第四章　圆锥曲线参考答案

专题 1　直线方程

1．C；　2．C；　3．B；　4．C；　5．B；　6．D；　7．D；　8．D；　9．C；　10．C；11．A；12．D；13．C；14．D；15．B；16．C；17．B；18．C；19．C；20．C；21．B；22．B；23．C；24．D；25．A；26．D；27．A；28．D；29．C；30．C；31．$P(\frac{8}{9},\frac{17}{9})$，最小值为$\sqrt{41}$；

32．$x-3y-10=0$；33．$3x-2y+4=0$．

专题 2　圆的方程

1．B　【解析】圆心 C 与点 M 的距离即为圆的半径，$\sqrt{(2-5)^2+(-3+7)^2}=5$.

2．C　【解析】解析一：由圆心在直线 $x+y-2=0$ 上可以得到 A，C 满足条件，再把 A 点坐标 $(1，-1)$代入圆方程．A 不满足条件．∴选 C.

解析二：设圆心 C 的坐标为$(a，b)$，半径为 r，因为圆心 C 在直线 $x+y-2=0$ 上，∴$b=2-a$．由$|CA|=|CB|$，得$(a-1)^2+(b+1)^2=(a+1)^2+(b-1)^2$，解得 $a=1$，$b=1$．因此所求圆的方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

3．B　【解析】∵与 x 轴相切，∴$r=4$．又圆心$(-3，4)$，∴圆方程为$(x+3)^2+(y-4)^2=16$.

4．B　【解析】∵$x+y+m=0$ 与 $x^2+y^2=m$ 相切，∴$(0，0)$到直线距离等于$\sqrt{m}$．∴$\frac{|m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{m}$，∴$m=2$.

5．A　【解析】令 $y=0$，∴$(x-1)^2=16$．∴ $x-1=\pm4$，∴$x_1=5$，$x_2=-3$．∴弦长$=|5-(-3)|=8$.

6．B　【解析】由两个圆的方程 C_1：$(x+1)^2+(y+1)^2=4$，C_2：$(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 可求得圆心距 $d=\sqrt{13}\in(0，4)$，$r_1=r_2=2$，且 $r_1-r_2<d<r_1+r_2$ 故两圆相交，选 B.

7．A　【解析】对已知圆的方程 $x^2+y^2-2x-5=0$，$x^2+y^2+2x-4y-4=0$，经配方，得$(x-1)^2+y^2=6$，$(x+1)^2+(y-2)^2=9$．圆心分别为 $C_1(1，0)$，$C_2(-1，2)$．直线 C_1C_2 的方程为 $x+y-1=0$.

8．C　【解析】将两圆方程分别配方得$(x-1)^2+y^2=1$ 和 $x^2+(y+2)^2=4$，两圆圆心分别为 $O_1(1，0)$，$O_2(0，-2)$，$r_1=1$，$r_2=2$，$|O_1O_2|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，又 $1=r_2-r_1<\sqrt{5}<r_1+r_2=3$，故两圆相交，所以有两条公切线，应选 C.

9．C　【解析】①②③错，④对．选 C.

10．D　【解析】利用空间两点间的距离公式.

11.C

12.A

13.B

14.C

15.C　【解析】因为直线与圆相离，所以最大距离与最小距离的差应为直径。因为半径为$\mathbf{3\sqrt{2}}$

16．2.【解析】圆心到直线的距离 $d=\frac{|3+4+8|}{5}=3$，∴动点 Q 到直线距离的最小值为 $d-r=3-1=2$.

17．$(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

【解析】画图后可以看出，圆心在$(1，1)$，半径为 1．故所求圆的方程为：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

18．$(x+2)^2+(y-3)^2=4$．

【解析】因为圆心为$(-2，3)$，且圆与 y 轴相切，所以圆的半径为 2．故所求圆的方程为$(x+2)^2+(y-3)^2=4$．

19．0 或$\pm2\sqrt{5}$．

【解析】当两圆相外切时，由$|O_1O_2|=r_1+r_2$知$\sqrt{4^2+a^2}=6$，即 $a=\pm2\sqrt{5}$．

当两圆相内切时，由$|O_1O_2|=r_1-r_2(r_1>r_2)$知$\sqrt{4^2+a^2}=4$，即 $a=0$．∴a 的值为 0 或$\pm2\sqrt{5}$．

19．$(x-3)^2+(y+5)^2=32$．

【解析】圆的半径即为圆心到直线 $x-7y+2=0$ 的距离；

20．$x+y-4=0$．

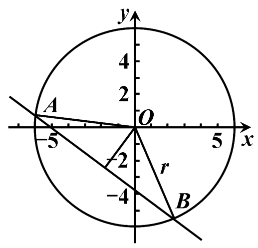
【解析】圆 $x^2+y^2-4x-5=0$ 的圆心为 $C(2，0)$，$P(3，1)$为弦 AB 的中点，所以直线 AB 与直线 CP 垂直，即 $k_{AB}\cdot k_{CP}=-1$，解得 $k_{AB}=-1$，又直线 AB 过 $P(3，1)$，则所求直线方程为 $x+y-4=0$．

22. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$

23. $\frac{\sqrt{2}}{2}$（要想圆心角最小，即圆心到直线的距离为圆心与点$(1,\sqrt{2})$的距离，即直线 l 垂直于圆心与点的连线。

24．$x^2+y^2=36$．

【解析】设直线与圆交于 A，B 两点，则$\angle AOB=120°$，设所求圆方程为：$x^2+y^2=r^2$，则圆心到直线距离为$\frac{r}{2}=\frac{|15|}{5}$，所以 $r=6$，所求圆方程为 $x^2+y^2=36$．



(第 24 题)

25．$x^2+y^2-ax-by=0$．

【解析】∵圆过原点，∴设圆方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey=0$．

∵圆过$(a，0)$和$(0，b)$，∴$a^2+Da=0$，$b^2+bE=0$．

又∵$a\neq0$，$b\neq0$，∴$D=-a$，$E=-b$．故所求圆方程为 $x^2+y^2-ax-by=0$．

26．$x^2+y^2-2x-12=0$．

【解析】设所求圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$．

∵A，B 两点在圆上，代入方程整理得：$D-3E-F=10$　　①$4D+2E+F=-20$　②

设纵截距为 b_1，b_2，横截距为 a_1，a_2．在圆的方程中，令 $x=0$ 得 $y^2+Ey+F=0$，

∴$b_1+b_2=-E$；令 $y=0$ 得 $x^2+Dx+F=0$，∴$a_1+a_2=-D$．由已知有$-D-E=2$．③

①②③联立方程组得 $D=-2$，$E=0$，$F=-12$．故所求圆的方程为 $x^2+y^2-2x-12=0$．

27．【解析】设所求圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$．根据题意：$r=\frac{10-6}{2}=2$，圆心的横坐标 $a=6+2=8$，所以圆的方程可化为：$(x-8)^2+(y-b)^2=4$．又因为圆过$(8，3)$点，所以$(8-8)^2+(3-b)^2=4$，解得 $b=5$ 或 $b=1$，所求圆的方程为$(x-8)^2+(y-5)^2=4$ 或$(x-8)^2+(y-1)^2=4$．

28.【解析】由圆心在直线 x-y-1=0 上，可设圆心为（a,a-1）,半径为 r, 由题意可得

$$\begin{cases}\frac{|4a+3(a-1)+14|}{5}=r\\ r^2=9+\left(\frac{3a+4(a-1)+10}{5}\right)^2\end{cases}$$

，经计算得 a=2, r=5. 所以所求圆的方程为（x-2）^{2}+（y-1）^{2}=25

29.【解析】将 $x=3-2y$ 代入方程 $x^2+y^2+x-6y+m=0$，得 $5y^2-20y+12+m=0$ 设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，则 y_1,y_2

满足条件：$y_1+y_2=4, y_1y_2=\dfrac{m+12}{5}$ ∵ $OP\perp OQ$， ∴ $k_{OP}\bullet k_{OQ}=-1$，即 $\dfrac{y_1}{x_1}\bullet\dfrac{y_2}{x_2}=-1$，从而 $x_1x_2+y_1y_2=0$，

又 $x_1=3-2y_1$，$x_2=3-2y_2$，∴ $x_1x_2=9-6(y_1+y_2)+4y_1y_2$，∴$m$=3，此时Δ>0，圆心坐标为（$-\dfrac{1}{2}$，3），半径 $r=\dfrac{5}{2}$．

专题3 对称问题

1.【答案】$\sqrt{41}$；（$\dfrac{17}{5}$，0）．

2.【解析】N（a，$-b$），P（$-a$，$-b$），则 Q（b，a）．答案：B；

3.【解析】直线 l_1 关于 y 轴对称的直线方程为（$-x$）$+my+5=0$，即 $x-my-5=0$，与 l_2 比较，∴$m=-n$ 且 $p=-5$．反之亦验证成立．答案：C

4.【解析】对称轴是以两对称点为端点的线段的中垂线．答案：$3x-y+3=0$

5.【解析】数形结合．答案：$\pi-\theta$

6.【解析】由 M（x，y）关于 $y=-x$ 的对称点为（$-y$，$-x$），即得 x^2+（$y+1$）$^2=1$．答案：C

7.【解析】将 $x+2y-1=0$ 中的 x、y 分别代以 $2-x$，$-2-y$，得（$2-x$）$+2$（$-2-y$）$-1=0$，即 $x+2y+3=0$．故选C．答案：C

8.【解析】l 上的点为到两直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 与 $x=1$ 距离相等的点的集合，即 $\dfrac{|x-\sqrt{3}y|}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}=|x-1|$，化简得 $x+\sqrt{3}y-2=0$ 或 $3x-\sqrt{3}y-2=0$．答案：$x+\sqrt{3}y-2=0$ 或 $3x-\sqrt{3}y-2=0$

9.【解析】易知 A（4，-1）、B（3，4）在直线 l：$2x-y-4=0$ 的两侧．作 A 关于直线 l 的对称点 A_1（0，1），当 A_1、B、P 共线时距离之差最大．答案：（5，6）

10.【解析】设点 A（-1，-4）关于直线 $y+1=0$ 的对称点为 A'（x_1，y_1），则 $x_1=-1$，$y_1=2\times(-1)-(-4)=2$，即 A'（-1，2）．在直线 BC 上，再设点 A（-1，-4）关于 l_2：$x+y+1=0$ 的对称点为 A''（x_2，y_2），

则有 $\begin{cases}\dfrac{y_2+4}{x_2+1}\cdot(-1)=-1\\ \dfrac{x_2-1}{2}+\dfrac{y_2-4}{2}+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=3\\ y_2=0\end{cases}$ 即 A''（3，0）也在直线 BC 上，由直线方程的两点式得 $\dfrac{y-2}{0-2}=\dfrac{x+1}{3+1}$，

即 $x+2y-3=0$ 为边 BC 所在直线的方程．

11.【解析】因为 $y=\sqrt{(x-0)^2+(0-3)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(0-5)^2}$，所以函数 y 是 x 轴上的点 P（x，0）与两定点 A（0，3）、B（4，3）距离之和．y 的最小值就是$|PA|+|PB|$的最小值．由平面几何知识可知，若 A 关于 x 轴的对称点为 A'（0，-3），则$|PA|+|PB|$的最小值等于$|A'B|$，即 $\sqrt{(4-0)^2+(5+3)^2}=4\sqrt{5}$． 所以 $y_{\min}=4\sqrt{5}$．

