第三章 不等式参考答案

专题1 一元二次不等式解法

1．D；2．B；3．C；4．D；5．B；6．C；7．B；8．D；9．D；10．D；11．C；12．B；

13．$a=-3,b=-2$；$bx^2+ax<-9$ 的解集为 $\{x\,|\,x<-3$ 或 $x>\frac{3}{2}\}$．

14．$a=1,b=2$；$\frac{f(x)}{x}>x$ 的解集为 $\{x\,|\,0<x<2\}$．

15．（1）当 $a=-4$ 时，不等式 $f(x)\ge 2$ 的解集为 $\{x\,|\,x\le -1$ 或 $x\ge 6\}$；

（2）对任意 $x\in R$，若 $f(x)\ge -2$ 恒成立，即 $x^2-5x+a+2\ge 0\Rightarrow a\ge -x^2+5x-2$ 恒成立

而 $(-x^2+5x-2)_{\max}=\frac{17}{4}$，所以 $a\ge\frac{17}{4}$．

16．A；17．A；18．A；19．B；20．B；21．B；22．D；23．C；24．B；25．B；26．D；27．B；

28．$a=\frac{5}{2}$；　29．②；

30.B；31．C；32．A；33．C；34．A；35．D；36．B；37．D；38．C；39．B；40．B；41．B；

42．$[0,\frac{3}{4})$；43．$a=-\frac{5}{4}$．

44．由 $-\frac{1}{2}+4=-\frac{7}{a}\Rightarrow a=-2$（1）原不等式即为 $-2mx^2+(m-2)x+3-2>0\Rightarrow(mx+1)(2x-1)<0$

因为 $m\ge 0$，所以解集为 $\{x\,|-\frac{1}{m}<x<\frac{1}{2}\}$；（2）关于 x 的不等式 $ma\cdot x^2+(m+a)x+3+a>0$ 恒成立，即为 $2mx^2+(2-m)x-1<0$，当 $m=0$ 时，解集为 $\{x\,|\,x<\frac{1}{2}\}$，不满足条件；当 $m\ne 0$ 时，$\Delta=(2-m)^2+8m<0\Rightarrow(2+m)^2<0$，解集为 ϕ，故 m 的取值范围是 ϕ．

专题2 含参一元二次不等式

1.A；2．A；3．D；4．A；5．C；

6．原不等式即为 $(x-3a)(x+a)>0$；

（1）$a>0$ 时，解集为 $\{x|x<-a$ 或 $x>3a\}$

（2）$a=0$ 时，解集为 $\{x|x\ne 0\}$

（3）$a<0$ 时，解集为 $\{x\,|\,x<3a$ 或 $x>-a\}$

7．解集为 $(\frac{-a-\sqrt{a^2+4}}{2},\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2})$；

8．B；9．D；10．$\{x\,|-1<x<\frac{4}{5}\}$；

11．原不等式即为 $(ax+1)(x-1)>0$

（1）$a=0$ 时，解集为 $\{x\,|\,x>1\}$；

（2）$a>0$ 时，解集为 $\{x\,|\,x>1$ 或 $x<-\frac{1}{a}\}$；

（3） $a<0$ 时，① $-1<a<0$ 时，解集为 $\{x|1<x<-\frac{1}{a}\}$

② $a<-1$ 时，解集为 $\{x|-\frac{1}{a}<a<1\}$

③ $a=1$ 时，解集为 ϕ

12.（1） $a=0$ 时，解集为 $\{x|x>0\}$；

（2） $a>0$ 时，① $0<a<1$，解集为 $(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a},\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a})$

② $a\ge 1$，解集为 ϕ

（3） $a<0$ 时，① $f<a<1$,解集为 $(-\infty,\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a})\cup(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a},+\infty)$

② $a<-1$，解集为 R

③ $a=1$，解集为 $\{x|x\ne\frac{1}{a}\}$

13. C；14． B；15． $[\frac{3}{4},2)$；

16. $\frac{ax}{x-1}<1\Rightarrow\frac{(a-1)x+1}{x-1}<0$,解集为 $\{x|x<1$ 或 $x>2\}$,所以 $\frac{-1}{a-1}=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

17. （1）解集为 $(-\infty,-2)\cup(-1,0)\cup(1,2)$；　（2）解集为 $(-\infty,-2)\cup[-1,4]\cup(5,+\infty)$

18.原不等式即为 $\frac{x^2-x-2}{x+a}\ge 0\Rightarrow\frac{(x-2)(x+1)}{x+a}\ge 0$

（1） $a>1$ 时，解集为 $(-a,-1]\cup[2,+\infty)$

（2） $0<a<1$ 时，解集为 $[-1,-a)\cup[2,+\infty)$

（3） $a=1$ 时，解集为 $[2,+\infty)$

专题 3　对勾函数解决恒成立和实根分布问题

1. $x^2+ax+6-a>0\Leftrightarrow(x-1)a>-x^2-6$，$x=1$ 时满足；$x\in[-5,1)$ 时，不等式 $(x-1)a>-x^2-6\Leftrightarrow a<\frac{-x^2-6}{x-1}$，

所以 $a<(\frac{-x^2-6}{x-1})_{\min}=2\sqrt{7}-2$.

