第五章导数

专题 1 函数的切线问题

选择题答案

1—5：$DBABA$ 6—10：$ABDAA$ 11—15 $DDAAC$ $16-20:ABDDD$ 21—25：$BBCCC$

26—27：AD

填空题答案

28：$-2<a<\frac{1}{4}$ 29：$13x-y-15=0$ 30：$\frac{\pi^2}{4}$ 31：$n\cdot 2^{n+1}$ 32：-4 33：$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$

34：$\frac{56}{27}$ 35：$x-y-2=0$ 或 $5x+4y-1=0$ 36：0 37：$\frac{n}{n+1}$ 38：$\frac{1}{e}$ 39：$x+ey+1=0$

40：$\frac{1}{4}$ 41：$\frac{1}{10}$ 42：-1 43：$\frac{\sqrt{10}}{2}$ 44：$\frac{1}{30}$

专题 2 指数切线放缩

1.【解析】函数 $f(x)=e^{x-1}-ax\ge x-ax=0$，解得 $x=1$，$a=1$．故选 A．

2.【解析】$\because$ 函数 $f(x)=x^3-ke^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore f'(x)=3x^2-ke^x\leqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

$e^{\frac{x}{2}}\ge e\cdot(\frac{x}{2})\Rightarrow e^x\ge\frac{e^2}{4}x^2\Rightarrow k\ge\frac{12}{e^2}$．故选 C.

3.【解析】法一：设直线 l 与曲线 $C_1:y=e^x$ 的切点为 (x_1,e^{x_1})，与曲线 $C_2:y=\frac{1}{4}e^2x^2$ 的切点为 $(x_2,\frac{1}{4}e^2{x_2}^2)$，

由 $y=e^x$，得 $y'|_{x=x_1}=e^{x_1}$，由 $y=\frac{1}{4}e^2x^2$，得 $y'|_{x=x_2}=\frac{1}{2}e^2x_2$，$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y-e^{x_1}=e^{x_1}(x-x_1)$，或

$y-\frac{1}{4}e^2{x_2}^2=\frac{1}{2}e^2x_2(x-x_2)$，则 $\begin{cases}e^{x_1}=\frac{1}{2}e^2x_2\\ e^{x_1}-x_1e^{x_1}=\frac{1}{4}e^2{x_2}^2-\frac{1}{2}e^2{x_2}^2\end{cases}$，解得 $x_1=x_2=2$．$\therefore$ 直线 l 的方程为：

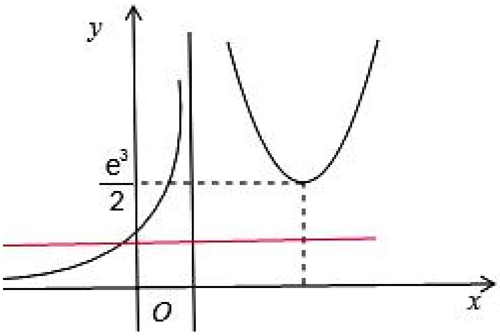
$y-e^2=e^2(x-2)$，取 $y=0$，可得 $x=1$．$\therefore$ 直线 l 在 x 轴上的截距为 1．故选：B．

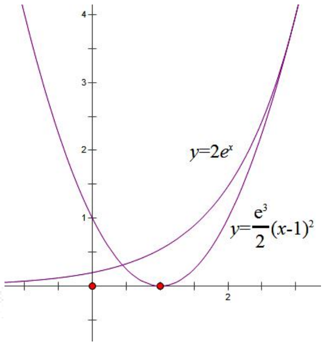
法二：根据 $e^{\frac{x}{2}}\ge e(\frac{x}{2})\Rightarrow e^2\ge\frac{e^2}{4}x^2$，切点为 $(2，e^2)$，$\therefore$ 直线 l 的方程为：$y-e^2=e^2(x-2)$，取 $y=0$，可得 $x=1$．$\therefore$ 直线 l 在 x 轴上的截距为 1．故选 B．