12.【解析】由题意，点 A 关于直线 $y=2x$ 的对称点 A'在 BC 所在直线上，设 A'点坐标为（x_1，y_1），则 x_1、y_1 满足

$\dfrac{y_1-2}{x_1+4}=-\dfrac{1}{2}$，即 $x_1=-2y_1$． ① $\dfrac{y_1+2}{2}=2\cdot\dfrac{x_1-4}{2}$，即 $2x_1-y_1-10=0$．②

解①②两式组成的方程组，得 $\begin{cases}x_1=4\\ y_1=-2\end{cases}$ ∴BC 所在直线方程为 $\dfrac{y-1}{-2-1}=\dfrac{x-3}{4-3}$，即 $3x+y-10=0$．解方程组

$\begin{cases}3x+y-10=0\\ y=2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$∴所求 C 点坐标为（2，4）．由题意$|AB|^2=50$，$|AC|^2=40$，$|BC|^2=10$，

∴△ABC 为直角三角形．

13.【解析】(1）可判断 A、B 在直线 l 的同侧，设 A 点关于 l 的对称点 A_1 的坐标为（x_1，y_1）．

$\begin{cases}\dfrac{x_1+2}{2}-2\cdot\dfrac{y_1+3}{2}-2=0\\ \dfrac{y_1-3}{x_1-2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{2}{5}\\ y_1=-\dfrac{9}{5}\end{cases}$ 由两点式求得直线 A_1B 的方程为 $y=\dfrac{7}{11}$（$x-4$）$+1$，直线 A_1B 与 l 的交点可求得为 P（$\dfrac{56}{25}$，$-\dfrac{3}{25}$）．由平面几何知识可知$|PA|+|PB|$最小．

（2）由两点式求得直线 AB 的方程为 $y-1=-$（$x-4$），即 $x+y-5=0$．直线 AB 与 l 的交点可求得为 P（8，-3），它使$|PA|-|PB|$最大．

专题4　直线系和圆系方程

1.【答案】$\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$

2.【答案】(1）$x+2y-4=0$；(2）$4x+3y-6=0$．

3.【解析】方程 $x^2+y^2-2x=0$ ①可化为 $(x-1)^2+y^2=1$，即曲线 C 是一个圆，记圆心为 C．

因为 PA、PB 分别切圆 C 于 A、B 所以 P、A、B、C 四点在以 PC 为直径的圆 $C'=(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$ 即 $x^2+y^2-4x-y+3=0$ ②上，两圆公共弦所在直线即为所求，由①-②，得直线 AB 的方程为 $2x+y-3=0$．故选 A．

4.【解析】曲线 $(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+(6-4\lambda)x-16-6\lambda=0$ 可化为 $(x^2+y^2+6x-16)+\lambda(x^2+y^2-4x-6)=0$，∴ $x^2+y^2+6x-16=0$ 且 $x^2+y^2-4x-6=0$，可得恒过定点 $(2,\pm2\sqrt{2})$．故答案为：$(2,\pm2\sqrt{2})$．

5.【解析】由题可设所求圆的方程为：$(x^2+y^2+3x-y-2)+\lambda(3x^2+3y^2+2x+y+1)=0$，因为 $(0,0)$ 在所求的圆上，∴有 $-2+\lambda=0$．从而 $\lambda=2$，故所求的圆的方程为：$(x^2+y^2+3x-y-2)+2(3x^2+3y^2+2x+y+1)=0$ 即　$7x^2+7y^2+7x+y=0$．

6.【解析】 构造方程 $x^2+y^2+6x-4+\lambda(x^2+y^2+6y-28)=0$ 即 $(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+6x+6\lambda y-(4+28\lambda)=0$．此方程的曲线是过已知两圆交点的圆，且圆心为 $(-\dfrac{3}{1+\lambda},-\dfrac{3\lambda}{1+\lambda})$ 当该圆心在直线 $x-y-4=0$ 上时，即 $\dfrac{-3}{1+\lambda}+\dfrac{3\lambda}{1+\lambda}-4=0$，得 $\lambda=-7$．∴ 所求圆方程为 $x^2+y^2-x+7y-32=0$．

7.　【解析】解过 $A(-1,-3)$ 的圆的切线为 $3x+4y+15=0$，构造圆 $x^2+y^2-4x-2y-20+\lambda(3x+4y+15)=0$，代入 $(2,0)$ 得 $\lambda=\dfrac{8}{7}$，所以所求圆方程为 $7x^2+7y^2-4x+18y-20=0$．

8.【解析】圆 $x^2+y^2=5$ 和 $(x-1)^2+(y-1)^2=16$ 的公共弦方程为 $2x+2y-11=0$ 过直线 $2x+2y-11=0$ 与圆 $x^2+y^2=5$ 的交点的圆系方程为 $x^2+y^2-25+\lambda(2x+2y-11)=0$，即 $x^2+y^2+2\lambda x+2\lambda y-(11\lambda+25)=0$ 依题意，欲使所求圆面积最小，只需圆半径最小，则两圆的公共弦必为所求圆的直径，圆心 $(-\lambda,-\lambda)$ 必在公共弦

所在直线 $2x+2y-11=0$ 上，即 $-2\lambda-2\lambda+11=0$，则 $\lambda=-\dfrac{11}{4}$ 代回圆系方程得所求圆方程

$(x-\dfrac{11}{4})^2+(y-\dfrac{11}{4})^2=\dfrac{79}{8}$.

9.【解析】设圆的方程为：$x^2+y^2+2x-4y+1+\lambda(2x+y+4)=0$

即 $x^2+y^2+2(1+\lambda)x+(\lambda-4)y+(1+4\lambda)=0$，则 $r^2=\dfrac{1}{4}\left[4(1+\lambda)^2+(\lambda-4)^2-4(1+4\lambda)\right]=\dfrac{5}{4}(\lambda-\dfrac{8}{5})^2+\dfrac{4}{5}$，当 $\lambda=\dfrac{8}{5}$ 时，r^2 最小，从而圆的面积最小，故所求圆的方程为：$5x^2+5y^2+26x-12y+37=0$

10.【解析】(1) 设圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，把点 $(0,-1)$，$(3+\sqrt{2}，0)$，$(3-\sqrt{2}，0)$ 分别代入，

得：$\begin{cases}1-E+F=0\\11+6\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})D+F=0\\11-6\sqrt{2}+(3-\sqrt{2})D+F=0\end{cases}$，解得 $D=-6$，$E=8$，$F=7$，$\therefore$ 圆 C 的方程为 $x^2+y^2-6x+8y+7=0$.

(2) 过直线 $x+y+a=0$ 与圆 $x^2+y^2-6x+8y+7=0$ 的交点的圆系方程为：

$x^2+y^2-6x+8y+7+\lambda(x+y+a)=0$，即 $x^2+y^2+(\lambda-6)x+(\lambda+8)y+7+\lambda a=0$ ①

依题意，O 在以 AB 为直径的圆上，则圆心 $(-\dfrac{\lambda-6}{2}，-\dfrac{\lambda+8}{2})$ 显然在直线 $x+y+a=0$ 上，则

$-\dfrac{\lambda-6}{2}-\dfrac{\lambda+8}{2}+a=0$，解之可得 $a=\lambda+1$，又 $O(0，0)$ 满足方程①，$7+\lambda a=0$，故 $a^2-a+7=0$

无解，故不存在 a，使得 $OA\perp OB$.

11.【解析】(1) 证明：l 的方程可化为 $(x+y-4)+m(2x+y-7)=0$，$\because m\in R$，$\therefore\begin{cases}2x+y-7=0\\x+y-4=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$，

即 l 恒过定点 $A(3，1)$，$\because$ 圆心 $C(1，2)$，$|AC|=\sqrt{5}<5$（半径），$\therefore$ 点 A 在圆 C 内，从而直线 l 恒与圆 C 相交于两点.(2) 弦长最小时，$l\perp AC$，由 $k_{AC}=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore l$ 的方程为 $2x-y-5=0$.

12.【解析】(1) 由题意得，$C(-2,1)$，$K_l=1$，由 $m\perp l$ 得，$k_m\cdot k_l=-1$，$\therefore k_m=-1$. $\because$ 直线过圆心 $(-2，1)$，$\therefore$ 直线 m 的方程为 $x+y+1=0$.

(2) 过直线 $x-y-3=0$ 与圆 $x^2+y^2+4x-2y+a=0$ 的交点的圆系方程为：

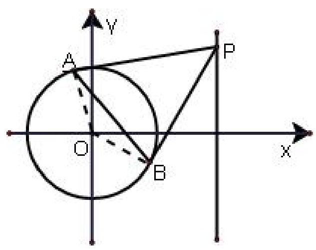
$x^2+y^2+4x-2y+a+\lambda(x-y-3)=0$，即 $x^2+y^2+(4+\lambda)x-(\lambda+2)y+a-3\lambda=0$ ①

依题意，O 在以 MN 为直径的圆上，则圆心 $(-\dfrac{4+\lambda}{2}，\dfrac{\lambda+2}{2})$ 显然在直线 $x-y-3=0$ 上，则

$-\dfrac{4+\lambda}{2}-\dfrac{\lambda+2}{2}-3=0$，解之可得 $\lambda=-6$，又 $O(0，0)$ 满足方程①，则 $a-3\lambda=0$，故 $a=-18$.

13.【解析】(1) 依题意得：圆心 $(0，0)$ 到直线 $x+y+4\sqrt{3}=0$ 的距离 $d=r$，$\therefore r=d=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{6}$，$\therefore$ 圆 C 的方程为 $x^2+y^2=24$ ①；

(2) 连接 OA、OB，$\because PA$、PB 是圆 C 的两条切线，$\therefore OA\perp AP$，$OB\perp BP$，$\therefore A$、B 在以 OP 为直径的圆上，设点 P 的坐标为 $(8,b)$，则线段 OP 的中点坐标为 $\left(4，\dfrac{b}{2}\right)$，$\therefore$ 以 OP 为直径的圆方程为 $(x-4)^2+\left(y-\dfrac{b}{2}\right)^2=16+\dfrac{b^2}{4}$，②$\because AB$ 为两圆的公共弦，$\therefore$①－②得：直线 AB 的方程为 $8x+by=24$，即 $8(x-3)+by=0$，则直线 AB 恒过定点 $(3，0)$.