2.(1)不等式 $x^2-(a+1)x+a<0(1<x<3)\Leftrightarrow a>\frac{x^2-x}{x-1}=x$，不等式有解，则 $a\ge 1$；

(2)不等式 $x^2-(a+1)x+a<0(1<x<3)\Leftrightarrow a>\frac{x^2-x}{x-1}=x$，恒成立，则 $a\ge 3$.

3.（1）不等式 $f(x)<0\Leftrightarrow g(k)=(2x+1)k+3x^2-2x+5<0$，$k\in(-1,1)$ 恒成立,则 $\begin{cases}g(-1)<0\\g(1)<0\end{cases}\Rightarrow k\in\phi$；

（2） $f(x)=3x^2+2(k-1)x+k+5=0(x\in(0,2))\Leftrightarrow a=\frac{-3x^2+2x-5}{2x+1}(x\in(0,2))$，

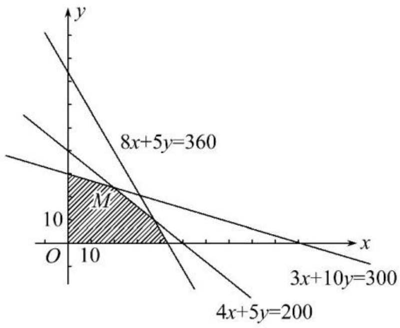
而函数 $y=\dfrac{-3x^2+2x-5}{2x+1}(x\in(0,2))$ 的值域为 $(-5,-2]$，故 a 的取值范围为 $(-5,-2]$.

4. $a=0$ 时不符合题意，故 $a\neq 0$，从而 $f(x)=2ax^2+2x-3-a=0$ 在 $[-1,1]$ 有解 $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a}=\dfrac{2x^2-1}{3-2x}$ 在 $[-1,1]$ 有解，而函数 $y=\dfrac{2x^2-1}{3-2x}(x\in[-1,1])$ 的值域为 $[\sqrt{7}-3,1]$，由 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{2x^2-1}{3-2x}\in[\sqrt{7}-3,1]\Rightarrow a\geq 1$ 或 $a\leq -\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$.

专题4　线性规划参考答案

1. C；2. D；3. D；4. C；5. C；6.C　7. 3；8. －2；8；9. 9；10. 3；11. 6；12. 216000；13. 15；

14.(1)由已知 x,y 满足的数学关系式为 $\begin{cases}4x+5y\leq 200\\8x+5y\leq 360\\3x+10y\leq 300\\x\geq 0\\y\geq 0\end{cases}$ 该二元一次不等式组所表示的平面区域为图中的阴影部分.



（2）设利润为 z 万元，则目标函数 $z=2x+3y$，这是斜率为 $-\dfrac{2}{3}$，随 z 变化的一族平行直线. $\dfrac{z}{3}$ 为直线在 y 轴上的截距，当 $\dfrac{z}{3}$ 取最大值时，z 的值最大. 又因为 x,y 满足约束条件，所以当直线 $z=2x+3y$ 经过可行域中的点 M 时，截距 $\dfrac{z}{3}$ 的值最大，即 z 的值最大. 解方程组 $\begin{cases}4x+5y=200\\3x+10y=300\end{cases}$ 得点 M 的坐标为 $M(20,24)$，

所以 $z_{\max}=2\times 20+3\times 24=112$.

答：生产甲种肥料 20 车皮，乙种肥料 24 车皮时利润最大，且最大利润为 112 万元.

专题5　基本不等式与柯西不等式

1. C；2. B；3. C；4. B；5. B；6. C；7. B；8. D；9. B；10. B；11. D；12. C；13. B；

14． $\frac{3\sqrt{14}}{7}$；15．9；16．－2；17．$a\ge\frac{1}{5}$；18．18；19．8；20．4；21．$\sqrt{5}$；22．－2；23．$\frac{\sqrt{6}}{3}$；24．$\frac{3}{4}$；

25．$[\frac{1}{5},+\infty)$）；26．9；27．$\frac{2\sqrt{10}}{5}$；

28．（I）$a^2+b^2\ge 2ab$, $b^2+c^2\ge 2bc$, $a^2+c^2\ge 2ac$ 得

$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$

由题设得 $(a+b+c)^2=1$，即 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=1$.

所以 $3(ab+bc+ac)\le 1$，即 $ab+bc+ac\le\frac{1}{3}$

（II）$\because \frac{a^2}{b}+b\ge 2a,\frac{b^2}{c}+c\ge 2b,\frac{c^2}{a}+a\ge 2c$

$\therefore \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+(a+b+c)\ge 2(a+b+c)$

即 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$

$\therefore \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge 1$

29．由柯西不等式，得 $(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+2^2)\ge(x+2y+2z)^2$

因为 $x+2y+2z=6$，所以 $x^2+y^2+z^2\ge 4$，

当且仅当 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$ 时，不等式取等号，此时 $x=\frac{2}{3},y=\frac{4}{3},z=\frac{4}{3}$，

所以 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值为 4.