4.【解析】法一：$f(x)=2e^x-a(x-1)^2=0$，$x=1$ 时不成立，$x\ne1$ 时，化为：$a=\frac{2e^x}{(x-1)^2}=g(x)(x\ne1)$．

$g'(x)=\frac{2e^x(x-3)}{(x-1)^3}$．可得：$x<1$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增；$1<x<3$ 时，$g'(x)<0$ 时，函数 $g(x)$ 单调递减；$x>3$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增．画出图象．g（3）$=\frac{e^3}{2}$．可得：当且仅当 $0<a<\frac{e^3}{2}$ 时，

函数 $y=a$ 与函数 $y=g(x)$ 由且仅有一个交点．即函数 $f(x)=2e^{x}-a(x-1)^{2}$ 有且只有一个零点，则实数 a 的取值范围是 $(0,\dfrac{e^{3}}{2})$．故选：C．

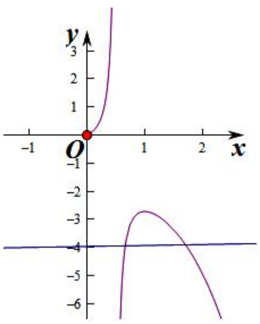




法二：$f(x)=2e^{x}-a(x-1)^{2}=0$，根据 $e^{x}\geq\dfrac{e^{2}}{4}x^{2}$ 可得 $e^{x-1}\geq\dfrac{e^{2}}{4}(x-1)^{2}$，故 $2e^{x}=2e\cdot e^{x-1}\geq\dfrac{e^{3}}{2}(x-1)^{2}$，$\therefore a=\dfrac{e^{3}}{2}$ 时，$y=2e^{x}$ 与 $y=a(x-1)^{2}$ 相切，画出图形，如上右图所示，显然 $a<0$ 无交点，当 $a\geq\dfrac{e^{3}}{2}$ 有两个交点，当且仅当 $0<a<\dfrac{e^{3}}{2}$ 时，$y=2e^{x}$ 与 $y=a(x-1)^{2}$ 仅有一个交点，则实数 a 的取值范围是 $(0,\dfrac{e^{3}}{2})$．故选：C．

5．【解析】函数的导数 $f'(x)=e^{x}-\dfrac{m+1}{x}+2(m+1)$，$x>0$ 因为函数 $f(x)$ 恰有两个极值点，所以函数 $f(x)$ 有两个不同的零点．令 $f'(x)=e^{x}-\dfrac{m+1}{x}+2(m+1)=0$，得 $\dfrac{xe^{x}}{1-2x}=m+1$ 有两个不同的实数根，

法一：记：$h(x)=\dfrac{xe^{x}}{1-2x}$，所以 $h'(x)=\dfrac{(xe^{x})'(1-2x)-xe^{x}(1-2x)'}{(1-2x)^{2}}=\dfrac{e^{x}(2x+1)(x-1)}{(1-2x)^{2}}$，当 $x\in(0,\dfrac{1}{2})$ 时，$h'(x)>0$，此时函数 $h(x)$ 在此区间上递增，当 $x\in(\dfrac{1}{2}，1)$ 时，$h'(x)>0$，此时函数 $h(x)$ 在此区间上递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，此时函数 $h(x)$ 在此区间上递减，即当 $x=1$ 时，$h(x)$ 取得极大值 h（1）$=-e$．作出 $h(x)$ 的简图如下：要使得 $h(x)=m+1$ 有两个不同的实数根，则 $m+1<-e$，即 $m<-e-1$．故选 D．



法二：$\dfrac{xe^{x}}{1-2x}=m+1$ 有两个不同的实数根，即 $e^{x-1}=-\dfrac{m+1}{e}(2-\dfrac{1}{x})$ 有两个交点，故 $-\dfrac{m+1}{e}>1$，即 $m<-e-1$．故选：D．

