$, 所以 $a\leq 0$, 故选 A .

例 37.（2019•武汉模拟）已知函数 $f(x)=x^3+ax+b$ 定义域为 $[-1，2]$，记 $|f(x)|$ 的最大值为 M，则 M 的最小值为 (　　)

A．4　　B．3　　C．2　　D．$\sqrt{3}$

解析法一（三点控制）函数 $f(x)=x^3+ax+b$ 的定义域为 $[-1,2]$, 又因为 $|f(x)|$ 的最大值为 M, 所以 $|f(-1)|=|-1-a+b|\leq M$, $|f(1)|=|1+a+b|\leq M$, $|f(2)|=|8+2a+b|\leq M$, 可得

$$3M=\frac{1}{2}M+\frac{3}{2}M+M=\frac{1}{2}|-1-a+b|+\frac{3}{2}|1+a+b|+|8+2a+b|\geq$$

$$\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}a-\frac{3}{2}b+8+2a+b\right|=6,$$ 即为 $M\geq 2$, 可得 M 的最小值为 2,故选 C.

法二如图 14-3-1 所示,构造平口单峰，由于对称中心 $x=0$，故根据平口单峰函数构造原理, $b=0$，根据 $f(x)_{\max}=f(-1)=f(2), f(x)_{\min}=f(-2)=f(1)\Leftrightarrow a=-3, M$ 的最小值为 $\left|\frac{f(1)-f(-1)}{2}\right|=\left|\frac{2-(-2)}{2}\right|$ 故 $=2$, 选 C

法三（三倍角公式构造）因为 $x\in[-1,2]$, 所以 $x=2\cos\alpha\left(\alpha\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]\right.$, 则 $\cos 3\alpha\in[0,1]$, 可得

$\left|x^3+ax+b\right|$

$=\left|8\cos^3\alpha+2a\cos\alpha+b\right|=|2\cos 3\alpha+2(a+3)\cos\alpha+b|\leq 2|\cos 3\alpha|+2(a+3)|\cos\alpha|+|b|\leq$

$2|\cos 3\alpha|\leq 2$ 当仅当 $a=-3$, $b=0$ 时取得,故选 C .

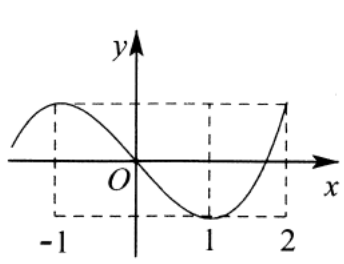


图 14-3-1

例 38.（2016•天津）设函数 $f(x)=(x-1)^3-ax-b$， $x\in R$，其中 a， $b\in R$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(x)$ 存在极值点 x_0， 且 $f(x_1)=f(x_0)$，其中 $x_1\ne x_0$，求证： $x_1+2x_0=3$；

（3）设 $a>0$，函数 $g(x)=|f(x)|$，求证： $g(x)$ 在区间 $[0，2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

解析(1)函数 $f(x)=(x-1)^3-ax-b$ 的导数为 $f^{'}(x)=3(x-1)^2-a$, 当 $a\le 0$ 时, $f^{'}(x)\ge 0$, $f(x)$ 在 R 上递增;当 $a>0$ 时, 当 $x>1+\sqrt{\frac{a}{3}}$ 或 $x<1-\sqrt{\frac{a}{3}}$ 时, $f^{'}(x)>0$, 当 $1-\sqrt{\frac{a}{3}}<x<1+\sqrt{\frac{a}{3}}$, $f^{'}(x)<0$，可得 $f(x)$ 的增区间为 $\left(-\infty,1-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$, $\left(1+\sqrt{\frac{a}{3}},+\infty\right)$, 减区间为 $\left(1-\sqrt{\frac{a}{3}},1+\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$;

(2)证明: $f^{'}\left(x_0\right)=0$, 可得 $3\left(x_0-1\right)^2=a$, 由 $f\left(x_0\right)=\left(x_0-1\right)^3-3x_0\left(x_0-1\right)^2-b=\left(x_0-1\right)^2\left(-2x_0-1\right)-b$,

$f\left(3-2x_0\right)=\left(2-2x_0\right)^3-3\left(3-2x_0\right)\left(x_0-1\right)^2-b=\left(x_0-1\right)^2\left(8-8x_0-9+6x_0\right)-b=\left(x_0-1\right)^2\left(-2x_0-1\right)-b$,

即为 $f\left(3-2x_0\right)=f\left(x_0\right)=f\left(x_1\right)$, 即有 $3-2x_0=x_1$, 即为 $x_1+2x_0=3$;

(3) 法一 要证 $g(x)$ 在区间 [0,2] 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$, 只需证 $g(x)$ 在 [0,2] 上存在 x_1,x_2 使得 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\ge\frac{1}{2}$· 当 $a\ge 3$ 时, $f(x)$ 在 [0,2] 上递减, 由 $f(2)=1-2a-b$, $f(0)=-1-b$, 得 $f(0)-f(2)=2a-2\ge 4>\frac{1}{2}$ 成立；当 $0<a<3$ 时, $f\left(1-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^3-a\left(1-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)-b=-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a+a\sqrt{\frac{a}{3}}-b=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a-b$ $f\left(1+\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^3-a\left(1+\sqrt{\frac{a}{3}}\right)-b=\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a-a\sqrt{\frac{a}{3}}-b=-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a-b$, $f(2)=1-2a-b$, $f(0)=-1-b$ ， $f(2)-f(0)=2-2a$, 若 $0<a\le\frac{3}{4}$

时，$f(2)-f(0)=2-2a\geq\frac{1}{2}$ 成立；若 $a>\frac{3}{4}$ 时，$f\left(1-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)-f\left(1+\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\frac{4a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}>\frac{1}{2}$ 成立.综上可得: $g(x)$ 在区间[0,2]上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

法二因为 $x\in[0,2]$，得 $x-1\in[-1,1]$，令 $x-1=\cos\alpha$，$x=1+\cos\alpha(\alpha\in[0,\pi])$，即 $g(x)=|f(x)|$ 即 $\left|\cos^3\alpha-a(\cos\alpha+1)-b\right|=\left|\frac{1}{4}\cos3\alpha+\left(\frac{3}{4}-a\right)\cos\alpha-a-b\right|\leq\frac{1}{4}|\cos3\alpha|+\left|\left(\frac{3}{4}-\alpha\right)\cos\alpha\right|+|-a-b|$，显然 $\frac{1}{4}|\cos3\alpha|+\left|\left(\frac{3}{4}-a\right)\cos\alpha\right|+|-a-b|\leq\frac{1}{4}|\cos3\alpha|\leq\frac{1}{4}$，当且仅当 $a=\frac{3}{4}$，$b=-\frac{3}{4}$，此不等式恒成立，故当 $a\neq\frac{3}{4}$ 或 $b\neq-\frac{3}{4}$ 时，$g(x)_{\max}>\frac{1}{4}$.

达标训练 A

1.（2019•文峰区校级月考）函数 $f(x)=x-\cos x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程为(　　)

A．$2x-4y-\pi=0$　B．$2x-\pi y=0$　C．$4x-\pi y-1=0$　D．$4x-2y-\pi=0$

2.（2018•重庆期末）已知函数 $f(x)=e^x-\cos x$，则曲线 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为(　　)

A．$y=0$　B．$y=2x$　C．$y=x$　D．$y=-2x$

3.（2019•中原区校级期中）曲线 $y=e^{-x}\cos x$ 在点 $(0，1)$ 处的切线方程为(　　)

A．$x+y+1=0$　B．$x-y-1=0$　C．$x-y+1=0$　D．$x+y-1=0$

4.（2019•吉林三模）已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足 $f(x)=\cos x-xf'(\frac{\pi}{2})$，若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线为 l，则下列直线中与直线 l 垂直的是(　　)

A．$2x-y-1=0$　B．$2x+y+1=0$　C．$x-2y-2=0$　D．$x+2y+1=0$

5.（2019•邯郸期末）曲线 $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})+2e^x$ 在点 $(0，3)$ 处的切线方程是(　　)

A．$2x+y-3=0$　B．$x-y+3=0$　C．$x-2y+6=0$　D．$2x-y+3=0$

6.（2019•常德期末）曲线 $y=x\sin x+1+\ln(x+1)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为____

7.（2019 秋•天心区校级月考）给出定义：设 $f'(x)$ 是函数 $y=(x)$ 的导函数，$f''(x)$ 是函数 $f'(x)$ 的导函数，若方程 $f''(x)=0$ 有实数解 x_0，则称点 $(x_0，f(x_0))$ 为函数 $y=f(x)$ 的"拐点"，已知函数

$f(x)=5x+4\sin x-\cos x$ 的"拐点"是 $(x_0，f(x_0))$，则点 M(　　)

A．在直线 $y=-5x$ 上　B．在直线 $y=5x$ 上

C．在直线 $y=-4x$ 上　D．在直线 $y=4x$ 上

8．（2019•乌鲁木齐二模）若直线 $y=x+m$ 与曲线 $y=a\sin x+b\cos x$ $(a, b, m\in R)$ 相切于点 $(0, 1)$，则 $\dfrac{a+b}{m}$ 的值为____．

9．（2012•湖南）设定义在 R 上的函数 $f(x)$ 是最小正周期 2π 的偶函数，$f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，当 $x\in[0, \pi]$ 时，$0<f(x)<1$；当 $x\in(0, \pi)$，且 $x\neq\dfrac{\pi}{2}$ 时，$(x-\dfrac{\pi}{2})f'(x)>0$，则函数 $y=f(x)-\sin x$ 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 的零点个数为(　　)

A．2　　B．4　　C．5　　D．8

10．（2019•南昌二模）已知函数 $f(x)$ 对 $\forall x\in R$ 有 $f(x)+f(-x)=2\cos x$，且 $f'(x)+\sin x<0$，若角 α 满足不等式 $f(\pi+\alpha)+f(\alpha)\geq 0$，则 α 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty, -\dfrac{\pi}{2}]$　　B．$(-\infty, \pi]$　　C．$[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$　　D．$[0, \dfrac{\pi}{2}]$

11．（2019•道里区校级期末）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(0)=-1$，对任意的 $x\in R$ 满足 $f'(x)>2x$．当 $\alpha\in[0, \pi]$ 时，不等式 $f(\sin\alpha+\cos\alpha)-\sin 2\alpha>0$ 的解集为(　　)

A．$(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2})$　　B．$[0, \dfrac{3\pi}{4})$　　C．$(\dfrac{\pi}{4}, \pi)$　　D．$(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4})$

12．（2019•中原区校级月考）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}$，对任意的 $x\in R$ 满足 $f'(x)<-4x$ 当 $\alpha\in[-\pi, \pi]$ 时，不等式 $f(\cos\alpha)+\cos 2\alpha<0$ 的解集为(　　)

A．$(-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3})$　　B．$(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3})$　　C．$(-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3})$　　D．$(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6})$

13．（2019•驻马店期末）已知函数 $y=f(x)$ 对于任意的 $x\in(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ 满足 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0$（其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数），则下列不等式成立的是(　　)

A．$2f(-\dfrac{\pi}{3})>f(0)$　　B．$f(0)>\sqrt{2}f(\dfrac{\pi}{4})$

C．$f(-1)>f(1)$　　D．$f(1)>f(0)\cos 1$

14．（2019 秋•滨州期末）已知定义在 $[0, \dfrac{\pi}{2})$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且 $f(0)=0$，$f'(x)\cos x+f(x)\sin x<0$，则下列判断中正确的是(　　)

A．$f(\dfrac{\pi}{6})<\dfrac{\sqrt{6}}{2}f(\dfrac{\pi}{4})$　　B．$f(\ln\dfrac{\pi}{3})>0$

C．$f(\dfrac{\pi}{6})>2f(\dfrac{\pi}{3})$　　D．$f(\dfrac{\pi}{4})>\sqrt{2}f(\dfrac{\pi}{3})$

15．（2019•泰安期中）已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ 上的奇函数，其导函数为 $f'(x)$，$f(\dfrac{\pi}{8})=\sqrt{2}$，且当 $x\in(0, \dfrac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)\sin 2x+2f(x)\cos 2x>0$．则不等式 $f(x)\sin 2x<1$ 的解集为____．

16.（2019•荔湾区校级月考）已知函数 $f(x)=\dfrac{\sin x-a}{e^x}$ 有极值，则实数 a 的取值范围为____

17.（2019•淮南二模）函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{3}\sin 2x+a\cos x$ 在 $(-\infty，+\infty)$ 内单调递增，实数 a 的取值范围是(　　)

A．$[-2，2]$　　B．$[-2，\dfrac{4}{3}]$　　C．$[-\dfrac{4}{3}，\dfrac{4}{3}]$　　D．$[-2，-\dfrac{4}{3}]$

18.（2019•天津期末）若函数 $f(x)=2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+a\sin x$ 在区间 $(-\infty，+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$(-1，0]$　　B．$[0，1)$　　C．$(-1，-1)$　　D．$[-1，1]$

19.（2019•金华期末）设 $f(x)=x^a\cdot\cos x$，$x\in[\dfrac{\pi}{6}，\dfrac{\pi}{3}]$ 的最大值为 M，则(　　)

A.当 $a=-1$ 时，$M<\sqrt{3}$　B．当 $a=2$ 时，$M<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ C．当 $a=1$ 时，$M>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　D．当 $a=3$ 时，$M<\dfrac{1}{2}$

20.（2019 秋•广东月考）函数 $f(x)=\sin 2x+2\cos x$，$x\in(-\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{\pi}{2})$ 的最大值是__.

21.（2020•南通模拟）函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\sin x$，$x\in[0，\pi]$ 的最大值为____.

22.（2019•北碚区校级期末）已知函数 $f(x+1)=x^3+2+\pi^x-\pi^{-x}$，若 $f(\sin x+2)+f(\cos 2x)>4$，则 x 的范围是(　　)

A．$\left\{x\,|\,x\neq-\dfrac{\pi}{2}+k\pi，k\in Z\right\}$ B．$(-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi)\cup(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi，\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi)$，$k\in Z$

C．$(-\dfrac{\pi}{6}+k\pi，\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi)$，$k\in Z$　　D．$\varnothing$

23.（2019•仙游县校级月考）设函数 $f(x)=e^x(\sin x-\cos x)$，若 $0\leq x\leq 2020\pi$，则函数 $f(x)$ 的各极大值之和为(　　)

A．$\dfrac{e^{\pi}(1-e^{1010\pi})}{1-e^{\pi}}$　　B．$\dfrac{e^{\pi}(1-e^{1010\pi})}{1-e^{2\pi}}$

C．$\dfrac{e^{\pi}(1-e^{2020\pi})}{1-e^{2\pi}}$　　D．$\dfrac{e^{\pi}(1-e^{2020\pi})}{1-e^{\pi}}$

24.（2019•怀化期中）设函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi x}{m}$，若存在 $f(x)$ 的极值点 x_0 满足 ${x_0}^2+[f(x_0)]^2<m^2$，则 m 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty，-2)\cup(2，+\infty)$　　B．$(-\infty，-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3}，+\infty)$

C．$(-\infty，-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2}，+\infty)$　　D．$(-\infty，-1)\cup(1，+\infty)$

25．（2019•五华区校级月考）已知函数 $f(x)=e^{x}\cdot(a\sin x+b\cos x)$，若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点，且 $a^{2}+b^{2}=2$，则 $a=($　　$)$

A．-1　　B．0　　C．1　　D．±1

26.（2020•马鞍山一模）已知 $f(x)=\frac{1}{2}x^{2}+a\cos x$，当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $(0，\pi)$ 上 $($　　$)$

A．有最大值没有最小值　　B．有最小值没有最大值

C．既有最大值也有最小值　　D．既无最大值也无最小值

27.（2019•南开区二模）已知函数 $f(x)=e^{x}-\frac{1}{e^{x}}-2\sin x$，其中 e 为自然对数的底数，若 $f(2a^{2})+f(a-3)<0$，则实数 a 的取值范围为____.

28.（2019•济南一模）已知函数 $f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{2})+\frac{x}{x^{2}+1}+1$，则 $f(x)$ 的最大值与最小值的和为 $($　　$)$

A．0　　B．1　　C．2　　D．4

29.（2019•博望区校级模拟）已知函数 $f(x)=\frac{x}{\cos x}-\sin x$，$x\in[\frac{2\pi}{3}，\frac{3\pi}{4}]$，则 $f(x)$ 的最小值是____.

30.（2019•沙坪坝区校级期中）设函数 $f(x)=-\frac{2}{\pi}\sin\pi x$ 在 $(0，+\infty)$ 上最小的零点为 x_{0}，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_{0}，0)$ 处的切线上有一点 P，曲线 $y=\frac{3}{2}x^{2}-\ln x$ 上有一点 Q，则 $|PQ|$ 的最小值为 $($　　$)$

A．$\frac{\sqrt{5}}{10}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{3\sqrt{5}}{10}$　　D．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

31.已知函数 $f(x)=8x^{3}-ax^{2}-bx$，是否存在任意实数 a、b，使得 $\left|f\left(x\right)\right|\le2$ 对任意的 $x\in\left[-1，1\right]$ 恒成立，若存在，求出 a、b，若不存在，说明理由.

32.（2018•威海期末）若关于 x 的方程 $5x^{3}=15x-m$ 在 $[-1，2]$ 上有解，则实数 m 的取值范围是 $($　　$)$

A．$[-10，10]$　　B．$[-10，+\infty)$　　C．$(-\infty，-10]$　　D．$[10，+\infty)$

33.（2019•清江浦区校级月考）函数 $f(x)=4x^{3}-ax+1$，$x\in[0，1]$，若 $f(x)\ge0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是____.

34.（2020•清华大学中学生能力测试）设函数 $f(x)=|x^{3}-6x^{2}+ax+b|$，若对任意的实数 a 和 b，总存在 $x_{0}\in[0，3]$，使得 $f(x_{0})\ge m$，则实数 m 的最大值为____.

达标训练 B

1.（2019•丰台区期末）某同学解答一道导数题："已知函数 $f(x)=\sin x$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0，0)$ 处的切线为 l．求证：直线 l 在点 $(0，0)$ 处穿过函数 $f(x)$ 的图象．"

该同学证明过程如下：

证明：因为 $f(x)=\sin x$，所以 $f'(x)=\cos x$．所以 $f'(0)=1$．所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=x$．若想证直线 l 在点 $(0，0)$ 处穿过函数 $f(x)$ 的图象，只需证 $g(x)=f(x)-x=\sin x-x$ 在 $x=0$ 两侧附近的函数值异号．由于 $g'(x)=\cos x-1\leqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $x=0$ 附近单调递减．因为 $g(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $x=0$ 两侧附近的函数值异号．也就是直线 l 在点 $(0,0)$ 处穿过函数 $f(x)$ 的图象．

参考该同学解答上述问题的过程，请你解答下面问题：

已知函数 $f(x)=x^3-ax^2$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(1，f(1))$ 处的切线为 l．若 l 在点 P 处穿过函数 $f(x)$ 的图象，则 a 的值为(　　)

A．3　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．0　　D．-3

2.（2019•荔湾区月考）函数 $f(x)=2x+\cos x$ 在点 $(\dfrac{\pi}{2}，f(\dfrac{\pi}{2}))$ 处的切线方程为(　　)

A．$3x-y-\dfrac{\pi}{2}=0$　　B．$x-y+\dfrac{\pi}{2}=0$　　C．$3x-y-\dfrac{3\pi}{2}=0$　　D．$x-y-\dfrac{\pi}{2}=0$

3.（2019•滨城区校级月考）曲线 $y=e^x(1+\cos x)$ 在点 $(0，2)$ 处的切线方程为(　　)

A．$y=2$　　B．$y=x+2$　C．$y=2x+2$　　D．$y=-2x+2$

4.（2019•驻马店期末）曲线 $y=e^x+\sin x$ 在点 $(0，1)$ 处的切线方程为(　　)

A．$y=x$　　B．$y=x+1$　　C．$y=2x+1$　　D．$y=3x-1$

5.（2020•宜宾模拟）设曲线 $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处的切线与直线 $y=ax+1$ 平行，则实数 a 等于(　　)

A．-1　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．-2　　D．2

6.（2019 秋•重庆期末）曲线 $y=(x+\sin x)e^x$ 在点 $(0，0)$ 处的切线方程为____．

7.（2019•盐城三模）已知函数 $f(x)=x+4\sin x$，若不等式 $kx+b_1\leqslant f(x)\leqslant kx+b_2$ 对一切实数 x 恒成立，则 b_2-b_1 的最小值为____．

8.（2016•新课标Ⅰ）若函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $(-\infty，+\infty)$ 单调递增，则 a 的取值范围是(　　)

A．$[-1，1]$　　B．$[-1，\dfrac{1}{3}]$　　C．$[-\dfrac{1}{3}，\dfrac{1}{3}]$　　D．$[-1，-\dfrac{1}{3}]$

9.（2019•威海二模）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{2}$，对任意的 $x\in R$ 满足 $f'(x)>4x$，当

$\alpha\in[0,2\pi]$时，不等式$f(\sin\alpha)+\cos2\alpha>0$的解集为(　　)

A．$(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$　　B．$(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$　　C．$(\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3})$　　D．$(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6})$

10．（2019•河南期末）已知函数$f(x)$的定义域为R，导函数为$f'(x)$，若$f(x)=\cos x-f(-x)$，且$f'(x)+\frac{\sin x}{2}<0$，则满足$f(x+\pi)+f(x)\leq0$的x的取值范围为____．

11．（2019•赣州期中）已知函数$f(x)$在定义城R上可导，且$f'(x)\geq\cos x$，则关于x的不等式$f(x)\geq f(\frac{\pi}{2}-x)+\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$的解集为(　　)

A．$[\frac{\pi}{4},+\infty)$　　B．$[-\frac{\pi}{4},+\infty)$　　C．$(-\infty,\frac{\pi}{4}]$　　D．$(-\infty,-\frac{\pi}{4}]$

12.（2019•东胜区校级月考）已知函数$f(x)$满足$f(0)=1$，且$f'(x)\cos x>f(x)\sin x$，则不等式$f(x)\cos x-1>0$的解集为(　　)

A．$(-\infty,-1)$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(-\infty,0)$　　D．$(0,+\infty)$

13．（2019•安徽期末）已知$f(x)=2(x+1)-\cos x$，则不等式$f(\ln x-1)<1$的解集为(　　)

A．$(0,e)$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(e,+\infty)$　　D．$(1,e)$

14.（2020•荆州一模）已知函数$f(x)$是$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上的奇函数，其导函数为$f'(x)$，且$f(1)=0$，当$x>0$时，$f'(x)\tan x-f(x)>0$，则不等式$f(x)>0$的解集为____．

15．（2019•黄山二模）已知定义在R上的连续可导函数$f(x)$无极值，且$\forall x\in R$，$f[f(x)+2018^x]=2019$，若$g(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})+mx$在$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$上与函数$f(x)$的单调性相同，则实数$m$的取值范围是(　　)

A．$(-\infty,-2]$　　B．$[-2,+\infty)$　　C．$(-\infty,2]$　　D．$[-2,-1]$

16.（2020•岳阳一模）若函数$f(x)=e^x(\cos x+a)$在区间$(0,\pi)$上单调递增，则实数a的取值范围是____．

17.（2019•朝阳区期末）已知函数$f(x)=k\sin x+2x+1(k\in R)$，当$k\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$时，$f(x)$在$(0,2\pi)$内的极值点的个数为(　　)

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

18．（2020•郴州一模）已知函数$f(x)$在定义域R上的导函数为$f'(x)$，若函数$y=f'(x)$没有零点，且$f[f(x)-2020^x]=2020$，当$g(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x-kx$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上与$f(x)$在$R$上的单调性相同时，实数$k$的取值范围是(　　)

A．$(-\infty,-1]$　　B．$(-\infty,-\sqrt{3}]$　　C．$[-1,\sqrt{3}]$　　D．$[\sqrt{3},+\infty)$

19.（2019•临沂期末）已知函数 $f(x)=x+\sin x-x\cos x$ 的定义域为 $[-2\pi, 2\pi)$，则(　　)

A．$f(x)$ 为奇函数　　B．$f(x)$ 在 $[0, \pi)$ 上单调递增

C．$f(x)$ 恰有 4 个极大值点　　D．$f(x)$ 有且仅有 4 个极值点

20.（2018•河南期末）若函数 $y=\sin^2 x+\cos^3 x+a-1$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的最小值为 0，则 $a=$____．

21.（2019•中原区校级月考）$f(x)=\frac{2}{3}\sin^3 x+\cos x$，$x\in(0, \pi)$，则下列关于 $f(x)$ 的说法正确的为(　　)

A．存在极大值，也存在极小值　B．存在极大值，不存在极小值

C．不存在极大值，存在极小值　D．不存在极大值，也不存在极小值

22.（2019•袁州区校级模拟）设函数 $f(x)=ax+\frac{1}{x+b}(a, b\in Z)$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y=3$．已知方程 $f(x)=A\sin(x-1)+1$ 有 x_1，x_2，x_3，x_4 共 4 个不等实根，则 $\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{x_1+x_2+x_3+x_4}=$(　　)

A．0　　B．1　　C．2　　D．4

23.（2019•杏花岭区校级月考）已知函数 $f(x)=\frac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$，其中 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导数，则 $f(2018)+f(-2018)+f'(2019)-f'(-2019)=$(　　)

A．2　　B．2019　　C．2018　　D．0

24.（2019•雨花区校级月考）设函数 $f(x)=(e^x+e^{-x})\sin x+t$，$x\in[-a, -a]$ 的最大值和最小值分别为 M，N．若 $M+N=8$，则 $t=$(　　)

A．0　　B．2　　C．4　　D．8

25.（2020春•桃城区校级月考）已知函数 $f(x)=x^3+x+1+\sin x$，若 $f(a-1)+f(2a^2)\le 2$，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$[-1, \frac{3}{2}]$　　B．$[-\frac{3}{2}, 1]$　　C．$[-1, \frac{1}{2}]$　　D．$[-\frac{1}{2}, 1]$

26.（2019•上虞区二模）函数 $f(x)=2+x+\sin x\sqrt{1-x^2}$ 的最大值为 M，最小值为 N，则 $M+N$ 的值是(　　)

A．0　　B．1　　C．2　　D．4

27.（2019•汇川区校级月考）已知函数 $f(x)=ax^3+\sin x-x(a\in R)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围为(　　)

A．$(0,\frac{1}{6}]$　B．$[\frac{1}{6},+\infty]$　C．$(0,\frac{1}{4}]$　D．$[\frac{1}{4},+\infty]$

28．（2019•益阳期末）已知函数 $f(x)=\frac{\cos\theta}{x^2}-\frac{1+2\cos\theta}{x}+1+\sin\theta+\cos\theta$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，若存在 $x\in(0,1)$，使不等式 $f(x)<0$ 成立，则 θ 的取值范围为(　　)

A．$(0,\frac{\pi}{12})$　B．$(\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2})$

C．$(0,\frac{\pi}{12})\cup(\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2})$　D．$(\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12})$

29．（2019•沙坪坝区校级月考）已知 $f(x)=\cos x$，点 $P(0,-1)$，若 $y=f(x)$ 图象上存在一点 $Q(x_0,y_0)$ 处的切线与直线 PQ 和 y 轴围成底边在 y 轴上的等腰三角形，则 $\frac{(x_0^2-1)\tan x_0}{x_0}=($　　$)$

A．2　B．3　C．4　D．6

30．（2019•滁州期末）设函数 $f(x)=ax^3-x+1(x\in R)$，若对于任意 $x\in[-1,1]$ 都有 $f(x)\geq 0$，则实数 a 的取值范围为(　　)

A．$(-\infty,2]$　B．$[0,+\infty)$　C．$[0,2]$　D．$[1,2]$

31. 设函数 $f\left(x\right)=|x^3+ax+bx+c|$，$a$，$b$，$c\in R$，总存在 $x_0\in\left[0,4\right]$，使得不 $f\left(x_0\right)\geq m$ 等式成立，则实数 m 的取值范围是.