专题6　糖水不等式

1．D；　2．A　；3．A；　4．$(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},+\infty)$；

5．$\log_n(n+1)=\frac{\ln(n+1)}{\ln n}>\frac{\ln(n+1)+\ln\frac{n+1}{n}}{\ln n+\ln\frac{n+1}{n}}=\frac{\ln(n+2+\frac{1}{n})}{\ln(n+1)}>\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}=\log_{n+1}(n+2)$；

6．证明：$\because b+c>a\ \therefore \frac{a}{a+1}<\frac{b+c}{1+b+c}=\frac{b}{1+b+c}+\frac{c}{1+b+c}<\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$

7．（1）$x=\frac{n}{n+1}$；

（2）$T_n={x_1}^2{x_3}^2\cdots{x_{2n-1}}^2=(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\frac{2n-1}{2n})^2\ge(\frac{1}{2})^2\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}=\frac{1}{4n}$，当仅当 $n=1$ 时等号成立.

8．$\because S_{n+2}>S_{n+1}>S_n$，$\therefore \dfrac{S_{n+2}}{S_{n+1}}=\dfrac{a_1+qS_{n+1}}{a_1+qS_n}=\dfrac{\dfrac{a_1}{q}+S_{n+1}}{\dfrac{a_1}{q}+S_n}<\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$

$\therefore {S_{n+1}}^2>S_nS_{n+2}$

$\therefore \dfrac{\log_{0.5}S_n+\log_{0.5}S_{n+2}}{2}-\log_{0.5}S_{n+1}=\log_{0.5}\dfrac{\sqrt{S_nS_{n+2}}}{S_{n+1}}>\log_{0.5}1=0$

9．（1）$a_n=2\cdot 3^{n-1}$；（2）$\because S_{n+2}>S_{n+1}>S_n$ $\therefore \dfrac{S_{n+2}}{S_{n+1}}=\dfrac{a_1+qS_{n+1}}{a_1+qS_n}=\dfrac{\dfrac{a_1}{q}+S_{n+1}}{\dfrac{a_1}{q}+S_n}<\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$；

$\therefore {S_{n+1}}^2>S_nS_{n+2}$

10．（1）$r=-1$；

（2）$b_n=2n(n\in N^*)$，

$\dfrac{b_1+1}{b_1}\cdot\dfrac{b_2+1}{b_2}\cdots\cdots\dfrac{b_n+1}{b_n}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\cdots\dfrac{2n+1}{2n}=\sqrt{(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\cdots\dfrac{2n+1}{2n})^2}>\sqrt{\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\cdots\dfrac{2n+1}{2n}\cdot\dfrac{2n+2}{2n+1}}=\sqrt{n+1}$

11．（1）$b_n=3n-2(n\in N^*)$；

（2）$S_n=\log_a[(1+1)\cdot(1+\dfrac{1}{4})\cdots\cdots(1+\dfrac{1}{3n-2})]=\log_a\sqrt[3]{(\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\cdots\dfrac{3n-1}{3n-2})^3}$

$\because \dfrac{3n-1}{3n-2}>\dfrac{3n}{3n-1}>\dfrac{3n+1}{3n}$ $(\dfrac{2}{1}\dfrac{5}{4}\cdots\cdots\dfrac{3n-1}{3n-2})^3>\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdots\cdots\dfrac{3n-1}{3n-2}\cdot\dfrac{3n}{3n-1}\cdot\dfrac{3n+1}{3n}=3n+1$

故当 $a>1$ 时，$S_n>\dfrac{1}{3}\log_a(1+\dfrac{1}{b_n})$；当 $0<a<1$ 时，$S_n<\dfrac{1}{3}\log_a(1+\dfrac{1}{b_n})$

12．（1）根据糖水不等式：$\dfrac{n}{m}<\dfrac{n-1}{m-1}<\dfrac{n-2}{m-2}<\cdots<\dfrac{n-i+1}{m-i+1}$，故

13．$\dfrac{n^i}{m^i}=(\dfrac{n}{m})^i<\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{m(m-1)(m-2)\cdots(m-i+1)}=\dfrac{{A_n}^i}{{A_m}^i}$，即 $n^i{A_m}^i<m^i{A_n}^i$；

（3）要证 $(1+m)^n>(1+n)^m$，只需证 $n\ln(1+m)>m\ln(1+n)$，只需证 $\dfrac{\ln(1+m)}{m}>\dfrac{\ln(1+n)}{n}$，构造函

$f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，$f'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)}{x^2}$，令 $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)$，$g(0)=0$；

$g'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{-x}{(x+1)^2}$，

故当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)<g(0)=0$，故 $f'(x)<0$，

$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)\downarrow$，$\therefore n>m>1$ 时，$\dfrac{\ln(1+m)}{m}>\dfrac{\ln(1+n)}{n}$，命题得证.