专题 5　圆系和曲线系

1.【解析】设直线 AB 为 l，由题意可得，直线 l 和坐标轴不垂直，$y^2=2px$ 的焦点 $F(\frac{p}{2},\ 0)$，

设 l 的方程为 $x=my+\frac{p}{2}(m\neq 0)$，代入抛物线方程可得 $y^2-2mpy-p^2=0$，显然判别式 $\Delta=4p^2m^2+4p^2>0$，

$y_1+y_2=2mp$，$y_1\cdot y_2=-p^2$．$\therefore AB$ 的中点坐标为 $D(pm^2+\frac{p}{2},\ mp)$，

又直线 l' 的斜率为 $-m$，$\therefore$ 直线 l' 的方程为 $x=-\frac{1}{m}y+pm^2+\frac{3p}{2}$．

过 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点，若 AB 的垂直平分线 l' 与 C 相交于 M、N 两点，

把线 l' 的方程代入抛物线方程可得 $y^2+\frac{2p}{m}y-p^2(2m^2+3)=0$，

A、M、B、N 四点的曲线系方程为 $y^2-2px+\lambda\ x-my-\frac{p}{2}\ \ x+\frac{1}{m}y-pm^2-\frac{3p}{2}\ =0$，即

$y^2(1-\lambda)+\lambda x^2+\lambda\ \frac{1}{m}-m\ xy+x\left(-2p-2p\lambda-\lambda pm^2\right)+y\ p\lambda m^2+\frac{3pm\lambda}{2}-\frac{p\lambda}{2m}\ =0$，由于 xy 的系数为零，故

$m=\pm 1$，$\lambda=\frac{1}{2}$；故存在 $ABCD$ 四点共圆，$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $x-y-\frac{P}{2}=0$，或 $x+y-\frac{P}{2}=0$．

2.【解析】(1)依题意，记 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则有 $\begin{cases} {x_1}^2-\frac{{y_1}^2}{2}=1①;{x_2}^2-\frac{{y_2}^2}{2}=1② \\ \frac{x_1+x_2}{2}=1③;\frac{y_1+y_2}{2}=2④ \\ k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}⑤ \end{cases}$　①－②,代入③④⑤$\Rightarrow k=1$

所以直线 AB 的方程为 $y=x+1$

（2）由于 CD 的方程为 $y-2=-(x-1)$，即 $x+y-3=0$．设 A、B、C、D 四点的曲线系方程为

$x^2-\frac{y^2}{2}-1+\lambda(x-y+1)(x+y-3)=0$，即 $x^2(1+\lambda)+y^2\ \ -\frac{1}{2}-\lambda\ \ -2\lambda x+4\lambda y-1-3\lambda=0$，当 $\lambda=-\frac{3}{4}$ 时，曲线

系方程为 $x^2+y^2+6x-12y+5=0$，$4R^2=6^2+(-12)^2-4\times 5>0$，所以 A、B、C、D 四点共圆．

3.【解析】(1) 设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则有 $\begin{cases} 3x_1^2+y_1^2=\lambda \\ 3x_2^2+y_2^2=\lambda. \end{cases}\Rightarrow 3\ (x_1-x_2)\ (x_1+x_2)+(y_1-y_2)=0$．

依题意，$x_1\neq x_2$，$\therefore k_{AB}=-\frac{3(x_1+x_2)}{y_1+y_2}$．$\because N(1,3)$ 是 AB 的中点，$\therefore x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=6$，从而 $k_{AB}=-1$．

又由 $N(1,3)$ 在椭圆内，$\therefore \lambda>3\times 1^2+3^2=12$，$\therefore \lambda$ 的取值范围是 $(12,+\infty)$．

直线 AB 的方程为 $y-3=-(x-1)$，即 $x+y-4=0$．直线 CD 的方程为 $y-3=x-1$，即 $x-y+2=0$

（2）A、B、C、D 四点的曲线系方程为 $3x^2+y^2-\lambda+\mu(x+y-4)(x-y+2)=0$．

即 $x^2(3+\mu)+y^2(1-\mu)-2\mu x+6\mu y-\lambda-8\mu=0$，当 $\mu=-1$ 时，方程转化为 $x^2+y^2+x-3y-\frac{\lambda}{2}+4=0$

故当 $4R^2=1^2+(-3)^2-4\times\ -\frac{\lambda}{2}+4\ >0\Rightarrow\lambda>3$，故当 $\lambda>12$ 时符合题意，A、B、C、D 四点共圆.

4.【解析】(1) 依题意知，$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$|AB|=\sqrt{7}$，即 $a^2+b^2=7$，又 $a^2-b^2=c^2$，解得 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2) 设直线 PQ 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+m$，根据点 P 在第一象限可知，$-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$ 由于 AB 方程为

$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}$，$A$、$P$、$B$、$Q$ 四点的曲线系方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-1+\lambda\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-y+m\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+y-\sqrt{3}\right)=0$，

即 $x^2\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\lambda\right)+y^2\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)+x\lambda\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}-\frac{3}{2}\right)+y\lambda\left(\sqrt{3}+m\right)-1-\sqrt{3}m\lambda=0$，当 $\lambda=\frac{1}{21}$ 时，方程可以转化为

$$x^2+y^2+x\left(\frac{\sqrt{3}m}{12}-\frac{1}{4}\right)+y\left(\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{m}{6}\right)-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{3}m}{6}=0$$

$4R^2=\ \frac{\sqrt{3}m}{12}-\frac{1}{4}\ ^2+\ \frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{m}{6}\ ^2-4\ \ -\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{3}m}{6}\qquad 7m^2+50\sqrt{3}m+885>0$ 对 $m\in R$ 恒成立，所以 A，P，B，Q 四点共圆.

5.【解析】(1) 易知 $a=2$，令椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$，代入点 $C\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 得 $b=\sqrt{3}$，椭圆 E 的方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2) 设 $MN:x=ky+n$，故我们只需要求出 n；

TA：$y=\frac{m}{6}(x+2)$

已知 TB：$y=\frac{m}{2}(x-2)$ 因为椭圆过二次曲线 $TA\cdot TB$ 与二次曲线 $AB\cdot MN$ 的四个交点 A，B，M，N，有

AB：$y=0$

$$\left[y-\frac{m}{6}(x+2)\right]\left[y-\frac{m}{2}(x-2)\right]+\mu y(x-ky-n)=\lambda\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-1\right)$$

对比两边 xy 项系数，得 $-\frac{m}{6}-\frac{m}{2}+\mu=0$，对比两边 y 项系数，得 $-\frac{m}{3}+m-\mu n=0$

联立以上两式，解得 $n=1$，故直线 MN 恒过 (1，0).

6.【解析】(1) $\because\triangle F_1PQ$ 的周长是 $4\sqrt{2}$，$\therefore 4a=4\sqrt{2}$，即 $a=\sqrt{2}$，又由离心率是 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $c=1$，

故 $b^2=a^2-c^2=1$，故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

(2) ①设 $l_{A_1P}:x=k_1y-\sqrt{2}$，l_{A_2Q}：$x=k_2y+\sqrt{2}$，$l_{PQ}:x=ky+1$，$l_{A_1A_2}$：$y=0$

以 A_1PA_2Q 四点曲线系方程为 $[(x-k_1y+\sqrt{2})][(x-k_2y-\sqrt{2})]+uy[x-ky-1]=\lambda(\frac{x^2}{2}+y^2-1)$

xy 的系数为 0，　$-k_1-k_2+u=0$

y 的系数为 0，　$\sqrt{2}k_1-\sqrt{2}k_2-u=0$

$l_{AP}: x=k_1y-\sqrt{2}$，l_{QN}： $x=k_2y+\sqrt{2}$

相加可以得到，$2x=k_1y+k_2y$ ，相减可以得到 $k_1y-k_2y-2\sqrt{2}=0$

联立可得 $x=1$，即点 M 在定直线 $x=1$ 上.

②由直线 $l:x=2$ 为椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右准线，F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右顶点，故 $\frac{|PF_2|}{|PN|}=e=\frac{\sqrt{2}}{2}$

7.【解析】(1) $F_2(1,0)$，$\therefore c=1$，由题目已知条件知 $\begin{cases} a^2=1+b^2 \\ \frac{1}{a^2}+\frac{\frac{9}{4}}{b^2}=1 \end{cases}$ ，$\therefore a=2,b=\sqrt{3}$，

$\therefore$椭圆的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2) 设 $l_{A_1M}: x=k_1y-2$，l_{A_2N}： $x=k_2y+2$，$l_{MN}: y=k(x-4)$，l_{MN}： $y=0$

以 A_1MA_2N 四点曲线系方程为 $[(x-k_1y+2)][(x-k_2y-2)]+uy[y-kx+4k]=\lambda(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-1)$

xy 的系数为 0， $-k_1-k_2-ku=0$

y 的系数为 0， $2k_1-2k_2+4ku=0$

$l_{A_1M}: x=k_1y-2$，l_{A_2N}： $x=k_2y+2$

相加可以得到，$2x=k_1y+k_2y$ ，相减可以得到 $k_1y-k_2y-4=0$

联立可得 $x=1$，即点 Q 在定直线 $x=1$ 上.

8.【解析】(1)设 $N(x_0,y_0)$，由于 $A(-\sqrt{2},0),B(\sqrt{2},0)$，所以 $k_2\cdot k_3=\frac{y_0}{x_0-\sqrt{2}}\cdot\frac{y_0}{x_0+\sqrt{2}}=\frac{y_0^2}{x_0^2-2}$，因为 $N(x_0,y_0)$ 在椭圆 C 上，于是 $\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$，即 $x_0^2-2=-2y_0^2$，所以 $k_2\cdot k_3=\frac{y_0^2}{x_0^2-2}=-\frac{1}{2}$.

(1) 整体向右平移 $\sqrt{2}$ 个单位，$C^*:\frac{(x-\sqrt{2})^2}{2}+y^2=1$ ，设平移后的动直线为 $mx+ny=1$（直线过（$\frac{3\sqrt{2}}{2}$,0），代入解得 $m=\frac{\sqrt{2}}{3}$） 展开 C^*，得到 $x^2-2\sqrt{2}x+2+2y^2-2=0$，

$x^2-2\sqrt{2}x(mx+ny)+2y^2=0$ ，∵$x\neq0$，同除 x^2，得到 $1-2\sqrt{2}(m+nk)+2k^2=0$

$2k^2+(1-2\sqrt{2}m)-2\sqrt{2}nk=0$，由韦达定理可知，$k_1\cdot k_3=\frac{1-2\sqrt{2}m}{2}=-\frac{1}{6}$

(3) 设 $l_{AM}: x=k_1y-\sqrt{2}$，l_{QN}： $x=k_2y+\sqrt{2}$，$l_{MN}: x=ky+t$，l_{MN}： $y=0$

以 $AMBN$ 四点曲线系方程为 $[(x-k_1y+\sqrt{2})][(x-k_2y-\sqrt{2})]+uy[x-ky-t]=\lambda(\frac{x^2}{2}+y^2-1)$

xy 的系数为 0， $-k_1-k_2+u=0$

y 的系数为 0， $\sqrt{2}k_1-\sqrt{2}k_2-ut=0$

$l_{AM}: x=k_1y-\sqrt{2}$，l_{QN}： $x=k_2y+\sqrt{2}$

相加可以得到，$2x=k_1y+k_2y$ ，相减可以得到 $k_1y-k_2y-2\sqrt{2}=0$

联立可得 $x=\dfrac{2}{t}$，即点 Q 在定直线 $x=\dfrac{2}{t}$ 上.