32．（2019•徐州期中）已知 $a\in R$，若函数 $f(x)=x^3+ax(-1\leq x\leq 2)$ 的最大值为 M，则 M 的最小值为____.

专题 15 导数和三角函数交汇之解答题

第一讲关联最紧密，泰勒帮你办

若 f 在点 x_0 可导，则有 $f(x)=f\left(x_0\right)+f^{'}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+o\left(x-x_0\right)$. 即在点 x_0 附近，用一次多项式 $f\left(x_0\right)+f^{'}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$ 逼近函数 $f(x)$ 时,其误差为 $\left(x-x_0\right)$ 的高阶无穷小量.然而在很多场合，取一次多项式逼近是不够的，往往需要用二次或高于二次的多项式去逼近，并要求误差为 $O\left(\left(x-x_0\right)\right)^n$,其中 n 为多项式的次数.为此，我们考察任一 n 次多项式 $p_n(x)=a_0+a_1\left(x-x_0\right)+a_2\left(x-x_0\right)^2+\cdots+a_n\left(x-x_0\right)^n$ 逐次求它在点 x_0 处的各阶导数得到.

对于一般函数 f, 设它在点 x_0 存在直到 n 阶的导数.由这些导数构造一个 n 次多项式

$T_n(x)=f\left(x_0\right)+\dfrac{f^{'}\left(x_0\right)}{1!}\left(x-x_0\right)+\dfrac{f^{''}\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$ (2),称为函数 f 在点 x_0 处的泰勒(Taylor)多项式, $T_n(x)$ 的各项系数 $\dfrac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}(k=1,2,\cdots,n)$ 称为泰勒系数.由上面对多项式系数的讨论，易知 $f(x)$ 与其泰勒多项式 $T_n(x)$ 在点 x_0 有相同的函数值和相同的直至 n 阶导数值，即 $f^{(k)}\left(x_0\right)=T_n^{(k)}\left(x_0\right),\quad k=0,\quad 1,\quad 2,\cdots,n$.

若函数 f 在点 x_0 存在直至 n 阶导数,则有 $f(x)=T_n(x)+o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$,

即 $f(x)=f\left(x_0\right)+f^{'}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\dfrac{f^{''}\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\cdots\dfrac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$

$f(x)-T_n(x)=o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$,即以(2)式所示的泰勒多项式逼近 $f(x)$ 时,其误差为关于 $\left(x-x_0\right)^n$ 的高阶无穷小量.形如 $O\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$ 的余项称为佩亚诺(Peano)型余项.

所以（3）式称为函数 f 在点, x_0 处的泰勒公式, $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$ 称为泰勒公式的余项，形如 $O\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$ 的余项称为佩亚诺(Peano)型余项.所以(3)式又称为带有佩亚诺型余项的泰勒公式.

以后用得较多的是泰勒公式(3)在 $x_0=0$ 时的特殊形式:

$f(x)=f(0)+f^{'}(0)x+\dfrac{f^{''}(0)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$ (4)，它也称为（带有悠亚诺余项的）麦克劳林

(Maclaurin)公式.由此可得近似公式: $f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ (5);

由带有佩亚诺余项的泰勒公式（麦克劳林公式）可得如下常用函数的展开式，先看三角函数的:

①$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$

②$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$

我们通常能够用到的是 $x-\dfrac{x^3}{6}\le\sin x\le x$ 对于恒成立， $1-\dfrac{x^2}{2}\le\cos x\le 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ 对于 $x\ge 0$ 恒成立，

由于 $\sin x$ 是奇函数，所以公式①的右边只有奇次方项，由手 $\cos x$ 是偶函数，所以公式②的右边只有偶次方项;对公式①求导可得公式②，反之对公式②求导可得公式①,若将公式①和②中的负号全部改为正号

并两式相加，则得公式:(3) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$

根据(3)高考中常见 $\begin{cases}e^x\ge 1+x+\dfrac{x^2}{2}(x\ge 0)\\ e^x\le 1+x+\dfrac{x^2}{2}(x\le 0)\end{cases}$, 由 $x\ge 0$, 故 $-x\le 0$, 则 $\begin{cases}e^{-x}\le 1-x+\dfrac{x^2}{2}(x\ge 0)\\ e^{-x}\ge 1-x+\dfrac{x^2}{2}(x\le 0)\end{cases}$;;所以我们经

常会用到一个不等式: $e^x-e^{-x}\ge 2x\ge 2\sin x(x\ge 0)$, 加强型: $e^x-e^{-x}\ge 2x+\dfrac{x^3}{3}$;

我们经常会用到: $1+x<e^x<\dfrac{1}{1-x}(0<x<1)$.

④$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+o\left(x^n\right)$, $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n+o\left(x^n\right)$

$1+x+x^2+\ldots+x^n=\dfrac{1}{1-x}(-1<x<1)$, $1-x+x^2+\ldots+(-x)^n=\dfrac{1}{1+x}(-1<x<1)$ 均为等比数列求和

例 1.验证下列函数的麦克劳林公式:

(1) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{m-1}\dfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m})$ (2) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$;

解析(1)设 $f(x)=\sin x$, 由于 $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{k\pi}{2}\right)$, 因此 $f^{(2k)}(0)=0$, $f^{(2k-1)}(0)=(-1)^{k-1}$, $k=1,2\cdots,n$

代人公式④，便得到 $\sin x$ 的麦克劳林公式.由于这里有 $T_{2m-1}(x)=T_{2m}(x)$, 因此公式中的余项可以写作

$o\left(x^{2m-1}\right)$, 也可以写作 $o\left(x^{2m}\right)$).

(2)设 $f(x)=\ln(1+x)$, $f^{'}(x)=\dfrac{1}{1+x},\cdots,f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$, $k=1,2,\cdots,n$

设 $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!,k=1,2,\ldots,n$, 代人公式 (4), 便得 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林公式,我们得到:

⑤ $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$, 根据⑤, 高考中常见:

$$\begin{cases} x-\dfrac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x(x\ge0) \\ x-\dfrac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3(x\ge0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}<\ln x<\dfrac{2(x-1)}{x+1}(0<x<1) \\ \dfrac{2(x-1)}{x+1}<\ln x<\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}(x>1) \end{cases}$$

例 2.写出 $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}$ 的麦克劳林公式.

解析用 $\left(-\dfrac{x}{2}\right)$ 替换公式 1)中的 x, 便得 $e^{-\frac{x}{2}}=1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2^2\cdot2!}+\cdots(-1)^n\cdot\dfrac{x^n}{2^n n!}+o\left(x^n\right)$.

注意：这就能合理解释了 $e^x\ge1+x+\dfrac{x^2}{2}$, 而 $e^{-x}\le1-x+\dfrac{x^2}{2}$, 关注下一项的正负是关键.

例 3.求 $\ln x$ 在 $x=2$ 处的泰勒公式.

解析由于 $\ln x=\ln[2+(x-2)]=\ln2+\ln\left(1+\dfrac{x-2}{2}\right)$,

因此 $\ln x=\ln2+\dfrac{1}{2}(x-2)-\dfrac{1}{2\cdot2^2}(x-2)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n\cdot2^n}(x-2)^n+o\left((x-2)^n\right)$ 我们之前讲到的万能切线找点不等式: $\ln\dfrac{x}{x_0}\le\dfrac{x}{x_0}-1\Leftrightarrow\ln x\le\dfrac{x}{x_0}+\ln x_0-1=\ln x_0+\dfrac{x-x_0}{x_0}$, 我们能写出 $\ln x$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒公式为 $\ln x=\ln x_0+\dfrac{1}{x_0}\left(x-x_0\right)-\dfrac{1}{2\cdot x_0^2}\left(x-x_0\right)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n\cdot x_0^n}\left(x-x_0\right)^n+o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$

则 $\ln x$ 在 $x=1$ 处的泰勒展开式为: $\ln x=(x-1)-\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}(x-1)^n+o\left((x-1)^n\right)$,

同理 $\ln\left(x+x_0\right)$ 在 $x=0$ 处的泰勒公式为: $\ln\left(x+x_0\right)=\ln x_0+\dfrac{x}{x_0}-\dfrac{x^2}{2x_0^2}+\dfrac{x^3}{3x_0^3}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{nx_0^n}+o(x)^n$;

e^x 在 $x=x_0$ 处的泰勒公式为 $e^x=e^{x_0}\left(1+\left(x-x_0\right)+\dfrac{1}{2}\left(x-x_0\right)^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}\left(x-x_0\right)^n+o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)\right)$;

切都可以用平移来解释理解.

秒杀秘籍：泰勒展开式的任意形式

例 4.（2014•新课标Ⅱ）已知函数 $f(x)=e^{x}-e^{-x}-2x$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）设 $g(x)=f(2x)-4bf(x)$，当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，求 b 的最大值；

（Ⅲ）已知 $1.4142<\sqrt{2}<1.4143$，估计 $\ln 2$ 的近似值（精确到 0.001）.

解析（1）由 $f(x)$ 得 $f^{'}(x)=e^{x}+e^{-x}-2\geq 2\sqrt{e^{x}\cdot e^{-x}}-2=0,$ 即 $f^{'}(x)\geq 0,$ 当且仅当 $e^{x}=e^{-x}$ 即 $x=0$ 时, $f^{'}(x)=0,$ 所以函数 $f(x)$ 在 R 上为增函数.

(2)函数 $g(x)=f(2x)-4bf(x)=e^{2x}-e^{-2x}-4b\left(e^{x}-e^{-x}\right)+(8b-4)x,$ 求导得

$g^{'}(x)=2\left[e^{2x}+e^{-2x}-2b\left(e^{x}+e^{-x}\right)+(4b-2)\right]=2\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)\left(e^{x}+e^{-x}+2-2b\right).$

①由 $e^{x}+e^{-x}>2,$ 则 $e^{x}+e^{-x}+2>4,$ 当 $2b\leq 4,$ 即 $b\leq 2$ 时, $g^{'}(x)\geq 0,$ 当且仅当 $x=0$ 时取等号，从而 $g(x)$ 在 R 上为伯函数,石 $g(0)=0,$ 所以 $x>0$ 时, $g(x)>0$,符合题意.

② 当 $b>2$ 时，若 x 满足 $2<e^{x}+e^{-x}<2b-2,$ 即 $\begin{cases}2<e^{x}+e^{-x}\\ e^{x}+e^{-x}<2b-2\end{cases},$ 得 $\ln\left(b-1-\sqrt{b^{2}-2b}\right)<x<\ln\left(b-1+\sqrt{b^{2}-2b}\right)$，此时，$g^{'}(x)<0,$ 又由 $g(0)=0$ 知，当 $0<x\leq\ln\left(b-1+\sqrt{b^{2}-2b}\right)$ 时, $g(x)<0$,不符合题意.综合①②知, $b\leq 2,$ 即 b 的最大值为 $2.$

(3)因为 $1.4142<\sqrt{2}<1.4143,$ 根据(2)中 $g(x)=e^{2x}-e^{-2x}-4b\left(e^{x}-e^{-x}\right)+(8b-4)x,$ 为了凑配 $\ln 2,$ 并利用 $\sqrt{2}$ 的近似值,故将 $\ln\sqrt{2}$ 即 $\frac{1}{2}\ln 2$ 代入 $g(x)$ 的解析式中,得 $g(\ln\sqrt{2})=\frac{3}{2}-2\sqrt{2}b+2(2b-1)\ln 2.$

当 $b=2$ 时,由 $g(x)>0,$ 得 $g(\ln\sqrt{2})=\frac{3}{2}-4\sqrt{2}+6\ln 2>0,$ 从而 $\ln 2>\frac{8\sqrt{2}-3}{12}>\frac{8\times 1.4142-3}{12}=0.6928;$

令 $\ln\left(b-1+\sqrt{b^{2}-2b}\right)=\ln\sqrt{2},$ 得 $b=\frac{3\sqrt{2}}{4}+1>2,$ 当 $0<x\leq\ln\left(b-1+\sqrt{b^{2}-2b}\right)$ 时,由 $g(x)<0$

得 $g(\ln\sqrt{2})=-\frac{3}{2}-2\sqrt{2}+(3\sqrt{2}+2)\ln 2<0,$ 得 $\ln 2<\frac{18+\sqrt{2}}{28}<\frac{18+1.4143}{28}<0.6934,$ 所以 $\ln 2$ 的近似值为 $0.693.$

注意：针对(2),函数 $g(x)=f(2x)-4bf(x)=\left(e^{2x}-e^{-2x}-4x\right)-4b\left(e^{x}-e^{-x}-2x\right)$,根据泰勒展开式,

$e^{x}-e^{-x}-2x\geq\frac{x^{3}}{3}\Leftrightarrow e^{2x}-e^{-2x}-4x\geq\frac{(2x)^{3}}{3}\Leftrightarrow\frac{(2x)^{3}}{3}-4b\frac{x^{3}}{3}\geq0\Leftrightarrow b\leq2$,这样，所有的端,点效应，都是按照泰勒公式展开来命题的，如果有兴趣，不妨去研究一下：:

我们研究一下第三问,同样来自于泰勒展开式,因为 $\ln2=\ln\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$,转化研究 $\ln\frac{1+x}{1-x}$ 的结构,

$\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}+\frac{x^{5}}{5}-\frac{x^{6}}{6}+\ldots\quad\ln(1-x)=-x-\frac{x^{2}}{2}-\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}-\frac{x^{5}}{5}-\frac{x^{6}}{6}+\ldots$

两式相减得 $\ln\frac{1+x}{1-x}=2x+\frac{2}{3}x^{3}+\frac{2}{5}x^{5}+\ldots$

取 $x=\frac{1}{3}$ 即得符合精度的近似值 $\ln2=2\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3}+\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{5}+\ldots\approx0.693$

例 5.（2018•新课标III）已知函数 $f(x)=(2+x+ax^{2})\ln(1+x)-2x$.

（1）若 $a=0$，证明：当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$；

（2）若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a .

解析(1)当 $a=0$ 时, $f(x)=(2+x)\ln(1+x)-2x(x>-1)$,求导 $f'(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$, $f''(x)=\frac{x}{(x+1)^{2}}$,

可得 $x\in(-1,0)$ 时，$f''(x)\leq0$, $x\in(0,+\infty)$ 时，$f''(x)\geq0$,故 $f'(x)$ 在(-1,0)递减,在 $(0,+\infty)$ 递增,

故 $f'(x)\geq f'(0)=0$,所以 $f(x)=(2+x)\ln(1+x)-2x$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，$f(0)=0$.

当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$; 当 $x>0$ 时，$f(x)>0$.（此问也能用对数单身狗解答， 参考秒 1).

(2)法一由 $f(x)=\left(2+x+ax^{2}\right)\ln(1+x)-2x$,得

$f'(x)=(1+2ax)\ln(1+x)+\frac{2+x+ax^{2}}{x+1}-2=\frac{ax^{2}-x+(1+2ax)(1+x)\ln(x+1)}{x+1}$,

令 $h(x)=ax^{2}-x+(1+2ax)(1+x)\ln(x+1)$,求导 $h'(x)=4ax+(4ax+2a+1)\ln(x+1)$.

当 $a\geq0$, $x>0$ 时，$h'(x)>0$, $h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)>h(0)=0$,即 $f'(x)>0$,

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极大值,点,不符合题意.

当 $a<0$ 时， $h''(x)=8a+4a\ln(x+1)+\dfrac{1-2a}{x+1}$， 显然 $h''(x)$ 单调递减，

①令 $h''(0)=0$,解得 $a=-\dfrac{1}{6}$.

当 $-1<x<0$ 时,$h''(x)>0$,当 $x>0$ 时,$h''(x)<0$,故 $h'(x)$ 在(-1,0)上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

故 $h'(x)\le h'(0)=0$,故 $h(x)$ 单调递减, 又 $h(0)=0$, 当 $-1<x<0$ 时,$h(x)>0$,即 $f'(x)>0$，,

当 $x>0$ 时,$h(x)<0$,即 $f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在(-1,0)上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值,点,符合题意;

②若 $-\dfrac{1}{6}<a<0$, 则 $h''(0)=1+6a>0$, $h''\left(e^{-\frac{1+6a}{4a}}-1\right)=(2a-1)\left(1-e^{\frac{1+6a}{4a}}\right)<0$

$h''(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一一个零点,设为 x_0,当 $0<x<x_0$ 时, $h''(x)>0$, $h'(x)$ 单调递增,

故 $h'(x)>h'(0)=0$,即 $f'(x)>0$,故 $f(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 上单调递增，不符合题意；

③若 $a<-\dfrac{1}{6}$, 则 $h''(0)=1+6a<0$, $h''\left(\dfrac{1}{e^2}-1\right)=(1-2a)e^2>0$，

所以 $h''(x)=0$ 在(-1,0)上有唯一一个零点,设为 x_1,当 $x_1<x<0$ 时,$h''(x)<0$, $h'(x)$ 单调递减,

故 $h'(x)>h'(0)=0$,故 $h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)<h(0)=0$,即 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(x_1,0\right)$ 上单调递减,不符合题意.综上,$a=-\dfrac{1}{6}$.

法二(对数单身狗)因为 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点,所以 $\exists m<0$, $n>0$,使得 $x\in(m, n)$ 时,$2+x+ax^2>0$

且 $f(x)\le f(0)$ 恒成立,$\left(2+x+ax^2\right)\ln(1+x)-2x\le 0 \Leftrightarrow \ln(1+x)-\dfrac{2x}{2+x+ax^2}\le 0$ 恒成立,

令 $h(x)=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{2+x+ax^2}$,则 $h(x)\le h(0)$ 恒成立,所以 $x=0$ 是 $h(x)$ 的极大值,点.

又 $h'(x)=\dfrac{x^2\left(a^2x^2+4ax+6a+1\right)}{(x+1)\left(ax^2+x+2\right)}$,则 $x=0$ 是 $t(x)=a^2x^2+4ax+6a+1$ 的 ?¨ 变号）零,点.

$t'(0)=0$,得 $a=-\dfrac{1}{6}$,而当 $a=-\dfrac{1}{6}$ 时,$h'(x)=\dfrac{x^3(x-24)}{(x+1)\left(x^2-6x-12\right)^2}$,则 $-1<x<0$ 时,$h'(x)>0$;$0<x<24$

时,$h'(x)<0$;所以 $x=0$ 是 $h(x)$ 的极大值点,也是 $f(x)$ 的极大值,点,故 $a=-\dfrac{1}{6}$.

注意：将 $f(x)=\left(2+x+ax^2\right)\ln(1+x)-2x$ 转换为 $h(x)=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{2+x+ax^2}$,其实是“对数单身狗”的

运用，其目的是降低求导研究的难度。我们分析一下这道题的泰勒公式背景，为什么法二这样按照“对数单身狗”套路得到的答案和法一的直接硬鲁得到的答案一致？为什么将 $f(x)=\left(2+x+ax^2\right)\ln(1+x)-2x$ 转换为 $h(x)=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{2+x+ax^2}$ 后，导函数完全变了,但为什么不会改变极值位置?

秒杀秘籍：泰勒展开式的极值界定法

对于任意一个能用泰勒公式在 $x=0$ 处展开的函数：

$$f(x)=f(0)+f^{'}(0)x+\frac{f^{''}(0)}{2!}x^2+\cdots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$$

我们可以将其写成 $f(x)\approx a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n$ 这种近似的形式:

当 $x=0$ 取得极大值时,一定会出现最低偶次项系数为负,即 $\begin{cases}a_1=0\\a_2<0\end{cases}$, 或者 $\begin{cases}a_1=0\\a_2=0\\a_3=0\\a_4<0\end{cases}$, 以此类推;

当 $x=0$ 取得极小值时,一定会出现最低偶次项系数为正,即 $\begin{cases}a_1=0\\a_2>0\end{cases}$, 或者 $\begin{cases}a_1=0\\a_2=0\\a_3=0\\a_4>0\end{cases}$, 以此类推;

由于能用泰勒公式展开的函数都是属于无限函数（ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 属于有限函数，没有泰勒展开式,大学将此无限函数叫做无穷级数）,比如 $e^x,\ln(x+1),\sin x,\cos x,\dfrac{1}{1+x},\dfrac{1}{1-x}$ 等一系列有展开式的，展开式也是多项整式，故最低次项显得特别重要.

拿有限函数举个简单例子, $y=1+ax+x^2$ 这个函数，最低次项是一次（常数项导函数为零，不影响极值点出现）,当 $a\neq 0$ 时,则此函数不可能在 $x=0$ 时取得极值,而一旦此函数 $a=0$ 时,此函数就变成 $y=x^2+1$,在 $x=0$ 处取得极小值;同理，函数 $y=1+ax+bx^3-2x^4$ 中，当仅当 $a=b=0$ 时,此函数在 $x=0$ 处取得极大值.

类比推理到优限函数，田手在 $x\to 0$ 时, x^3 是 x^2 的高阶无穷小,同样，x^5 也是 x^4 的高阶无穷小，当一个无限函数取得极值时，一定是此函数的最低阶无穷小处取得极值，而奇次项是中心对称属性，无法取得极值，偶次项则是轴对称属性，能取得极值。再根据二次函数的开口方向来类比，系数为正，开口向上,取得极小值，同理，系数为负，开口向下，取得极大值.

综上，一个无限函数在最低阶无穷小必须是在偶次项时出现，且系数的正负决定是极大值或者是极小值，

此方法叫做泰勒极值界定法.

我们来看看例 5 第二问，这也是国内很多老师在探讨的，此题本质是什么，我们不妨用泰勒公式在 $x=0$ 处展开，可以得到 $f(x)=\left(2+x+ax^2\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)\right)-2x$, 要判断极值点，通常取前三到四项即可, $f(x)\approx\left(2+x+ax^2\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)-2x=\left(a-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)x^3+\left(\frac{1}{3}-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\right)x^4$, 故最低阶的无穷小必须是 x^4, 则 $a-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=0\Rightarrow a=-\frac{1}{6}$, 此时 x^4 系数为 $-\frac{1}{12}$, 正好取得最大值，满足题意.

再来验算一下法二, $h(x)=\ln(1+x)-\frac{2x}{2+x+ax^2}\approx\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)-x\cdot\frac{1}{1+\frac{\left(x+ax^2\right)}{2}}$, 我们需要按照复合函数函数来理解 $\frac{1}{1+\frac{\left(x+ax^2\right)}{2}}\approx 1-\frac{\left(x+ax^2\right)}{2}+\frac{\left(x+ax^2\right)^2}{4}$ 的展开式，通常我们找到能取到 x^4 的项的系数即可,即

$$h(x)=\ln(1+x)-\frac{2x}{2+x+ax^2}\approx\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)-x\cdot\left(1-\frac{\left(x+ax^2\right)}{2}+\frac{\left(x+ax^2\right)^2}{4}-\frac{\left(x+ax^2\right)^3}{8}\right)$$

$=x^3\left(\frac{1}{3}+\frac{a}{2}-\frac{1}{4}\right)+x^4\left(-\frac{1}{4}-\frac{a}{2}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$, 则 心 须 有 $\frac{1}{3}+\frac{a}{2}-\frac{1}{4}=0\Rightarrow a=-\frac{1}{6}$, 且 $-\frac{1}{4}-\frac{a}{2}+\frac{1}{8}=-\frac{1}{24}<0$, 故满足题意，所以“对数单身狗"在这类确定极值点的问题中取到了大大简化的效果，虽然泰勒公式不能出现在解答题当中，但是对一些选填题，几乎是一步秒杀，解答题当中，也能给解答过程提供“文要探路”，细心的读者发现，其实“洛义达"洛几层，泰勒就展开到第几阶导，其本质是一样的，泰勒公式还能更系统更强大阐述一些导数问题的本质.

例 6.（2019•浙江五华校级月考）已知函数 $f(x)=e^x\cdot(a\sin x+b\cos x)$，若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点，且 $a^2+b^2=2$，则 $a=(\quad)$

A. -1 B. 0 C. 1 D. ±1

解析法一求导 $f'(x)=e^x[a(\sin x+\cos x)+b(\cos x-\sin x)]$, 所以 $f'(0)=a+b=0$, 又 $a^2+b^2=2$, 所以 $\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$, 当 $a=-1$, $b=1$ 时, 得 $f'(x)=-2e^x\sin x$, 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上 $f'(x)>0$, 在区间

$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上$f'(x)<0$,所以$x=0$是$f(x)$极大值点,不符合题意.当$a=1$, $b=-1$时, $f'(x)=2e^x\sin x$,故在区间$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$上$f'(x)<0$,在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上$f'(x)>0$,所以$x=0$是$f(x)$极小值点,符合题意.故$a=1$,故选C.

法二因为$f(x)=e^x\cdot(a\sin x+b\cos x)$在$x=0$处的泰勒展开式为$f(x)\approx\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\left(ax+b-\frac{b}{2}x^2\right)$,即$(a+b)x+ax^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)x^3-\frac{b}{4}x^4+b=0$,可知一次项系数必须为零,即$a+b=0$,又$a^2+b^2=2$,所以$a=\pm1$,又因为$x=0$是$f(x)$的一个极小值,点,所以二次项系数必须大于零,即$a>0$,所以$a=1$,故选C.

例7.(2019•乌鲁木齐二模)若直线$y=x+m$与曲线$y=a\sin x+b\cos x(a,b,m\in R)$相切于点$(0,1)$,则$\frac{a+b}{m}$的值为____.

解析法一根据题意,若直线$y=x+m$与曲线$y=a\sin x+b\cos x(a,b,m\in R)$相切于点$(0,1)$,则点(0,1)为直线$y=x+m$与$y=a\sin x+b\cos x$的交点,,则有$\begin{cases}1=0+m\\1=a\sin 0+b\cos 0\end{cases}$,解可得$m=1$, $b=1$, 又由$y=a\sin x+b\cos x$,则$y'=a\cos x-b\sin x$,又由$y'|_{x=0}=a\cos 0-b\sin 0=1$,解可得$a=1$,则$\frac{a+b}{m}=\frac{1+1}{1}=2$.故答案为2.

法二(泰勒展开秒杀法)由题意切点为$(0,1)$,故$m=1$,由$y=a\sin x+b\cos x(a,b,m\in R)$在零处的泰勒展开式为$ax+b-\frac{b}{2}x^2$,根据题意有$ax+b-\frac{b}{2}x^2-x-1=0$,可知零次项和一次项系数必须为零,即$ax-x=0\Rightarrow a=1$, $b-1=0\Rightarrow b=1$,所以$\frac{a+b}{m}=\frac{1+1}{1}=2$.故答案为2.

秒杀秘籍:泰勒展开式的切线界定

若$f(x)$在点$x=x_0$的切线为$y=ax+b$,我们可以考虑用泰勒展开式来验证$f(x)$左右两侧与切线关系,即切线是在$f(x)$的上方还是下方,为了方便理解,我们统一平移得到$f(x+x_0)$和直线$y=a(x-x_0)+b$,构造函数$g(x)=f(x+x_0)-a(x-x_0)-b$,将$g(x)$进行泰勒展开,一定会出现x的一次项为零,常数项为零,剩余部分的最低阶优穷小的正负号决定此函数$f(x+x_0)$是在切线$y=a(x-x_0)+b$上方还是下方.