14. 根据糖水不等式，$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{b+a}<\dfrac{2a}{a+b+c}+\dfrac{2b}{a+b+c}+\dfrac{2c}{a+b+c}=2$，再令 $a+b=x$，$b+c=y\ c+a=z$，$a=\dfrac{x+z-y}{2}$，$b=\dfrac{x+y-z}{2}$，$c=\dfrac{y+z-x}{2}$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}=\frac{x+z-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}+\frac{y+z-x}{2x}$$

$$=\frac{x}{2y}+\frac{z}{2y}+\frac{x}{2z}+\frac{y}{2z}+\frac{y}{2x}+\frac{z}{2x}-\frac{3}{2}\geq 2\sqrt{\frac{x}{2y}\frac{y}{2x}}+2\sqrt{\frac{z}{2y}\frac{y}{2z}}+2\sqrt{\frac{x}{2z}\frac{z}{2x}}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$ （当仅当 $x=y=z$ 时等号成立）

14．令 $x=\dfrac{b}{a}$，$y=\dfrac{c}{b}$，$z=\dfrac{a}{c}$，

$\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{z+1}=\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}<\dfrac{a+c}{a+b+c}+\dfrac{a+b}{a+b+c}+\dfrac{c+b}{a+b+c}=2$；

根据 13 题结论，$\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}\geq\dfrac{3}{2}>1$

15．证明：

$$T_n=\frac{4}{3^{2^0}-1}+\frac{4}{3^{2^1}-1}+\frac{4}{3^{2^2}-1}+\cdots+\frac{4}{3^{2^{n-1}}-1}<2+\frac{4+1}{3^{2^1}}+\frac{4+1}{3^{2^2}}+\cdots+\frac{4+1}{3^{2^{n-1}}}=2+5(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n})$$

$$=2+5\cdot\frac{\frac{1}{9}-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}<2+\frac{5}{6}<3$$

16. 证明：$\dfrac{A+a+C+c}{A+a+C+c+r+b}<\dfrac{A+a+C+c}{A+a+C+c+r}=\dfrac{A+a}{A+a+C+c+r}+\dfrac{B+b}{A+a+C+c+r}$，

根据糖水不等式可得

$\dfrac{A+a}{A+a+C+c+r}<\dfrac{A+a+B+b}{A+a+C+c+r+B+b}(1)$ $\dfrac{C+c}{A+a+C+c+r}<\dfrac{C+c+B+b}{A+a+C+c+r+B+b}(2)$

两式相加得：$\dfrac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+r}+\dfrac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+r}>\dfrac{A+a+C+c}{A+a+C+c+r}>\dfrac{A+a+C+c}{A+a+C+c+r+b}$

专题 7　权方和不等式

1. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{(2-\lambda)y}+\dfrac{2}{\lambda y}\geq\dfrac{1}{x}+\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2}{2y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\geq\dfrac{(1+2)^2}{x+y}=3$

2. $\dfrac{x^2}{a^2(2y-1)}+\dfrac{4y^2}{a^2(x-1)}\geq\dfrac{(x+2y)^2}{a^2(x+2y-2)}\geq1$，令 $t=x+2y-2$，即

$\dfrac{(t+2)^2}{a^2t}\geq1\Rightarrow\dfrac{1}{a^2}(t+\dfrac{4}{t}+4)\geq\dfrac{8}{a^2}\geq1\Rightarrow a^2\leq8\Rightarrow-2\sqrt{2}\leq a\leq2\sqrt{2}$

3. 令$\begin{cases}\dfrac{1}{1+a^2}=\dfrac{x}{x+y+z}\\ \dfrac{1}{1+4b^2}=\dfrac{y}{x+y+z}\\ \dfrac{1}{1+9c^2}=\dfrac{z}{x+y+z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=\dfrac{y+z}{x}\\ 4b^2=\dfrac{x+z}{y}\\ 9c^2=\dfrac{x+y}{z}\end{cases}\Rightarrow 6abc=\sqrt{\dfrac{(y+z)(x+z)(x+y)}{xyz}}=\sqrt{2+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{z}}\geq 2\sqrt{2}$

故$|6abc-1|\geq 2\sqrt{2}-1$

4.根据权方和不等式,$\dfrac{64}{a+b+c}\geq\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{25}{c}\geq\dfrac{64}{a+b+c}\Rightarrow\dfrac{64}{a+b+c}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{25}{c}$,根据取等号的条件$\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{5}{c}$，即$\dfrac{a+b+c}{a}=8$.

5. 由线性规划问题易知$a+2b=1$，$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}\geq\dfrac{(1+1)^2}{(a+2b)^2}=4$.

6. $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{c^2}{b}+\dfrac{a^2}{c}\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{a+b+c}=a+b+c=3$.

7. $\begin{cases}x+y\geq 2\sqrt{xy}\\ x+z\geq 2\sqrt{xz}\\ z+y\geq 2\sqrt{yz}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}\leq x+y+z$

$$\frac{x^2}{x+\sqrt{yz}}+\frac{y^2}{y+\sqrt{zx}}+\frac{z^2}{z+\sqrt{xy}}\geq\frac{(x+y+z)^2}{x+y+z+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}}\geq\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{3}{2}$$

8. （1）由柯西不等式得：$(\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y})(x+y)\geq(a+b)^2\Rightarrow\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}\geq\dfrac{(a+b)^2}{x+y}$，由柯西不等式取等号的条件可以知道 $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}\Rightarrow\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$；（2）$\dfrac{1}{3-\sin^2 x}+\dfrac{9}{8-\cos^2 x}\geq\dfrac{(1+3)^2}{11-1}=\dfrac{8}{5}$.