6．【解析】（1）函数的导数 $f'(x)=e^{x}-2x$，函数在在点 $x=0$ 处的切线斜率 $k=f'(0)=e^{0}-2\times0=1$，

$f(0)=1+a$，则过切点 $(0,1+a)$ 的切线方程为 $y-(1+a)=x$，即 $y=x+1+a$，$\because$ 在点 $x=0$ 处的切线为 $y=bx$，

$\therefore b=1$，$1+a=0$，即 $a=-1$，则 $f(x)=e^x-x^2-1$；

（2）证明：设 $g(x)=f(x)-(-x^2+x)=e^x-x^2-1-(-x^2+x)=e^x-x-1$，函数的导数 $g'(x)=e^x-1$，

由 $g'(x)>0$ 得 $x>0$，此时函数 $g(x)$ 为增函数，由 $g'(x)<0$ 得 $x<0$，此时函数 $g(x)$ 为减 j 函数

即当 $x=0$ 时，函数 $g(x)$ 取得极小值同时也是最小值 $g(0)=e^0-0-1=1-1=0$，则 $g(x)\geqslant g(0)=0$，

即 $f(x)-(-x^2+x)\geqslant 0$，即 $f(x)\geqslant -x^2+x$ 恒成立.

7.【解析】（1）根据题意，$f(x)=ae^x-2x^2$，其导数 $f'(x)=ae^x-4x$，当 $a=1$ 时，f（2）$=e^2-8$，f'（2）$=e^2-8$，所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线方程为 $y-(e^2-8)=(e^2-8)(x-2)$，即 $y=(e^2-8)(x-1)$，

（2）（指数找基友）根据题意，若函数 $f(x)$ 为 R 上的单调递增函数，则 $f'(x)=ae^x-4x\geqslant 0$ 恒成立，即 $a\geqslant\dfrac{4x}{e^x}$ 恒成立，则有 $a\geqslant g(x)_{max}$，令 $g(x)=\dfrac{4x}{e^x}$，则 $g'(x)=\dfrac{4(1-x)}{e^x}$，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$；当 $x<1$ 时，$g'(x)>0$，

$\therefore g(x)_{max}=g(1)=\dfrac{4}{e}$，$\therefore a$ 的取值范围是 $a\geqslant\dfrac{4}{e}$.

8.【解析】（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=e^x$，当 $x=0$ 时，$e^0>0$ 显然成立；当 $x>0$ 时，$e^x>x^2\Leftarrow\dfrac{x^2}{e^x}<1$；

令 $F(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$，$x>0$，则 $F'(x)=\dfrac{(2x-x^2)}{e^x}$，可得 $x\in(0,2)$，$F'(x)>0$，$F(x)$ 增；$x\in(2,+\infty)$，$F'(x)<0$，$F(x)$ 减；故 $x>0$ 时，$F(x)\le F(2)=\dfrac{4}{e^2}<1$，综上，任意 $x\in[0，+\infty)$ 都有 $f(x)>x^2$，得证.

（2）法一：函数定义域为 R，令 $g(x)=f'(x)=e^x-2a(x-1)$，若 $f(x)$ 有两个极值点，则 $g(x)$ 有两个变号零点，且 $g'(x)=e^x-2a$，当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)>0$ 在 R 上恒成立，函数 $g(x)$ 在 R 上单增，$g(x)$ 至多有一个零点，此时 $f(x)$ 不存在两个极值点；当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$，可得 $x=ln(2a)$，且 $g'(x)>0\Rightarrow x>ln(2a)$，$g'(x)<0\Rightarrow x<ln(2a)$，即函数 $g(x)$ 在 $(-\infty，ln(2a))$ 单减，在 $(ln(2a)，+\infty)$ 单增，若条件成立，则必有 $g(x)_{min}=g(ln(2a))=2a-2a(ln(2a)-1)<0$，此时 $a>\dfrac{e^2}{2}$，综上，函数 $f(x)$ 有两个极值点时，$a\in(\dfrac{e^2}{2},+\infty)$.