例如： $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots$, 其在 $x=0$ 处的切线为 $y=x+1$, 构造 $g(x)=e^x-x-1\approx\frac{x^2}{2}$, 所以当 $x\to0^+$, $g(x)>0$, 当 $x\to0^-$, $g(x)>0$; $\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线为 $y=x-1$, 我们可以将 $\ln x$ 在 $x=1$ 处进行展开, 得到 $\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\cdots$, 故 $g(x)=\ln x-(x-1)\approx-\frac{(x-1)^2}{2}$, 所以当 $x\to1^+$, $g(x)<0$, 当 $x\to1^-$，$g(x)<0$;我们也可以利用平移，得到 $\ln(x+1)$ 在 $x=0$ 处的切线为 $y=x$, 我们可以将 $\ln(x+1)$ 在 $x=0$ 处进行展开，得到 $\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots$, 故 $g(x)=\ln(x+1)-x\approx-\frac{x^2}{2}$, 所以当 $x\to0^+$, $g(x)<0$, 当 $x\to0^-$，$g(x)<0$; 综合可得, e^x 始终在切线 $y=x+1$ 上方, $\ln x$ 始终在切线 $y=x-1$ 下方.

我们来验算一下 $x\cos x$ 在 $x=0$ 处切线，不妨设切线方程为 $y=ax+b$, $x\cos x\approx x\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$, 构造函数则 $g(x)\approx x\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-ax-b=-\frac{x^3}{2}+(1-a)x-b$, 则一定有 $a=1$, $b=0$, 当 $x\to0^+$，$g(x)<0$, 当 $x\to0^-$, $g(x)>0$. 所以 $x\cos x$ 在 $x=0$ 处切线方程为 $y=x$, 且当 $x>0$ 时，函数在切线下方，当 $x<0$ 时，函数在切线上方.

例 8.（2019•吉安期末）函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})+a(\cos x-1)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线与直线 $x-y+1=0$ 垂直，则该切线在 y 轴上的截距为____.

解析法一因 $f'(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-a\sin x$, 由题意得 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-a=-1$, 解得 $a=2$, 又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-a=-1$，则 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程为 $y+1=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, 令 $x=0$ 得 $y=\frac{\pi}{2}-1$, 则该切线在 y 轴上的截距为 $\frac{\pi}{2}-1$. 故答案为 $\frac{\pi}{2}$-1.

法二（泰勒展开秒杀法）设函数在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线为 $y=-x+m$, $f(x)$ 整体向左移亮个单位，得 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+a(-\sin x-1)$, 可得 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x+\cos x-a(\sin x+1)$ 在 $x=0$ 处的展开式为 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\approx x+1-\frac{x^2}{2}-ax-a$, 构造 $g(x)=x+1-\frac{x^2}{2}-ax-a+x-m=0$, 则 $2x-ax=0$, 且

$1-a-m=0$, 得 $a=2$, $m=-1$, 所以 $y=-x-1$, 再往右移回 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位，即得 $y=-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)-1=-x+\dfrac{\pi}{2}-1$, 则该切线在 y 轴上的截距为 $\dfrac{\pi}{2}$-1.故答案为 $\dfrac{\pi}{2}$-1.

例 9.（2019•大连二模）函数 $f(x)=e^{x}-e^{-x}-a\sin x(x\in R$， e 是自然对数的底数， $a>0)$ 存在唯一的零点，则实数 a 的取值范围为(　　)

A．$(0，2]$　　B．$(0，1]$　　C．$(0，e]$　　D．$(0，\pi)$

解析法一由题意知: $f(0)=0$, 函数 $f(x)=e^{x}-e^{-x}-a\sin x$, $x\in R$ (e 是自然对数的底数, $a>0$）存在唯一的零点,故函数 $f(x)$ 只有一个零,点 0,由 $f(-x)=e^{-x}-e^{x}+a\sin x=-f(x)$, 则函数 $f(x)$ 为奇函数.

所以只考虑 $x>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上无零点即可,当 $x>0$ 时,有 $x>\sin x$.

函数 $f(x)=e^{x}-e^{-x}-a\sin x>e^{x}-e^{-x}-ax=g(x)$, 当 $x\in(0,+\infty)$, 由 $g(0)=0$, $g'(x)=e^{x}-e^{-x}+a$, 故 $g'(x)>g'(0)=a>0$, 所以 $g(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增.故 $g(x)>g(0)=0$. 函数 $g(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上无零点,函数 $f(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上无实,点.导数 $f'(x)=e^{x}+e^{-x}-a\cos x=g(x)$, $f'(0)=2-a$.又因为 $g'(x)=e^{x}-e^{-x}+a\sin x$, 故 $g'(x)>g'(0)=0$, 则 $g(x)$ 在 $x\in(0,\pi)$ 上单调递增，当 $2-a\geq 0$, 即 $0<a\leq 2$ 时， $f(x)$ 单调递增，故选 A.

法二（泰勒展开秒杀法)因为 $y=e^{x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为 $1+x+\dfrac{x^{2}}{2}+\dfrac{x^{3}}{6}+\cdots$, $y=e^{-x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为 $1-x+\dfrac{x^{2}}{2}-\dfrac{x^{3}}{6}+\cdots$, $y=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为 $x-\dfrac{x^{3}}{6}+\cdots$, 故有 $e^{x}-e^{-x}\approx 2x+\dfrac{x^{3}}{3}$, 根据题意 $2x+\dfrac{x^{3}}{3}=a\left(x-\dfrac{x^{3}}{6}\right)$, 得 $a=2$, 若 $a>2$ 易知 $y=e^{x}-e^{-x}$ 与 $y=a\sin x$ 无交点,故 $0<a\leq 2$,故选 A.

我们接下来看看需要用到泰勒公式展开来放缩的高考题，或者可以用泰勒公式展开来解释原理的高考题.

例 10.（2019•新课标Ⅰ）已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

（1）证明： $f'(x)$ 在区间 $(0，\pi)$ 存在唯一零点；

（2）若 $x\in[0，\pi]$ 时， $f(x)\geq ax$，求 a 的取值范围.

解析(1)证明求导得 $f'(x)=2\cos x-\cos x+x\sin x-1=\cos x+x\sin x-1$, 令 $g(x)=\cos x+x\sin x-1$,

则 $g^{'}(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$, 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时, $x\cos x>0$, 当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时, $x\cos x<0$, 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，极大值为 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1>0$, 又 $g(0)=0, g(\pi)=-2$, 故 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有唯一零点,即 $f^{'}(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有唯一零点;

(2)由(1)知, $f^{'}(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有唯一零点 x_0, 使得 $f^{'}\left(x_0\right)=0$, 且 $f^{'}(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 为正，在 $\left(x_0,\pi\right)$ 为负，故 $f(x)$ 在 $\left[0,x_0\right]$ 单调递增，在 $\left[x_0,\pi\right]$ 单调递减，结合 $f(0)=0$, $f(\pi)=0$, 可知 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上非负，令 $h(x)=ax$, 因为 $f(x)\geq h(x)$, 根据 $f(x)$ 和 $h(x)$ 的图象可知, $a\leq 0$, a 的取值范围是 $(-\infty,0]$.

注意：我们将此题进行泰勒展开，发现 $f(x)\approx 2x-x+\frac{x^3}{2}-x\geq ax\Leftrightarrow\frac{x^3}{2}\geq ax$, 由于 $\frac{x^3}{2}$ 是一个比 ax 低阶无穷小的量，故只能 $a\leq 0$.

例 11．（2019•新课标Ⅰ）已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数．证明：

（1） $f'(x)$ 在区间 $(-1，\frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点；

（2） $f(x)$ 有且仅有 2 个零点．

解析(1)由题意得 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$, 求导 $f^{'}(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$, $f^{''}(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}$,令 $g(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}$, 则 $g^{'}(x)=-\cos x-\frac{2}{(1+x)^3}<0$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立,故 $f^{''}(x)$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上为减函数，又 $f^{''}(0)=1$, $f^{''}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1+\frac{1}{\left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2}<-1+1=0$, 由零点存在定理可知,函数 $f^{''}(x)$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在唯一的零点 x_0, 结合单调性可得, $f^{'}(x)$ 在 $\left(-1,x_0\right)$ 上单调递增，在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,可得 $f^{'}(x)$ 在区间 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点;

(2)由(1)知,当 $x\in(-1,0)$ 时, $f^{'}(x)$ 单调递增， $f^{'}(x)<f^{'}(0)=0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时, $f^{'}(x)$ 单调递增， $f^{'}(x)>f^{'}(0)=0$, $f(x)$ 单调递增;

由于 $f'(x)$ 在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,且 $f'\left(x_0\right)>0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{1+\frac{\pi}{2}}<0$,

由零点存在定理可知，函数 $f'(x)$ 在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在唯一零点 x_1, 结合单调性可知,

当 $x\in\left(x_0,x_1\right)$ 时, $f'(x)$ 单调递减, $f'(x)>f'\left(x_1\right)=0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x\in\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x)$ 单调递减, $f'(x)<f'\left(x_1\right)=0$, $f(x)$ 单调递减.

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时, $\cos x<0$, $-\frac{1}{1+x}<0$, 于是 $f'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}<0$, $f(x)$ 单调递减,

其中 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)>1-\ln\left(1+\frac{3.2}{2}\right)=1-\ln 2.6>1-\ln e=0$,

$f(\pi)=-\ln 1+\pi)<-\ln 3<0$. 于是可得下表:

x	$(-1,0)$	0	$(0,x_1)$	x_1	$(x_1,\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\pi)$	π
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	单调递减	0	单调递增	大于 0	单调递减	大于 0	单调递减	小于 0

结合单调性可知,函数 $f(x)$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有且只有一个零,点 0,由函数零点存在性定理可知, $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,

上有且只有一个零点 x_2, 当 $x\in[\pi,+\infty)$ 时, $f(x)=\sin x-\ln(1+x)<1-\ln(1+\pi)<1-\ln 3<0$, 因此函数

$f(x)$ 在 $[\pi,+\infty)$ 上无零,点.综上, $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

总结：三角函数+导数找点属于导数压轴题的经典考法，此题可以根据泰勒展开进行文要探路的找点，我们之前谈到的找点,一定是基于知道了零点的个数和大致范围进行的,此题第一问, $f'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$ 在区间 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 有唯一极大值，我们进行泰勒展开,发现 $f'(x)\approx 1-\frac{x^2}{2}-1+x-x^2=-\frac{3}{2}x^2+x$, 这样得到的靠近函数有极大值，且极大值 $x=\frac{1}{3}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 故此题我们将确定 $f'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$ 的单调性以后进行找点，进而得到答案;第二问, $f(x)=\sin x-\ln(1+x)\approx x-\frac{x^3}{6}-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}=\frac{x^2}{2}(1-x)$, 易知有一个零点是零，另

一

个零点在 x 正半轴，虽然误差有点大，但还是给到了我们分析问题的突破口.

例 12.（2013•辽宁）已知函数 $f(x)=(1+x)e^{-2x}$， $g(x)=ax+\frac{x^3}{2}+1+2x\cos x$，当 $x\in[0，1]$ 时，

(I) 求证：$1-x\le f(x)\le\frac{1}{1+x}$；

(II) 若 $f(x)\ge g(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

解析(1)①当 $x\in[0,1]$ 时，$(1+x)e^{-2x}\ge 1-x\Leftrightarrow(1+x)e^{-x}\ge(1-x)e^{x}$，令 $h(x)=(1+x)e^{-x}-(1-x)e^{x}$，

则 $h'(x)=x\left(e^{x}-e^{-x}\right)$， 当 $x\in[0,1]$ 时， $h'(x)\ge 0$，所以 $h(x)$ 在[0,1)上是增函数，所以 $h(x)\ge h(0)=0$，

即 $f(x)\ge 1-x$；②当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)\le\frac{1}{1+x}\Leftrightarrow e^{x}\ge 1+x$，令 $u(x)=e^{x}-1-x$，则 $u'(x)=e^{x}-1$. 当 $x\in[0,1]$ 时， $u'(x)\ge 0$， $u(x)$ 在[0,1]单调递增，故 $u(x)\ge u(0)=0$， 所以 $f(x)\le\frac{1}{1+x}$. 综上可知 $1-x\le f(x)\le\frac{1}{1+x}$.

(2) 设

$$G(x)=f(x)-g(x)=(1+x)e^{-2x}-\left(ax+\frac{1}{2}x^{3}+1+2x\cos x\right)\ge 1-x-ax-1-\frac{1}{2}x^{3}-2x\cos x=$$

$$-x\left(a+1+\frac{x^{2}}{2}+2\cos x\right)$$，令 $H(x)=\frac{x^{2}}{2}+2\cos x$，则 $H'(x)=x-2\sin x$，令 $K(x)=x-2\sin x$，则

$K'(x)=1-2\cos x$. 当 $x\in[0,1]$ 时，$K'(x)<0$，可得 $H'(x)$ 是[0,1]上的减函数， 则 $H'(x)\le H'(0)=0$，故 $H(x)$ 在[0,1]单调递减，则 $H(x)\le H(0)=2$，故 $a+1+H(x)\le a+3$. 当 $a\le -3$ 时， $f(x)\ge g(x)$ 在[0,1]上恒成立.

下面证明当 $a>-3$ 时， $f(x)\ge g(x)$ 在[0，1]上不恒成立.

$$f(x)-g(x)\le\frac{1}{1+x}-\left(1+ax+\frac{1}{2}x^{3}+2x\cos x\right)=\frac{-x}{1+x}-ax-\frac{x^{3}}{2}-2x\cos x=-x\left(\frac{1}{1+x}+a+\frac{x^{2}}{2}+2\cos x\right)$$

令 $v(x)=\frac{1}{1+x}+a+\frac{x^{2}}{2}+2\cos x=\frac{1}{1+x}+a+H(x)$， 则 $v'(x)=\frac{-1}{(1+x)^{2}}+H'(x)$

当 $x\in[0,1]$ 时， $v'(x)\le 0$，故 $v(x)$ 在 $x\in[0,1]$ 上是减函数， $v(x)\in(a+1+2\cos 1,a+3]$.

当 $a>-3$ 时，$a+3>0$，存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $v\left(x_0\right)>0$，此时，$f\left(x_0\right)<g\left(x_0\right)$.

即 $f(x)\ge g(x)$ 在[0,1]不恒成立.综上实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-3]$.

我们来试着用泰勒公式解释：$f(x)\le\dfrac{1}{1+x}\Leftrightarrow(1+x)e^{-2x}\le\dfrac{1}{1+x}\Leftrightarrow(1+x)^2\le e^{2x}$，又 $e^x\ge1+x$，故 $f(x)\le\dfrac{1}{1+x}$，由泰勒展开式 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)\Rightarrow e^{-2x}=1-2x+2x^2+\ldots+\dfrac{(-2x)^n}{n!}+\ldots$

所以 $(1+x)e^{-2x}-(1-x)\ge(1+x)\left(1-2x+2x^2\right)-(1-x)=2x^3\ge0\Rightarrow f(x)\ge1-x$：第一问的上界和下界给了第二问必要探路的提示，

我们进行一下泰勒展开得：$G(x)=f(x)-g(x)=(1+x)e^{-2x}-\left(ax+\dfrac{1}{2}x^3+1+2x\cos x\right)$

$\approx(1+x)\left(1-2x+2x^2\right)-\left(ax+\dfrac{1}{2}x^3+1+2x-x^3\right)=(-3-a)x+\dfrac{5}{2}x^3\ge0$，止手 x^3 是 x 的高阶无穷小，显然 $a\le-3$.

我们再分析一些年代久远的高考题，关于三角函数和导数的综合。.

例 13.（2008•全国卷 II）设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

（I）求 $f(x)$ 的单调区间；

（II）如果对任何 $x\ge0$，都有 $f(x)\le ax$，求 a 的取值范围.

解析(1)求导 $f'(x)=\dfrac{(2+\cos x)\cos x-\sin x(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}=\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$，当 $2k\pi-\dfrac{2\pi}{3}<x<2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}(k\in Z)$ 时，$\cos x>-\dfrac{1}{2}$，即 $f'(x)>0$；当 $2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}<x<2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}(k\in Z)$ 时，$\cos x<-\dfrac{1}{2}$，即 $f'(x)<0$. 因此 $f(x)$ 在每一个区间 $\left(2k\pi-\dfrac{2\pi}{3},2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)(k\in Z)$ 是增函数，$f(x)$ 在每一个区间 $\left(2k\pi+\dfrac{2\pi}{3},2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}\right)(k\in Z)$ 是减函数.

(2) 令 $g(x)=ax-f(x)$，则 $g'(x)=a-\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}=a-\dfrac{2}{2+\cos x}+\dfrac{3}{(2+\cos x)^2}=3\left(\dfrac{1}{2+\cos x}-\dfrac{1}{3}\right)^2+a-\dfrac{1}{3}$ 故当 $a\ge\dfrac{1}{3}$ 时，$g'(x)\ge0$. 又 $g(0)=0$，所以当 $x\ge0$ 时，$g(x)\ge g(0)=0$，即 $f(x)\le ax$. 当 $0<a<\dfrac{1}{3}$ 时，令 $h(x)=\sin x-3ax$，则 $h'(x)=\cos x-3a$. 故当 $x\in[0,\arccos 3a)$ 时，$h'(x)>0$. 因此 $h(x)$ 在 $x\in[0,\arccos 3a)$

上单调增加．故当 $x\in(0,\arccos 3a)$ 时，$h(x)>h(0)=0$, 即 $\sin x>3ax$. 于是，当 $x\in(0,\arccos 3a)$ 时，$f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}>\dfrac{\sin x}{3}>ax$. 当 $a\le 0$ 时，有 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}>0\ge a\cdot\dfrac{\pi}{2}$. 因此，$a$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$．$\sin x\approx x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}$; 所以 $x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}\le \mathrm{ax}\left(3-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}\right)$, 所以 $1\le 3a\Rightarrow a\ge\dfrac{1}{3}$.

例 14.（2006•湖南）已知函数 $f(x)=x-\sin x$，数列 $\{a_n\}$ 满足：$0<a_1<1$，$a_{n+1}=f(a_n)$，$n=1,2,3\cdots$，证明：

（Ⅰ）$0<a_{n+1}<a_n<1$；

（Ⅱ）$a_{n+1}<\dfrac{1}{6}a_n{}^3$．

解析（1）先用数学归纳法证明 $0<a_n<1,\quad n=1,2,3$,①当 $n=1$ 时，出已知显然结论成立.

②假设当 $n=k$ 时结论成立,即 $0<a_k<1$. 因为 $0<x<1$ 时 $f'(x)=1-\cos x>0$, 所以 $f(x)$ 在(0,1)上是增函数．又 $f(x)$ 在[0,1]上连续,从而 $f(0)<f\left(a_k\right)<f(1)$, 即 $0<a_{k+1}<1-\sin 1<1$. 故 $n=k+1$ 时,结论成立.

由①②可知, $0<a_n<1$ 对一切正整数都成立.又因为 $0<a_n<1$ 时, $a_{n+1}-a_n=a_n-\sin a_n-a_n=-\sin a_n<0$, 所以 $a_{n+1}<a_n$, 综上所述 $0<a_{n+1}<a_n<1$.

(2)设函数 $g(x)=\sin x-x+\dfrac{1}{6}x^3,\quad 0<x<1$. 由（1）知，当 $0<x<1$ 时，$\sin x<x$，

从而 $g'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}=-2\sin^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2}>-2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\dfrac{x^2}{2}=0$. 所以 $g(x)$ 在(0,1)上是增函数.

又 $g(x)$ 在[0,1]上连续,且 $g(0)=0$, 所以当 $0<x<1$ 时，$g(x)>0$ 成立.

于是 $g\left(a_n\right)>0$, 即 $\sin a_n-a_n+\dfrac{1}{6}a_n^3>0$. 故 $a_{n+1}<\dfrac{1}{6}a_n^3$.

注意：$x-\dfrac{x^3}{6}\le\sin x\le x$ 不能直接拿来用，证明讨程如本题所示，也就是一个装谨步骤.

例 15.（2020•淮南一模）已知函数 $f(x)=\dfrac{x\ln x+a+1}{x}$，在区间[1，2]有极值.

（Ⅰ）求 a 的取值范围；

（Ⅱ）证明：$f(x)>\dfrac{a(\sin x+1)}{x}$.

解析(1)由 $f(x)=\ln x+\dfrac{a+1}{x}$ 得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a+1}{x^2}=\dfrac{x-(a+1)}{x^2}(x>0)$.

当 $a+1\le 1$ 即 $a\le 0$ 时, $f'(x)\ge 0$，所以 $f(x)$ 在[1,2]上单调递增，无极值;

当 $a+1\ge 2$ 即 $a\ge 1$ 时， $f'(x)\le 0$，所以 $f(x)$ 在[1,2]上单调递减，无极值;

当 $1<a+1<2$ 即 $0<a<1$, 由 $f'(x)>0$ 得 $x>a+1$; 由 $f'(x)<0$ 得 $x<a+1$,

所以 $f(x)$ 在 $[1,a+1)$ 上单调递减，在 $(a+1,2]$ 上单调递增，符合题意.

所以取值范围为: $0<a<1$.

(1)法一要证 $xf(x)>a(\sin x+1)$ 成立,只需证 $x\ln x+a+1>a\sin x+a$ 成立,即证 $x\ln x>a\sin x-1$.

先证: $x\ln x>ax-1$, 设 $g(x)=x\ln x-ax+1$, 则 $g'(x)=\ln x+1-a$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0,e^{a-1}\right)$ 上单调递减, $\left(e^{a-1},+\infty\right)$ 上单调递增. 所以 $g(x)\ge g\left(e^{a-1}\right)=(a-1)e^{a-1}-ae^{a-1}+1=1-e^{a-1}$.

因为 $0<a<1$, 所以 $1-e^{a-1}>0$, 则 $g(x)>0$, 即 $x\ln x>ax-1$ (1). 再证 $ax-1>a\sin x-1$. 设 $h(x)=x-\sin x$, 则 $h'(x)=1-\cos x\ge 0$. 所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 则 $h(x)>h(0)=0$, 即 $x>\sin x$. 因为 $0<a<1$, 所以 $ax-1>a\sin x-1$ (2). 由(1)（2）可 $x\ln x>a\sin x-1$, 所以 $xf(x)>a(\sin x+1)$.

法二构造函数 $g(x)=x\ln x-x+1$, $g'(x)=\ln x=0$ 时， $x=1$, 易知 $g(x)_{\min}=g(1)=0$, 所以 $x\ln x\ge x-1$; 构造函数 $h(x)=x-\sin x, h'(x)=1-\cos x$, 显然 $h'(x)\ge 0$ 恒成立, 由于 $h(0)=0$, 所以 $x>\sin x$ 对 $x\in(0,\ +\infty)$ 恒成立,所以 $0<a<1$ 时, $x\ln x\ge x-1>ax-1>a\sin x-1$.

例 16.（2020•肇庆一模）设函数 $f(x)=\sin x-ax+\dfrac{1}{6}x^3(a\in R)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 零点的个数；

（2）若对任意的 $x\ge 0$， $f(x)\ge 0$ 成立，求 a 的取值范围.

解析(1)求导得 $f'(x)=\cos x-a+\dfrac{1}{2}x^2$, 令 $g(x)=\cos x-a+\dfrac{1}{2}x^2, x\in R$, $g(x)$ 为偶函数,先研究 $x\ge 0$，则 $g'(x)=x-\sin x$, $g''(x)=1-\cos x\ge 0$, $g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 为递增函数,且 $g'(0)=0$, 故 $g'(x)\ge 0$, 即 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 为单调递增函数,当 $g(0)=1-a>0$, 即 $a<1$, $g(x)$ 没有零,点,当 $g(0)=1-a=0$, 即 $a=1$, $g(x)$ 有 1 个零，点，当 $g(0)=1-a<0$, 即 $a>1$, $g(x)=\cos x-a+\dfrac{1}{2}x^2\ge\dfrac{1}{2}x^2-a-1$, 当

$x>\sqrt{2(a+1)}$, $g(x)>0$，当 $x>\sqrt{2(a+1)}$, $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 有 1 个零,点,故 $g(x)$ 为偶函数,在 $(-\infty,0]$ 也有有 1 个零点.综上 $a<1$, $f'(x)$ 没有零点; $a=1$, $f'(x)$ 有 1 个零,点; $a>1$, $f'(x)$ 有 2 个零,点.

(2) $f'(x)=\cos x-a+\frac{1}{2}x^2$，①当 $a\le 1$ 时,止(1)知 $f'(x)\ge 0$, $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 为单调递增函数，

$f(x)\ge f(0)=0$，

②当 $a>1$ 时, $f'(2a)=\cos 2a-a+2a^2=\cos 2a+a^2+a(a-1)>0$, $f'(0)=1-a<0$,由零点存在性定理知 $\exists x_0\in(0,-2a)$ 使得 $f'\left(x_0\right)=0$, 且在 $\left(0,x_0\right)$, $f'(x)<0$, 即 $f(x)$ 单调递减, $f(x)<f(0)=0$ 与题设不符.综上可知，当 $a\le 1$ 时, $f(x)\ge 0$.

例 17.（2019•东湖区校级月考）已知函数 $f(x)=\sin x-x\cos x(x\ge 0)$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的图象在 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 处的切线方程;

（Ⅱ）若任意 $x\in(0，+\infty)$，不等式 $f(x)<ax^3$ 恒成立，求实数 a 的取值范围;

解析(1)求导 $f'(x)=x\sin x$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, 切线为 $y=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$;

(2)由 $f(x)\le ax^3\Leftrightarrow \sin x-x\cos x-ax^3\le 0$, 令 $g(x)=\sin x-x\cos x-ax^3$, 则 $g'(x)=x\sin x-3ax^2=x(\sin x-3ax)$，又令 $h(x)=\sin x-3ax\Rightarrow h'(x)=\cos x-3a$，

①当 $3a\le -1$, 即 $a\le -\frac{1}{3}$ 时, $h'(x)\ge 0$ 恒成立, $h(x)$ 递增, $h(x)\ge h(0)=0$, 故 $g'(x)\ge 0$, $g(x)$ 递增, 所以 $g(x)\ge g(0)=0$ （不合题意);

② 当 $3a\ge 1$ 即 $a\ge\frac{1}{3}$ 时, $h'(x)\le 0\Rightarrow h(x)$ 递减, 则 $h(x)\le h(0)=0$, $g'(x)\le 0$, $g(x)$ 递减, 所以 $g(x)\le g(0)=0$ （符合题意）;

③ 当 $-1<3a<1$, 即 $-\frac{1}{3}<a<\frac{1}{3}$ 时, 止 $h'(0)=1-3a>0$, $h'(\pi)=-1-3a<0$, 故在 $(0,-\pi)$ 上, $\exists x_0$, 使 $h'\left(x_0\right)=0$，且 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时, $h'(x)>0\Rightarrow g'(x)>0$, 故 $g(x)$ 递增, 所以 $g(x)>g(0)=0$ （不符合题意）,综上: $a\ge\frac{1}{3}$.

注意:利用泰勒展开可得 $f(x)=\sin x-x\cos x\approx\left(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)-x\left(1-\frac{x^2}{2}+\cdots\right)<ax^3(x\ge 0)\Leftrightarrow a\ge\frac{1}{3}$

例 18.（2019•路南区校级月考）已知函数 $f(x)=ax\sin x+b\cos x$，且曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=\frac{\pi}{2}$ 相切于点 $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，

（1）求 $f(x)$；

（2）若 $f(x)\le mx^2+1$，求实数 m 的取值范围.

解析(1)由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{a\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ 得 $a=1,$ 求导 $f'(x)=x\cos x+(1-b)\sin x,$ 止 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-b=0$ 得 $b=1$.