9. 根据权方和不等式得：$\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-d}\geq\dfrac{(1+1+1)^2}{a-d}$

10. （1）$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{(1+1)^2}{a+b}=4$　　（2）$\dfrac{1}{a^{2016}}+\dfrac{1}{b^{2016}}\geq\dfrac{(1+1)^{2017}}{a+b}=2^{2017}$

11. $\dfrac{2x^2}{y+z}+\dfrac{2y^2}{z+x}+\dfrac{2z^2}{x+y}\geq\dfrac{2(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=1$

12. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^4}+\dfrac{1}{c^6}\geq\dfrac{(1+1+1)^3}{(a+b^2+c^3)}=27$

13. $\dfrac{a^2}{1+a}+\dfrac{b^2}{1+b}+\dfrac{c^2}{1+c}+\dfrac{d^2}{1+d}\geq\dfrac{(a+b+c+d)^2}{4+a+b+c+d}=\dfrac{1}{5}$

14. $\frac{1}{x^3y}+\frac{1}{y^3z}+\frac{1}{z^3x}=\frac{z}{x^2}+\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}$

$(\frac{z}{x^2}+\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2})(xy+yz+zx)\geq(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})^2=(yz+xz+xy)^2\Rightarrow\frac{z}{x^2}+\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}\geq yz+xz+xy$

15. （1） $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq\frac{(1+1+1)^3}{(x+y+z)^2}=27$

（2） $\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}\geq\frac{(x+y+z)^3}{(x+y+z)^2}\geq1\geq\lambda$，故 λ 的最大值为 1.

16. $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\geq\frac{(1+1+1)^3}{3+a+b+c}\geq\frac{3}{4}$.

17. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{8}{c^2}=\frac{1^3}{a^2}+\frac{1^3}{b^2}+\frac{2^3}{c^2}\geq\frac{(1+1+2)^3}{(a+b+c)^2}=8$

18. $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}=\frac{a^2}{(b+1)a}+\frac{b^2}{(c+1)b}+\frac{c^2}{(a+1)c}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+ab+ac+bc}=\frac{1}{1+ab+ac+bc}$

$a+b+c=1\Rightarrow(a+b+c)^2=1\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=1$

$$\begin{cases}a^2+b^2\geq2ab\\a^2+c^2\geq2ac\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq ac+ab+bc\\b^2+c^2\geq2bc\end{cases}$$

原不等式等价于：$1=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\geq3(ab+bc+ac)\Rightarrow ab+bc+ac\leq\frac{1}{3}$

$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}=\frac{a^2}{(b+1)a}+\frac{b^2}{(c+1)b}+\frac{c^2}{(a+1)c}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+ab+ac+bc}=\frac{1}{1+ab+ac+bc}\geq\frac{3}{4}$

19. $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=\frac{a^2}{a(a+1)}+\frac{b^2}{b(b+1)}+\frac{c^2}{c(c+1)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+a+b+c}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2+1}$ 又因为

$a+b+c=1\Rightarrow(a+b+c)^2=1\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=1$

$$\begin{cases}a^2+b^2\geq2ab\\a^2+c^2\geq2ac\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq ac+ab+bc\\b^2+c^2\geq2bc\end{cases}$$

即原不等式等价于 $1=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\leq3(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$

20. $\frac{a}{\sqrt{a^2+3b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+3a^2}}=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^3+3ab^2}}+\frac{b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{b^3+3a^2b}}\geq\frac{(a+b)^{\frac{3}{2}}}{(a^3+b^3+3ab^2+3a^2b)^{\frac{1}{2}}}=1$

21. $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}\ge\frac{2}{1+x}+\frac{2}{1+y}+\frac{2}{1+z}$ 等价于证明

$\frac{2}{y+z}+\frac{2}{x+z}+\frac{2}{x+y}\ge\frac{4}{1+x}+\frac{4}{1+y}+\frac{4}{1+z}$ 又因为

$$\begin{cases}\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}\ge\frac{4}{1+z}\\ \frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\ge\frac{4}{1+y}\\ \frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}\ge\frac{4}{1+x}\end{cases}\Rightarrow\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{x+z}\ge\frac{4}{1+z}+\frac{4}{1+y}+\frac{4}{1+z}$$ ，即

$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}\ge\frac{2}{1+x}+\frac{2}{1+y}+\frac{2}{1+z}$ 成立.