9.【解析】(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2) 直线 $AM: y=k_1x+\sqrt{3}$　，直线 $BN: y=k_2x-\sqrt{3}$，直线 $AB: y=k\ x+1$，直线 MN： $x=0$

以 A,B， M,N 四点的曲线系方程为：$(k_1x+\sqrt{3}-y)(k_2x-\sqrt{3}-y)+\mu x(kx-y+1)=\lambda(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}-1)$

xy 的系数为 0 ：$-k_1-k_2-\mu=0\Rightarrow\mu=-k_1-k_2$

x 的系数为 0 ：$-\sqrt{3}k_1+\sqrt{3}k_2+\mu=0\Rightarrow\mu=\sqrt{3}k_1-\sqrt{3}k_2$

$$\begin{cases}y=k_1x+\sqrt{3}\\ y=k_2x-\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x==\dfrac{2\sqrt{3}}{k_2-k_1}\\ y=\dfrac{k_2+k_1}{2}x=\dfrac{\sqrt{3}(k_2+k_1)}{k_2-k_1}=3\end{cases}$$

10.【解析】(1) 设点 $P(x,y)$，则：$F(2,0)$、$B(3,0)$、$A(-3,0)$．由 $PF^2-PB^2=4$，得 $(x-2)^2+y^2-[(x-3)^2+y^2]=4$，化简得 $x=\dfrac{9}{2}$．故所求点 P 的轨迹为直线 $x=\dfrac{9}{2}$．

(2) 将 $x_1=2,x_2=\dfrac{1}{3}$ 分别代入椭圆方程，以及 $y_1>0$， $y_2<0$，得 $M(2,\dfrac{5}{3})$、$N(\dfrac{1}{3}，-\dfrac{20}{9})$

直线 MTA 方程为：$\dfrac{y-0}{\frac{5}{3}-0}=\dfrac{x+3}{2+3}$，即 $y=\dfrac{1}{3}x+1$，直线 NTB 方程为：$\dfrac{y-0}{-\frac{20}{9}-0}=\dfrac{x-3}{\frac{1}{3}-3}$，

即 $y=\dfrac{5}{6}x-\dfrac{5}{2}$．联立方程组，解得：$\begin{cases}x=7\\ y=\dfrac{10}{3}\end{cases}$，所以点 T 的坐标为 $(7,\dfrac{10}{3})$．

(3) 设 l_{AM}:$y=k_1(x+3)$　　l_{BN}: $y=k_2(x-3)$　　　l_{MN} : $x=ky+m$

以 A,M,B,N 四点的曲线系方程为

$(y-k_1x-3k_1)(y-k_2x+3k_2)+u(x-ky-m)=\lambda(x^2+\dfrac{y^2}{2}-1)$

xy 的系数：　$-3k_1+3k_2-um=0$

y 的系数：$-k_1-k_2+u=0$

由过点 T 可知，　$m=12k_1$　　$m=6k_2$

联立解得 $m=1$ ，则直线 MN 必过 x 轴上的一定点 (1,0)

11.【解析】 设 P 的坐标为 $(x_p，0)$ Q 的坐标为 $(x_Q，y_Q)$，l_{AC}: $x=k_1y-1$　　l_{BD}: $x=k_2y+1$　　l_{CD}: $\dfrac{x}{x_P}+y=1$

以 A,C,B,D 四点的曲线系方程为$(x-k_1y+1)(x-k_2y-1)+uy(\frac{x}{x_P}+y-1)=\lambda\ (x^2+\frac{y^2}{2}-1)$

xy 的系数：$-k_1-k_2+\frac{u}{x_P}=0$，y 的系数：$k_1-k_2-u=0$

联立 l_{AC}: $x=k_1y-1$　　l_{BD}: $x=k_2y+1$

解得（k_1-k_2）$x_Q=k_1+k_2$　　$x_Q=\frac{1}{x_p}$　　则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_p\,x_Q=1$

12.【解析】(1) 由已知得 $b=1,\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a=2$，所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$．椭圆的右焦点为 $(\sqrt{3},0)$，此时直线 l 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$，代入椭圆方程得，$7x^2-8\sqrt{3}x=0$，解得 $x_1=0,\ x_2=\frac{8\sqrt{3}}{7}$．代入直线 l 的方程得经一部得到 $y_1=1,\ y_2=-\frac{1}{7}$，所以 $D(\frac{8\sqrt{3}}{7},-\frac{1}{7})$．故 $|CD|=\sqrt{(\frac{8\sqrt{3}}{7}-0)^2+(-\frac{1}{7}-1)^2}=\frac{16}{7}$．

(2) 设 P 的坐标为（x_p，0）Q 的坐标为（x_Q，y_Q）

l_{AC}: $x=k_1y+2$　　l_{BD}: $x=k_2y-2$　　l_{CD}: $\frac{x}{x_P}+y=1$

以 A,C,B,D 四点的曲线系方程为$(x-k_1y-2)(x-k_2y+2)+uy(\frac{x}{x_P}+y-1)=\lambda\ (\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-1)$

xy 的系数：$-k_1-k_2+\frac{u}{x_P}=0$

y 的系数：$-2k_1+2k_2-u=0$

联立 l_{AC}: $x=k_1y+2$　　l_{BD}: $x=k_2y-2$

解得（k_1-k_2）$x_Q=-2$（k_1+k_2）　　$x_Q=\frac{4}{x_p}$，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_p\,x_Q=4$

极点与极线参考答案

1.【解析】由定理 1（2），可知点 $P(-3,4)$ 所对应的极线方程 $-3x+4y=4$，即为直线 AB 的方程，故选 B．

2.【解析】设过点 A 椭圆的另一条与椭圆在 x 轴上方相切于点 C，因为点 $A(4,3)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的准线 $x=4$ 上，故点 $A(4,3)$ 对应的极线 $BC:\frac{4x}{4}+\frac{3y}{3}=1$，即直线 $x+y=1$ 经过右焦点 F，所以直线 BF 的斜率为 -1

3.【解析】由已知得 $-\frac{p}{2}=-2$，则 $p=4$，$F(2,0)$，则抛物线方程为 $y^2=8x$，设过点 A 作直线与抛物线 C 在

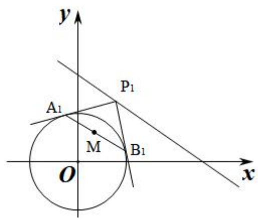
第四象限相切与另一点D，则经过这两个切点的连线BD，就是点A对应的极线，其方程是$3y=(x-2)$，由于点A在抛物线的追线上，则焦点F在点A的极线上，则$k_{BF}=k_{BD}=\dfrac{4}{3}$，故选 D.

4.【解析】两切点所在直线即为点$P(1,3)$的极线，其方程为$1\times x+3\times y=9$，即$x+3y=9$.

5.【解析】对于抛物线$C:y^2=4x$，因为点(x_0,y_0)对应的极线恰好是直线$l:y_0y=2(x+x_0)$，根据定理 1 知，当极点(x_0,y_0) 在在抛物线的内部时，极线与抛物线相离，故选 D.

6.【解析】设点P的坐标是$(4-2y_0,y_0)$，则切点弦AB的方程为$(4-2y_0)x+4y_0y=4$，化简得$(4y-2x)y_0=4-4x$, 令$4y-2x=4-4x=0$，可得$x=1,y=\dfrac{1}{2}$，故直线AB过定点$\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.

7.【解析】如图过圆内一点$M(x_0,y_0)$作圆的弦A_1B_1，过A_1，B_1作圆的切线交于$P_1(x_1,y_1)$；再过点$M(x_0,y_0)$做圆的弦A_2B_2，过A_2，B_2作圆的切线交于$P_2(x_2,y_2)$，按照相同的方法可得P_3，$P_4,\cdots$.



易知切点A_1B_1所在的直线的方程为$\dfrac{x_1x}{8}+\dfrac{y_1y}{8}=1$，又$A_1B_1$过点$M(x_0,y_0)$，所以$\dfrac{x_1x_0}{8}+\dfrac{y_1y_0}{8}=1$. 同理，有$\dfrac{x_2x_0}{8}+\dfrac{y_2y_0}{8}=1$. 所以$P_1,P_2$都在直线$\dfrac{x_2x_0}{8}+\dfrac{y_2y_0}{8}=1$上. 同理$P_3$，$P_4,\cdots$都在$\dfrac{x_2x_0}{8}+\dfrac{y_2y_0}{8}=1$上. 反之，点$P$在直线$l:\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{4}=1$上，对照$\dfrac{x_2x_0}{8}+\dfrac{y_2y_0}{8}=1$，可得弦$AB$必过$(1,2)$，易得圆$O$：$x^2+y^2=8$上，过$(1,2)$的最短的弦长为$2\sqrt{3}$.

8.【解析】设P在(x_0,y_0)，因为点P在直线$l:y=kx-1$上，所以$y_0=kx_0-1$，点P对应的极线就是直线AB，其方程为$y_0+y=x_0x$，由此，得到$kx_0-1+y=x_0x$，即$x_0(x-k)-(y-1)=0$对任意的$x_0\in R$恒成立，故有$\begin{cases}x-k=0\\y-1=0\end{cases}$，由此解得直线$MN$恒过顶点$Q(k,1)$.

9.【解析】点N的轨迹为点$M(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$对应的极线$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$.

10.【解析】(1) 设所求圆的半径为r，则圆的方程可设为$(x-2)^2+y^2=r^2$. 由题意，所求圆与直线$l:y=x+m$相切于点$P(0,m)$，则有$\begin{cases}4+m^2=r^2\\\dfrac{|2-0+m|}{\sqrt{2}}=r\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=2\\r=2\sqrt{2}\end{cases}$，所以圆的方程为$(x-2)^2+y^2=8$.

（2）由于直线l的方程为$y=x+m$，所以直线l'的方程为$y=-x-m$，由$\begin{cases}y=-x-m\\x^2=4y\end{cases}$消去$y$得到$x^2+4x+4m=0$，$\triangle=4^2-4\times4m=16(1-m)$.

①当$m=1$时，即$\triangle=0$时，直线l'与抛物线$C:x^2=4y$相切；

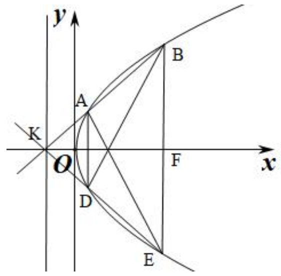
②当$m\neq1$时，即$\triangle\neq0$时，直线l'与抛物线$C:x^2=4y$不相切.

综上，当$m=1$时，直线l'与抛物线$C:x^2=4y$相切；当$m\neq1$时，直线l'与抛物线$C:x^2=4y$不相切.

11.【解析】证法 1 设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$D(x_1,-y_1)$，直线l的方程为$x=my-1$（$m\neq0$）. 将$x=my-1$代入$y^2=4x$整理得$y^2-4my+4=0$，从而$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=4$. 直线BD的方程为$y-y_2=\dfrac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$，

即 $y-y_2=\dfrac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-\dfrac{y_2^2}{4})$，令 $y=0$，得 $x=\dfrac{y_1y_2}{4}=1$，即知点 $F(1,0)$ 在直线 BD 上.