所以 $f(x)=x\sin x+\cos x.$

(2)令 $g(x)=mx^2+1-f(x)=mx^2-x\sin x-\cos x+1,$ 止 $g(x)\ge0$ 得 $g(2\pi)=4\pi^2m\ge0,$ 所以 $m\ge0$.

显然 $g(x)$ 为偶函数,所以只需 $x\ge0$ 时，$g(x)\ge0.g'(x)=2mx-x\cos x=x(2m-\cos x),$ 当 $m\ge\frac{1}{2}$ 时, $g'(x)\ge0$，即 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增， 所以 $g(x)\ge g(0)=0,$ 从而 $m\ge\frac{1}{2}$ 时， $f(x)\le mx^2+1$ 成立. 当 $0\le m<\frac{1}{2}$ 时，因为 $y=2m-\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增， 又 $x=0$ 时, $y=2m-1<0;$ $x=\frac{\pi}{2}$ 时, $y=2m\ge0$，所以存在 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right],$ 使得 $2m-\cos x_0=0,$ 因此 $x\in(0,x_0)$ 时, $2m-\cos x<0,g'(x)<0,$ 即 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减,所以 $x\in(0,x_0)$ 时, $g(x)<g(0)=0,$ 与 $g(x)\ge0$ 矛盾,因此 $0\le m<\frac{1}{2}$ 时不成立.综上，满足题设的 m 的取值范围是 $m\ge\frac{1}{2}$.

注意： $x\sin x+\cos x\approx x^2-\frac{x^4}{6}+1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\le mx^2+1\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{2}$

例 19.（2019•武汉模拟）（1）求证：$x\ge0$ 时，$\cos x\ge1-\frac{1}{2}x^2$ 恒成立;

（2）当 $a\ge1$ 时，$\forall x\in[0，+\infty)$，证明不等式 $xe^{ax}+x\cos x+1\ge(1+\sin x)^2$ 恒成立.

解析(1)令 $f(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2,$ $x\in[0,+\infty),$ $f(0)=0.$ $f'(x)=-\sin x+x,$ 令 $u(x)=x-\sin x$ $x\in[0,+\infty),$ $u(0)=0.$ 则 $u'(x)=1-\cos x\ge0,$ 函数 $u(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上单调递增，故 $u(x)\ge u(0)=0.$ 所以函数 $f(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)\ge f(0)=0.$ 因此 $x\ge0$ 时， $\cos x\ge1-\frac{1}{2}x^2$ 恒成立.

(2)由(1)可得: $\cos x\ge1-\frac{1}{2}x^2,x\ge\sin x,$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立.又当 $a\ge1$ 时, $\forall x\in[0,+\infty),xe^{ax}\ge xe^x$.

当 $a\ge 1$ 时，$\forall x\in[0,+\infty)$, 证明不等式 $xe^{ax}+x\cos x+1\ge(1+\sin x)^2$ 恒成立 $\Leftrightarrow xe^{x}+x\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)+1\ge(1+x)^2$，$\Leftrightarrow e^{x}-\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right)\ge 0,$ 令 $g(x)=e^{x}-\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right),\quad x\in[0,+\infty),\quad g(0)=0,$ 求导 $g'(x)=e^{x}-x-1nx\in[0,+\infty),$ 令 $h(x)=e^{x}-x-1,x\in[0,+\infty),h(0)=0.\ h'(x)=e^{x}-1\ge 0,$ 当 $x=0$ 时取等号，故 $g'(x)\ge 0$,在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立．所以 $g(x)\ge 0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立．所以当 $a\ge 1$ 时，$\forall x\in[0,+\infty)$, 证明不等式 $xe^{ax}+x\cos x+1\ge(1+\sin x)^2$ 恒成立.

例 20.（2019•义乌市月考）已知函数 $f(x)=\sin x-m\ln(x+1)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处切线垂直于 y 轴.

（1）求 m 的值；

（2）求函数 $f(x)$ 在 $[0，1]$ 上的最小值；

（3）若 $x^2-ax-\ln x+e^{\sin x}-1>0$ 恒成立，求满足条件的整数 a 的最大值.（参考数据 $\sin 1\approx 0.84$，$\ln 2\approx 0.693$)

解析(1)因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处切线垂直于 y 轴,故 $f'(0)=0, f'(x)=\cos x-\frac{m}{x+1}, f'(0)=1-m=0,$ 则 $m=1$;

(2)由题意可得, $f'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1},$ 注意到 $f'(0)=0,\quad x\in[0,1],$ 则 $f''(x)=-\sin x+\frac{1}{(x+1)^2}$, 则 $f'''(x)=-\cos x-\frac{2}{(x+1)^2}<0,$ 所以 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减,则 $f''(0)=1>0, f''(1)=-\sin 1+\frac{1}{4}<0,$ 存在唯一的零,点 $x_0\in(0,1),$ 使得 $f''\left(x_0\right)=0,$ 所以函数 $f'(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 上单调递增，在 $\left(x_0,1\right)$ 上单调递减，$f'(1)=\cos 1-\frac{1}{2}>\cos\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}=0,$ 则 $f'(x)>0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，故 $f(x)_{\min}=f(0)=0$；

(3) $x^2-ax-\ln x+e^{\sin x}-1>0,$ 不难发现是一道放缩的估算题，转化为 $x^2-x-\ln x+e^{\sin x}-1>(a-1)x$ 先构造 $x^2-x\ge\ln x$ 证明，当仅当 $x=1$ 等号成立；再对 $e^{\sin x}-1$ 进行放缩，$0<x\le 1$ 时, $e^{\sin x}-1>e^{\ln(x+1)}-1=x$,这样知道 $[a]_{\max}=2,$ 我们只需要证明当 $x>1$ 时, $x^2-2x-\ln x+e^{\sin x}-1>0$ 成立，要消灭 $e^{\sin x}-2x,$ 就需要想到构造 $2\sin x-2x$ 这样的紧密型式子，根据之前说到的万能指数切线放缩

式子：$e^x \ge ax + a(1-\ln a)$，我们构造 $e^x \ge 2x+2-2\ln 2$，由于切点取不到，故 $e^x > 2x+2-2\ln 2 \Rightarrow e^{\sin x} > 2\sin x + 2 - 2\ln 2$，构造后续求导

证明即可，具体书写证明过程如下：

解析因为 $x^2 - ax - \ln x + e^{\sin x} - 1 > 0$ 恒成立，令 $x=1$，则 $e^{\sin x} \ge a$，因为 $3 > e^{\sin x} > e^{\ln 2} = 2$，由于 a 为真数，则 $a \le 2$，因此 $x^2 - ax - \ln x + e^{\sin x} - 1 \ge x^2 - 2x - \ln x + e^{\sin x} - 1$，下面证明 $g(x) = x^2 - 2x - \ln x + e^{\sin x} - 1 > 0$ 恒成立即可，

① 当 $x \in (0,1)$ 时，止 (1) 可知，$\sin x > \ln(x+1)$，则 $e^{\sin x} > x+1$，故 $g(x) > x^2 - 2x - \ln x + x + 1 - 1 = x^2 - x - \ln x$，设 $h(x) = x^2 - x - \ln x$，$x \in (0,1)$，则 $h'(x) = 2x - 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{x} < 0$，故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，故 $h(x) > h(1) = 0$，止此可得 $g(x) > 0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立；

②当 $x > 1$ 时，下面先证明一个不等式：$e^x > 2x + 2 - 2\ln 2$，设 $h(x) = e^x - 2x - 2 + 2\ln 2$，则 $h'(x) = e^x - 2$，故 $h(x)$ 在 $(-\infty, -\ln 2)$ 单调递减，在 $(\ln 2, +\infty)$ 单调递增，所以 $h(x)_{\min} = h(\ln 2) = 0$，当 $x > 1$ 时，

$e^{\sin x} > 2\sin x + 2 - 2\ln 2$，止此可得 $x^2 - 2x - \ln x + e^{\sin x} - 1 > x^2 - 2x - \ln x + 2\sin x + 1 - 2\ln 2 = g(x)$

则 $g'(x) = 2x - 2 - \dfrac{1}{x} + 2\cos x$，$g''(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2} - 2\sin x > 0$，故 $g'(x)$ 单调递增，

$g'(x) > g'(1) = 2\cos 1 - 1 > 2\cos\dfrac{\pi}{3} - 1 = 0$，则 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x) > g(1) = 2\sin 1 - 2\ln 2 > 0$，综上所述，$a$ 的最大整数值为 2.

例 21.（2019•天津期中）已知 $f(x) = a\sin x (a \in R)$，$g(x) = e^x$.

（Ⅰ）若 $0 < a \le 1$，判断函数 $G(x) = f(1-x) + \ln x$ 在 $(0，1)$ 的单调性；

（Ⅱ）设 $F(x) = g(x) - mx^2 - 2(x+1) + k(k \in R)$，对 $\forall x > 0$，$m < 0$，有 $F(x) > 0$ 恒成立，求 k 的最小值.

（Ⅲ）证明：$\sin\dfrac{1}{2^2} + \sin\dfrac{1}{3^2} + \sin\dfrac{1}{4^3} + \ldots + \sin\dfrac{1}{(n+1)^2} < \ln 2$，$(n \in N^*)$.

解析 (1) 由题意 $0 < a \le 1$，函数 $G(x) = f(1-x) + \ln x = a\sin(1-x) + \ln x, x \in (0,1) \cdot G'(x) = -a\cos(1-x) + \dfrac{1}{x}$，又 $x \in (0,1)$，故 $\dfrac{1}{x} > 1$，而 $a\cos(1-x) \le 1$．所以 $G'(x) > 0$，故 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增.

(2)由题意知, $F(x)=e^{x}-mx^{2}-2(x+1)+k(k\in R)$, 对 $\forall x>0$, $m<0$, 有 $F(x)>0$ 恒成立.

$F'(x)=e^{x}-2mx-2$, 设 $u(x)=e^{x}-2mx-2$, 则 $u'(x)=e^{x}-2m$, 止于 $m<0$, 故 $u'(x)>0$, $x\in(0,+\infty)$ 时, $u(x)$ 单调递增, 又 $u(0)=-1$, $u(\ln 2)=-2m\ln 2>0$, 因此 $u(x)$ 在 $\left(0,\ln 2\right)$ 内存在唯一零,点 x_0, 使 $u\left(x_0\right)=0$, 即 $e^{x_0}-2mx_0-2=0$, 且当 $x\in\left(0,x_0\right)$, $u(x)<0$, $F'(x)<0$, $F(x)$ 单调递减; $x\in\left(x_0,+\infty\right)$, $u(x)>0$ $F'(x)>0$, $F(x)$ 单调递增.

故 $F(x)_{\min}=F\left(x_0\right)=e^{x_0}-mx_0^2-2\left(x_0+1\right)+k>0$, 故 $k>-e^{x_0}+\dfrac{e^{x_0}-2}{2x_0}\cdot x_0^2+2\left(x_0+1\right)=\left(\dfrac{x_0}{2}-1\right)e^{x_0}+x_0+2$, 设 $v(x)=\left(\dfrac{x}{2}-1\right)e^{x}+x+2$, $x\in(0,\ln 2)\cdot v'(x)=e^{x}\cdot\dfrac{x-1}{2}+1$, 又设 $t(x)=e^{x}\cdot\dfrac{x-1}{2}+1$, $t'(x)=\dfrac{x}{2}e^{x}>0$, 故 $t(x)$ 在 $x\in(0,\ln 2)$ 上单调递增, 因此 $t(x)>t(0)=\dfrac{1}{2}>0$, 即 $v'(x)>0$, $v(x)$ 在 $x\in(0,\ln 2)$ 上单调递增, $v(x)\in(1,2\ln 2)$, 又 $1<2\ln 2=\ln 4<2$, 所以 $k\geq 2$, 故所水 k 的最小值为 2.

(3) 由 (1) 可知 $a=1$ 时, $G(x)<G(1)=0$, 即 $\sin(1-x)<\ln\dfrac{1}{x}$, 设 $1-x=\dfrac{1}{(1+k)^2}$, 则 $x=1-\dfrac{1}{(1+k)^2}=\dfrac{k(k+2)}{(1+k)^2}$, 因此 $\sin\dfrac{1}{(1+k)^2}<\ln\dfrac{(1+k)^2}{k(k+2)}=\ln\dfrac{1+k}{k}-\ln\dfrac{k+2}{k+1}$, 即

$$\sin\frac{1}{2^2}+\sin\frac{1}{3^2}+\ldots+\sin\frac{1}{(n+1)^2}<\ln\frac{2}{1}-\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{3}{4}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$$

$$-\ln\frac{n+2}{n+1}=\ln 2-\ln\frac{n+2}{n+1}<\ln 2.$$

注意:由手 $\ln(1+x)-\sin x\approx-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}<0\left(x\to 0^-\right)$, 则 $\ln x\leq\sin(x-1)(0\leq x\leq 1)$, 故 $-\ln x>-\sin(x-1)$

所以 $\sin\dfrac{1}{(1+k)^2}=\sin\left[1-\dfrac{k(k+2)}{(1+k)^2}\right]<\ln\dfrac{(k+1)^2}{k(k+2)}=\ln\dfrac{k+1}{k}-\ln\dfrac{k+2}{k+1}$, 从而得出最后结论.

第二讲三角函数邂逅分而治之

根据上一讲我们提到的几个常见函数, $\dfrac{\sin x}{x}$, $\dfrac{\sin x}{e^x}$, $\dfrac{\cos x}{e^x}$ 等，一般抓住其在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 的单调性，必要时候进行泰勒展开式的放缩.

例 22.（2019•河南期末）已知函数 $f(x)=a(x-1)e^{x}(a>0)$， $g(x)=-\cos x$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若对于任意的实数 x_1， $x_2\in[0，\frac{\pi}{2}]$，（其中 $x_1\neq x_2$），都有 $|f(x_1)-f(x_2)|>|g(x_1)-g(x_2)|$ 恒成立求实数 a 的取值范围.

解析(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 求导 $f'(x)=a\left[e^{x}+(x-1)e^{x}\right]=ax\cdot e^{x}$.

当 $x=0$ 时, $f'(x)=0$; 当 $x<0$ 时, $f'(x)<0$; 当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, 所以函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,0)$, 单调增区间为 $(0,+\infty)$.

(2)不妨设 $x_1<x_2$, 因为 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数,所以 $g\left(x_1\right)<g\left(x_2\right)$, 即 $g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)<0$, 止（1）得 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数，所以 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$, 即 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<0$. 由题意，得 $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)>g\left(x_2\right)-g\left(x_1\right)$，即 $f\left(x_2\right)-g\left(x_2\right)>f\left(x_1\right)-g\left(x_1\right)$. 令 $h(x)=f(x)-g(x)=a(x-1)e^{x}+\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数, 则 $h'(x)=axe^{x}-\sin x\geq 0$ 对任意的 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立

法一设 $F(x)=\frac{\sin x}{e^{x}}-ax\left(0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $F(x)\leq 0$ 恒成立, $F'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^{x}}-a$.

令 $G(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^{x}}\left(0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $G'(x)=\frac{-2\cos x}{e^{x}}\leq 0$, 从而 $G(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是减函数,

所以 $G\left(\frac{\pi}{2}\right)\leq G(x)\leq G(0)$, 即 $-e^{-\frac{\pi}{2}}\leq G(x)\leq 1$. 当 $a\geq 1$ 时, $F'(x)\leq 0$, 当且仅当 $a=1$, $x=0$ 时取等号,

所以 $F(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是减函数,所以当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时, $F(x)\leq F(0)=0$, 故 $a\geq 1$ 满足题意.

当 $0<a<1$ 时, $F'(0)=1-a>0, F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}-a<0$. 由零点存在定理, 存在 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $F'\left(x_0\right)=0$.

因为$G(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上是减函数,所以$F^{'}(x)=G(x)-a$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上是减函数,所以$0<x<x_0$时，

$F^{'}(x)>F^{'}\left(x_0\right)=0$,所以$F(x)$在$\left(0,x_0\right)$上是增函数,所以当$x\in\left(0,x_0\right)$（这里$\left(0,x_0\right)\subsetneqq\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\Big)$时，

$F(x)>F(0)=0$.所以$0<a<1$不满足题意，综上,实数a的取值范围是$[1,+\infty)$.

法二（分而治之）令$m(x)=ae^x$，$n(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，则$n^{'}(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，令$\varphi(x)=x\cos x-\sin x$，$\varphi^{'}(x)=-x\sin x<0$,故$\varphi(x)$单调递减对$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$恒成立,$\varphi(x)\le\varphi(0)=0$,故

$n(x)=\dfrac{\sin x}{x}$递减,$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,当$x\to 0$时，凶于$x\ge\sin x$,故$n(0)_{\max}\to 1$,故只需$m(x)_{\min}\ge 1\Leftrightarrow a\ge 1$.

例 23.（2019•陕西模拟）已知函数$f(x)=(x-a)\ln x(a\in R)$，它的导函数为$f'(x)$.

（1）当$a=1$时，求$f'(x)$的零点；

（2）当$a=0$时，证明：$f(x)<e^x+\cos x-1$.

解析(1)法一函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,当$a=1$时,$f(x)=(x-1)\ln x$,求导$f^{'}(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$,

易知$f^{'}(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$为$(0,+\infty)$上的增函数,又$f^{'}(1)=\ln 1+1-1=0$,所以$x=1$是$f(x)$的零点;

法二画出$y=\ln x+1$和$y=\dfrac{1}{x}$的图象,观察出两个图象的交点为$(1,1)$,所以$f^{'}(x)$的零点为$x=1$;

（2）证明当$a=0$时，$f(x)=x\ln x$;

法一①若$0<x\le 1$，则$e^x+\cos x-1>0$，$x\ln x\le 0$，所以$f(x)<e^x+\cos x-1$成立,

②若$x>1$，设$h(x)=e^x+\cos x-x\ln x-1$，则$h^{'}(x)=e^x-\sin x-\ln x-1$，令$m(x)=h^{'}(x)$，则$m^{'}(x)=e^x-\dfrac{1}{x}-\cos x$,因为$x>1$，所以$m^{'}(x)>e-1-1>0$，从而$m(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$m(x)>m(1)=e-\sin 1-1>0$，即$m(x)=h^{'}(x)>0$，$h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增；所以$h(x)>h(1)=e+\cos 1-1>0$,即$x\ln x<e^x+\cos x-1$,故$f(x)<e^x+\cos x-1$

法二（分而治之）先构造$\varphi(x)=\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}\ge 0$（步骤省略),即证明$x\ln x<e^x+\cos x-1\Leftrightarrow x\ln x<e^x-\dfrac{x^2}{2}$，即证

$h(x)=\dfrac{\ln x}{x}<g(x)=\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{1}{2}$, $h(x)_{\max}=h(e)=\dfrac{1}{e}<g(x)_{\min}=g(2)=\dfrac{e^2-2}{4}$, 故命题得证.

例 24.（2020•茂名月考）已知函数 $f(x)=x\sin x+a\sin x+b$，$g(x)=e^x\cos x+\sqrt{2}e^x$，曲线 $f(x)$ 在点 $(0，f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$

（1）求实数 a， b 的值

（2）当 $x>0$，证明： $g(x)>f(x)$

解析(1)求导得 $f'(x)=\sin x+x\cos x+a\cos x$, 曲线 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$, 故

$f'(0)=a=1$, 又 $f(0)=b$, 切点 $(0,b)$ 在切线 $y=x$ 上, 故 $b=0$.

(2)法一由(1)可知 $f(x)=(x+1)\sin x$, 要证 $g(x)>f(x)$, 即证 $e^x(\cos x+\sqrt{2})>(x+1)\sin x$, 因为

$x>0,x+1>0,\cos x+\sqrt{2}>0$, 等价于证明 $:\dfrac{e^x}{x+1}>\dfrac{\sin x}{\cos x+\sqrt{2}}$, 设

$p(x)=\dfrac{e^x}{x+1}(x>0)$, $p'(x)=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}>0$，在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,所以 $p(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以

$p(x)>p(0)=1$, 设 $y=h(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+\sqrt{2}}$, 故 $y\cos x+\sqrt{2}y=\sin x$, 则 $\sin x-y\cos x=\sqrt{2}y$, 所以

$\sqrt{y^2+1}\sin(x+\varphi)=\sqrt{2}y$, 故 $\sin(x+\varphi)=\dfrac{\sqrt{2}y}{\sqrt{y^2+1}}$, 得 $\left|\dfrac{\sqrt{2}y}{\sqrt{y^2+1}}\right|\le 1$, 解得 $-1\le y\le 1$, 即

$h(x)\le 1<p(x)$, 所以 $g(x)>f(x)$

法二函数 $y=h(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+\sqrt{2}}$, 理解为过点 $(-\sqrt{2},0)$ 的直线 $y=k(x+\sqrt{2})$ 与单位圆相交或者相切时，斜

率的取值范围, $\dfrac{|\sqrt{2}k|}{\sqrt{k^2+1}}\le 1\Leftrightarrow -1\le k\le 1$, 故 $g(x)>f(x)$.

例 25.(2019•崂山区校级月考）已知函数 $f(x)=ax-\ln x$， $a\in R$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调区间

（2）若 $a>0$，求证： $f(x)\ge\dfrac{\sin 2x-2}{ae^2}$

解析(1)求导 $f'(x)=a-\dfrac{1}{x}$, 当 $a\le 0$, $f'(x)<0$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减:当 $a>0$, $f'(x)=\dfrac{a\left(x-\dfrac{1}{a}\right)}{x}$,

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 时, $f'(x)<0,\quad f(x)$ 递减;当 $x\in\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 时, $f'(x)>0,\quad f(x)$ 递增;

(2)证明:由（1）可知:当 $a>0$ 时, $f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=1+\ln a$:所以 $\sin 2x\le 1$ 在 R 内恒成立,且 $a>0$;

所以 $\dfrac{\sin 2x-2}{ae^2}\le\dfrac{-1}{ae^2}$;故要证 $f(x)\ge\dfrac{\sin 2x-2}{ae^2}$;即证 $1+\ln a\ge\dfrac{-1}{ae^2}$;即 $ae^2+e^2a\ln a+1\ge 0$;

令 $g(a)=ae^2+e^2a\ln a+1=e^2a\ln ea+1(a>0)$; 同构式, $h(x)=x\ln x$, 易知 $h'(x)=\ln x+1$, 故当 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时, $h(x)$ 单调递减, 当 $x>\dfrac{1}{e}$ 时, $h(x)$ 单调递增, $h(x)_{\min}=h\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$, 则 $g(a)=eh(ea)+1\ge e\cdot\left(-\dfrac{1}{e}\right)+1=0$, 当 $a=\dfrac{1}{e^2}$ 时取等,即 $ae^2+e^2a\ln a+1\ge 0$ 在 $(0,+\infty)$ 内恒成立,故当 $a>0$ 时, $f(x)\ge\dfrac{\sin 2x-2}{ae^2}$.

例 26.（2019•龙凤区校级期末）已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(0，f(0))$ 处的切线方程;

（Ⅱ）证明： $f'(x)$ 在区间 $(0，\pi)$ 上存在唯一零点;

（Ⅲ）设 $g(x)=x^2-2x+a(a\in R)$，若对任意 $x_1\in[0，\pi]$，均存在 $x_2\in[1，2]$，使得 $f(x_1)>g(x_2)$，求实数 a .

解析(1)求导 $f'(x)=\cos x+x\sin x-1$, 所以 $f'(0)=0, f(0)=0$, 从而曲线 $y=f(x)$ 在,点 $A(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=0$.

(2)设 $g(x)=f'(x)$, 则 $g(x)=\cos x+x\sin x-1, g'(x)=x\cos x$. 当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x)>0$; 当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 时, $g'(x)<0$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减.又 $g(0)=0, g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0, g(\pi)=-2$, 故 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 存在唯一零点.所以 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 在在唯一零点.

(3)由已知,转化为 $f(x)_{\min}>g(x)_{\min}$, 且 $g(x)_{\min}=g(1)=a-1$. 由(2)知, $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 只有一个零点,设为 x_0, 且当 $x\in(0,x_0)$ 时, $f'(x)>0$: 当 $x\in(x_0,\pi)$ 时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增,在 (x_0,π) 单调递减.又 $f(0)=0, f(\pi)=0$, 所以当 $x\in[0,\pi]$ 时, $f(x)_{\min}=0$. 所以 $0>a-1$, 即 $a<1$，因此， a 的取值范围是 $(-\infty,1)$.

第三讲还是参变分离和找点

三角函数找点通常在0，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{3}\approx 1$，$\pm\frac{\pi}{2}$，$\pm\pi$位置进行找点，某些时候需要用到辅助角公式以及之前提到的泰勒展开式进行放缩，甚至可以估算出零点的大致位置.

例 27.（2020•武汉模拟）（1）证明函数 $y=e^x-2\sin x-2x\cos x$ 在区间 $(-\pi,\ -\frac{\pi}{2})$ 上单调递增；

（2）证明函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}-2\sin x$ 在 $(-\pi,\ 0)$ 上有且仅有一个极大值点 x_0，且 $0<f(x_0)<2$.

解析 (1) 求导，$y'=e^x-2\cos x-2(\cos x-x\sin x)=e^x+2x\sin x-4\cos x$，$x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ 因为 $e^x>0$，$2x\sin x>0$，$-4\cos x>0$，故 $y'>0$，函数 y 在定义区间递增；

(2)由 $f'(x)=\frac{e^x(x-1)-2x^2\cos x}{x^2}$，令 $g(x)=e^x(x-1)-2x^2\cos x$，$g'(x)=x\left(e^x+2x\sin x-4\cos x\right)$

当 $x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，由(1)得 $g'(x)<0$，$g(x)$ 递减，由 $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{\pi}{2}-1\right)<0$，$g(-\pi)=8-e^{-\pi}(1+\pi)>0$，根据零点存在性定理，存在唯一零点 $x_0\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，$g\left(x_0\right)=0$，当 $x\in\left(-\pi,x_0\right)$ 时，$g(x)>0$，$f(x)$ 递增：当 $x\in\left(x_0,-\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g(x)<0$，$f(x)$ 递减，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}-2\cos x<0$，所以 $f(x)$ 递减，故 $f(x)$ 在 $\left(x_0,0\right)$ 为减函数，所以 $f(x)$ 有唯一的极大值点，x_0，由 $f(x)$ 在 $\left(x_0,-\frac{\pi}{2}\right)$ 递减，得 $f\left(x_0\right)>f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{-\frac{\pi}{2}}+2=-\frac{1}{\frac{\pi}{2}\cdot e^{\frac{\pi}{2}}}+2>0$，又 $f\left(x_0\right)=\frac{e^{x_0}}{x_o}-2\sin x_0$，当时，$0<-2\sin x_0<2$，故 $f\left(x_0\right)<2$，综上，命题成立.

例 28.（2020•淮北一模）已知函数 $f(x)=\sin x-a\ln(x+1)$，$a\in R$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.

（1）若 $a=2$，求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}]$ 上可单调递增，求 a 的取值范围；

（3）求证：当 $0<a<(1+\frac{\pi}{2})^2$ 时 $f'(x)$ 在区间 $(-1,\ \frac{\pi}{2})$ 内存在唯一极大值点.