法二：函数定义域为 R，令 $g(x)=f'(x)=e^x-2a(x-1)$，若 $f(x)$ 有两个极值点，则 $g(x)$ 有两个变号零点，构造函数 $g(x)=e^x-ex$，显然 $g(x)\geq 0$ 恒成立，当仅当 $x=1$ 时等号成立，要使 $e^x>2a(x-1)$ 恒成立，很明显 $a<0$ 不合题意，$e\cdot e^{x-1}>2a(x-1)\Rightarrow e^{x-1}>\dfrac{2a}{e}(x-1)$，当仅当 $x=2$ 取得相切等号，若 $\dfrac{2a}{e}>e$，即 $a\in(\dfrac{e^2}{2},+\infty)$，函数 $f(x)$ 有两个极值点.

9.【解析】(1) 函数 $f(x)=ax^2-e^x$ 的导数为 $f'(x)=2ax-e^x$，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 y 轴垂直，

可得 $2a-e=0$，即 $a=\dfrac{1}{2}e$，可得 $f'(x)=ex-e^x$，设 $g(x)=ex-e^x$，$g'(x)=e-e^x$，可得 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 递减，$g(x)$ 的最大值即 $f'(x)$ 的最大值为 g（1）$=0$；

（3）证明：设 $h(x)=\dfrac{e^x}{x}$，可得 $h'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$，$1<a\leqslant\dfrac{e}{2}$ 时，则 $1\in(0,a)$，令 $h'(x)>0$，可得 $1<x<a$；$h'(x)<0$，可得 $0<x<1$，则 $h(x)$ 的最小值为 h（1）$=e$，又 $2a\in(2,\ e]$，则 $2a\leqslant\dfrac{e^x}{x}$，即 $2ax-e^x\leqslant0$，

即 $f'(x)\leqslant0$，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 上是递减函数，则命题得证．

10.【解析】(1) 函数的导数 $f'(x)=e^x-2x$，函数在在点 $x=0$ 处的切线斜率 $k=f'(0)=e^0-2\times0=1$，

$f(0)=1+a$，则过切点 $(0,1+a)$ 的切线方程为 $y-(1+a)=x$，即 $y=x+1+a$，

$\because$ 在点 $x=0$ 处的切线为 $y=bx$，$\therefore b=1$，$1+a=0$，即 $a=-1$，则 $f(x)=e^x-x^2-1$；

（2）证明：设 $g(x)=f(x)-(-x^2+x)=e^x-x^2-1-(-x^2+x)=e^x-x-1$，函数的导数 $g'(x)=e^x-1$，

由 $g'(x)>0$ 得 $x>0$，此时函数 $g(x)$ 为增函数，由 $g'(x)<0$ 得 $x<0$，此时函数 $g(x)$ 为减 j 函数

即当 $x=0$ 时，函数 $g(x)$ 取得极小值同时也是最小值 $g(0)=e^0-0-1=1-1=0$，则 $g(x)\geqslant g(0)=0$，

即 $f(x)-(-x^2+x)\geqslant0$，即 $f(x)\geqslant-x^2+x$ 恒成立．

11.【解析】(1) 证明：当 $a=0$ 时．$f(x)=e^x-x$．　令 $g(x)=f(x)-x=e^x-x-x=e^x-2x$．则 $g'(x)=e^x-2$．令 $g'(x)=0$．得 $x=ln2$．　当 $x<ln2$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>ln2$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ ln\ 2)$ 内是减函数．在 $(ln2,+\infty)$ 内是增函数，所以 $x=ln2$ 是 $g(x)$ 的极小值点，也是最小值，