证法 2　如图，注意到在抛物线 $C:y^2=4x$ 中，焦点 $F(1,0)$ 的极线即为准线 $x=-1$，因此点 $K(-1,0)$ 在点 F 的极线上，由定理 2，点 F 也在点 K 的极线上.



作点 B 关于 x 轴的对称点 E．一方面，由于对称性，AE,BD 的交点一定在对称轴 x 轴上；另一方面，由定理 2，点 F 也在点 K 的极线上.

因此，该点即为点 K 的极线与 x 轴的交点，也就是点 F，因此，点 F 在直线 BD

12.【解析】(1) 设点 $P(x,y)$，则：$F(2,0)$、$B(3,0)$、$A(-3,0)$．由 $PF^2-PB^2=4$，

得 $(x-2)^2+y^2-[(x-3)^2+y^2]=4$，化简得 $x=\dfrac{9}{2}$．故所求点 P 的轨迹为直线 $x=\dfrac{9}{2}$.

(2) 将 $x_1=2,x_2=\dfrac{1}{3}$ 分别代入椭圆方程，以及 $y_1>0$，$y_2<0$，得 $M(2,\dfrac{5}{3})$、$N(\dfrac{1}{3}，-\dfrac{20}{9})$

直线 MTA 方程为：$\dfrac{y-0}{\frac{5}{3}-0}=\dfrac{x+3}{2+3}$，即 $y=\dfrac{1}{3}x+1$，直线 NTB 方程为：$\dfrac{y-0}{-\frac{20}{9}-0}=\dfrac{x-3}{\frac{1}{3}-3}$，

即 $y=\dfrac{5}{6}x-\dfrac{5}{2}$．联立方程组，解得：$\begin{cases}x=7\\ y=\dfrac{10}{3}\end{cases}$，所以点 T 的坐标为 $(7,\dfrac{10}{3})$.

(3) 点 T 的坐标为 $(9,m)$．当 $t=9$ 时，点 T 的坐标为 $(9，m)$，连接 MN 交 AB 于点，有极点极线的定义可知，点 T 对应的极线经过点 K，而点 T 的对应的极线方程为 $\dfrac{9\cdot x}{9}+\dfrac{m\cdot y}{5}=1$，该直线即为 MN 与直线 AB（x 轴）交点的轨迹，今 $y=0$，得到 $x=1$，从而直线 MN 比经过 x 轴上的定点 K $(1,0)$．接下来验证 $k_{MD}=k_{ND}$ 即可（略）.

13.【解析】(1) 动点 C 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(x\neq\pm2)$.

(2) 设 $P(x_0,y_0)$，则曲线 C 点 P 处的切线 $PQ:\dfrac{x_0x}{4}+\dfrac{y_0y}{3}=1$，令 $x=4$，得 $Q(4,\dfrac{3-3x_0}{y_0})$，设 $R(t,0)$．则由 $\overrightarrow{RP}\bullet\overrightarrow{RQ}=0$ 得 $(x_0-t)(4-t)+3--3x_0=0$，即 $(1\text{-}t)x_0+t^2-4t+3=0$，由 x_0 的任意性 $1-t=0$ 且 $t^2-4t+3=0$，解得 $t=1$．综上知，以 PQ 为直径的圆过 x 轴上一定点 $(1,0)$.

14.【解析】设点 M 的坐标为 $(m,0)$，注意到点 N 在点 M 对应的极线上，该极线的方程为 $\dfrac{m\bullet x}{a^2}+\dfrac{0\bullet y}{b^2}=1$，即 $x=\dfrac{a^2}{m}$，据此可设点 N 的坐标为 $(\dfrac{a^2}{m},y_N)$，于是 $\overrightarrow{OM}\bullet\overrightarrow{ON}=(m,0)\bullet(\dfrac{a^2}{m},y_N)=a^2$.

15.

【解析】(1) ∵椭圆的焦点在 y 轴上，设椭圆的标准方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由已知得 $b=1$，$c=1$，

所以 $a=\sqrt{2}$，椭圆的方程为 $\dfrac{y^2}{2}+x^2=1$，

当直线 l 与 x 轴垂直时与题意不符，设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，$C(x_1，y_1)$，$D(x_2，y_2)$，

将直线 l 的方程代入椭圆的方程化简得 $(k^2+2)x^2+2kx-1=0$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{2k}{k^2+2}$，$x_1\bullet x_2=-\dfrac{1}{k^2+2}$，

$\therefore |CD|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(-\dfrac{2k}{k^2+2})^2+4\dfrac{1}{k^2+2}}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}(k^2+1)}{k^2+2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$，解得 $k=\pm\sqrt{2}$．$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y=\pm\sqrt{2}x+1$；

（2）对椭圆 $\dfrac{y^2}{2}+x^2=1$，若以点 P 为极点，则其对应的极线过点 Q，设 $P(m,o)$，及其极线方程为 $\dfrac{0\times y}{2}+mx=1$，

即 $x=\dfrac{1}{m}$，故可设点 Q 的坐标为 $(\dfrac{1}{m},y_Q)$，所以 $\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ}=(m,0)\bullet(\dfrac{1}{m},y_Q)=1$，即 $\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ}$ 为定值 1．

16.【解析】（1）由抛物线方程得其准线方程为 $y=-\dfrac{p}{2}$，根据抛物线定义，点 $A(m,4)$ 到焦点的距离等于它到准线的距离，即 $4+\dfrac{p}{2}=\dfrac{17}{4}$，解得 $p=\dfrac{1}{2}$，所以，抛物线方程为 $x^2=y$，将 $A(m,4)$ 代入抛物线方程，解得 $m=\pm2$．

（2）设点 P 的坐标为 (t,t^2)，由题设，直线 PQ 的斜率存在且不为 0，设其为 k，由于直线 PQ 的方程为 $y-t^2=k(x-t)$，令 $y=0$，得 $x=t-\dfrac{t^2}{k}$，则 $M(t-\dfrac{t^2}{k},0)$．因为 MN 和 MO 是 C 的切线，故直线 ON 是点 M 对应的极线，其方程为 $(t-\dfrac{t^2}{k})x=\dfrac{0+y}{2}$，即 $y=2(t-\dfrac{t^2}{k})x$①

另一方面，联立方程 $\begin{cases}y-t^2=k(x-t)\\x^2=y\end{cases}$，整理得 $x^2-kx+t(k-t)=0$，即 $(x-t)[x-(k-t)]=0$，解得 $x=t$，或 $x=k-t$，所以 $Q(k-t,(k-t)^2)$，又 $QN\perp QP$，故直线 NQ 方程为 $y-(k-t)^2=-\dfrac{1}{k}[x-(k-t)]$．

17.【解析】设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，及直线 l 的方程为 $y=kx-p^2$（易知 l 的斜率必存在），

由 $\begin{cases}x^2=2py,\\y=kx-p^2\end{cases}$ 得 $x^2-2kpx+2p^3=0$，所以 $x_1+x_2=2kp$，$x_1x_2=2p^3$，①因为 $k_1k_2=1$，所以 $\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=1$，

即 $x_1x_2=y_1y_2$，又 $y_1y_2=(kx_1-p^2)(kx_2-p^2)$，即 $(k^2-1)x_1x_2-kp^2(x_1+x_2)+p^4=0$，　②

将①带入②，整理得 $p^4-2p^3=0$，又 $p>0$，解得 $p=2$．

注：亦可由 $x_1x_2=y_1y_2=\dfrac{x_1^2}{2p}\cdot\dfrac{x_2^2}{2p}$，得 $x_1x_2=4p^2$，所以 $4p^2=2p^3$，所以 $p=2$．

由于切点弦 T_1T_2 所在的直线为点 $M(0,-p^2)$ 所对应的极线，故其方程为 $0\times x=2p\cdot\dfrac{y-p^2}{2}$，即 $y=p^2$．

设 $N(x_3,x_3)$，因为点 N 为直线 T_1T_2 与弦 AB 的交点，所以 $\begin{cases}y_3=p^2,\\y_3=kx_3-p^2\end{cases}$，所以 $x_3=\dfrac{2p^2}{k}$　③

因为 $\overrightarrow{MA}=\lambda\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{MB}=\mu\overrightarrow{MN}$，显然 $\lambda>0$，$\mu>0$，所以 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{MA}|}+\dfrac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{MB}|}=\dfrac{|x_3|}{|x_1|}+\dfrac{|x_3|}{|x_2|}$，

又 x_1，x_2，x_3 显然同号，所以 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{x_3}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}=x_3\cdot\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$，

由①、③可知，$x_3\cdot\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{2p^2}{k}\cdot\dfrac{2kp}{2p^3}=2$，所以 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=2$，即 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}$ 为定值 2．

18.（1）由题意得$\begin{cases}c^2=2\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\\ c^2=a^2-b^2\end{cases}$，解得$a^2=4,b^2=2$，所求椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

（2）解法1：（定比点差法，参考秒1）设点Q,A,B的坐标分别为$(x,y),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$.

由题设知$|\overrightarrow{AP}|,|\overrightarrow{PB}|,|\overrightarrow{AQ}|,|\overrightarrow{QB}|$均不为零，记$\lambda=\dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$,则$\lambda>0$，且$\lambda\neq1$.

又A,P,B,Q四点共线，从而$\overrightarrow{AP}=-\lambda\overrightarrow{PB},\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{QB}$．于是$4=\dfrac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda},1=\dfrac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda},x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

从而$\dfrac{x_1^2-\lambda^2x_2^2}{1-\lambda^2}=4x$　　①

$\dfrac{y_1^2-\lambda^2y_2^2}{1-\lambda^2}=y$　　②

又点A,B在椭圆C上，

即　$x_1^2+2y_1^2=4$　　③　　　　$x_2^2+2y_2^2=4$　　④

由①+②×2并结合③，④式，得$4x+2y=4$．即点$Q(x,y)$总在定直线$2x+y-2=0$.

法二：已知$\dfrac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}|}=\dfrac{|\overrightarrow{QB}|}{|\overrightarrow{QA}|}$，说明点$P,Q$关于椭圆调和共轭，根据定理3，点$Q$在点$P$对应的极线上，此极线方程为$\dfrac{4\cdot x}{4}+\dfrac{1\cdot y}{2}=1$，化简得$2x+y-2=0$．故点$Q$总在直线$2x+y-2=0$.

19.【解析】(1)设$N(x_0,y_0)$，由于$A(-\sqrt{2},0),B(\sqrt{2},0)$，所以$k_2\cdot k_3=\dfrac{y_0}{x_0-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y_0}{x_0+\sqrt{2}}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-2}$，因为$N(x_0,y_0)$在椭圆$C$上，于是$\dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$，即$x_0^2-2=-2y_0^2$，所以$k_2\cdot k_3=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-2}=-\dfrac{1}{2}$.