解析 (1)当 $a=2$, $f'(x)=\cos x-\dfrac{2}{x+1}$, $f'(0)=-1$, 又 $f(0)=0$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $x+y=0$

(2) 由 $f'(x)=\cos x-\dfrac{a}{x+1}\ge 0$, 所 以 $a\le (x+1)\cos x$, 令 $h(x)=(x+1)\cos x$, $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 则 $h'(x)=\cos x-(x+1)\sin x$, 因为 $\cos x\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $(x+1)\sin x\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\dfrac{\pi}{4}\right)>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $h'(x)<0$

$h(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 递减, 所以 $h(x)\ge h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, $a\le 0$;

(3)因为 $f'(x)=\cos x-\dfrac{a}{x+1}$, 令 $g(x)=\cos x-\dfrac{a}{x+1}, x\in$, $g'(x)=-\sin x+\dfrac{a}{(1+x)^2}$,

显然 $g'(x)$ 单调递减,又 $0<a<\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)^2$, 得 $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1+\dfrac{a}{\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)^2}<0$, 取 $x_0=\dfrac{\sqrt{a}}{2}-1$, 则

$g'(x_0)=-\sin x_0+\dfrac{a}{\left(1+\dfrac{\sqrt{a}}{2}-1\right)^2}=4-\sin x_0>0$, 故存在 $m\in\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得 $g'(m)=0$, 所以 $x\in(-1,m)$ 时, $g(x)$ 单调递增, $x\in\left(m,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, m 为 $g(x)$ 的唯一极大值,点,故命题成立。

例 29.(2020•陕西一模)已知函数 $f(x)=\dfrac{a\ln x}{4}-\dfrac{1}{2}x^2(a\in R)$.

(Ⅰ)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(Ⅱ)设 $a=4$,且 $x\in(0,\dfrac{\pi}{6})$,求证:$\sqrt[4]{e}<\sqrt{e^{\cos 2x}}<\dfrac{1}{\tan x}$.

解析(1)函数 $f(x)=\dfrac{a\ln x}{4}-\dfrac{1}{2}x^2$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 求导 $f'(x)=\dfrac{a}{4x}-x=\dfrac{a-4x^2}{4x}$,

当 $a<0$ 时, $f'(x)<0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减;当 $a>0$ 时,由 $\begin{cases}f'(x)>0\\x>0\end{cases}$ 解得 $0<x<\dfrac{1}{2}\sqrt{a}$,

由 $\begin{cases}f'(x)<0\\x>0\end{cases}$, 解得 $x>\dfrac{1}{2}\sqrt{a}$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\sqrt{a}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{a},+\infty\right)$ 上单调递减.当 $a=0$ 时, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减;综上所述,当 $a\le 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减;当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在

$\left(0,\frac{1}{2}\sqrt{a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{2}\sqrt{a},+\infty\right)$上单调递减.

(2)证明当$a=4$时，$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$，$f'(x)=\frac{1-x^2}{x}$，则$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$在$(0,1)$上单调递增.

设 $x_1,x_2\in(0,1)$，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)<f(x_2)$，即 $\ln x_1-\frac{1}{2}x_1^2<\ln x_2-\frac{1}{2}x_2^2$，所以

$\ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{1}{2}\left(x_1^2-x_2^2\right)$，可得 $\frac{x_1}{x_2}<e^{\frac{1}{2}\left(x_1^2-x_2^2\right)}$. 因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $0<\sin x<\cos x<1$，所以

$\frac{\sin x}{\cos x}<e^{\frac{1}{2}\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)}$，即因为$x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，所以$2x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，所以$\cos 2x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，所以$e^{-\frac{1}{2}\cos 2x}<e^{-\frac{1}{4}}$.

$-\frac{1}{2}\cos 2x\in\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$，综上可得即$\sqrt[4]{e}<\sqrt{e^{\cos 2x}}<\frac{1}{\tan x}$.

例 30.（2020•开封一模）已知函数$f(x)=\frac{a}{e^x}+\sin x$，$a\in R$，$e$为自然对数的底数.

（1）当$a=1$时，证明：$\forall x\in(-\infty，0]$，$f(x)\geq 1$；

（2）若函数$f(x)$在$(-\frac{\pi}{2}，0)$上存在极值点，求实数a的取值范围.

解析(1)当$a=1$时，$f(x)=\frac{1}{e^x}+\sin x$，则$f'(x)=\frac{-1}{e^x}+\cos x$，当$x\in(-\infty,0]$时，$0<e^x\leq 1$，则$\frac{-1}{e^x}\leq -1$，

又因为$\cos x\leq 1$，所以当$x\in(-\infty,0]$时，$f'(x)=\frac{-1}{e^x}+\cos x\leq 0$，仅$x=0$时，$f'(x)=0$，所以$f(x)$在$(-\infty,0]$

上是单调递减，所以$f(x)\geq f(0)=1$，即$f(x)\geq 1$.

(2)求导$f'(x)=\frac{-a}{e^x}+\cos x$，因为$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，所以$\cos x>0$，$e^x>0$，

①当$a\leq 0$时，$f'(x)>0$恒成立，所以$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$上单调递增，没有极值,点:

②当$a>0$时，$f'(x)=\frac{-a}{e^x}+\cos x$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$上单调递增，

因为$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-a\cdot e^{\frac{\pi}{2}}<0$，$f'(0)=-a+1$. 当$a\geq 1$时，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$时，$f'(x)\leq f'(0)=-a+1\leq 0$，

所以$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$上单调递减，没有极值,点:当$0<a<1$时，$f'(0)=-a+1>0$，所以存在$x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，

使 $f^{'}\left(x_0\right)=0$, 当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},x_0\right)$ 时, $f^{'}(x)<0, x\in\left(x_0,0\right)$ 时, $f^{'}(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值，

x_0 为极小值点.　综上可知, 若函数 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上存在极值,点,则实数 $a\in(0,1)$.

例 31.（2020•开封一模）已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{e^x}+\sin x$， $a\in R$， e 为自然对数的底数.

（1）当 $a=1$ 时，证明：$\forall x\in(-\infty，0]$， $f(x)\geq 1$；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2}，0)$ 上存在极值点，求实数 a 的取值范围.

解析(1)当 $a=1$ 时, $f(x)=\dfrac{1}{e^x}+\sin x$, 则 $f^{'}(x)=\dfrac{-1}{e^x}+\cos x$, 当 $x\in(-\infty,0]$ 时, $0<e^x\leq 1$, 则 $\dfrac{-1}{e^x}\leq -1$,

又因为 $\cos x\leq 1$, 所以当 $x\in(-\infty,0]$ 时, $f^{'}(x)=\dfrac{-1}{e^x}+\cos x\leq 0$, 仅 $x=0$ 时, $f^{'}(x)=0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上是单调递减,所以 $f(x)\geq f(0)=1$, 即 $f(x)\geq 1$.

(2)求导 $f^{'}(x)=\dfrac{-a}{e^x}+\cos x$, 因为 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, 所以 $\cos x>0$,　$e^x>0$,

①当 $a\leq 0$ 时,　$f^{'}(x)>0$ 恒成立,所以 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递增，没有极值点.

②当 $a>0$ 时, $f^{'}(x)=\dfrac{-a}{e^x}+\cos x$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递增,

因为 $f^{'}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-a\cdot e^{\frac{\pi}{2}}<0$,　$f^{'}(0)=-a+1$. 当 $a\geq 1$ 时, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 时, $f^{'}(x)\leq f^{'}(0)=-a+1\leq 0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减,没有极值,点.当 $0<a<1$ 时,　$f^{'}(0)=-a+1>0$, 所以存在 $x_0\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$,

使 $f^{'}\left(x_0\right)=0$, 当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},x_0\right)$ 时, $f^{'}(x)<0, x\in\left(x_0,0\right)$ 时, $f^{'}(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值,

x_0 为极小值点.综上可知，若函数 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$上存在极值点,则实数 $a\in(0,1)$.

例 32.（2020•佛山一模）已知函数 $f(x)=1+x-2\sin x$， $x>0$.

（1）求 $f(x)$ 的最小值;

（2）证明： $f(x)>e^{-2x}$.

解析(1)由题意得 $f'(x)=1-2\cos x$, 令 $f'(x)=0$, 则 $\cos x=\frac{1}{2}$, 故在区间 $[0,\pi]$ 上 $f'(x)$ 的唯一零点是 $x=\frac{\pi}{3}$, 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增, 故在区间 $[0,\pi]$ 上, $f(x)$ 的极小值为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$, 当 $x>\pi$ 时, $f(x)>1+\pi-2=\pi-1>f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 所以 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$;

(2) 要证 $x>0$ 时, $f(x)>e^{-2x}$, 即证 $x>0$ 时, $g(x)=(1+x-2\sin x)e^{2x}>1$, 因为 $g(x)=(1+x-2\sin x)e^{2x}$,

则 $g'(x)=2(1+x-2\sin x)e^{2x}+(1-2\cos x)e^{2x}=(3+2x-4\sin x-2\cos x)e^{2x}$, 令 $h(x)=x-\sin x$, 且 $x>0$, 所以 $h'(x)=1-\cos x\geq 0$, 即 $h(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数, 故 $h(x)>h(0)=0$, 即 $x>\sin x$, 所以

$$3+2x-4\sin x-2\cos x>3+2\sin x-4\sin x-2\cos x=3-2(\sin x+\cos x)=3-2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$$

故 $g'(x)=(3+2x-4\sin x-2\cos x)e^{2x}>0$, 即 $g(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数, $g(x)>g(0)=1$, 故当 $x>0$ 时, $f(x)>e^{-2x}$, 即得证.

例 33.（2019•荔湾区校级月考）已知函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$， $g(x)=x\cdot\cos x-\sin x$.

（1）判断函数 $g(x)$ 在区间 $(0，3\pi)$ 上零点的个数;

（2）函数 $f(x)$ 在区间 $(0，+\infty)$ 上的极值点从小到大分别为 x1， x_2， x_3， $x_4\dots$， $x_n\dots\dots$， 证明:

$(i) f(x_1)+f(x_2)<0$;

(ii) 对一切 $n\in N^*$， $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\dots+f(x_n)<0$ 成立.

解析(1)求导得 $g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$, 当 $x\in(0,\pi]$ 时,由 $\sin x>0\Rightarrow g'(x)<0$, $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减, $g(x)<g(0)=0$, 故 $g(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上无零, 点: 当 $x\in(\pi,2\pi]$ 时, 止 $\sin x<0\Rightarrow g'(x)>0$， $g(x)$ 在 $(\pi,2\pi)$ 上单调递增，又 $g(\pi)=-\pi<0$, $g(2\pi)=2\pi>0$, 所以 $g(x)$ 在 $(\pi,2\pi]$ 上有唯一零点; 当 $x\in(2\pi,3\pi]$ 时， 止 $\sin x<0\Rightarrow g'(x)>0$, $g(x)$ 在 $(2\pi,3\pi)$ 上单调递减,又

$g(2\pi)>0, g(3\pi)<0$, 故 $g(x)$ 在 $(2\pi,3\pi]$, 上有唯一零点:综上,函数 $g(x)$ 在区间 $(0,3\pi)$ 上有两个零点;

(2)求导得 $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$, 由(1)知 $f(x)$ 在 $x\in(0,\pi]$ 无极值,点;在 $x\in(\pi,2\pi]$ 有极小值,点,即为 x_1;在 $x\in(2\pi,3\pi]$ 有极大值,点,即为 x_2, 同理可得,在 $(3\pi,4\pi]$ 有极小值,点 x_3; 在 $(n\pi,(n+1)\pi]$ 有极值点 x_n, 由 $x_n\cos x_n-\sin x_n=0$ 得 $\tan x_n=x_n$, 由 $x_2>x_1\Rightarrow\tan x_2>\tan x_1=\tan(x_1+\pi)$, 又 $g(\pi)<0, g\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-1<0, g(2\pi)>0, g\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)<0$, 所以 $x_1\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right), x_2\in\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$, 则 $x_2, x_1+\pi\in\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$ 由函数 $y=\tan x$ 在 $\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$ 单调递增, $x_2>x_1+\pi$, 所以 $f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{\sin x_1}{x_1}+\dfrac{\sin x_2}{x_2}=\cos x_1+\cos x_2$, 由 $y=\cos x$ 在 $\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$ 单调递减,得 $\cos x_2<\cos(x_1+\pi)=-\cos x_1$, 所以 $f(x_1)+f(x_2)<0$ 同理, $x_{2n-1}\in\left((2n-1)\pi,2n-\dfrac{\pi}{2}\right), x_{2n}\in\left(2n\pi,2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $2n\pi+\dfrac{\pi}{2}>x_{2n}>x_{2n-1}+\pi>2n\pi$,由 $y=\cos x$ 在 $\left(2n\pi,2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(n\in N)$ 上单调递减得: $\cos x_{2n}<-\cos x_{2n-1}$ 故

$f(x_{2n})+f(x_{2n-1})=\cos x_{2n}+\cos x_{2n-1}<0$, ?Ò $f(x_{2n})>0$, $f(x_{2n-1})<0$

当 n 为偶数时,从 $f(x_1)$ 开始相邻两项配对,每组和均为负值,

即 $[f(x_1)+f(x_2)]+[f(x_3)+f(x_4)]+\ldots+[f(x_{n-1})+f(x_n)]<0$, 结论成立,

当 n 为奇数时,从 $f(x_1)$ 开始相邻两项配对,每组和均为负值,还多出最后一项也是负值,

即 $[f(x_1)+f(x_2)]+[f(x_3)+f(x_4)]+\ldots+[f(x_{n-2})+f(x_{n-1})]+f(x_n)<0$, 结论也成立.

综上,对一切 $n\in N^+$, $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_n)<0$ 成立.

例 34. (2019•天津)设函数 $f(x)=e^x\cos x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(I)求 $f(x)$ 的单调区间;

(II)当 $x\in[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}]$ 时,证明 $f(x)+g(x)(\dfrac{\pi}{2}-x)\geq 0$;

(III)设 x_n 为函数 $u(x)=f(x)-1$ 在区间 $(2n\pi+\dfrac{\pi}{4}, 2n\pi+\dfrac{\pi}{2})$ 内的零点,其中 $n\in N$,证明

$2n\pi+\frac{\pi}{2}-x_n<\frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0-\cos x_0}$.

解析 (1)由已知, $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$, 因此,当 $x\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)(k\in Z)$ 时,有 $\sin x>\cos x$, 得 $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减;当 $x\in\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi-\frac{3\pi}{4}\right)(k\in Z)$ 时,有 $\sin x<\cos x$, 得 $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增, $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right](k\in Z)$, 单调减区间为 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right](k\in Z)$;

(2)证明:记 $h(x)=f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, 依题意及(1), 有 $g(x)=e^x(\cos x-\sin x)$,

从而 $h'(x)=f'(x)+g'(x)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+g(x)\cdot(-1)=g'(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)<0$. 因此, $h(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,有 $h(x)\geq h\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. 当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\geq 0$;

(3)证明:依题意, $u(x_n)=f(x_n)-1=0$, 即 $e^{x_n}\cos x_n=1$. 记 $y_n=x_n-2n\pi$, 则 $y_n\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,

且 $f(y_n)=e^{y_n}\cos y_n=e^{x_n-2n\pi}\cos(x_n-2n\pi)=e^{-2n\pi}(x\in N)$. 由 $f(y_n)=e^{-2n\pi}\leq 1=f(y_0)$ 及 (1), 得 $y_n\geq y_0$, 由 (2) 知,当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x)<0$, 故 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上为减函数,因此 $g(y_n)\leq g(y_0)<g\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, 又由 (2)知, $f(y_n)+g(y_n)\left(\frac{\pi}{2}-y_n\right)\geq 0$,

故 $\frac{\pi}{2}-y_n\leq-\frac{f(y_n)}{g(y_n)}=-\frac{e^{-2n\pi}}{g(y_n)}\leq-\frac{e^{-2n\pi}}{g(y_0)}=\frac{e^{-2n\pi}}{e^{y_0}(\sin y_0-\cos y_0)}<\frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0-\cos x_0}$,

则 $2n\pi+\frac{\pi}{2}-x_n<\frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0-\cos x_0}$.

例 35.(2019•开福区校级月考)已知函数 $f(x)=e^{ax}\sin x$

（1）若 $f(x)$ 在 $[0，\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增，求实数 a 的取值花围

（2）设 $a\geqslant 1$，若 $\forall x\in[0，\frac{\pi}{2}]$，恒有 $f(x)\leq bx$ 成立，求 $b-e^2a$ 的最小值

解析(1)由 $f(x)=e^{ax}\sin x$, 得 $f'(x)=e^{ax}(a\sin x+\cos x)$, 由 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，可得 $f'(x)\geq 0$ 恒成立,即 $a\sin x+\cos x\geq 0$ 恒成立,当 $x=0$ 时, $a\in R$; 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$, 则 $a\geq -\frac{1}{\tan x}$, 所以 $a\geq -1$, a 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

(2)设 $g(x)=f(x)-bx=e^{ax}\sin x-bx,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 设 $h(x)=e^{ax}(a\sin x+\cos x)-b$,

则 $h'(x)=e^{ax}\left[\left(a^2-1\right)\sin x+2a\cos x\right]\geq 0$, 所以 $h(x)$ 单调递增，即 $g'(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，$g'(x)\in\left[1-b,ae^{\frac{\pi}{2}a}-b\right]$, 当 $b\leq 1$ 时，$g'(x)\geq 0$, $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，所以 $g(x)\geq g(0)=0$, 不符合题意；当 $b\geq ae^{\frac{\pi}{2}a}$ 时，$g'(x)\leq 0$, $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，$g(x)\leq g(0)=0$, 符合题意；当 $1<b<ae^{\frac{\pi}{2}a}$ 时, 由于 $g'(x)$ 为一个单调递增的函数, 而 $g'(x)=1-b<0$, $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=ae^{\frac{\pi}{2}a}-b>0$，,由零点存在性定理,必存在一个零,点 x_0, 使得 $g'\left(x_0\right)=0$, 从而 $g(x)$ 在 $x\in\left[0,x_0\right]$ 上单调递减,在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right]$ 单调递增,因此只需 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)\leq 0$, 故 $e^{\frac{\pi}{2}a}\leq\frac{\pi}{2}b$, 则 $b\geq\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a}$, 从而 $\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a}\leq b<ae^{\frac{\pi}{2}a}$, 综上, b 的取值范围为 $\left[\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a},+\infty\right)$, 因此 $b-e^2a\geq\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a}-e^2a$, 设 $G(a)=\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a}-e^2a$, 则 $G'(a)=e^{\frac{\pi}{2}a}$, 令 $G'(a)=0$, 则 $a=\frac{4}{\pi}>1$, $G'(a)$ 在 $\left[1,\frac{4}{\pi}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{4}{\pi},+\infty\right)$ 上单调递增, 从而 $h(a)\geq h\left(\frac{4}{\pi}\right)=-\frac{2e^2}{\pi}$, 所以 $b-e^2a$ 的最小值为 $-\frac{2e^2}{\pi}$.

达标训练

1.（2019•河南月考）已知函数 $f(x)=e^x+a\cos x+1$ 在点 $A(0，f(0))$ 处的切线方程为 $y=kx+4$，则 $a+k$ 的

值为____.

2.（2019•小店区月考）函数 $f(x)=ax^2+\sin x$ 的图象在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程为 $y=x+b$，则 b 的值为(　　)

A．$1+\dfrac{\pi}{4}$　　B．$1-\dfrac{\pi}{4}$　　C．$1+\dfrac{4}{\pi}$　　D．$1-\dfrac{4}{\pi}$

3.（2018•孝感期末）函数 $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}$，$g(x)=2\cos 2x+ax$，若 $\forall x\in[0,+\infty)$，$f(x)\geq g(x)$，则 a 的取值范围为(　　)

A．$(-\infty,0)$　　B．$(-\infty,1)$　　C．$(-\infty,0]$　　D．$(-\infty,1]$

4．（2013•浙江）已知 e 为自然对数的底数，设函数 $f(x)=(e^x-1)(x-1)^k(k=1,2)$，则(　　)

A．当 $k=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 B．当 $k=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值

C．当 $k=2$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 D．当 $k=2$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值

5.（2019•新余二模）若 $x=0$ 是函数 $f(x)=\ln(x+\dfrac{1}{2})+\dfrac{2x}{2ax^2-x-1}$ 的极大值点，则实数 a 的取值集合为(　　)

A．$\{\dfrac{1}{6}\}$　　B．$\{-\dfrac{1}{2}\}$　　C．$[-\dfrac{1}{2},+\infty)$　　D．$(-\infty,\dfrac{1}{2}]$

6．（2016•泉州二模）已知函数 $f(x)=[x^3+(a-1)x^2-ax+a]e^x$，若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点，则实数 a 的取值范围为____.

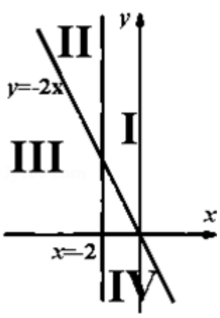
7.（2019•桂平市期末）函数 $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ 在 $x=1$ 处取得极大值 -1，则 $a-b=$____.

8．设函数 $f(x)=(x-1)^2(x+a)e^x$，$x=1$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点，求 a 的取值.

9.函数 $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}-\dfrac{a}{x+1}-2x(a>0)$，

（1）若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的一个极值点，求 a 的值；

（2）设直线 $x=-1$ 和 $y=-2x$ 将平面分成Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ四个区域，若 $y=f(x)$ 的图象恰好位于其中一个区域，试判断其所在区域并求出对应的 a 的范围.



10.（2017•山东）已知函数 $f(x)=x^2+2\cos x$，$g(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)$，其中 $e\approx 2.71828\ldots$是自然对

数的底数.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\pi，f(\pi))$ 处的切线方程;

（Ⅱ）令 $h(x)=g(x)-a\ f(x)(a\in R)$，讨论 $h(x)$ 的单调性并判断有无极值，有极值时求出极值.

11. （2017•北京）已知函数 $f(x)=e^{x}\cos x-x$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0，f(0))$ 处的切线方程;

（2）求函数 $f(x)$ 在区间 $[0，\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

12.（2014•北京）已知函数 $f(x)=x\cos x-\sin x$，$x\in[0，\dfrac{\pi}{2}]$.

（1）求证：$f(x)\le 0$;

（2）若 $a<\dfrac{\sin x}{x}<b$ 在 $x\in(0，\dfrac{\pi}{2})$ 上恒成立，求 a 的最大值与 b 的最小值.

13.（2012•福建）已知函数 $f(x)=ax\sin x-\dfrac{3}{2}(a\in R)$，且在 $[0，\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $\dfrac{\pi-3}{2}$，

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式;

（2）判断函数 $f(x)$ 在 $(0，\pi)$ 内的零点个数，并加以证明.

14.（2019•济南期末）已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+k$ 的极大值为 $\dfrac{1+e}{e}$，其中 $e=2.71828\ldots$ 为自然对数的底数.

（1）求实数 k 的值;

（2）若函数 $g(x)=e^{x}-\dfrac{a}{x}$，对任意 $x\in(0，+\infty)$，$g(x)\ge af(x)$ 恒成立.

(i) 求实数 a 的取值范围;

(ii) 证明：$x^{2}f(x)>a\sin x+x^{2}-1$.

15.（2019•襄阳期末）已知 $f(x)=\cos x+mx^{2}-1(x\ge 0)$.

（Ⅰ）若 $f(x)\ge 0$ 在 $[0，+\infty)$ 上恒成立，求实数 m 的取值范围;

（Ⅱ）证明：当 $x\ge 0$ 时，$e^{x}-2\ge\sin x-\cos x$.

16.（2019•天津期末）已知函数 $f(x)=\cos x+x\sin x-1$.

（Ⅰ）若 $x\in(0，\pi)$，求 $f(x)$ 的极值;

（Ⅱ）证明：当 $x\in[0，\pi]$ 时，$2\sin x-x\cos x\ge x$.

17.（2019•山阳县校级月考）已知函数 $f(x)=x+2-2\cos x$

（1）求函数 $f(x)$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最值:

（2）若存在 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 使不等式 $f(x)\le ax$ 成立，求实数 a 的取值范围

18.（2019•益阳模拟）已知函数 $f(x)=\sin x-(x+1)\ln(x+1)$； $g(x)=\sin x+\frac{x^2}{2}-x+1$.

（1）判断 $f(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 上的单调性，并说明理由；

（2）求 $g(x)$ 的极值；

（3）当 $x\in(0，\pi]$ 时， $\sin x>a(2-x)\ln(x+1)$ ，求实数 a 的取值范围．

19.（2019•秦淮区三模）已知函数 $f(x)=e^x+be^{-x}-2a\sin x(a，b\in R)$.

（1）若 $a=0$ ， $b=1$ ，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2） $b=-1$ 时，若 $f(x)>0$ 对一切 $x\in(0，\pi)$ 恒成立，求 a 的取值范围．

20.（2019•北辰区模拟）已知函数 $f(x)=e^x-ax$ ， $(a\in R)$ ， $g(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $g(x)\le kx$ 在 $x\in[0，+\infty)$ 恒成立，求 k 的取值范围；

（Ⅲ）当 $a=1$ ， $x\ge0$ 时，证明： $(2+\cos x)f'(x)\ge3\sin x$.

21.（2019•广东月考）函数 $f(x)=e^x-x-1$ ， $g(x)=e^x(ax+x\cos x+1)$.

（1）求函数 $f(x)$ 的极值，并证明，当 $x>-1$ 时， $\frac{1}{e^x}\le\frac{1}{x+1}$ ；

（2）若 $a>-1$ ，证明：当 $x\in(0，1)$ 时， $g(x)>1$.

22.(2019•荔湾区校级月考）已知函数 $f(x)=\sin x-ax+\frac{1}{6}x^3$.

（1）求函数 $f(x)$ 在点 $(0，f(0))$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 存在极小值点 x_1 与极大值点 x_2 ，求证： $x_1-2a<x_2+2$.

23.（2019•金牛区校级期中）函数 $f(x)=k\sin x+2x+1(k\in R)$ ，

（1）讨论函数 $f(x)$ 在区间 $(0，2\pi)$ 上的极值点的个数；

（2）已知对任意的 $x>0$ ， $e^x>f(x)$ 恒成立，求实数 k 的最大值．

24.（2019•福州期末）已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{a-1}{x}$ ， $g(x)=\frac{a(\sin x+1)-2}{x}$

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）求证：当 $0\le a\le1$ 时， $f(x)>g(x)$.

25.（2020•青羊区校级模拟）设函数 $f(x)=\frac{2}{\pi}-\sin x$ ， $x\in[0，\frac{\pi}{2}]$ ， $g(x)=\frac{x^2}{\pi}+\cos x+\frac{m}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2,(m\in R)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最大值；

（Ⅱ）当 $0\le x\le\frac{\pi}{2}, m\ge 0$ 时，求证： $g(x)\ge\frac{\pi}{4}$.

26.（2019•西安月考）已知函数 $f(x)=mx+\sin^2 x(m\in R)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}，\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减.

（Ⅰ）求 m 的最大值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 的图象在原点处的切线也与函数 $g(x)=xlnx+1$ 的图象相切，求 m 的值.

27.（2019•东湖区校级月考）已知函数 $f(x)=x\ln(x+a)+1(a<0)$.

（1）若函数 $f(x)$ 在定义域上为增函数，求 a 的取值范围；

（2）证明： $f(x)<e^x+\cos x$.

28.（2019•佛山二模）已知函数 $f(x)=\frac{a-\sin x}{x}$ ， $0<x<\pi$.

（Ⅰ）若 $x=x_0$ 时， $f(x)$ 取得极小值 $f(x_0)$ ，求实数 a 及 $f(x_0)$ 的取值范围；

（Ⅱ）当 $a=\pi$ ， $0<m<\pi$ 时，证明： $f(x)+m\ln x>0$.

29.(2019•运城期末）已知函数 $f(x)=e^x\sin x$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）如果对于任意的 $x\in[0，\frac{\pi}{2}]$ ， $f(x)\ge kx$ 总成立，求实数 k 的取值范围.