22. 令 $a=\frac{x}{y},b=\frac{z}{x},c=\frac{y}{z}$，则

$$\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b}+\frac{1}{1+2c}=\frac{y}{y+2x}+\frac{x}{x+2z}+\frac{z}{z+2y}=\frac{y^2}{y^2+2xy}+\frac{x^2}{x^2+2zx}+\frac{z^2}{z^2+2yz}$$

$$\ge\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+2zx+2yz}=1$$

23.令 $a=\frac{x}{x+y+z}$， $b=\frac{y}{x+y+z}$， $c=\frac{z}{x+y+z}$

所以原不等式为 $\frac{2x+y+z}{y+z}+\frac{2y+x+z}{z+x}+\frac{2z+x+y}{x+y}\le\frac{2x}{y}+\frac{2y}{z}+\frac{2z}{x}$

只需证 $3\le\frac{2xz}{y^2+yz}+\frac{2yz}{z^2+xz}+\frac{2zy}{x^2+xy}=\frac{2x^2z^2}{y^2xz+z^2xy}+\frac{2x^2y^2}{z^2xy+x^2zy}+\frac{2y^2z^2}{x^2yz+y^2xz}$

而 $\frac{2x^2z^2}{y^2xz+z^2xy}+\frac{2x^2y^2}{z^2xy+x^2zy}+\frac{2y^2z^2}{x^2yz+y^2xz}\ge\frac{2(xz+yz+xy)^2}{2(y^2xz+z^2xy+x^2yz)}\ge\frac{(xz+yz+xy)^2}{\frac{1}{3}(xz+yz+xy)^2}=3$

24.令 $\begin{cases}\sqrt{a-1}=x\\ \sqrt{b-1}=y\\ \sqrt{c-1}=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=x^2+1\\ b=y^2+1\\ c=z^2+1\end{cases}$

原等式等价于 $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}=2\Rightarrow1=\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{y^2}{y^2+1}+\frac{z^2}{z^2+1}\ge\frac{(x+y+z)^2}{(x^2+y^2+z^2+3)}$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2+3}\ge x+y+z\Rightarrow\sqrt{a+b+c}\ge\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}$$

专题8 绝对值不等式

1．A；2．C；3．D；4.$[-1,\frac{1}{2}]$；5．$(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)$；6．$R$；7．$[0,4]$；8．$(-\infty,8]$；9．$(-\infty,-\frac{1}{2}]$；10．$\{x\,|\,x>\frac{1}{4}\}$；

11．$[0,+\infty)$；

12.（1）当 $a=-3$ 时，$f(x)\geq 3 \Leftrightarrow |x-3|+|x-2|\geq 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2 \\ 3-x+2-x\geq 3 \end{cases} \text{或} \begin{cases} 2<x<3 \\ 3-x+x-2\geq 3 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x\geq 3 \\ x-3+x-2\geq 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x\leq 1$ 或 $x\geq 4$

（2）原命题 $\Leftrightarrow f(x)\leq |x-4|$ 在 $[1,2]$ 上恒成立

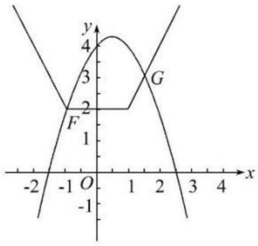
$\Leftrightarrow |x+a|+2-x\leq 4-x$ 在 $[1,2]$ 上恒成立

$\Leftrightarrow -2-x\leq a\leq 2-x$ 在 $[1,2]$ 上恒成立

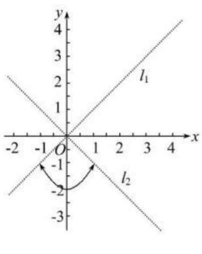
$\Leftrightarrow -3\leq a\leq 0$

13．将函数 $g(x)=|x+1|+|x-1|$ 化简,可得 $g(x)=\begin{cases} 2x, x>1 \\ 2, -1\leq x\leq 1 \\ -2x, x<-1 \end{cases}$

(1)当 $a=1$ 时,作出函数图象可得 $f(x)\geq g(x)$ 的范围在 F 和 G 点中间,联立 $\begin{cases} y=2x \\ y=-x^2+x+4 \end{cases}$ 可得点 $G(\frac{\sqrt{17}-1}{2},\sqrt{17}-1)$,因此可得解集为 $[-1,\frac{\sqrt{17}-1}{2}]$.



(2)即 $f(x)\geq g(x)$ 在 $[-1,1]$ 内恒成立,故而可得 $-x^2+ax+4\geq 2 \Rightarrow x^2-2\leq ax$ 恒成立,根据图象可得:函数 $y=ax$ 必须在 l_1,l_2 之间,故而可得 $-1\leq a\leq 1$.



14．(1)当 $a=1$ 时, $f(x)=\begin{cases}2x+4,x\le -1\\ 2,-1<x<2\\ -2x+6,x\ge 2\end{cases}$ ， $f(x)\ge 0$ 的解集为 $\{x|-2\le x\le 3\}$

(2) $f(x)\le 1$ 等价于 $|x+a|+|x-2|\ge 4$.而 $||x+a|+|x-2|\ge |a+2|$ 且当 $x=2$ 时等号成立.

故 $f(x)\le 1$ 等价于 $|a+2|\ge 4$.由 $|a+2|\ge 4$ 可得 $a\le -6$ 或 $a\ge 2$

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,-6]\cup[2,+\infty)$.

15(1)当 $a=1$ 时, $f(x)=|x+1|-|x-1|$,即 $f(x)=\begin{cases}-2,x\le -1\\ 2x,-1<x<1\\ 2,x\ge 1\end{cases}$ 结合函数图象可知,不等式 $f(x)>1$ 的解集为

$\{x|x>\frac{1}{2}\}$

(2)当 $x\in(0,1)$ 时 $|x+1|-|ax-1|>x$ 成立等价于当 $x\in(0,1)$ 时 $|ax-1|<1$ 成立.