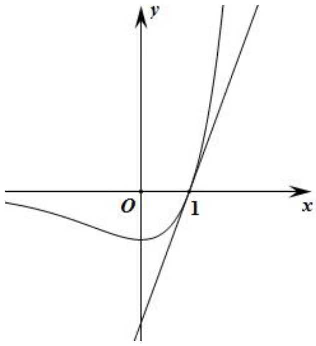
即 $g(x)_{min}=g(ln2)=e^{ln2}-2ln2=2ln\dfrac{e}{2}>0$．故当 $a=0$ 时，$f(x)>x$ 成立

（2）$f'(x)=e^x-1$，由 $f'(x)=0$．得 $x=0$．当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，在 $(0,\ +\infty)$ 内是增函数，所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值同时也是最小值点，　即 $f(x)_{min}=f(0)=1-a$，当 $1-a>0$，即 $a<1$ 时，$f(x)$ 在 R 上没有零点，当 $1-a=0$，即 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 R 上只有 1 个零点，当 $1-a<0$，即 $a>1$ 时，因为 $f(-a)=e^{-a}-(-a)-a=e^{-a}>0$．所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内只有一个零点，由（1）得 $e^x>2x$，令 $x=a$，则得 $e^a>2a$．所以 f（a）$=e^a-a-a=e^a-2a>0$．于是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有一个零点；因此．当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 R 上有两个零点．　综上当 $a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在 R 上没有零点，当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 在 R 上有一个零点；当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 在 R 上有两个零点．

12.【解析】（1）∵函数 $f(x)=(x-1)e^x$．∴$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$，由 $f'(x)=xe^x=0$ 时，$x=0$，

由 $f'(x)>0$，得 $x>0$，∴$f(x)$ 的增区间为 $[0，+\infty)$，当 $f'(x)<0$ 时，$x<0$，∴$f(x)$ 的减区间为 $(-\infty，0]$，

由 $f(x)=(x-1)e^x=0$，得 $x=1$，∴函数 $f(x)$ 的零点是 $x=1$．



（2）∵$f(x)\geqslant ax-e$ 恒成立，即 $y=f(x)$ 的图象恒不在 $y=ax-e$ 的图象下方，

当它们相切时，设切点 $(x_0，y_0)$，∴$x_0e^{x_0}=a$，且 $a=\dfrac{(x_0-1)e^{x_0}+e}{x_0}$，联立解

得 $x_0=1$，∴$a=e$，由图可知 $0\leqslant a\leqslant 1$，a 的取值范围 $[0，1]$

13.【解析】（1）由 $f(x)=e^x+ax+b$，得 $f'(x)=e^x+a$，由 $f'(0)=1+a=2$，解得 $a=1$．由 $f(0)=1+b=1$，

解得 $b=0$．∴$f(x)=e^x+x$．

（2）法一：当 $x>0$ 时，$e^x+x\geqslant x^2+mx+1$，即 $m\leqslant\dfrac{e^x}{x}-x-\dfrac{1}{x}+1$．令 $h(x)=\dfrac{e^x}{x}-x-\dfrac{1}{x}+1(x>0)$，

则 $h'(x)=\dfrac{e^x(x-1)-x^2+1}{x^2}=\dfrac{(x-1)(e^x-x-1)}{x^2}$．令 $t(x)=e^x-x-1(x>0)$，则 $t'(x)=e^x-1>0$．

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$t(x)$ 单调递增，$t(x)>t(0)=0$．则当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增．∴$h(x)_{min}=h$（1）$=e-1$，∴实数 m 的取值范围是 $(-\infty，e-1]$．

法二：构造函数 $h(x)=\dfrac{ex+(x-1)^2}{e^x}$，求导可得 $h'(x)=\dfrac{-(x-1)(x+e-3)}{e^x}$，易知 $h(x)_{\max}=h(1)=1$，故

$e^x\geq ex+(x-1)^2$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成∴$e^x+x\geq ex+x+(x-1)^2=x^2+(e-1)x+1\geq x^2+mx+1$，即 $m\leq e-1$．