30.（2019•常德期末）已知函数 $f(x)=a\ln x-x^2$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）求证：当 $a>0$ 时， $f(x)\le(a-\sin x)x^2-ax$.

31.（2019•湖北期末）已知函数 $f(x)=e^x\cos x-x\sin x$ ， $g(x)=\sin x-\sqrt{2}e^x$ ，其中 e 为自然对数的底数.

（1） $\forall x_1\in[-\frac{\pi}{2}，0]$ ， $\exists x_2\in[0，\frac{\pi}{2}]$ ，使得不等式 $f(x_1)\le m+g(x_2)$ 成立，试求实数 m 的取值范围；

（2）若 $x>-1$ ，求证： $f(x)-g(x)>0$.

32.（2019•佛山期末）已知函数 $f(x)=ae^x\cos x+bx$ ， $g(x)=\frac{1}{2}x^2-\sin x+cx+d$ ，若曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 都过点 $P(0,1)$ ，且在点 P 处有相同切线 $y=x+1$.

（1）求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的解析式，并求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）设 $g'(x)$ 为 $g(x)$ 的导数，当 $x>0$ ， $\lambda\le-\sqrt{2}$ 时，证明： $f(x)>g'(x)\sin x+\lambda e^x$.

33.（2020•金安区校级模拟）已知函数 $f(x)=e^{m-x}+n$ 在点 $(1，1)$ 处的切线方程为 $x+y-2=0$.

（1）若函数 $F(x)=f(x)(-a+\cos x)(a\in R)$ 存在单调递减区间，求实数 a 的取值范围；

（2）设 $G(x)=f(x+1)[x^2+(1-t)x+1]$ ，对于 $x\in[0，1]$ ， $G(x)$ 的值域为 $[N，M]$ ，若 $M>2N$ ，求实数 t 的取值范围.

34.（2019•文峰区校级月考）已知函数 $f(x)=ax^2\cos x-\frac{1}{2}(a\neq 0)$ 在 $[0，\frac{\pi}{4}]$ 上的最大值为 $\frac{\sqrt{2}\pi^2-8}{16}$

（Ⅰ）求 a 的值

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $(0，\frac{\pi}{2})$ 上的零点个数

35.（2019•未央区校级期中）已知函数 $f(x)=\frac{a\cos x}{x}+b$ ，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2}，f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程为 $6x+\pi y-2\pi=0$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）判断方程 $f(x)=\frac{3}{2\pi}-1$ 在 $(0，2\pi]$ 内的解的个数，并加以证明.

36.（2019•淄博期末）已知函数 $f(x)=\ln x-\sin(x-1)$ ， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数．证明：

（1） $f'(x)$ 在区间 $(0，2)$ 存在唯一极小值点；

（2） $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

37.（2019•湖南期末）已知 $f(x)=e^x\cdot\sin x$

（1）求函数 $f(x)$ 在 $(0，\pi)$ 的极值.

（2）证明： $g\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)}{e^x}-\ln\left(x+1\right)$ 在 $(\frac{\pi}{2}，+\infty)$ 有且仅有一个零点.

38.（2020•开封一模）已知函数 $f(x)=a\cdot e^{-x}+\sin x$ ， $a\in R$ ， e 为自然对数的底数.

（1）当 $a=1$ 时，证明： $\forall x\in(-\infty，0]$ ， $f(x)\geq 1$ ；

39.（2019•武侯区校级期中）已知函数 $f(x)=\frac{\sin x+1}{e^x}$ ， $g(x)=ax+\frac{1}{6}$ ， $x\in[-2\pi，2\pi]$ ，其中 a 为实数， e 为自然对数的底数.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）是否存在实数 a ，使得对任意给定的 $x_0\in[-2\pi，2\pi]$ ，在区间 $[-2\pi，2\pi]$ 上总存在三个不同的 $x_i(i=1，2，3)$ ，使得 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=g(x_0)$ 成立？若存在，求出实数 a 的取值范围；若不存在，请说明理由.

40.（2020•武汉模拟）已知函数 $f(x)=(ax-\sin x-1)\cdot e^{x}(a\in R)$， $f'(x)$ 是其导函数.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $a\geq 1$，证明： $f'(x)$ 在区间 $(0，\pi)$ 内至多有 1 个零点.

41.（2020•佛山一模）已知函数 $f(x)=1-2a\sin x-e^{-x}$， $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，且 $f'(0)=0$.

（1）求 a 的值，并证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值；

（2）证明： $f(x)$ 在区间 $[2k\pi，2k\pi+\dfrac{\pi}{2}](k\in N)$ 有唯一零点.

专题 1 隐形圆问题

有关平面解析几何专题，无论是椭圆还是抛物线，我们已经归纳总结了多种秒杀方法，并在秒 1 和秒 2 中已经对其进行破解。随着高考改革的深入，传统的椭圆和抛物线的题目难度开始下降，平面解析几何的考察形式也开始变得多种多样，直线与圆的地位大幅度提升，甚至有“代替”圆锥曲线解答题的意思，带有文化背景的题目也层出不穷，“向量圆”、“阿波罗尼斯圆”等“隐形圆”问题也开始出现在各地市的模拟题中，无论是平面向量小题还是平面解析几何大题，“隐形圆”的出现，都会给大家制造不少麻烦。本专题我们来解密高考中的“隐形圆”问题。

第一讲 向量极化恒等式推出的隐圆

1.极化恒等式向量乘积型：$\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=\lambda$

定理：平面内，若 A,B 为定点，且 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=\lambda$，则 P 的轨迹是以 M 为圆心 $\sqrt{\lambda+\frac{1}{4}AB^2}$ 为半径的圆

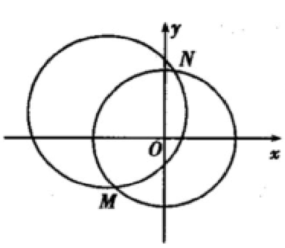
证明：由 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}=\lambda$，根据极化恒等式可知，$PM^2-\frac{1}{4}AB^2=\lambda$，所以 $PM=\sqrt{\frac{1}{4}AB^2+\lambda}$，$P$ 的轨迹是以 M 为圆心 $\sqrt{\lambda+\frac{1}{4}AB^2}$ 为半径的圆.

【例 1】（2017•江苏）在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-12,0)$，$B(0,6)$，点 P 在圆 O：$x^2+y^2=50$ 上，若 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}\le 20$，则 P 的横坐标范围是.

解析法一设 $P(x,y)$，则由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le 20$ 可得，$(-12-x)(-x)+(-y)(6-y)\le 20$，即 $(x+6)^2+(y-3)^2\le 65$ 所以 P 为圆 $(x+6)^2+(y-3)^2=65$ 上或其内部一，又点 P 在圆 $x^2+y^2=50$ 上，联立得 $\begin{cases}x^2+y^2=50\\(x+6)^2+(y-3)^2=65\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\y=7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-5\\y=-5\end{cases}$，即 P 为圆 $x^2+y^2=50$ 的少弧 MN 上的一点，如图 $16-1-1$，易知 $-5\sqrt{2}\le x\le 1$.

法二设 $P(x,y)$，则由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le 20$ 可得，$(-12-x)(-x)+(-y)(6-y)\le 20$，即 $x^2+12x+y^2-6y\le 20$，由于点 P 在圆 $x^2+y^2=50$ 上，故 $12x-6y+30\le 0$，即 $2x-y+5\le 0$，所以点 P 在圆 $x^2+y^2=50$ 上且满足 $2x-y+5\le 0$ 的点，即 P 为圆 $x^2+y^2=50$ 的劣弧 MN 上的一点，如图 $16-1-2$，同解法一，可得 $N(1,7)$，$M(-5,-5)$，易知 $-5\sqrt{2}\le x\le 1$.

法三设 AB 的中点为 M，P 点的轨迹是以 M 为圆心 $\sqrt{\lambda+\frac{1}{4}AB^2}$ 为半径的圆，所以 P 为圆 $(x+6)^2+(y-3)^2=65$ 上或其内部一点，下同解法一.



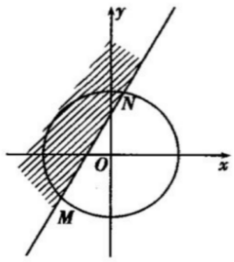


图 $16-1-1$ 图 $16-1-2$

【例 2】（2017•丹阳期中）已知 $A(2,3)$, $B(6,-3)$，P 在 $3x-4y+3=0$ 上，若满足 $\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{BP}+2\lambda=0$ 的 P 有 2 个，则 λ 的取值范围是.

解析法一如图 16−1−3 所示，设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x-2,y-3)$，$\overrightarrow{BP}=(x-6,y+3)$，根据题意有 $(x-4)^2+y^2=13-2\lambda\left(\lambda<\dfrac{13}{2}\right)$，则圆 $(x-4)^2+y^2=13-2\lambda\left(\lambda<\dfrac{13}{2}\right)$ 与直线 $3x-4y+3=0$ 一定相交，弦心距为 $d=\dfrac{|3\times4-4\times0+3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3<\sqrt{13-2\lambda}$，所以 $\lambda<2$. 故答案为 $\lambda<2$.

法二 AB 中点 $M(4,0)$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=-2\lambda=PM^2-13\Rightarrow PM^2=13-2\lambda$，故以 M 为圆心，半径为 $\sqrt{13}-2\lambda$ 的圆与直线有两个交点，只需 $d<\sqrt{13-2\lambda}$，即 $3<\sqrt{13-2\lambda}\Rightarrow\lambda<2$. 故答案为 $\lambda<2$.

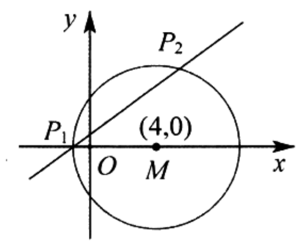


图 16-1-3

定理：若 A,B 为定点，P 满足 $PA^2+PB^2=\lambda$，则 P 的轨迹是以 AB 中点 M 为圆心，$\sqrt{\dfrac{\lambda-\frac{1}{2}AB^2}{2}}$ 为半径的圆. $(\lambda-\frac{1}{2}AB^2>0)$.

证明：$PA^2+PB^2=2\left[PM^2+(\frac{1}{2}AB)^2\right]=\lambda$，所以 $PM=\sqrt{\dfrac{\lambda-\frac{1}{2}AB^2}{2}}$，即 P 的轨迹是以 AB 中点 M 为圆心，$\sqrt{\dfrac{\lambda-\frac{1}{2}AB^2}{2}}$ 为半径的圆.

【例 3】（2018•江苏二模）在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 $C:(x+1)^2+y^2=2$，点 $A(2,0)$，若 C 上存在点 M 满足 $MA^2+MO^2\le10$，求 M 纵坐标的取值范围.

解析法一设 $M(x,y)$，由 $A(2,0),O(0,0)$，得 $MA^2=(x-2)^2+(y-0)^2=x^2-4x+y^2+4$，$MO^2=x^2+y^2$，又 $MA^2+MO^2\le10$，则 $x^2-4x+y^2+4+x^2+y^2\le10$，整理得 $x^2-2x+y^2\le3$，即 $(x-1)^2+y^2\le4$. 又点

M 在圆 $C:(x+1)^2+y^2=2$ 上,所以联立得 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2\le 4\\(x+1)^2+y^2=2\end{cases}$, 得 $\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\y^2\le \dfrac{7}{4}\end{cases}$, $y\in\left[-\dfrac{\sqrt{7}}{2},\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right]$..

法二设 AO 的中点为 P,所以 M 点的轨迹是以 $P(1,0)$ 为圆心, 2 为半径的圆上或内部，如图 16-1-4 可知, M 纵坐标取值范围是 $\left[-\dfrac{\sqrt{7}}{2},\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right]$.

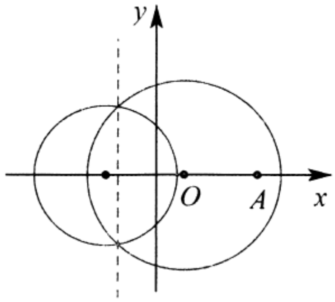


图 16-1-4

【例 4】（2019•惠山期末）已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=\sqrt{3}$, $\triangle ABC$ 所在平面内存在点 P ，使得 $PB^2+PC^2=3PA^2=3$，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为.

解析法一如图 $16-1-5$, 以 BC 的中点为坐标原,点, BC 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系,设 $B(-a,0)$, $C(a,0)$, $(a>0)$, 则 $A\left(0,\sqrt{3-a^2}\right)$, 设 $P(x,y)$, 由 $PB^2+PC^2=3PA^2=3$ 得:

$(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2=3\left[x^2+\left(y-\sqrt{3-a^2}\right)^2\right]=3$, 即 $x^2+y^2=\dfrac{3}{2}-a^2$, $x^2+\left(y-\sqrt{3-a^2}\right)^2=1$,

点. P 既在 $(0,0)$ 为圆心,半径为 $\sqrt{\dfrac{3}{2}-a^2}$ 的圆上,也在 $\left(0,\sqrt{3-a^2}\right)$ 为贞心,1 为半径的界上，故

$\left|1-\sqrt{\dfrac{3}{2}-a^2}\right|\le\sqrt{3-a^2}\le 1+\sqrt{\dfrac{3}{2}-a^2}$, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot\sqrt{3-a^2}=a\sqrt{3-a^2}=\sqrt{3a^2-a^4}=\sqrt{-\left(a^2-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}}$

由 $a^2\le\dfrac{23}{16}$, 可得 $a^2=\dfrac{23}{16}$, S 取得最大值,且为 $\dfrac{5\sqrt{23}}{16}$. 故答案为 $\dfrac{5\sqrt{23}}{16}$.

法二如图 $16-1-6$, 设 $BC=2x$, 则 $AD=\sqrt{3-x}$, $PA^2+PC^2=2\left(PD^2+x^2\right)=3\Rightarrow PD^2=\dfrac{3}{2}-x^2$, 则 $\|AP(-|PD\|\le|AD|\le|AP|+|PD|$, 即 $\left|1-\sqrt{\dfrac{3}{2}-x^2}\right|\le\sqrt{3-x^2}\le 1+\sqrt{\dfrac{3}{2}-x^2}\Rightarrow x^2\le\dfrac{23}{16}$, 故 $S=\dfrac{1}{2}\cdot 2x\cdot\sqrt{3-x^2}=\sqrt{3x^2-x^4}\le\dfrac{5\sqrt{23}}{16}$.

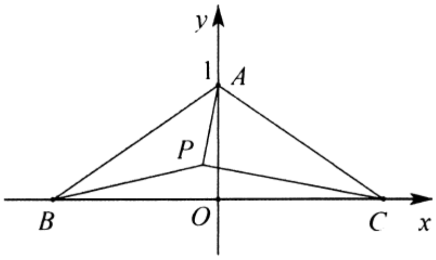


图 16-1-5

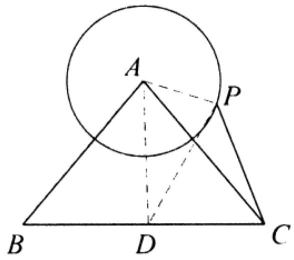


图 16-1-6

类型三定幂方和型：如图$16-1-7$, 若 A, B 为两定点,,且平面内一动点, P 满足$\begin{cases} mPA^2+PB^2=n \\ PA^2+mPB^2=n \\ mPA^2+nPB^2=\lambda \end{cases}$,则点 P 的轨迹为圆.

证明 $mPA^2+PB^2=n \Rightarrow m\left[(x+c)^2+y^2\right]+\left[(x-c)^2+y^2\right]=n$

$$\Rightarrow(m+1)\left(x^2+y^2\right)+2c(m-1)x+(m+1)c^2-n=0 \Rightarrow x^2+y^2+\frac{2(m-1)c}{m+1}\cdot x+\frac{c^2(m+1)-n}{m+1}=0$$

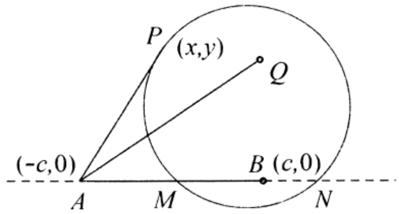


图 16-1-7

例 5.（2019•开福区校级期末）已知点 $A(-1，0)$， $B(2，0)$，直线 $l:kx-y-5k=0$ 上存在点 P，使得 $PA^2+2PB^2=9$ 成立，则实数 k 的取值范围是____.

解析由题意得:直线 $l:y=k(x-5)$, 因此直线 l 经过定点 $(5,0)$, 设点 P 坐标为 $\left(x_0,y_0\right)$, 由\$ $PA^2+2PB^2=9$, 得 $y_0^2+\left(x_0+1\right)^2+2y_0^2+2\left(x_0+2\right)^2=9$ 化简得 : $x_0^2+y_0^2-2x_0=0$, 因此,点 p 为 $x^2+y^2-2x=0$ 与直线 $l:y=k(x-5)$ 的交点.所以应当满足圆心(1,0)到直线的距离小于等于半径 $\frac{|-4k|}{\sqrt{k^2+1}}\leq 1$, 解得 $k\in\left[-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right]$.故答案为 $k\in\left[-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right]$.

例 6.　（2018•扬州期中）已知 $A(-1，4)$， $B(2，1)$，圆 $C:(x-a)^2+(y-2)^2=16$，若圆 C 上存在唯一的点 P，使得 $PA^2+2PB^2=24$ 成立，则实数 a 的取值集合为____.

解析 设 $P(x,y)$, 则 $PA^2=(x+1)^2+(y-4)^2=x^2+y^2+2x-8y+17, PB^2=(x-2)^2+(y-1)^2=x^2+y^2-4x-2y+5$，由 $PA^2+2PB^2=24$, 得 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$, 即 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$, 故 P 点轨迹方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$,由于圆 C 上存在唯一的,点 P 符合题意,故两圆相切,所以 $|a-1|=2$, 或 $|a-1|=6$, 解得 $a=-1$ 或 $a=3$,或 $a=7$ 或 $a=-5$. 故答案为 $\{-5,-1,3,7\}$.

第二讲由垂直推出的隐圆

1. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$（$P$ 在以 A, B 为直径的圆上）或者 $AP\perp BP$（P 以 A, B 为直径的圆上，但挖去 A, B 两点）

设 AB 的中点为 M，则 P 点的轨迹是以 M 为圆心，$\frac{1}{2}AB$ 为半径的圆

【例 7】已知 $m\in R$，动直线 l_1：$x+my=0$ 与 l_2：$mx-y-2m-4=0$ 交于 $P(x_0，y_0)$，则 $x_0^2+y_0^2+2x_0$ 的取值范围是.

解析如图16−2−1, 由题意可知，l_1 过定点 $A(0,0)$, l_2 过定点 $B(2,-4)$, 且 $l_1\perp l_2$, 则 P 点的轨迹方程 $(x-1)^2+(y+2)^2=20x_0^2+y_0^2+2x_0=\left(x_0+1\right)^2+y_0^2-1$, 设 $d=\left(x_0+1\right)^2+y_0^2$, 即 d 为圆上的点 P 到 $Q(-1,0)$ 的距离的平方，所以 $2\sqrt{2}-\sqrt{5}\le d\le 2\sqrt{2}+\sqrt{5}$, 故 $x_0^2+y_0^2+2x_0\in[12-4\sqrt{10},12+4\sqrt{10}]$.

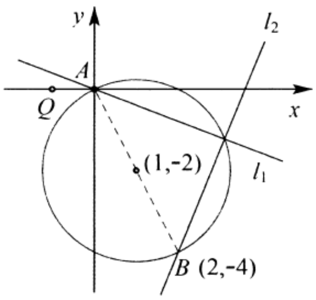


图 16-2-1

【例 8】（2016 海淀模拟）设 $m\in R$，直线 $x+my=0$ 与直线 $mx-y-2m+4=0$ 交于点 $P(x，y)$，则点 P 到直线 l：$(x-1)\cos\theta+(y-2)\sin\theta=3$ 距离的最大值为.

解析由题意可知,直线 l_1 过定点 $A(0,0)$, 直线 l_2 过定点 $B(2,4)$, 且 $l_1\perp l_2$, $\frac{1}{2}AB=\sqrt{5}$, 则 P 点的轨迹方程是 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$, 所以圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|-3|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=3$, 所以 P 到直线 l 距离最大值为 $3+\sqrt{5}$.

【例 9】（2014 四川文）设 $m\in R$，过定点 A 的动直线 $x+my=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于点 P，则 $|PA|+|PB|$ 的取值范围是（）

A. $[\sqrt{5}，2\sqrt{5}]$　　B. $[\sqrt{10}，2\sqrt{5}]$　　C. $[\sqrt{10}，4\sqrt{5}]$　　D. $[2\sqrt{5}，4\sqrt{5}]$

解析法一动直线 $x+my=0$ 过的定点为 $A(0,0)$, 动直线 $mx-y-m+3=0$ 过的定点为 $B(1,3)$, 由于直线

$x+my=0$ 与直线 $mx-y-m+3=0$ 垂直,所以两直线交,点 P 在以 AB 为直径的圆上.

设 $|PA|=x(0\le x\le\sqrt{10})$, 则 $|PB|=\sqrt{10-x^2}$. 所以 $f(x)=|PA|+|PB|=x+\sqrt{10-x^2}$, 则 $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{10-x^2}}$, 令 $f'(x)=0$, 解得 $x=\sqrt{5}$ 或 $x=-\sqrt{5}$ (舍去); 当 $0<x<\sqrt{5}$ 时, $f'(x)>0$, 当 $\sqrt{5}<x<\sqrt{10}$ 时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$ 在 $x=\sqrt{5}$ 处取得最大值, $f(\sqrt{5})=2\sqrt{5}$. 又因为 $f(0)=f(\sqrt{10})=\sqrt{10}$, 所以 $f(x)$ 的最小值为 $\sqrt{10}$，即 $|PA|+|PB|$ 的取值范围是 $[\sqrt{10},2\sqrt{5}]$.

法二由题意可知 $A(0,0)$, $B(1,3)$, 且两直线互相垂直，所以 P 在以 AB 为直径的圆上,

$(|PA|+|PB|)_{\min}=|AB|=\sqrt{10}$, 由基本不等式 $(|PA|+|PB|)^2\le 2\left(|PA|^2+|PB|^2\right)=2|AB|^2=20$,

所以 $|PA|+|PB|\le 2\sqrt{5}$, 所以 $|PA|+|PB|$ 的取值范围是 $[\sqrt{10},2\sqrt{5}]$.

【例 10】(2018 江苏一模) 已知直线 l：$x-y+2=0$ 与 x 轴交于 A，点 P 在直线 l 上，圆 C：$(x-2)^2+y^2=2$ 上有且仅有一点 B 满足 $AB\perp BP$，则 P 的横坐标的取值集合为.

解析法一设 $P(t,t+2)$, $B(x,y)$, 由题意得 $A(-2,0)$, 故 $AB=(x+2,y)$, $\overrightarrow{BP}=(t-x,t+2-y)$，由于 $AB\perp BP$, 故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}=0$, 所以 $(x+2)(t-x)+y(t+2-y)=0$,

整理得 $x^2+(2-t)x-2t+y^2-(t+2)y=0$，即 $\left(x-\dfrac{t-2}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{t+2}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}(t+2)^2$, 则点 B 在圆心为 $N\left(\dfrac{t-2}{2},\dfrac{t+2}{2}\right)$, 半径 $r_2=\sqrt{\dfrac{(t+2)^2}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|t+2|$ 的圆 N 上.又 $B(x,y)$ 在圆 $C:(x-2)^2+y^2=2$ 上,由题意有且仅有一个点 B 满足 $AB\perp BP$,故圆 N 与圆 C 相切.圆 $C:(x-2)^2+y^2=2$, 圆心 $C(2,0)$, 半径 $r_1=\sqrt{2}$, 连接 CN;

(1)若内圆外切,则 $CN=r_1+r_2$, 即 $\sqrt{\left(\dfrac{t-2}{2}-2\right)^2+\left(\dfrac{t+2}{2}-0\right)^2}=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}|t+2|$,

则 $\sqrt{t^2-4t+20}=2+|t+2|$

(i)当 $t\ge -2$ 时, $|t+2|=t+2$, 即 $\sqrt{t^2-4t+20}=t+4$, 两边平方 , 解得 $t=\dfrac{1}{3}$.

(ii)当 $t<-2$ 时, $|t+2|=-t-2$, 即 $\sqrt{t^2-4t+20}=-t$, 两边平方 , 解得 $t=5$, 不合题意,舍去.

(2)若两圆内切，易知点. N 在直线 l 上,则 $CN=r_2-r_1$.

故 $\sqrt{\left(\dfrac{t-2}{2}-2\right)^2+\left(\dfrac{t+2}{2}-0\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|t+2|-\sqrt{2}$, $\sqrt{t^2-4t+20}=|t+2|-2$, 则 $|t+2|-2>0$, 得 $t>0$ 或 $t<-4$.

(i)当 $t>0$ 时, $|t+2|=t+2$, 故 $\sqrt{t^2-4t+20}=t$, 两边平方,解得 $t=5$.

(ii)当 $t<-4$ 时, $|t+2|=-t-2$, 故 $\sqrt{t^2-4t+20}=-t-4$, 两边平方,解得 $t=\dfrac{1}{3}$, 不合题意，舍去.

综上,$t\in\left\{\frac{1}{3},5\right\}$.

法二设 $P(t,t+2)$, 由 $AB\perp BP$ 得 B 在以 AP 为直径的圆上，由题意得 $A(-2,0)$, 以 AP 为直径的圆的方程为 $(x+2)(x-t)+y(y-t-2)=0$, 即 $x^2+y^2+(2-t)x-(t+2)y-2t=0$, 又点 B 在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 即 $x^2+y^2-4x+2=0$ 上，两圆方程相减得 $(t-6)x+(t+2)y+2+2t=0$, 故方程组 $\begin{cases}x^2+y^2-4x+2=0\\(t-6)x+(t+2)y+2+2t=0\end{cases}$, 只有一解，圆心 $(2,0)$ 到直线的距离 $d=\frac{|2(t-6)+2+2t|}{\sqrt{(t-6)^2+(t+2)^2}}=\sqrt{2}$, 得 $3t^2-16t+5=0$, 解得 $t=\frac{1}{3}$ 或 $t=5$

法三由题意可知, $A(-2,0)$, $P\left(x_0,x_0+2\right)$, B 的轨迹在以 AP 为直径的圆上，圆心 $D\left(\frac{x_0-2}{2},\frac{x_0+2}{2}\right)$,

$r=\frac{1}{2}|AP|=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|x_0+2\right|$, 当 C 与 D 外切时, $|CD|=\sqrt{\frac{1}{2}x_0^2-2x_0+10}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|x_0+2\right|+\sqrt{2}\Rightarrow x_0=\frac{1}{3}$,

内切时, $|CD|=\sqrt{\frac{1}{2}x_0^2-2x_0+10}=\left|\frac{1}{2}x_0+2-\sqrt{2}\right|\Rightarrow x_0=5$.

2. 与向量模和矩形相关构成隐圆

【例 11】（2008•浙江卷）已知 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 是平面内两个互相垂直的单位向量，若向量 c 满足 $(a-c)\bullet(b-c)=0$，则 $|\vec{c}|$ 的最大值是（）

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析如图 $16-2-2$ 所示,构造 $\overrightarrow{OA}=a$, $\overrightarrow{OB}=b$, $\overrightarrow{OC}=c$, 取 AB 的中点 M, 根据题意可知 $AC\perp BC$，

$|OM|=|AM|=|BM|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 显然 C 在以 AB 为斜边的圆上,故 $|CM|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 根据几何意义可知,

O 、A 、C 、B 四点共圆，故当 C 位于图中 C' 时, $|\vec{c}|_{\max}=\left|OC'\right|=\sqrt{2}$, 故选 C.