若 $a\le 0$,则当 $x\in(0,1)$ 时 $|ax-1|\ge 1$;若 $a>0$, $|ax-1|<1$ 的解集为 $0<x<\frac{2}{a}$

所以 $\frac{2}{a}\ge 1$,故 $0<a\le 2$ ，综上, a 的取值范围为 $(0,2]$.

16．(1)当 $x\le -1$ 时, $f(x)=-(x+1)+(x-2)=-3<1$ 无解.

当 $-1<x<2$ 时, $f(x)=(x+1)+(x-2)=2x-1$ 令 $2x-1\ge 1$,得 $x\ge 1$,所以 $1\le x<2$.

当 $x\ge 2$ 时, $f(x)=(x+1)-(x-2)=3>1\Rightarrow x\ge 2$.

综上所述, $f(x)\ge 1$ 的解集为 $[1,+\infty)$.

(2)原式等价于存在 $x\in R$,使 $f(x)-x^2+x\ge m$ 成立,即 $[f(x)-x^2+x]_{\max}\ge m$

设 $g(x)=f(x)-x^2+x$,由(1)知 $g(x)=\begin{cases}-x^2+x-3,x\le -1\\ -x^2+3x-1,-1<x<2\\ -x^2+x+3,\ge 2\end{cases}$

当 $x\le -1$ 时, $g(x)=-x^2+x-3$,其开口向下,对称轴为 $x=\frac{1}{2}>-1$,所以 $g(x)\le g(-1)=-5$.

当 $-1<x<2$ 时 $g(x)=-x^2+3x-1$,其开口向下,对称轴为 $x=\frac{3}{2}$,所以 $g(x)\le g(\frac{3}{2})=\frac{5}{4}$.

当 $x\ge 2$ 时 $g(x)=-x^2+x+3$,其开口向下,对称轴为 $x=\frac{1}{2}$,所以 $g(x)\le g(2)=1$ 1.

综上: $g(x)_{\max}=\frac{5}{4}$,即 m 的取值范围为 $(-\infty,\frac{5}{4}]$.

17．(1)当 $a=2$ 时, $f(x)=|2x-2|+2$,解不等式 $|2x-2|+2\le 6$ 得 $-1\le x\le 3$.

因此 $f(x)\le 6$ 的解集为 $\{x|-1\le x\le 3\}$.

(2)当 $x\in R$ 时, $f(x)+g(x)=|2x-a|+a+|1-2x|\geq|2x-a+1-2x|+a=|1-a|+a$

所以当 $x\in R$ 时, $f(x)+g(x)\geq 3$ 等价于 $|1-a|+a\geq 3$ ①

当 $a\leq 1$ 时，①等价于 $1-a+a\geq 3$ 无解

当 $a>1$ 时，①等价于 $a-1+a\geq 3\Rightarrow a\geq 2$

所 a 的取值范围是 $[2,+\infty)$.

18．(1)当 $x<-\frac{1}{2}$ 时, $f(x)=-2x<2$ 2,解得 $-1<x<-\frac{1}{2}$;

当 $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$ 时, $f(x)=1<2$ 恒成立;当 $x>\frac{1}{2}$ 时, $f(x)=2x<2$,解得 $\frac{1}{2}<x<1$.

综上可得, $M=\{x|-1<x<1\}$.

(2)当 $a,b\in(-1,1)$)时,有 $(a^2-1)(b^2-1)>0$,即 $a^2b^2+1>a^2+b^2$ 2,

则 $a^2b^2+2ab+1>a^2++2ab+b^2$，则 $(ab+1)^2>(a+b)^2$ 2,即 $|a+b|<|ab+1|$.

19．原不等式可化为 $\begin{cases}x<-\frac{3}{2},\\-x-3\geq 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geq-\frac{3}{2},\\3x+3\geq 2\end{cases}$ 解得 $x\leq-5$ 或. $x\geq-\frac{1}{3}$

综上,原不等式的解集是 $\{x|x\leq-5$ 或. $x\geq-\frac{1}{3}\}$

20．(1)当 $a=1$ 时, $f(x)>1$ 化为 $|x+1|-2|x-1|-1>0$.

当 $x\leq 1$ 时,不等式化为 $x-4>0$,无解;

当 $-1<x<1$ 时,不等式化为 $3x-2>0$,解得 $\frac{2}{3}<x<1$;

当 $x\geq 1$ 时,不等式化为 $-x+2>0$,解得 $1\leq x<2$.

所以 $f(x)>1$ 的解集为 $\{x|\frac{2}{3}<x<2\}$.

(2)由题设可得, $f(x)=\begin{cases}x-1-2a,x<-1\\3x+1-2a,-1\leq x\leq a\\-x+1+2a,x>a\end{cases}$

所以函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形的三个顶点分别为 $A(\frac{2a-1}{3},0)$，$B(2a+1,0)$，$C(a,a+1)$), ΔABC 的面积为 $\frac{2}{3}(a+1)^2$.由题设得 $\frac{2}{3}(a+1)^2>6$ 故 $a>2$.所以 a 的取值范围为 $(2,+\infty)$.