14.【解析】（1）设切点为 $P(x_0，y_0)$，$f'(x)=e^x-x$，∴$f'(x_0)=e^{x_0}-x_0=1$，$e^{x_0}-\dfrac{1}{2}x_0^2-1=x_0+a$，解得 $x_0=0$，

$a=0$．

法一：（洛必达法则之隐零点护航）构造 $g(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-bx-1$，$g(0)=0$，$g'(x)=e^x-x-b$，$g'(0)=1-b$，

$g''(x)=e^x-1$，$g''(0)=0$，且 $x\geq 0$ 时，$g'(x)$ 单调递增，

①显然当 $g'(0)=1-b\geq 0$，即 $g'(x)\geq g(0)\geq 0$ 恒成立，故 $g(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-bx-1$ 在区间 $[0,+\infty)$ 单调递增，且

$g(x)\geq g(0)=0$ 恒成立，故 $b\leq 1$ 时 $f(x)\geqslant bx$ 恒成立；

②当 $b>1$ 时，$g'(0)=1-b<0$，故 $\exists x_0\in[0,+\infty)$，使 $g'(x_0)=e^{x_0}-x_0-b=0$，由于 $x\geq 0$ 时，$g'(x)$ 单调递增，

故当 $x\in[0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-bx-1$ 在区间 $[0，x_0)$ 单调递减，$g(x)<g(0)=0$ 成立，与题

意矛盾，故不成立；综上可得：$b\leqslant 1$．

法二：（切线放缩）注意：直接用第一问结论显然不严谨，首先只是知道在（0,1）处的切线，但没有说明这个函数的单调性，所以需要证明，这里不做详细说明；

15.【解析】(I) 由 $a=0$，得 $f(x)=(x-3)e^x$，所以 $f'(x)=(x-2)e^x$，由 $f'(x)<0$ 得 $x<2$，由 $f'(x)>0$ 得 $x>2$，所以，函数 $f(x)$ 的单调增区间是 $(2,+\infty)$；单调减区间是 $(-\infty,2)$．

（II）法一：$f(x)=(x-3)[e^x+a(x-3)]$，易得函数 $f(x)$ 有一个零点 $x=3$．令 $g(x)=e^x+a(x-3)$．

（1）若 $a=0$，则 $g(x)=e^x>0$，$g(x)$ 无零点，所以函数 $f(x)$ 只有一个零点；

（2）若 $a\neq 0$，则 $g'(x)=e^x+a$，

①当 $a>0$ 时，有 $g'(x)>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，而 $g(-\frac{1}{a})=e^{-\frac{1}{a}}=3a=1<0$，$g$（3）$=e^3>0$，此时函数 $g(x)$ 在 $(-\frac{1}{a},3)$ 内有一个零点，所以 $f(x)$ 有两个零点．

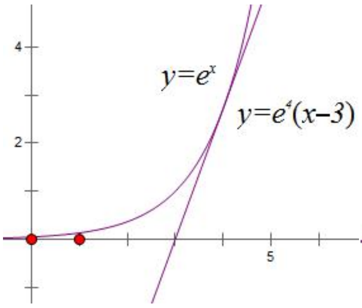
②当 $a<0$ 时，由 $g'(x)=e^x+a=0$，得 $x=ln(-a)$，所以函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty$，$ln(-a))$ 单调递减，在区间 $(ln(-a)$，$+\infty)$ 单调递增，所以函数 $g(x)_{min}=g(ln(-a))=a[ln(-a)-4]$．

（i）当 $ln(-a)-4<0$，即 $-e^4<a<0$ 时，$g(x)_{min}=g(ln(-a))=a[ln(-a)-4]>0$，此时函数 $g(x)$ 在其定义域内无零点，所以函数 $f(x)$ 只有一个零点．