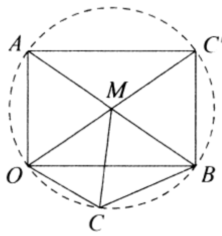


图 16-2-2

【例 12】（2019•浙江期中）已知平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 满足对任意 $x\in R$ 都有 $|\vec{a}-x\vec{b}|\geq|\vec{a}-\vec{b}|$，$|\vec{a}-x\vec{c}|\geq|\vec{a}-\vec{c}|$ 成立，$|\vec{a}-\vec{c}|=|\vec{b}-\vec{c}|=1$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$，则 $|\vec{a}|$ 的值为(　　)

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{7}$

解析如图$16-2-3$,设$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$,则$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$, 依题意, 对任$x\in R$都有$|\vec{a}-x\vec{b}|\geq|\vec{a}-\vec{b}|$,故$(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$,所以$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{BA}$,即$B$点在以$OA$为直径的圆$M$上($M$为囚心）,同理$C$也在以$OA$为直径的圆$M$上,则$AC=BC=1,AB=\sqrt{3}$,设$\angle AOC=\theta$,则因为$BC=AC=1$,所以$\angle BOC=\theta$,则$\angle AOB=\angle AOC+\angle BOC=2\theta$, $AC=1=OA\times\sin\theta$, $AB=\sqrt{3}=OA\sin 2\theta$, 所以$\sin\theta=\frac{1}{2}$,所以$|\vec{a}|=OA=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$.故选C.

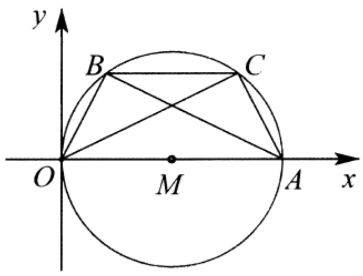


图 16-2-3

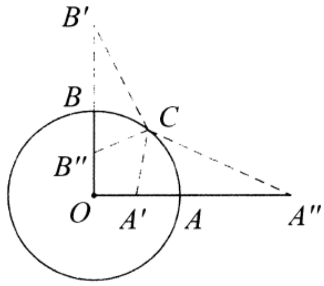


图 16-2-3

例 13.（2019•莲都区校级月考）已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足：$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\bullet\vec{b}=0$，则$|2\vec{c}-\vec{a}|+|\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{b}|$的最小值为(　　)

A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{5}{2}$　　D. $\sqrt{5}$

解析如图$16-2-4$,$\odot O$为单位圆,A、B、C在$\odot O$上,$OA\perp OB$, $\angle BOA=\frac{\pi}{2}$, B'在OB的延长线上,$OB'=2$, B''为OB中点,A'为OA中点,A''在OB的延长线上,$OA''=2$, 设$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, C为$\odot O$上一点, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$,则$\frac{OA'}{OC'}=\frac{OC}{OA''}=\frac{1}{2}$,故$\triangle OCA'\sim\triangle OA''C$,则$CA'=2A'C$, 同理$CB''=\frac{1}{2}CB'$,

$2\vec{c}-\vec{a}=2\left(\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)=2\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA'}\right)=2\overrightarrow{A'C}$, $\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{c}-2\vec{b})=\frac{1}{2}(\vec{c}-2\vec{b})=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB'}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{B'C}$

所以$|2\vec{c}-\vec{a}|+\left|\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{b}\right|=2\left|\overrightarrow{A'C}\right|+\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{B'C}\right|=\left|B''C\right|+\left|CA''\right|\geq\left|B''A''\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+4}=\frac{\sqrt{17}}{2}$,故选A.

注意：此题引入了阿圆性质，详细内容我们接下来会为您呈现.

例 14.（2018•漳州模拟）已知$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=1$，$(\vec{a}-\vec{c})\bullet(\vec{b}-\vec{c})=0$，则$|\vec{a}-\vec{b}|$的取值范围是(　　)

A．$[\sqrt{6}-1，\sqrt{6}-1]$　　B．$[\frac{\sqrt{7}-1}{2}，\frac{\sqrt{7}+1}{2}]$　C．$[\sqrt{7}-1，\sqrt{7}+1]$　D．$[\frac{\sqrt{6}-1}{2}，\frac{\sqrt{6}+1}{2}]$

解析如图$16-2-4$所示,设$\vec{a}=\overrightarrow{OA},\vec{b}=\overrightarrow{OB},\vec{c}=\overrightarrow{OC}$,点$C$在圆$x^2+y^2=1$上,,点$A,B$在圆$x^2+y^2=4$上,则$\vec{a}-\vec{c}=\overrightarrow{CA}$, $\vec{b}-\vec{c}=\overrightarrow{CB}$, 因此$CA\perp CB$,即点$C$在以$AB$为直径的圆$M$上.由于点$C$同时在圆$x^2+y^2=1$上，故两圆有公共点.设圆$M$的半径为$r$,则有$|r-1|\le|OM|\le r+1$,由于$M$为$AB$的中点,所以$OM\perp AB$,故$|OM|=\sqrt{4-r^2}$,解得$\frac{\sqrt{7}-1}{2}\le r\le\frac{\sqrt{7}+1}{2}$,又$|\vec{a}-\vec{b}|=|\overrightarrow{BA}|=2r$,所以$|\vec{a}-\vec{b}|\in[\sqrt{7}-1,\sqrt{7}+1]$，故选C.

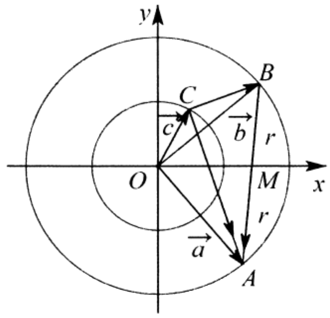


图 16-2-4

例 15.（2019•上城区校级月考）已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，其中$|\vec{a}-\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{c}|=1$，$\vec{b}$与$\vec{c}$夹角为$60°$，且$(\vec{a}-\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{c})=-1$．则$|\vec{a}|$的最大值为____.

解析由于$|\vec{a}-\vec{b}|=2,|\vec{a}-\vec{c}|=1,(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=-1$,设$\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}-\vec{c}$的大角为$\theta$,则$2\cdot1\cdot\cos\theta=-1$,因为$\cos\theta=-\frac{1}{2}$，且$0^\circ\le\theta\le180^\circ$,故$\theta=120^\circ$,如图$16-2-5$, $\vec{b},\vec{c}$的夹角为60°,故四点A, C, B, D共圆，则AB为为四边形$ACBD$的外接圆直径时,$|\vec{a}|$最大，在ΔBCD中，$BC=2$, $BD=1$, $\angle CBD=120^\circ$;

法一由余弦定理得$CD^2=4+1-2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$, 设$|\vec{a}|=x$,则$AC^2=x^2-4$, $AD^2=x^2-1$, 在ΔACD中，由余弦定理得,$x^2-4+x^2-1-2\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=7$,故$2\left(x^2-6\right)=\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{x^2-1}$,两边平方并整理得:$3x^4-43x^2+140=0$,解得$x^2=\frac{28}{3}$或$5$,故$x^2$的最大值为$\frac{28}{3}$,则$|\vec{a}|$的最大值为$\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

故答案为$\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

法二由$2R=\dfrac{|CD|}{\sin\angle CBD}=\dfrac{\sqrt{7}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.故答案为$\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

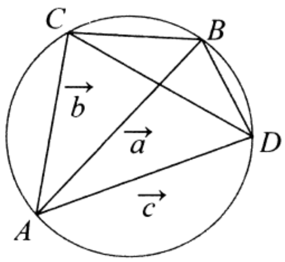


图 16-2-5

第三讲阿波罗尼斯圆

阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆，在平面上给定两点A，B，设P点在同一平面上且满足$\dfrac{PA}{PB}=\lambda$，当$\lambda>0$且$\lambda\neq1$时，P点的轨迹是一个以定比λ内分和外分定线段AB的两个分点的连线为直径的圆，这个轨迹最先由古希腊数学家阿波罗尼斯（Apollonius）发现，故称之为阿波罗尼斯圆．（$\lambda=1$时P点的轨迹是线段AB的中垂线）．

阿波罗尼斯圆的证明：

定理：已知A,B两点,P,Q分别为线段AB的定比为$\lambda(\lambda\neq1)$的内外分点,则以PQ为直径的圆O上任意点到A,B两点的距离之比为λ.

证明如图 16-3-1，以线段AB所在的直线为x轴，线段AB的中垂线为y轴建立平面直角坐标系，并设点$A(-c,0),B(c,0)$,设$P(x,y)$,则由距离公式可知:$\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}=\lambda(\lambda>0,\lambda=1)$,化简得:$x^2+y^2-2c\cdot\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}x+c^2=0$,即:$\left(x-\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}c\right)^2+y^2=\dfrac{4\lambda^2c^2}{\left(\lambda^2-1\right)^2}$,由,点$A,B,O$共线,令$y=0$可得：$x_1=\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}c$，$x_2=\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}c$,由此得到，圆$O$与线段$AB$交于点$M\left(\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}c,0\right)$与线段$AB$的延长线（或其反向延长线）交于点$N\left(\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}c,0\right)$，线段$MN$是圆的一条直径，且有

: $\dfrac{|MA|}{|MB|}=\dfrac{\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}c+c\right|}{\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}c-c\right|}=\dfrac{\left|\dfrac{2\lambda}{\lambda+1}c\right|}{\left|\dfrac{2}{\lambda+1}c\right|}=\lambda$, $\dfrac{|NA|}{|NB|}=\dfrac{\left|\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}c+c\right|}{\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}c-c||}=\dfrac{\dfrac{2\lambda}{|\lambda-1|}c}{\dfrac{2}{|\lambda-1|}c}=\lambda$,而 P,M,$N$ 同时在到 A,B 两,点距离之比等于 λ 的曲线上,而不共线的三,点所确定的圆是唯一的，因此，圆 O 上任意一点到 A,B 两,点的距离之比恒为 λ.

阿波罗尼斯圆的相关性质

性质 1 由定义所作的阿波罗尼斯圆的直径为 $PQ=\dfrac{2a\lambda}{|\lambda^2-1|}$,面积为 $\pi\left(\dfrac{a\lambda}{\lambda^2-1}\right)^2$.

性质 2 当 $\lambda>1$ 时，点 B 在圆 O 内,点 A 在圆 O 外;当 $0<\lambda<1$ 时，点 A 在圆 O 内,点 B 在圆 O 外.

证明由 $|AO|-r=\left|-c-\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}c\right|-\dfrac{2\lambda c}{|\lambda^2-1|}=\dfrac{2\lambda c(\lambda-1)}{|\lambda^2-1|}$, $|BO|-r=\left|c-\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}c\right|-\dfrac{2\lambda c}{|\lambda^2-1|}=\dfrac{2c(1-\lambda)}{|\lambda^2-1|}$

当 $\lambda>1$ 时, $|AO|>r>|BO|$, 点 A 在圆 O 外，点 B 在圆 O 内;

当 $0<\lambda<1$ 时， $|AO|<r<BO|$, 点 A 在圆 O 内,点 B 在圆 O 外.

性质 3 如图 $16-3-2(\lambda>1$ 时 $)$ 过 B 作直线 CD 垂直于 MN, 与圆 O 交于 C_1D, 则 AC 和 AD 为圆 O 的切线，切点分别是 C_1D; 反之也成立.

证明法一由性质 1, 圆 O 的方程为 $\left(x-\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}c\right)^2+y^2=\dfrac{4\lambda^2c^2}{\left(\lambda^2-1\right)^2}$, 将 $x=c$ 代入方程,解得 $y=\pm\dfrac{2c}{\sqrt{\lambda^2-1}}$

则点 $C\left(c,-\dfrac{2c}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right)$, $D\left(c,\dfrac{2c}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right)$ 所以 $k_{AC}=\dfrac{-\dfrac{2c}{\sqrt{\lambda^2-1}}}{c-(-c)}=-\dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}}$,

即 $k_{OC}=\dfrac{-\dfrac{2c}{\sqrt{\lambda^2-1}}}{c-\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}c}=\sqrt{\lambda^2-1}$, 所以 $k_{AC}\cdot k_{OC}=-1$, 即 AC 为圆 O 的切线,切点为 C, 同理可证, AD 也为圆 O 的切线,切,点为 D.

法二在 $\triangle CMN$ 中，止射影定理可得: $|BC|^2=|BM|\cdot|BN|=\dfrac{2c}{\lambda+1}\cdot\dfrac{2c}{\lambda-1}=\dfrac{4c^2}{\lambda^2-1}$, 又因为 $|AB|=2c$, $|OB|=\left|c-\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}\right|=\dfrac{2c}{\lambda^2-1}$, $|AB|\cdot|OB|=\dfrac{2c}{\lambda^2-1}\exists BC|^2$, 所以 $\dfrac{|AB|}{|BC|}=\dfrac{|BC|}{|BO|}$,

又因为 $\angle ABC=\angle CBO$, 所以 $\triangle ABC\sim\triangle CBO$, $\angle ACO=\angle ACB+\angle BCO=\angle CBO+\angle BCO=90^{\circ}$, 即

AC 与 OC 垂直于 C, 同理 AD 与 OD 垂直于 D.

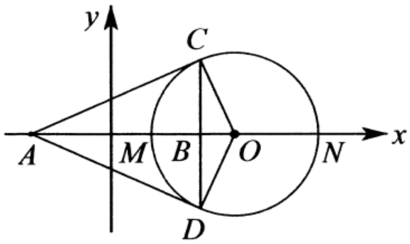


图 16-3-2

性质 4. 如图 $16-3-3$, 过点 A 作圆 O 的切线 AC （C 为切点），则 CM,CN 分别为 $\angle ACB$ 的内角平分线、外角平分线。

证明显然只需证 CM 平分 $\angle ACB$ 即可.

如图 16-3-3 所示,由性质 3 可知图中 $CB\perp AB$ 于点 B，因为点 C,M 均为圆 O 上的,点,故 $\dfrac{|AC|}{|BC|}=\dfrac{|MA|}{|MB|}=\lambda$

则有 $\dfrac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle BMC}}=\dfrac{\frac{1}{2}|MA|\cdot|BC|}{\frac{1}{2}|MB|\cdot|BC|}=\dfrac{\frac{1}{2}|AC|\cdot|MC|\cdot\sin\angle ACM}{\frac{1}{2}|BC|\cdot|MC|\cdot\sin\angle BCM}\Rightarrow\lambda=\dfrac{\sin\angle ACM}{\sin\angle BCM}\cdot\lambda(\lambda>1)$,

即 $\sin\angle ACM=\sin\angle BCM$,所以 $\angle ACM=\angle BCM$, 即 CM 平分 $\angle ACB$.

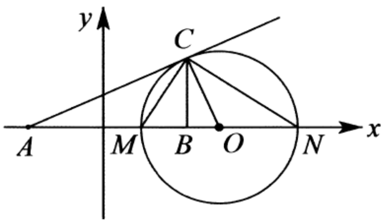


图 16-3-3

性质 5.过点 B 作圆 O 不与 CD 重合的弦 EF, 则 AB 平分 $\angle EAF$.

证明如图 16-3-4 所示,过点 A 作 $AH\perp EF$ 于 H, 因为点 E,F 均为圆 O 上的点,则 $\dfrac{|AE|}{|BE|}=\dfrac{|AF|}{|BF|}=\lambda$,

所以 $\dfrac{|BE|}{|BF|}=\dfrac{|AE|}{|AF|}$, 则 $\dfrac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ABF}}=\dfrac{\frac{1}{2}|BE|\cdot|AH|}{\frac{1}{2}|BF|\cdot|AH|}=\dfrac{\frac{1}{2}|AE|\cdot|AB|\cdot\sin\angle BAE}{\frac{1}{2}|AF|\cdot|AB|\cdot\sin\angle BAF}$,

所以$\dfrac{|BE|}{|BF|}=\dfrac{\sin\angle BAE}{\sin\angle BAF}\cdot\dfrac{|AE|}{|AF|}$，所以$\sin\angle BAE=\sin\angle BAF$，所$\angle$以$\angle BAE=\angle BAF$，

即AB平分$\angle EAF$.

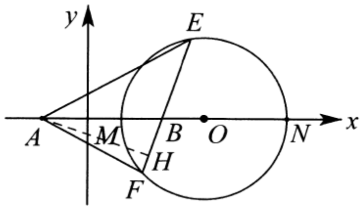


图 16-3-4

由阿波罗尼斯圆衍生出来的一些性质如下：

性质 6. 设AB为半径为R的圆O的一条直径，M为直线AB上异于O的一个点，过M且异于AB的弦与圆O交于PQ，作Q关于AB的对称点Q_1，则PQ_1过直线AB上的定点N，且$OM\cdot ON=R^2$.

证明如图 16-3-5，延长PO与圆交于，点C，连接Q_1C，因为$\angle C+\angle CPQ_1=90^\circ$，$\angle Q+\angle M=90^\circ$，$\angle C=\angle Q$，所以$\angle CPQ_1=\angle M$，所以$\triangle OPN\cup\triangle OMP$，所以$\dfrac{OP}{OM}=\dfrac{ON}{OP}$，即$OM\cdot ON=OP^2=R^2$.

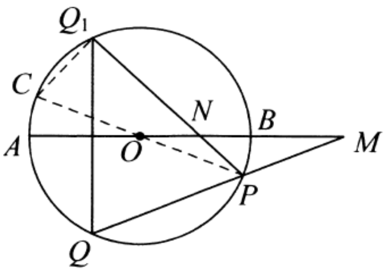


图 16-3-5

性质 7. 设AB为半径为R的圆O的一条直径，M ?¢N为圆心同侧的两个点，且有$OM\cdot ON=R^2$，PQ的中垂线OD与PQ交于点C，与M点处垂直于AB的直线交于点D，则$OC\cdot OD=R^2$.

证明由图形显然可知，$\triangle OCN\subset\triangle OMD$，则$\dfrac{ON}{OD}=\dfrac{OC}{OM}$，即$OC\cdot OD=OM\cdot ON=R^2$.

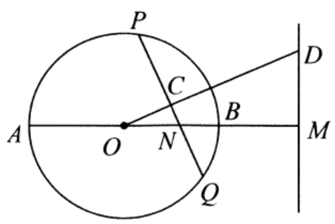


图 16-3-6

其中性质 6 和性质 7 可以应用于粗圆解答题中，即相圆是一种特殊的隐圆，我们只需要利用换元法将埔圆的横纵坐标进行换元，许多雪圆问题就变成了圆的问题，复杂的运算也就随之消失，利用几何关系即可求得结果.

由性质 6 和性质 7 推广到粗圆中，可得到以下推论:

推论 1:已知粗圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 过直线 $x=m(m\neq 0,m\neq \pm a)$ 上任意一点 T, 作直线 TP，TQ 分别与棋圆相切于 P,Q, 则直线 PQ 过定点 $N\left(\frac{a^2}{m},0\right)$.

推论 2：已知 A 、B 粗圆方程的 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 左右顶点,过直线 $x=m(m\neq 0,m\neq \pm a)$ 上异于 x 轴的任意一点 T 作直线 TA 、TB 分别与粗圆交于 P, Q, 则直线 PQ 过定点 $N\left(\frac{a^2}{m},0\right)$.

推论 3：已知 A,B 湖圆方程的 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 左右顶点,讨定点 $M(m,0)(m\neq 0,m\neq \pm a)$ 的直线与椭圆交于异于 A,B 的两点 P 、Q, 点 P 关于 x 轴的对称点为 P', 则直线 $P'Q$ 过定点 $N\left(\frac{a^2}{m},0\right)$.

$x=m(m\neq 0,m\neq \pm a)$ 交 $\mathcal{F}P$, Q, T 在线段 OP 上满足$OT\cdot OG=OP^2$, 则过 T 且斜率为 $-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{k}$ 的直线过定点 $N\left(\frac{a^2}{m},0\right)$，上述四个推论逆命题也成立.

【例 16】（2008 江苏）满足条件 $AB=2$， $AC=\sqrt{2}BC$ 的三角形 ABC 面积的最大值为.

解析法一由题意可知,在三角形 ABC 中, $c=2$, $b=\sqrt{2}a$, 则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3a^2-4}{2\sqrt{2}a^2}$, 由于 $b-a<c<a+b$, 则 $a\in(2\sqrt{2}-2,2\sqrt{2}+2)$，故 $S_{\vartriangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2\sqrt{1-\left(\frac{3a^2-4}{2\sqrt{2}a^2}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}a^2}\sqrt{-a^4+24a^2-16}=\frac{1}{4}\sqrt{-\left(a^2-12\right)^2+128}\leq\frac{1}{4}\cdot 8\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ (当且仅当 $a=2\sqrt{3}$ 时等号成立）,所以三角形 ABC 的面积的最大值为 $2\sqrt{2}$.

法二设点 $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C\left(x_0,y_0\right)$ ，则 $S_{\vartriangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot\left|y_0\right|=\left|y_0\right|$, 止 $|AC|=\sqrt{2}|BC|$ 得:

$\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}$，化简得：$x_0^2+y_0^2-6x_0+1=0\Rightarrow(x_0-3)^2+y_0^2=8$，点 C 在以 $(3,0)$ 为圆心，$2\sqrt{2}$ 为半径的圆上运动，$|y_0|\le 2\sqrt{2}$（当且仅当 $x_0=3$ 时等号成立），故 $S_{\triangle ABC}=|y_0|\le 2\sqrt{2}$.

【例 17】在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 所对边分别为 a，b，c，若 $\triangle ABC$ 面积 $S=2$，且 $a=2b$，则 c 最小值为________.

解析如图 16-3-7 所示由阿氏圆定义可知 c 轨迹，$\dfrac{AO}{CO}=\dfrac{OC}{AO+AB}=\dfrac{1}{2}$，$OC^2=AO(AO+AB)=\dfrac{1}{2}OC\cdot\dfrac{1}{2}(OC+AB)$，故 $\dfrac{3}{4}OC^2=\dfrac{1}{2}OC\cdot AB$，$OC=\dfrac{2}{3}AB=\dfrac{2}{3}c$，所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}h\cdot c=2\Rightarrow c=\sqrt{6}$.

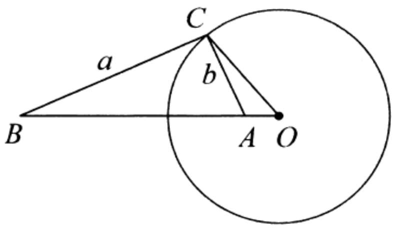


图 16-3-7

【例 18】已知 $A(-2,0)$，P 是圆 $C_2:(x+4)^2+y^2=16$ 上任意一点，x 轴上是否存在一点 B，使 $|PB|=2|PA|$？若存在，求出点 B 的坐标；若不存在，说明理由.

解析设点 $P(x_0,y_0)$，点 $B(b,0)$，由 $|PB|=2|PA|$ 可得：$\sqrt{(x_0-b)^2+y_0^2}=2\sqrt{(x_0+2)^2+y_0^2}$，所以化解有 $x_0^2-2bx_0+b^2+y_0^2=4x_0^2+16x_0+16+4y_0^2$，即 $3x_0^2+3y_0^2+(2b+16)x_0+16-b^2=0$，因为出点 P 在圆 C 上易知 $y_0^2=16-(x_0+4)^2=-x_0^2-8x_0$ 对任意 x_0 恒成立，故 $(2b-8)x_0+16-b^2=0$ 任意 x_0 恒成立 $\begin{cases}2b-8=0\\16-b^2=0\end{cases}$，则 $b=4$，即存在点，$B(4,0)$，符合题意.

【例 19】（2006 四川）已知两定点 $A(-2\quad 0)$，$B(-1\quad 0)$，若动点 P 满足 $|PA|=2|PB|$，则点 P 的轨迹所围成的图形的面积是.

解析设 $P(x,y)$，$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，化简得：$x^2+y^2-4x=0\Rightarrow(x-2)^2+y^2=4$，点 P 的轨迹是以 $(2,0)$ 为圆心，2 为半径的圆，其面积为 4π.

【例 20】（2013 江苏）在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(0,3)$，直线 $l:y=2x-4$，设圆 C 的半径为 1，圆心在直线 l 上，若圆 C 上存在点 M，使 $|MA|=2|MO|$，求圆心 C 的横坐标的取值范围.

解析设点 $M(x,y)$，由 $|MA|=2|MO|$ 得 $\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$，即

$x^2+y^2+2x-3=0 \Rightarrow x^2+(y+1)^2=4$,点 M 的轨迹是以 $(0,-1)$ 为圆心，2 为半径的贞，设为圆 D, 点 M 在圆 C 上，故圆 C 与圆 D 存在公共点则 $2-1 \le |CD| \le 2+1$, 设 $C(a,2a-4)$, $D(0,-1)$ $|CD|=\sqrt{(a-0)^2+(2a-4+1)^2}=\sqrt{5a^2-12a+9}\in[1,3]$ 解得 $a\in\left[0,\frac{12}{5}\right]$.

【例 21】在平面直角坐标系中，已知 $A(4,0)$，$B(0,3)$，P 为 $x^2+y^2=4$ 上一动点，则 $3AP+2BP$ 最小值为________.

解析如图 $16-3-8$, 连接 PO, 在 y 轴取,点 C, 满足 $\frac{CP}{BP}=\frac{PO}{BO}=\frac{2}{3}$, $C:\left(0,\frac{4}{3}\right)$

则 $3AP+2BP=3AP+3PO\ge 3AD=4\sqrt{10}$.

注意：说到此题，再去对比一下例13, 自然明台例 13 的阿圆构造原理。

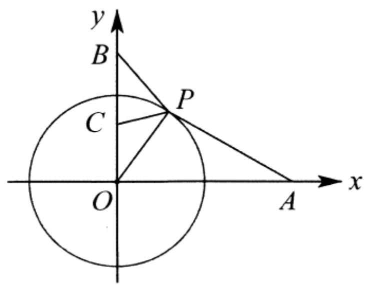


图 16-3-8

【例 22】（2020•南通模拟）已知 $\vec{a},\vec{b}$ 是平面内两个互相垂直的单位向量，若向量 $\vec{c}$ 满足 $|\vec{c}-\vec{a}|=\frac{1}{2}$，则 $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|+2|\vec{c}-\vec{b}|$ 的最小值为____.

解析如图 $16-3-9$, $A(1,0)$, $B(0,1)$, $D(1,1)$, 设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, 则向量 $\vec{c}$ 满足 $|\vec{c}-\vec{a}|=\frac{1}{2}$, 设 $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，所以点 C 为以 A 为圆心,以 $\frac{1}{2}$ 为半径的圆上的一点,所以 $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}|=|CD|$, 同理 $2|\vec{c}-\vec{b}|=2|BC|$, 取点 $E\left(1,\frac{1}{4}\right)$, 则 $\frac{AE}{AC}=\frac{AC}{AD}$, 又因 $\angle CAE=\angle DAC$, 所以 $\Delta AEC \backsim \Delta ACD$, 所以 $\frac{CE}{CD}=\frac{1}{2}$,即 $CD=2CE$, 所以 $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|+2|\vec{c}-\vec{b}|=CD+2BC=2CE+2BC=2(BC+CE)$, 由三角形的三边关系知 $2(BC+CE)\ge 2BE=2\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=2\times\frac{5}{4}=\frac{5}{2}$, 故答案为 $\frac{5}{2}$.