（2）设直线$MN:x=my+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，由$\begin{cases}x=my+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ x^2+2y^2=2\end{cases}$得$(m^2+2)y^2+\sqrt{2}my-\dfrac{3}{2}=0$，于是

$y_1+y_2=-\dfrac{\sqrt{2}m}{m^2+2},y_1\cdot y_2=-\dfrac{3}{2(m^2+2)}$，

$$k_1\cdot k_3=\frac{y_1}{x_1+\sqrt{2}}\cdot\frac{y_2}{x_2+\sqrt{2}}=\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+\frac{3\sqrt{2}}{2}m(y_1+y_2)+\frac{9}{2}}$$

$$=\frac{-\frac{3}{2(m^2+2)}}{-m^2\cdot\frac{3}{2(m^2+2)}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot m\cdot\frac{\sqrt{2}m}{m^2+2}+\frac{9}{2}}=\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}m^2-3m^2+\frac{9}{2}(m^2+2)}=-\frac{1}{6}.$$

（3）由于直线MN与x轴的交点为$(t,0)$，于是$MN:x=my+t$，联立直线$MN:x=my+t$与椭圆$C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的方程，可得$(m^2+2)y^2+2mty+t^2-2=0$，于是$y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{m^2+2},y_1\cdot y_2=\dfrac{t^2-2}{m^2+2}$.

因为直线$AM:y=\dfrac{y_1}{x_1+\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})$，直线$BN:y=\dfrac{y_2}{x_2-\sqrt{2}}(x-\sqrt{2})$，

两式相除可知，$\dfrac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}=\dfrac{x_1+\sqrt{2}}{x_2-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{my_1+t+\sqrt{2}}{my_2+t-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{my_1y_2+(t+\sqrt{2})y_2}{my_1y_2+(t-\sqrt{2})y_1}$

$$=\frac{m\cdot\dfrac{t^2-2}{m^2+2}+(t+\sqrt{2})(-\dfrac{2mt}{m^2+2}-y_1)}{m\cdot\dfrac{t^2-2}{m^2+2}+(t-\sqrt{2})y_1}=\frac{-m(t+\sqrt{2})^2-(t+\sqrt{2})(m^2+2)y_1}{m(t^2-2)+(t-\sqrt{2})(m^2+2)y_1}$$

$$=\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\cdot\frac{-m(t+\sqrt{2})-(m^2+2)y_1}{m(t+\sqrt{2})+(m^2+2)y_1}=\frac{t+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-t},$$

于是 $xt=2$，所以 $x=\dfrac{2}{t}$，即直线 AM 与直线 BN 的交点 Q 落在定直线 $x=\dfrac{2}{t}$ 上.

注　根据极点、极线定义，AM 与直线 BN 的交点 Q 落在点 $(t,0)$ 对应的极线上，此极线的方程 $\dfrac{tx}{2}+0\cdot y=1$，

　即点 Q 在定直线 $x=\dfrac{2}{t}$ 上.

20.【解析】设 $M(x_0,y_0)$，则 $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$，对于圆 $x^2+y^2=b^2$，点 M 所对应的极线为直线 PQ,其方程是 $x_0x+y_0y=b^2$，其中 $x_0y_0\neq 0$，得到 $E(\dfrac{b^2}{x_0},0),F(0,\dfrac{b^2}{y_0})$，则 $S_{EOF}=\dfrac{1}{2}|OE|\cdot|OF|=\dfrac{b^4}{2|x_0y_0|}$. 又由基本不等式得 $a^2b^2=b^2x_0^2+a^2y_0^2\geq 2ab|x_0y_0|$，当且仅当 $b^2x_0^2=a^2y_0^2=\dfrac{a^2b^2}{2}$ 时取等号，则 $S_{EOF}=\dfrac{b^4}{2|x_0y_0|}\geq\dfrac{b^4}{2}\cdot\dfrac{2ab}{a^2b^2}=\dfrac{b^3}{a}$. 即 EOF 面积最小值为 $\dfrac{b^3}{a}$.

抛物线切线方程及性质答案

1. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$　2. A　3. B　4. D　5. $y=x-1$　6. 3　7. 3　8. 3　9. D　10. A　11. B　12. D

阿基米德三角形与焦点弦

1. A　2. D　3. B　4. ①③　5. D　6. 4　7. $-4k^2-4k^4$

8. 【提示】由定理可知 $yy_P=6(x+x_P)$，代入 P 点坐标可知 $k_{AB}=3$.

9.【提示】(1) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB 中点 N，$\therefore x_M=x_N=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$\therefore A$，$M$，$B$ 横坐标成等差

(2) 设 $AB:y=kx+1$ 由定理可知 $M(pk,-m)$，即 $M(2k,-1)$. $\therefore k_{MF}=\dfrac{2}{-2k}=-\dfrac{1}{k}$

$\therefore|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4(k^2+1)$，同理 $|CD|=4\left(\dfrac{1}{k^2}+1\right)$

$\therefore S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}|AB||CD|=8\left(\dfrac{1}{k^2}+1\right)(k^2+1)\geq 32$

10.【提示】(1) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $k_{PA}=\dfrac{x_1}{p}=\dfrac{x_1}{2}$，$k_{PB}=\dfrac{x_2}{2}$，$\therefore k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{x_1x_2}{4}=-1$

$\therefore x_1x_2=-4=-2pm$，$\therefore m=1$，由定理 $P(pk,-m)$，$\therefore y_P=-1$，$\therefore P$ 轨迹方程 $y=-1$

(2) $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=-2-\dfrac{x_1^2+x_2^2}{4}$，$(\overrightarrow{FP})^2=\dfrac{(x_1+x_2)^2}{4}+4=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{4}+2$，$\therefore\lambda=1$.

11.【提示】(1) $x^2=4y$ (2) AB 过定点 $F(0,1)$，即 $AB:y=kx+1$，由定理 $M(pk,-m)$ 可知 $M(pk,-1)$.

所以 M 轨迹 $y=-1$.

12.【提示】(1) 过 P 的切线 $y-1=k(x-4)$， $\therefore\begin{cases}y-1=k(x-4)\\ y=x^2\end{cases}\Rightarrow x^2-kx+4k-1=0$，$\because\Delta=0$

$\therefore k^2-16k+4=0$，$\therefore k_1+k_2=16$.

(2) 焦点 $(0,\frac{1}{4})$， 设 $MN:y=kx+m$， $m=\frac{1}{4}$，由定理： $P(pk,-m)$，$\therefore P(k,-\frac{1}{4})$

又 $\because$ P 在 l 上 $\therefore k=\frac{3}{2}$ $\therefore P(\frac{3}{2},-\frac{1}{4})$

13.【提示】(1) 由定理可知 $\begin{cases}y=x+2\\ y=ax^2\end{cases}\Rightarrow ax^2-x-2=0$

(2) 设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，由 M 是 AB 中点， $\therefore|MN|=\frac{1}{2}|AB|$，由 $MN\perp x$ 轴

$\therefore|MN|=\left|\frac{1}{2a}+2-\frac{1}{4a}\right|=\frac{1}{4a}+2$， $|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{8}{a}}$

由 $|MN|=\frac{1}{2}|AB|$，得 $a=\frac{7}{8}$，所以 $a=\frac{7}{8}$ 时，$NA\perp NB$ 成立.

专题 7　抛物线切线与阿基米得三角形

阿基米德三角形的极点极线性质：

1. $\sqrt{2}$　　2. $\frac{5}{3}$

3.【提示】由定理可知，C 在 N 处的导数与 AB 的斜率相等，即抛物线 C 在点 N 处的切线与 AB 平行

4.【提示】设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 由题意可知 AB 中点的横坐标为 $\frac{x_1+x_2}{2}$，由定理可知，M 点横坐标与 AB 中点的横坐标相等，所以 A，M，B 三点的横坐标成等差数列.

5.【提示】(1) $PQ:2x+y-6=0$

(2) 将坐标系上移 3 个单位，得过动点 $A'(a,-3)$ 向 $y=x^2$ 引切线 $A'P'$， $A'Q'$，切点为 P'， Q'

由定理 1，易知 $P'Q':ax=\frac{1}{2}(y-3)$，$\therefore$ 直线 PQ 定点 $(0,6)$.

6.【提示】(1) $y=\frac{1}{4}x^2(x\neq0)$，由定理可知 $x_M=x_P$， $\therefore PM//y$ 轴或与 y 轴重合.

(2) 设 $AB:y=kx+m$， 由定理 $P(pk,-m)$， 即 $P(2k,-m)$， $\therefore -m=2\times2k-5\Rightarrow l_{AB}:y=kx-4k+5$

$\therefore AB$ 过定点 $(4,5)$

7.【提示】(1). 略

(2) 由 M 为 AB 的中点，则由定理 1 可知抛物线 C 在点 N 处的切线与直线 AB 平行

（3）联立 $\begin{cases} y=2x^2 \\ y=kx+2 \end{cases} \Rightarrow 2x^2-kx-2=0$ $x_1+x_2=\frac{k}{2}, x_1x_2=-1$，$\therefore N\left(\frac{k}{4},\frac{k^2}{8}\right)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$，代入韦达定理可得 $k=\pm 2$

8.【提示】(1) $y^2=2x$

(2)设 $N(x_0,y_0)$，由定理可知 $l_{AB}:y_0y=x+x_0$ 又 $\because y_0=x_0+1$ AB 过定点 $(1,1)$，则当原点 O 到直线 AB 的距离最大时，$l_{AB}:y=-x+2$ 此时易得，$S_{\triangle OAB}=2\sqrt{5}$.

9.【提示】（1） $k=\frac{y_0}{p}=1, y_0=2$，∴（1，2）

(2) 假设 AB 的方程为 $y=kx+m$ 由定理得：$M(pk,-m)$,又因为 M 在直线 l 上，所以 $-m=2k+4$

$\therefore m=-2k-4$, $\therefore y=kx-2k-4$,所以直线 l 过 $(2,-4)$.

10.【提示】(1) $x^2=2y$

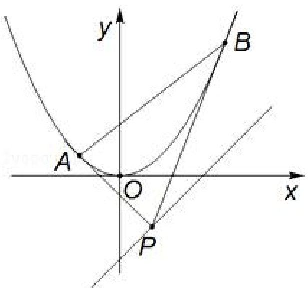
（2）设 $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$，$l_{MN}:y=kx+m$，联立 $\begin{cases} x^2=2y \\ y=kx+1 \end{cases} \Rightarrow x^2-2kx-2=0$

由题意可知 $x_1x_2+y_1y_2=-1$，即 $x_1x_2+\frac{1}{4}(x_1x_2)^2=-1$，$\therefore x_1x_2=-2=-2pm$ $\therefore m=1$，所以 MN 过定点 $(0,1)$

由定理可知，得 $S_{\triangle PMN}=\frac{|x_1-x_2|^3}{8p}=\frac{\left(\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\right)^3}{8}=\frac{\left(\sqrt{4k^2+8}\right)^3}{8}\le 2\sqrt{2}$.