21．(1)由 $a>0$，有 $f(x)=|x+\frac{1}{a}|+|x-a|\geq|x+\frac{1}{a}-(x-a)|=\frac{1}{a}+a\geq 2$.所以 $f(x)\geq 2$.

（2） $f(3)=|3+\frac{1}{a}|+|3-a|$.

当 $a>3$ 时，$f(3)=\frac{1}{a}+a$，由 $f(3)<5\Rightarrow 3<a<\frac{5+\sqrt{21}}{2}$

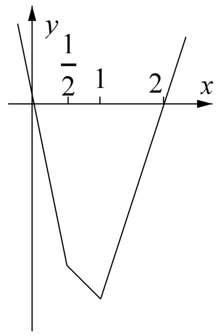
当 $0<a\le 3$ 时，$f(3)=6-a+\frac{1}{a}$ 由 $f(3)<5\Rightarrow\frac{1+\sqrt{5}}{2}<a\le 3$.

综上，a 的取值范围是 $(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{5+\sqrt{21}}{2})$.

22．(1)当 $a=-2$ 时，不等式 $f(x)<g(x)$ 化为 $|2x-1|+|2x-2|-x-3<0$，

设函数 $y=|2x-1|+|2x-2|-x-3$，$y=\begin{cases}-5x,x<-\frac{1}{2}\\-x-2,\frac{1}{2}\le x\le 1,\\3x-6,x>1\end{cases}$

其图像如图所示，从图像可知，当且仅当 $x\in(0,2)$ 时，$y<0$，



$\therefore$ 原不等式解集是 $\{x|0<x<2\}$.

（2）当 $x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2})$ 时，$f(x)=1+a$，不等式 $f(x)<g(x)$ 化为 $1+a\le x+3$，

$\therefore x\ge a-2$ $\therefore x\geqslant a-2$ 对 $x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2})$ 都成立，故 $-\frac{a}{2}\ge a-2$，即 $a\le\frac{4}{3}$，

$\therefore a$ 的取值范围为 $(-1,\frac{4}{3}]$.

23.（1）因为 $\{x|1\le x\le 2\}$，且 $\frac{1}{2}\notin A$，所以 $|\frac{3}{2}-2|<a$，且 $|\frac{1}{2}-2|\ge a$

解得 $\frac{1}{2}<a\le\frac{3}{2}$，又因为 $a\in N^*$，所以 $a=1$ $a=1$

（2）因为 $|x+1|+|x-2|\ge|(x+1)-(x-2)|=3$

当且仅当 $(x+1)(x-2)\le 0$ 即 $-1\le x\le 2$ 时取到等号,所以 $f(x)$ 的最小值为 3.

24.（1）$f(x)=|x-2|-|x-5|=\begin{cases}-3,x\le 2\\2x-7,2<x<5\\3,x\ge 5\end{cases}$

当 $2<x<5$ 时，$-3<2x-7<3$，所以 $-3\le f(x)\le 3$

（2）由（I）可知，

当 $x\le 2$ 时，$f(x)\ge x^2-8x+15$ 的解集为空集；

当 $2<x<5$ 时，$f(x)\ge x^2-8x+15$ 的解集为 $\{x\,|\,5-\sqrt{3}\le x<5\}$；

当 $x\ge 5$ 时，$f(x)\ge x^2-8x+15$ 的解集为 $\{x\,|\,5\le x\le 6\}$

综上，不等式 $f(x)\ge x^2-8x+15$ 的解集为 $\{x\,|\,5-\sqrt{3}\le x\le 6\}$.

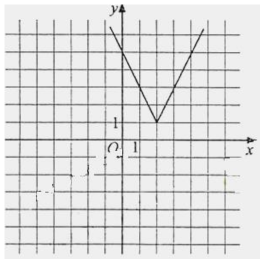
25.（1）当 $a=1$ 时，$f(x)\ge 3x+2$ 可化为 $|x-1|\ge 2$.

由此可得 $x\ge 3$ 或 $x\le 1$.

故不等式 $f(x)\ge 3x+2$ 的解集为 $\{x\,|\,x\ge 3$ 或 $x\le -1\}$.

(2) 由 $f(x)\le 0$ 得 $|x-a|+3x\le 0$,

此不等式化为不等式组 $\begin{cases}x\ge a\\ x-a+3x\le 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<a\\ a-x+3x\le 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x\ge a\\ x\le \dfrac{a}{4}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>a\\ x\le -\dfrac{a}{2}\end{cases}$,



因为 $a>0$，所以不等式组的解集为 $\{x\,|\,x\le -\dfrac{a}{2}\}$,

由题设可得 $-\dfrac{a}{2}=-1$，故 $a=2$.

26.（1）由于 $f(x)=\begin{cases}-2x+5, x<2\\ 2x-3, x\ge 2\end{cases}$ 则函数 $y=f(x)$ 的图像如图所示.

（2）由函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=ax$ 的图像可知，当且仅当 $a\ge \dfrac{1}{2}$ 或 $a<-2$ 时，函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=ax$ 的图像有交点．故不等式 $f(x)<ax$ 的解集非空时，a 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup[\dfrac{1}{2},+\infty)$.