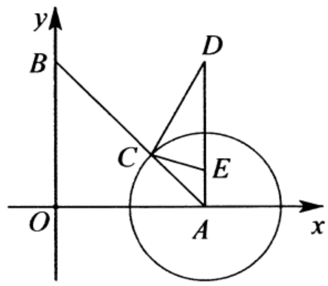


图 16-3-9

【例 23】（2019•江苏三模）在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=90^\circ$，$AB=2$，$AD=1$，若 $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}$，则 $CB+\frac{1}{2}CD$ 的最小值为____.

解析如图$16-3-10$,以 A 为坐标原,点,以 AB 为 x 轴，以 AD 为 y 轴建立如图坐标系，设 $C(x,y)$.则 $\overrightarrow{AB}=(2,0),\overrightarrow{AC}=(x,y)$, $\overrightarrow{BA}=(-2,0)$, $\overrightarrow{CB}=(2-x,-y)$, $\overrightarrow{CA}=(-x,-y)$, $\overrightarrow{CD}=(-x,1-y)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$, 所以 $2x-2x+4=\frac{4}{3}\left(x^2-2x+y^2\right)$, 即 $(x-1)^2+y^2=4$, 即点 C 在以 $O(1,0)$ 为圆心,以 2 为半径的圆上,取 $O'(5,0)$, 则 $\frac{OB}{OC}=\frac{1}{2}=\frac{OC}{OO'}$, 所以 $\Delta OBC^{C}\Delta OCO'$, 所以 $\frac{BC}{O'C}$, 即 $BC=\frac{1}{2}O'C$,所以 $CB+\frac{1}{2}CD$ 取得最小值即 $\frac{1}{2}\left(O'C+CD\right)$ 取得最小值，根据三角形的两边之和大于第三边，$\frac{1}{2}\left(O'C+CD\right)\geq\frac{1}{2}O'D=\frac{\sqrt{5^2+1^2}}{2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$, 故答案为 $\frac{\sqrt{26}}{2}$.

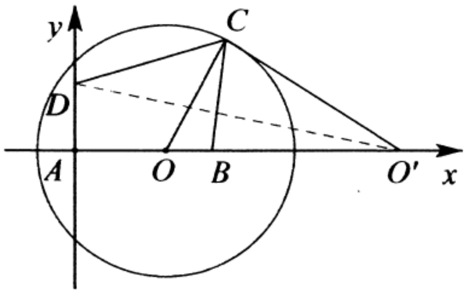


图 16-3-10

【例 24】在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 $O:x^2+y^2=r^2(r>0)$ 与直线 $l:x+y-5=0$，若对圆 O 上任意一点 P，在直线 l 上均存在两点 E，F，使得 $PE=\sqrt{2}PF$，且 $EF=8$，则 r 的取值范围为________.

解析对于确定位置的 E, F, 如图$16-3-11$, 可得满足 $PE=\sqrt{2}PF$ 的 P 轨迹是以 P_0 为圆心, $8\sqrt{2}$ 为半径的图，其中 P_0 在直线 l 上：当 E, F 在直线 l 上滑动时, P 点轨迹为宽度为 $16\sqrt{2}$ 的带状区域，由题意, 让此区域包含圆 O 即可,因为 O 到 l 的距离为 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, 所以 $r\leq 8\sqrt{2}-\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{11\sqrt{2}}{2}$, 即 $r\in\left(0,\frac{11\sqrt{2}}{2}\right]$.

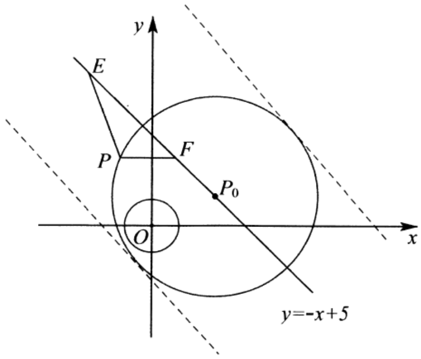


图 16-3-11

【例 25】P，Q分别为圆$A:(x-4)^2+y^2=4$，$B:(x-6)^2+(y-4)^2=1$上动点，则$(OP+PQ+PB)_{\min}$为________.

解析先将点P固定，如图$16-3-12$, $(OP+PQ+PB)\geq OP+2PB-1=2\left(PB+\frac{1}{2}OP\right)-1$,根据阿圆的性质，易知当点$C:(3,0)$时,则有$PC=\frac{1}{2}PO$,所以$(OP+PQ+PB)_{\min}\geq 2(PB+PC)-1\geq 2CB-1=9$.

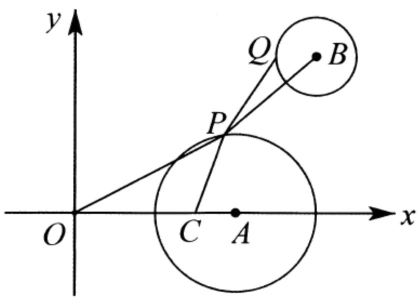


图 16-3-12

【例 26】已知$x^2+y^2=4$，则$T=(3\sqrt{5-2x}+\sqrt{13-6y})_{\min}$为________.

解析

由$T=3\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^2+(y-3)^2}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}PA+\frac{2}{3}PB\right)$,

根据阿圆的性质，我们选取,点,$A_1:(4,0)$, $B_1:\left(0,\frac{4}{3}\right)$,故$T=\frac{3}{2}\left(PA_1+PB_1\right)\geq\frac{3}{2}A_1B_1=2\sqrt{10}$.

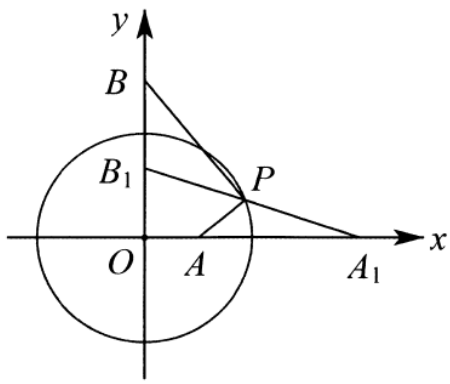


图 16-3-13

【例 27】（2018•海安县校级期中）在平面直角坐标系 xOy 中，圆 $O:x^2+y^2=1$，

（1）P 为直线 $l:x=\frac{4}{3}$ 上一点.

①若点 P 在第一象限，且 $OP=\frac{5}{3}$，求过点 P 的圆 O 的切线方程；

②若存在过点 P 的直线交圆 O 于点 A，B，且 B 恰为线段 AP 的中点，求点 P 纵坐标的取值范围；

（2）已知 $C(2,0)$，M 为圆 O 上任一点，问：是否存在定点 D（异于点 C），使 $\frac{MC}{MD}$ 为定值，若存在，求出 D 坐标；若不存在，说明你的理由.

解析(1)①设点.P 的坐标为 $\left(\frac{4}{3},y_0\right)$,因为 $OP=\frac{5}{3}$,故 $\left(\frac{4}{3}\right)^2+y_0^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2$,解得 $y_0=\pm1$.又,点 P 在第一象限,则 $y_0=1$,即 P 的坐标为 $\left(\frac{4}{3},1\right)$,易知过点 P 的圆 O 的切线的斜率必存在,可设切线的斜率为 k,则切线为 $y-1=k\left(x-\frac{4}{3}\right)$,即 $kx-y+1-\frac{4}{3}k=0$,于是有 $\frac{\left|1-\frac{4}{3}k\right|}{\sqrt{1+k^2}}=1$,解得 $k=0$ 或 $k=\frac{24}{7}$,因此过点 P 的圆 O 的切线方程为: $y=1$ 或 $24x-7y-25=0$;

② 设 $A(x,y)$, 则 $B\left(\frac{x+\frac{4}{3}}{2},\frac{y+y_0}{2}\right)$, 由，点 A、B 均在圆 O 上，有圆 $x^2+y^2=1$ 与圆 $\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+y_0\right)^2=4$ 有公共点.于是 $1\le\sqrt{\frac{16}{9}+y_0^2}\le3$,解得 $-\frac{\sqrt{65}}{3}\le y_0\le\frac{\sqrt{65}}{3}$,即点 P 纵坐标的取值范围是 $\left[-\frac{\sqrt{65}}{3},\frac{\sqrt{65}}{3}\right]$;

(2)法一设 $M(x,y)$, 假设存在点 $D(m,n)$, 使 $\dfrac{MC}{MD}$ 为定值 $t(t>0)$, 则 $MC^2=t^2MD^2$,

(3) 设 $M(x,y)$, 假设存在点 $D(m,n)$, 使 $\dfrac{MC}{MD}$ 为定值 $t(t>0)$, 则 $MC^2=t^2MD^2$, 即 $(x-2)^2+y^2=t^2(x-m)^2+t^2(y-n)^2$, 故 $x^2+y^2-\dfrac{2t^2m-4}{t^2-1}x-\dfrac{2t^2n}{t^2-1}y=\dfrac{4-t^2m-t^2n}{t^2-1}$, 由于 M 在圆 $O:x^2+y^2=1$ 上,

故 $\begin{cases}2t^2m-4=0\\2t^2n=0\\\dfrac{4-t^2m-t^2n}{t^2-1}=1\end{cases}$,

【例 28】（2019•福州期末）在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(-6，0)$，$B(3，0)$，动点 P 满足条件 $|PA|=2|PB|$.

（1）求点 P 的轨迹 C 的方程；

（2）设点 B' 是点 B 关于直线 OP 的对称点，问是否存在点 B' 同时满足条件：

①点 B' 在曲线 C 上；

② A，B'，P 三点共线若存在，求直线 OP 的方程；若不存在，请说明理由.

解析 (1) 设 $P(x,y)$, 由 $|PA|=2|PB|$ 得, $\sqrt{(x+6)^2+y^2}=2\sqrt{(x-3)^2+y^2}$, 整理得: $x^2+y^2-12x=0$, 所以点 P 的轨迹方程为 $(x-6)^2+y^2=36$.

（2）假设存在点 B' 满足题意，此时直线 OP 的方程为 $y=kx(k\neq0)$, 设 $P\left(x_0,y_0\right)$, $B'\left(x',y'\right)$,

因为 B 与 B' 关于直线 OP 对称, 所以 $\begin{cases}\dfrac{y'-0}{x'-3}=-\dfrac{1}{k}\\\dfrac{y'}{2}=k\cdot\dfrac{x'+3}{2}\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}x'=\dfrac{3-3k^2}{1+k^2}\\y'=\dfrac{6k}{1+k^2}\end{cases}$, 即 $B'\left(\dfrac{3-3k^2}{1+k^2},\dfrac{6k}{1+k^2}\right)$.

由 $\begin{cases}\left(x_0-6\right)^2+y_0^2=36\\y_0=kx_0\end{cases}$, 得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{12}{1+k^2}\\y_0=\dfrac{12k}{1+k^2}\end{cases}$, 即 $P\left(\dfrac{12}{1+k^2},\dfrac{12k}{1+k^2}\right)$, 此时, $\overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{18+6k^2}{1+k^2},\dfrac{12k}{1+k^2}\right)$,

所以, $\dfrac{9+3k^2}{1+k^2}\cdot\dfrac{12k}{1+k^2}-\dfrac{6k}{1+k^2}\cdot\dfrac{18+6k^2}{1+k^2}=0$, 所以当 $k\neq0$ 时, A、B', $P\equiv$点共线.

若 B' 在曲线 C 上,则 $\left(\dfrac{3-3k^2}{1+k^2}-6\right)^2+\left(\dfrac{6k}{1+k^2}\right)^2=36$, 整理得 $5k^4+2k^2-3=0$, 即 $\left(5k^2-3\right)\left(k^2+1\right)=0$,

所以 $k^2=\dfrac{3}{5}$, 即 $k=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{5}$,综上所述，存在,点 B',满足条件①②, 此时直线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{5}x$.

二、椭圆转化为隐圆问题

此部分内容我们在秒一的《仿射大法大破天机》中已经阐述，由于新高考中删除了选修 4-4 的内容，故我们将用换元法替代了坐标拉伸法，其本质也是将椭圆的一个变量通过比值换元，从而达到化椭为圆的目的，我们看一下 2019 年全国 III 卷的压轴题，感受一下这个方法的作用.

【例 29】（2019 全国 III 卷）已知点 $A(-2，0)$，$B(2，0)$，动点 $M(x，y)$满足直线 AM 与 BM 的斜率之积为$-\dfrac{1}{2}$. 记 M 的轨迹为曲线 C.

（1）求 C 的方程，并说明 C 是什么曲线；

（2）过坐标原点的直线交 C 于 P，Q 两点，点 P 在第一象限，$PE\perp x$ 轴，垂足为 E，连结 QE 并延长交 C 于点 G.

（i）证明：$\triangle PQG$ 是直角三角形；

（ii）求$\triangle PQG$ 面积的最大值.

解析 (1)由题设得 $\dfrac{y}{x+2}\cdot\dfrac{y}{x-2}=-\dfrac{1}{2}$,化简得 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1(|x|\neq 2)$,所以 C 为中心在坐标原点,焦点在 x 轴上的粗圆，不含左右顶点.

(2)法一(i)设直线 PQ 的针率为 k, 则其方程为 $y=kx(k>0)$.早 $\begin{cases}y=kx\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 得 $x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$.

记 $u=\dfrac{2}{\sqrt{1+2k^2}}$, 则 $P(u,uk),Q(-u,-uk),E(u,0)$,于是直线 QG 的斜率为 $\dfrac{k}{2}$,方程为 $y=\dfrac{k}{2}(x-u)$.

由 $\begin{cases}y=\dfrac{k}{2}(x-u)\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$, 得 $\left(2+k^2\right)x^2-2uk^2x+k^2u^2-8=0$.①

设 $G\left(x_G,y_G\right)$, 则 $-u$ 和 x_G 是方程(1)的解,故 $x_G=\dfrac{u\left(3k^2+2\right)}{2+k^2}$, 由此得 $y_G=\dfrac{uk^3}{2+k^2}$.

从而直线 PG 的斜率为 $\dfrac{\dfrac{uk^3}{2+k^2}-uk}{\dfrac{u\left(3k^2+2\right)}{2+k^2}-u}=-\dfrac{1}{k}$. 所以 $PQ\perp PG$, 即 $\triangle PQG$ 是直角三角形.

(ii)由(i)得 $|PQ|=2u\sqrt{1+k^2}$, $|PG|=\dfrac{2uk\sqrt{k^2+1}}{2+k^2}$, 所以 $\triangle PQG$ 的面积为

$S=\dfrac{1}{2}|PQ||PG|=\dfrac{8k\left(1+k^2\right)}{\left(1+2k^2\right)\left(2+k^2\right)}=\dfrac{8\left(\dfrac{1}{k}+k\right)}{1+2\left(\dfrac{1}{k}+k\right)^2}$. 设 $t=k+\dfrac{1}{k}$, 则十 $k>0$ 得 $t\geq 2$, 当且仅当 $k=1$ 时取等号. 因为 $S=\dfrac{8t}{1+2t^2}$ 在 $[2,+\infty)$ 单调递减, 所以当 $t=2$, 即 $k=1$ 时, S 取得最大值, 最大值为 $\dfrac{16}{9}$.

因此, ΔPQG 面积的最大值为 $\dfrac{16}{9}$.

法二(i)设 $P\left(x_1,y_1\right)$, 则 $Q\left(-x_1,-y_1\right)$, $E\left(x_1,0\right)$, 所以 $k_{PQ}=\dfrac{2y_1}{2x_1}=\dfrac{y_1}{x_1}$, $k_{QG}=\dfrac{y_1}{2x_1}$, 即 $k_{PQ}=2k_{QG}$. 作

$k_{P'G'}\cdot k_{Q'G'}=-1$, 所以 $k_{P'G'}\cdot k_{P'Q'}=-2$, 则 $k_{PG}\cdot k_{PQ}=-1$, 即 $PQ\perp PG$, $\triangle PQG$ 是直角三角形.

(ii)设 $k_{P'Q'}=k$, $\angle P'Q'G'=\alpha$, 则 $k_{Q'G'}=\dfrac{k}{2}(k>0)$, 由题意可知 $\tan\alpha=\dfrac{k-\dfrac{k}{2}}{1+k\cdot\dfrac{k}{2}}=\dfrac{1}{\dfrac{2}{k}+k}\in\left(0,\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right]$, 所以

$S_{\triangle P'Q'G'}=\dfrac{1}{2}\cdot\left|Q'G'\right|\cdot\left|P'G'\right|=\dfrac{4\sin\alpha\cdot 4\cos\alpha}{2}=\dfrac{8\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{8}{\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}}\leq\dfrac{16\sqrt{2}}{9}$ (当 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 时取等), 所以 $S_{\triangle PQG}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}S_{\triangle P'Q'G'}\leq\dfrac{16}{9}$.

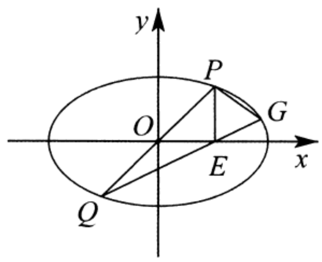


图 16-3-14

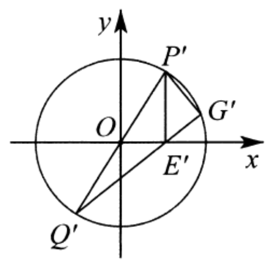


图 16-3-15

达标训练

1.（2019秋•11月份月考）平面内到两定点 A， B 的距离之比等于常数 $\lambda(\lambda>0$ 且 $\lambda\neq1)$ 的动点 P 的轨迹叫做阿波罗尼斯圆．已知 $A(0，0)$，$B(3，0)$，$|PA|=\dfrac{1}{2}|PB|$，则点 P 的轨迹围成的平面图形的面积为(　　)

A．2π　　B．4π　　C．$\dfrac{9}{4}\pi$　　D．$\dfrac{3}{2}\pi$

2.（2018•兰溪市校级月考）在平面直角坐标系 xoy 中，已知点 A 是半圆 $x^2+y^2-4x=0(2\leq x\leq4)$ 上的一个动点，点 C 在线段 OA 的延长线上当 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OC}=20$ 时，则点 C 的纵坐标的取值范围是(　　)

3.（2018•荆州区校级期末）已知 M， N 是圆 $O:x^2+y^2=4$ 上两点，点 $P(1，2)$，且 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$，则 $|\overrightarrow{MN}|$ 的最小值为(　　)

A．$\sqrt{5}-1$　　B．$\sqrt{5}-\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{6}-\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{6}-\sqrt{2}$

4.（2019•上城区校级模拟）设 $\vec{a}$， $\vec{b}$ 为单位向量，向量 $\vec{c}$ 满足 $|2\vec{c}+\vec{a}|=|\vec{a}\cdot\vec{b}|$，则 $|\vec{c}-\vec{b}|$ 的最大值为(　　)

A．2　　B．1　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{2}$

5. （2018•仙游县校级月考）在平面内，定点 A， B， C； O 满足 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$，

$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\bullet\overrightarrow{OA}=-2$， 动点 P， Q 满足 $|\overrightarrow{AP}|=1$， $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QC}$， 则 $4\overrightarrow{BQ}^2-37$ 的最小值是(　　)

A．-6　　B．-12　　C．$-6\sqrt{3}$　　D．$-2\sqrt{33}$

6.（2019•全国月考）设点 $A(1，0)$， $B(4，0)$，动点 P 满足 $2|PA|=|PB|$，设点 P 的轨迹为 C_1， 圆 $C_2:(x+\sqrt{3})^2+(y-3)^2=4$，$C_1$ 与 C_2 交于点 M，N，Q 为直线 OC_2 上一点(O 为坐标原点)，则 $\overrightarrow{MN}\bullet\overrightarrow{MQ}=($　$)$

A．4　　B．$2\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{3}$

7.（2019•浙江模拟）设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为平面向量，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，若 $(2\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$，则 $\vec{c}\cdot\vec{b}$ 的最大值为（）

A．2　　B．$\dfrac{9}{4}$　　C．$\dfrac{17}{4}$　　D．5

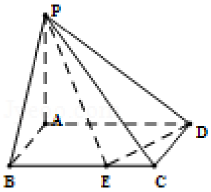
8.（2020•沙坪坝区校级模拟）ΔABC 中 $AB=AC=\sqrt{3}$，ΔABC 所在平面内存在点 P 使得 $PB^2+PC^2=3PA^2=3$，则 ΔABC 面积最大值为(　　)

A．$\dfrac{2\sqrt{23}}{3}$　　B．$\dfrac{5\sqrt{23}}{16}$　　C．$\dfrac{\sqrt{35}}{4}$　　D．$\dfrac{3\sqrt{35}}{16}$

9.（2019•常州期末）在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l_1:kx-y+4=0$ 与直线 $l_2:x+ky-3=0$ 相交于点 P，则当实数 k 变化时，点 P 到直线 $4x-3y+10=0$ 的距离的最大值为(　　)

A．2　　B．$\dfrac{9}{2}$　　C．$\dfrac{11}{2}$　　D．$\dfrac{7}{4}$

10.（2019•丰台区期末）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，底面四边形 $ABCD$ 是矩形，且 $AD=3AB$，点 E 是底面的边 BC 上的动点，设 $\dfrac{BE}{BC}=\lambda(0<\lambda<1)$，则满足 $PE\perp DE$ 的 λ 值有(　　)



A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

11.（2020•武汉模拟）已知等边 ΔABC 内接于圆 $\Gamma:x^2+y^2=1$，且 P 是圆 Γ 上一点，则 $\overrightarrow{PA}\bullet(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最大值是(　　)

A．$\sqrt{2}$　　B．1　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

12.（2020•东胜区校级一模）已知在平面直角坐标系 xOy 中，O 为坐标原点，$A(0，2)$，$|OB|^2+|OA|^2=20$，若平面内点 P 满足 $\overrightarrow{PB}=3\overrightarrow{PA}$，则 $|PO|$ 的最大值为(　　)

A．7　　B．6　　C．5　　D．4

13.（2019•内江期末）若圆 $C:(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 上存在点 P，使得 $\overrightarrow{MP}\bullet(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CN})=0$，其中点 $M(-t，0)$，$N(t，0)(t\in R^+)$，则 t 的最小值是(　　)

A．7　　B．5　　C．4　　D．6

14.（2019•重庆期末）已知 AB 是圆 $O:x^2+y^2=1$ 的任意一条直径，点 P 在直线 $x+2y-a=0(a>0)$ 上运动，若 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$ 的最小值为 4，则实数 a 的值为(　　)

A．2　　B．4　　C．5　　D．6

16.在平面直角坐标系 xOy 中，已知 B，C 为圆 $x^2+y^2=4$ 上两点，点 $A(1,1)$，且 $AB\perp AC$，则线段 BC 的长的取值范围是________.

17.在平面直角坐标系 xOy 中，圆 $C_1:x^2+y^2=4$，圆 $C_2:x^2+y^2=16$，点 $M(1,0)$，动点 P，Q 分别在圆 C_1 和圆 C_2 上，满足 $MP\perp MQ$，则线段 PQ 的取值范围是________.

18．已知$\triangle ABC$ 是边长为3的等边三角形，点 P 是以 A 为圆心的单位圆上一动点，点 Q 满足 $\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，则 BQ 的最小值是________.

19.在$\triangle ABC$ 中，D 为边 BC 上一点，$BD=2CD=2$，且 $\sin\angle BAD=\sqrt{2}\sin\angle CAD$，则$\triangle ABC$ 面积最大值为________.

20.（2018•仓山区校级期中）由动点 $p(x,y)$ 引圆 $x^2+y^2=4$ 的两条切线 PA，PB，切点分别为 A，B，若 $\angle APB=90^\circ$，则点 P 的轨迹方程为____.

21.（2019•淮阴区校级模拟）已知 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，点 P 在圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=r^2(r>0)$ 上，满足 $PA^2+PB^2=40$，若这样的点 P 有两个，则 r 的取值范围是____.

22.（2019•北湖区期末）在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(2a,0)(a>0)$，直线 $l_1:mx-y-2m+2=0$ 与直线 $l_2:x+my=0(m\in R)$ 相交于点 M，且 $MA^2+MO^2=2a^2+16$，则实数 a 的取值范围是____.

23. 设 $m\in R$，过定点 A 的动直线 $x+my=0$ 过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于点 $P(x,y)$，则点 P 的轨迹方程____.

24.（2019•连云港期末）在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 $O:x^2+y^2=1$，圆 $O_1:(x+4)^2+y^2=4$，动点 P 在直线 $l:x-2\sqrt{2}y+b=0$ 上（其中 $b<0$），过 P 分别作圆 O，O_1 的切线，切点分别为 A，B，若满足 $PB=2PA$ 的点 P 有且只有一个，则实数 b 的值为____.

25.（2019•佛山期末）在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(1,0)$，$B(4,0)$．若直线 $x-y+m=0$ 上存在点 P 使得 $PB=2PA$，则实数 m 的取值范围是____.

26.（2019•浦东新区二模）已知正方形 $ABCD$ 边长为 8，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{FA}$，若在正方形边上恰有 6 个不同的点 P，使 $\overrightarrow{PE}\bullet\overrightarrow{PF}=\lambda$，则 λ 的取值范围为____.

27.（2019•苏州月考）已知平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角等于 $\frac{\pi}{6}$，且 $(\vec{a}-\vec{c})\bullet(\vec{b}-\vec{c})=0$，则 $|\vec{c}|$ 的取值范围是____.

28．（2019•叶集区校级月考）已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\perp(\vec{a}-2\vec{b})$，$(\vec{c}-2\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$，则$|\vec{c}|$的最大值与最小值的和为____.

29.在$\triangle ABC$中，a，b，c分别为角A、B、C对边，若$c=2$且$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，则$\frac{b}{a}-\frac{a}{b}$最大值为________.

30.在$\triangle ABC$中，已知$AB=4$，$AO=1$，$\angle BAD=120^{\circ}$，点C为$\triangle ABC$平面内一动点，且满足$AC=2$，则$CB-2CD$最大值为________.

31.已知圆方程：$x^2+y^2=4$，点P在圆上运动$A(-2,0)$，$B(4,0)$，则$\frac{2}{PA^2}+\frac{1}{PB^2}$最小值为________.

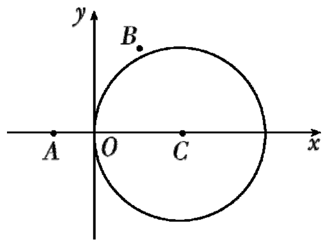
32.已知圆$O:x^2+y^2=1$，圆$C:(x-4)^2+y^2=4$，动点P在直线$x+\sqrt{3}y-2=0$上的点E，F之间，过点P分别作圆O，C的切线，切点为A,B，若满足$PB\geq 2PA$，则线段EF的长度为________.

33.已知线段$AB=2\sqrt{3}$，O为AB上一点，$|OA|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，以$|OA|$为半径作圆O，P为圆O上一点，求$|PA|+|PB|$的最大值.

34.如图，在平面直角坐标系xOy中，已知圆$C:x^2+y^2-4x=0$及点$A(-1,0)$，$B(1,2)$

(1)若直线l平行于AB，与圆C相交于M，N两点，$MN=AB$，求直线l的方程;

(2)在圆C上是否存在点P，使得$PA^2+PB^2=12$?若存在，求点P的个数，若不存在，说明理由.



35.已知圆O的方程为$x^2+y^2=1$，直线l_1过点$A(3,0)$，且与圆O相切.

(1)求直线l_1的方程;

(2)设圆O与x轴交与P，Q两点，M是圆O上异于P，Q的任意一点，过点A且与x轴垂直的直线为l_2，直线PM交直线l_2于点P'，直线QM交直线l_2于点Q.求证：以$P'Q'$为直径的圆C总过定点，并求出定点坐标.