11.【提示】（1）假设直线 AB 方程为 $y=kx+m$ 由定理可知：$P(\frac{1}{2}k,-m)$

又因为 P 在直线 l 上∴ $-m=\frac{1}{2}k-1$ ∴ $y=kx-\frac{1}{2}k+1$ ∴（$\frac{1}{2}$,1）



（2）联立 $\begin{cases} y=kx-\frac{1}{2}k+1 \\ x^2=y \end{cases}$ ∴ $x^2-kx+\frac{1}{2}k-1=0$

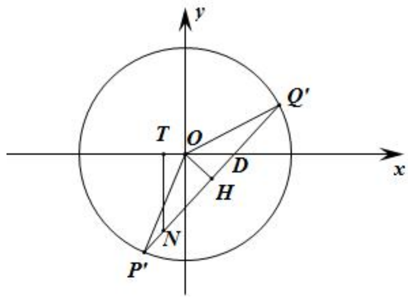
$S_{\triangle PAB}=\frac{|x_1-x_2|^3}{8p}=\frac{1}{4}|x_1-x_2|^3=\frac{\left(\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\right)^3}{4}=\frac{\left(\sqrt{k^2-2k+4}\right)^3}{4}$

12.【提示】（1） $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，∴ $x^2=-2y$

（2）(i)由定理设 AB：$y=kx+b$，$m(pk,-m)$，即 $m(-k,-m)$，由 M 在直线上,，∴ $-2k+4m+3=0$．$\therefore m=\frac{1}{2}k-\frac{3}{4}$，

$\therefore AB$：$y=kx+\frac{1}{2}k-\frac{3}{4}$，过定点（$-\frac{1}{2}$,$-\frac{3}{4}$）.

(ii)作仿射变换$\begin{cases} x'=x \\ y'=2y \end{cases}$, $A\to A', B\to B'$



则 $A'B'$ 过定点 $N(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$,过 N 作 $NT\perp x$ 轴于 T, $OH\perp P'Q'$ 于 H

设 l' 与 x 轴交于 D, 令 $\angle TND$ 为 θ, 则 $OH=\dfrac{3\sin\theta-\cos\theta}{2}$

$$P'Q'=2\sqrt{4-(OH)^2}\le\sqrt{|OH|^2\left(4-|OH|^2\right)}\le 2$$

$|OH|^2=2$ 时取等号, 此时 $\tan\theta=7$ 或-1

$\therefore k=\frac{1}{2}k'=\frac{1}{2}\cot\theta=\frac{1}{14}$ 或 $\frac{1}{2}$

$l_{AB}: x+2y+2=0$ 或 $x-14y-10=0$

13.【提示】(1) $l_{AB}: y-1=k(x-1)$, 令 $x=0$, $y=1-k$, 焦点 $F(0,\frac{1}{4})$, $-k>\frac{1}{4}\longrightarrow 0<k<\frac{3}{4}$

(2) 由定理, $l_{BD}: xx_B=\frac{1}{2}(y+y_B)$, $l_{CD}: xx_C=\frac{1}{2}(y+y_C)$, $\therefore k_{BD}=2x_B$ $k_{CD}=2x_L$

由$\begin{cases} y-1=k(x-1) \\ y=x^2 \end{cases}$, $\Rightarrow x^2-kx+k-1=0$, 由韦达定理得: $1\cdot x_B=k-1$, 同理 $x_C=-\frac{1}{k}-1$

若四边形 $ABDC$ 为梯形, 则 $k_{BD}=k_{AC}$ 或 $k_{\mathrm{AB}}=k_{\mathrm{CD}}$, 此时方程无解$\therefore ABDC$ 不能为梯形.

14.【提示】设 AB: $y=kx+m$,由定理可知 $m(\frac{1}{2}k,-m)$,$\because$ 圆与直线相切, $\therefore d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$

$m^2=1+k^2=1+4(1+\frac{1}{2}k)^2\ge 1$, $\therefore m^2-4(\frac{1}{2}k)^2=1$, 即: M 轨迹 $y^2-4x=1$,又因为 $m^2\ge 1$,

$\begin{cases} y=kx+m \\ y=x^2 \end{cases}\Rightarrow x^2-kx-m=0,\Delta>0$, 所以 $m<-2-\sqrt{5}$ 或 $m\ge 1$, 即 $y\le -1$ 或 $y>2+\sqrt{5}$

M 轨迹 $y^2-4x=1$ ($y\le -1$ 或 $y>2+\sqrt{5}$, $x\in R$).

阿基米德三角形面积问题:

1. B 2. D 3. B 4. C

5.【提示】(1) $p=\frac{1}{2}$, $F(0,\frac{1}{4})$

(2) 由定理得,直线 PA 的斜率为 $k_1=2x_1$,直线 PB 的斜率为 $k_2=2x_2$, $\therefore k_1\cdot k_2=4x_1\cdot x_2=-1$,即得 $PA\perp PB$.

6.【提示】(1) 设 $E(t,0)$ $t\ne 0$, $C(0,m)$, $\because \overrightarrow{EA}=\lambda_1\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{EB}=\lambda_2\overrightarrow{EC}$, $\therefore \begin{cases} (x_1-t,y_1)=\lambda_1(-t,m) \\ (x_2-t,y_2)=\lambda_2(-t,m) \end{cases}$,

解得$\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{t-x_1}{t}\\ \lambda_2=\dfrac{t-x_2}{t}\end{cases}$，设直线$l$的斜率为$k$，方程为$y=k(x-t)$，由$\begin{cases}y=k(x-t)\\x^2=4y\end{cases}$得$x^2-4kx+4kt=0$，

当$\Delta=16k^2-16kt>0$时，设$A(x_1，\ y_1)$，$B(x_2，\ y_2)$，则$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=4kt$，

$\therefore \lambda_1\lambda_2=\dfrac{t^2-(x_1+x_2)t+x_1x_2}{t^2}=\dfrac{t^2-4kt+4kt}{t^2}=1$．

（2）$x^2=4y$　　$l_{AB}:y=k(x-4)$，由定理$M(pk,-m)$ $\therefore M(2k,4k)$，所以M在$y=2x$上．

7.【提示】（1）$x^2=4y$　，设直线AB方程为：$y=kx+m$所以$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$

$x_1x_2+\dfrac{1}{16}x_1^2x_2^2=0$，$\therefore x_1x_2=-16=-2pm$，$\therefore m=4$，直线$AB$过定点（4，0）．

（2）联立由$x_1+x_2=2pk$　$x_1x_2=-16$，由定理可知：$S=\dfrac{|x_1-x_2|^2}{8p}=\dfrac{\left(\sqrt{(4k^2+64)}\right)^3}{16}\geq 32$．

7.【提示】（1）$x^2=4y$　；设直线AB方程为：$y=kx+m$，所以$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$

$x_1x_2+\dfrac{1}{16}x_1^2x_2^2=0$，$\therefore x_1x_2=-16=-2pm$，$\therefore m=4$，直线$AB$过定点（4，0）

（2）联立由$x_1+x_2=2pk$　$x_1x_2=-16$，由定理可知：$S=\dfrac{|x_1-x_2|^2}{8p}=\dfrac{\left(\sqrt{(4k^2+64)}\right)^3}{16}\geq 32$

8.【提示】（1）$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$

（2）$y^2=\dfrac{1}{2}x$，$\therefore\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\ y^2=\dfrac{1}{2}x\end{cases}\Rightarrow Q\left(1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，由定理可知切线方程为：$yy_0=\dfrac{1}{4}(x+x_0)$

即$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x+1)$，$\therefore x=0,y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$y=0,x=-1$，$\therefore S=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

9.（1）因为抛物线的焦点到准线的距离为2，所以$p=2$，所以所求抛物线C的方程为$x^2=4y$；设$A(x_0,y_0)$，$B(x_1,y_1)$，则$|AF|=y_0+1=2$，即$y_0=1$，同理$y_1=1$，代入抛物线方程可得$A(2,1),B(-2,1)$．

（2）由推论2知$\lambda=\dfrac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle DEH}}$=2为定值.

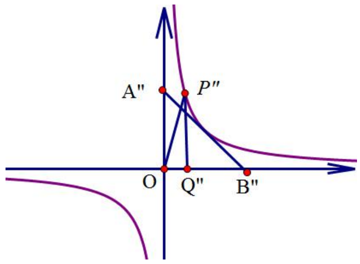
专题 8　双曲线的仿射与旋转

1.【解析】如图，$\frac{x^2}{9}-y^2=1\Rightarrow x'^2-y'^2=9\Rightarrow x''y''=\frac{9}{2}$，$|OA''|=|OB''|=3\sqrt{2}$，

$S_{OA''B''}=9$ ， 设 P 在 x 轴的射影为 Q ,则

$S_{OP''Q''}=\frac{xy}{2}=\frac{9}{4}\Rightarrow\frac{a|OA''|\cdot b|OB''|}{2}=\frac{9}{4}\Rightarrow ab=\frac{1}{4}\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，选 C.

另解：根据图形可知，$\overline{OP''}=a\overline{OA''}+b\overline{OB''}$，根据向量的等和线知识，当 P'' 在 $A\ B$ 中点时 $a+b=1$，当 P'' 位于双曲线其它任何位置时，$a+b>1$ 选 C

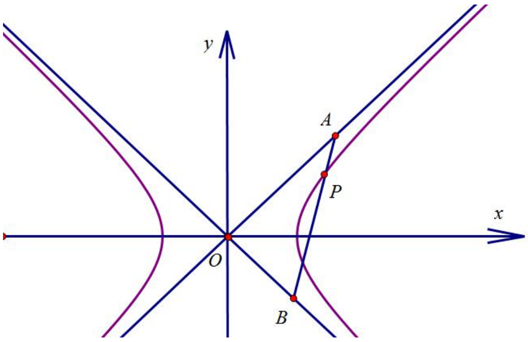


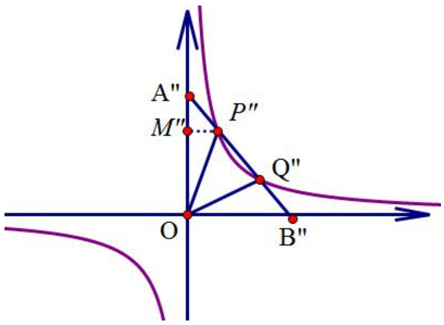
2.【解析】根据双曲线仿射定理可知，MN 中点一定为切点，$S_{\Delta MON}=\frac{1}{2}S_{\Delta M''ON''}=\frac{a^2}{2}=2$，选 D.

3.【解析】如图，经过仿射和旋转后，设 $A''B''$ 与双曲线的另一个交点为 Q''，过 P'' 作

$P\ M\ \perp OA''$,则$|A\ M\ |=\frac{1}{2}|OM\ |$ $S_{\Delta A''OB''}=3S_{\Delta A''OP''}=\frac{9}{2}S_{\Delta M''OP''}=\frac{9}{4}k=\frac{9}{8}a^2$，又

$S_{\Delta AOB}=\frac{b}{a}S_{\Delta A''OB''}=\frac{b}{a}\cdot\frac{9}{8}a^2=2b\Rightarrow a=\frac{16}{9}$，故 $2a=\frac{32}{9}$，选 A.





4.【解析】因为 $\vec{e}_1=(2,1)$、$\vec{e}_2=(2,-1)$ 是渐近线方向向量，所以双曲线渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，

又 $c=\sqrt{5}$，$\therefore a=2$，$b=1$ 双曲线方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$，作仿射和旋转后，$\vec{e}_1''=(0,2\sqrt{2})$ $\vec{e}_2''=(2\sqrt{2},0)$，

设 P 在 x 轴的射影为 Q ,则 $S_{OP''Q''}=\frac{xy}{2}=1\Rightarrow\frac{a|e_1''|\cdot b|e_2''|}{2}=1\Rightarrow ab=\frac{1}{4}$.

5.【解析】根据仿射原理，$\angle AOB$ 始终小于一条渐近线 OM 到另一条 ON 的之间的角，$\overline{OA}$ $\overline{OB}$ 0　$MON>90$ ，则 $e>\sqrt{2}$.

6.【解析】(1) 双曲线的渐近线：$y=\pm\frac{1}{2}$，设 $P(x,y)$，则 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$，即 $\frac{x^2-4y^2}{4}=1$. 则 $x^2-4y^2=4$，

P 到两条渐近线的距离乘积 $\frac{|x-2y|}{\sqrt{5}}\bullet\frac{|x+2y|}{\sqrt{5}}=\frac{|x^2-4y^2|}{5}=\frac{4}{5}$ 为常数.

(2) 设 $P(x,y)$，则 $\frac{x^2}{4}-1=y^2$，则 $|PA|=\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{\frac{5}{4}x^2-6x+8}=\sqrt{\frac{5}{4}(x-\frac{12}{5})^2+\frac{4}{5}}$

当 $x=\frac{12}{5}$ 时，PA 的最小值为 $\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

7.【解析】(1)　由题意可得 $2c=2\sqrt{5}$，即 $c=\sqrt{5}$，即有 $a^2+b^2=5$，又点 $P(2\sqrt{5}$，$2)$ 在双曲线上，

可得 $\frac{20}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$，解得 $a=2$，$b=1$，即有双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$；

（2）作 $\begin{cases}x'=x\\ y'=2y\end{cases}\Rightarrow x^2-y^2=4$，再将双曲线沿逆时针旋转45°得：$x\ y\ =2$；$M"N"$ 与双曲线切于点

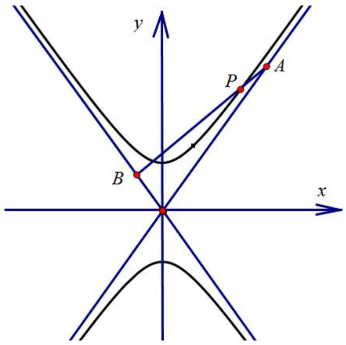
$Q\ \ x_0,\frac{2}{x_0}$，令 $f(x)=\frac{2}{x}$，则 $k_{M"N"}=f'(x_0)-\frac{2}{x_0^2}$，故 $M"N"$ 方程为 $y-\frac{2}{x_0}=-\frac{2}{x_0^2}(x-x_0)$，

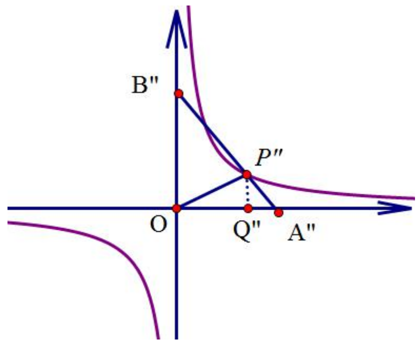
$\therefore |OM"|=2x_0,|ON"|=\frac{4}{x_0}$，

$\therefore S_{\Delta OM"N"}=\frac{|OM"||ON"|}{2}=4,\therefore S_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}S_{\Delta OM"N"}=2=\frac{1}{2}|OM||ON|\sin\ \ MON\quad \frac{1}{2}\overrightarrow{OM}\ \ \overrightarrow{ON}\tan\ \ MON$，令渐近线的倾斜角为 $\theta\ \ \frac{\pi}{2}>\theta>0$，$\tan\angle MON=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{4}{3}$，故 $\overrightarrow{OM}\bullet\overrightarrow{ON}$ 的值为定值3.

8.【解析】（1）由题意知，双曲线 C 的顶点 (O,a) 到渐近线 $ax-by=0$ 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,即$\frac{ab}{c}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，由 $\begin{cases}\frac{ab}{c}\cdot\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=1\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=2\\ b=1\\ c=\sqrt{5}\end{cases}$ $\therefore$ 双曲线 C 的方程为 $\frac{y^2}{4}-x^2=1$.





（2）由（1）知双曲线 C 的两条渐近线方程为 $y=\pm 2x$．作 $\begin{cases}x'=2x\\ y'=y\end{cases}\Rightarrow y^2-x^2=4$，再将双曲线沿顺时针旋转45°得 $x\ y\ =2$，设 $P"\ \ x_0,\frac{2}{x_0}\ \ ,Q"(x_0,0),\overrightarrow{A\ P"}=\lambda\overrightarrow{P\ B}\ ,\therefore \overrightarrow{OP"}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA"}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB"}$,故 $\left|\overrightarrow{OA"}\right|=x_0(1+\lambda)$,

$\left|\overrightarrow{OB"}\right|=\frac{2(1+\lambda)}{\lambda x_0}\ \ S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}S_{\Delta OA"B"}=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{OA"}\right|\left|\overrightarrow{OB"}\right|=\frac{1}{4}x_0(1+\lambda)\frac{2(1+\lambda)}{\lambda x_0}=\frac{1}{2}\ \ \lambda+\frac{1}{\lambda}+2$

$\lambda\in[\frac{1}{3},2]$，根据基本不等式和对勾函数性质得 $\lambda=1$，$S_{\min}=2$，$S(\frac{1}{3})=\frac{8}{3}$，$S(2)=\frac{9}{4}$，当 $\lambda=1$ 时，ΔAOB 的面积取得最小值2，当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，ΔAOB 的面积取得最大值 $\frac{8}{3}$．$\therefore \Delta AOB$ 面积的取值范围是 $[2,\frac{8}{3}]$.

9.【解析】(1)　双曲线 $x^2-y^2=\frac{27}{4}$ 的焦点在 x 轴上，　所以①不是双曲线 c 的方程，双曲线 $xy=9$ 不经过点 $(3,\frac{3}{2})$，所以②不是双曲线 C 的方程，所以③ $xy=\frac{9}{2}$ 是等轴双曲线 C 的方程，等轴双曲线 $xy=\frac{9}{2}$ 的焦点 F_1、F_2 在直线 $y=x$ 上，所以双曲线的顶点也在直线 $y=x$ 上，联立方程 $\begin{cases}xy=\frac{9}{2}\\ y=x\end{cases}$，解得双曲线 $xy=\frac{9}{2}$ 的两顶点

坐标为 $(\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$\frac{3\sqrt{2}}{2})(-\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$-\frac{3\sqrt{2}}{2})$，所以双曲线 $xy=\frac{9}{2}$ 的实轴长为 6

（2） 所求问题即为： 在双曲线 $xy=\frac{9}{2}$ 求一点 P，使 $|PA|+|PB|$ 最小 ．首先， 点 P 应该选择在等轴双曲线的 $xy=\frac{9}{2}$ 中第一象限的那一支上等轴双曲线的 $xy=\frac{9}{2}$ 的长轴长为 6 ，所以其焦距为 $6\sqrt{2}$

又因为双曲线的两个焦点 F_1、F_2 在直线 $y=x$ 上，线段 F_1F_2 的中点是原点， 所以 $A(3,3)$ 是 $xy=\frac{9}{2}$ 的一个焦点，设双曲线的另一个焦点为 $F_2(-3,-3)$，由双曲线的定义知：$|PA|=|PF_2|-6$

所以 $|PA|+|PB|=(|PF_2|-6+|PB|)$，要求 $|PA|+|PB|$ 的最小值， 只需求 $|PF_2|+|PB|$ 的最小值

直线 BF_2 的方程为 $3x-4y-3=0$，所以直线 BF_2 与双曲线 $xy=\frac{9}{2}$ 在第一象限的交点为 $(3,\frac{3}{2})$

所以码头应在建点 $P(3,\frac{3}{2})$ 处， 才能使修建两条公路的总费用最低

（3）① $f(-x)=\frac{\sqrt{3}}{3}(-x)+\frac{1}{-x}=-(\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{x})=-f(x)$，此双曲线是中心对称图形， 对称中心是原点 $(0,0)$；

②渐近线是 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 和 $x=0$． 当 $x>0$ 时，当 x 无限增大时， $\frac{1}{x}$ 无限趋近于 0 ， $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{x}$ 与 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 无限趋近；当 y 无限增大时，x 无限趋近于 0 ．③双曲线的对称轴是 $y=\sqrt{3}x$ 和 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$．

④实轴在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上， 实轴长为 $2\sqrt[4]{12}$，虚轴在直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$，虚轴长为 $2\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$

⑤焦点坐标为 $((\sqrt[4]{\frac{4}{3}},\sqrt[4]{12}),(-\sqrt[4]{\frac{4}{3}},-\sqrt[4]{12}))$，焦距 $2\sqrt[4]{\frac{64}{3}}$．

专题 9　平移坐标系构造齐次式

1．【提示】（1） $k_{AB}=\frac{x_1+x_2}{2p}=1$；

（2）由阿基米德三角形定理可知，$M(2,1)$，所以将抛物线按 $\overrightarrow{MO}$ 方向平移即可．由 $k_{AM}\cdot k_{BM}=-1$ 即可求得直线 AB 方程为 $x-y+7=0$．

2．【提示】（1） $\frac{3x^2}{4}+3y^2=1$；

（2）由题意可知， $\frac{x^2}{2}+y^2=1$．将椭圆按 $\overrightarrow{F_1O}$ 方向平移， $k_{OP'}\cdot k_{OQ'}=k_{F_1P}\cdot k_{F_1Q}=-1$ 即可求得直线方程为 $x+\sqrt{7}y-1=0$ 或 $x-\sqrt{7}y-1=0$．

3．【提示】（1） $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（2）将椭圆按 $\overrightarrow{PO}$ 方向平移，设 $A'B'$ 方程为 $mx+ny=1$， 可得 $k_1'+k_2'=-\frac{3n+6m}{2+6n}$， 由直线过定点可求得

$n=-\frac{2}{3}$，将 M' 横坐标代入直线 $A'B'$ 求出纵坐标即可表示出 k_3，此时可求得 $\lambda=2$.

4.【提示】(1) $\sqrt{a}x+y+a=0$ 或 $\sqrt{a}x-y-a=0$；

(2) 假设 P 点坐标为 $(0,t)$，将椭圆按照 $\overrightarrow{PO}$ 方向平移，令 $k_1'+k_2'=k_{PM}+k_{PN}=0$，即可求得 $P(0,-a)$ 符合题意.

5.【提示】(1) $x^2=2y$；

(2) 将椭圆按 $\overrightarrow{CO}$ 方向平移，求得 k_1k_2 的表达式，由平移后直线方程为 $mx+ny=1$ 可知，$k=-\frac{m}{n}$，所以即可求得 $k_1k_2+k^2=-4$.

6.【提示】(1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

(2) 设直线 AB 方程为 $mx+ny=1$，由直线过 $(-1,0)$ 可知，$m=-1$，构造齐次式，由 $k_{OA}\bullet k_{OB}=\frac{1}{4}$ 可知，$n=\pm2$，所以直线 l 斜率 $k=\pm\frac{1}{2}$，所以直线方程为 $x+2y+1=0$ 或 $x-2y+1=0$.