（ii）当 $ln(-a)-4=0$，即 $a=-e^4<0$，此时函数 $g(x)$ 有一个零点为 4，所以函数 $f(x)$ 有两个零点．

（iii）当 $ln(-a)-4>0$，即 $a<-e^4$ 时，$g(x)_{min}<0$，此时函数 $g(x)$ 有两个零点，因为 g（3）$\neq 0$，所以这两个零点均不为 3．所以函数 $f(x)$ 有三个零点．综上述，当 $a=0$ 或 $-e^4<a<0$ 时，函数 $f(x)$ 只有一个零点；当 $a>0$ 或 $a=-e^4$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点；当 $a<-e^4$ 时，函数 $f(x)$ 有三个零点．

法二：$f(x)=(x-3)[e^x+a(x-3)]$，易得函数 $f(x)$ 有一个零点 $x=3$．令 $g(x)=e^x+a(x-3)$．构造函数 $h(x)=e^x-ex$，易证 $h(x)\geq 0$ 恒成立，当仅当 $x=1$ 时等号成立，故 $e^x=e^3\cdot e^{x-3}\geq e^4(x-3)$，当仅当 $x=4$ 时等号成立，$\therefore a=-e^4$ 时，$g(x)=e^x+a(x-3)$ 有一个零点，如图 1；当 $a>0$ 时，显然 $e^x=-a(x-3)$ 一定有一个交点，如图 2；当 $a<-e^4$ 时，$g(x)=e^x+a(x-3)$ 有两个零点，如图 3；当 $0>a>-e^4$，如图 4，$g(x)=e^x+a(x-3)$ 无零点，或者当 $a=0$ 时，无零点；综上述，当 $a=0$ 或 $-e^4<a<0$ 时，函数 $f(x)$ 只有一个零点；当 $a>0$ 或 $a=-e^4$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点；当 $a<-e^4$ 时，函数 $f(x)$ 有三个零点．



15 题图 1

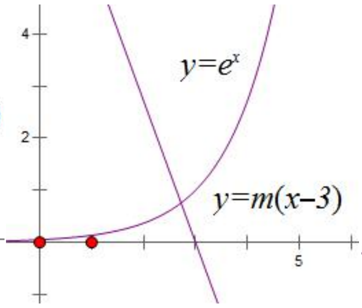


图 2

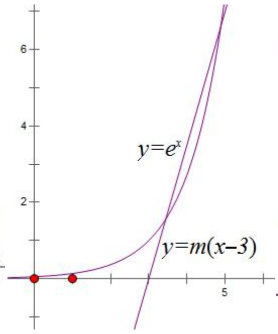


图 3

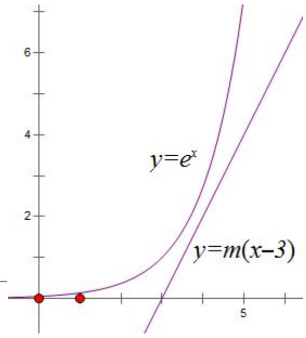


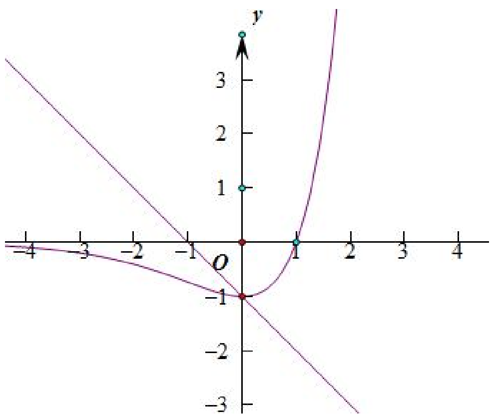
图 4

16.（1）【解析】 $f'(x)=e^x-a$， $a\leqslant 0$ 时， $f'(x)>0$，此时，函数 $f(x)$ 单调递增，无极值． $a>0$ 时，令 $f'(x)=e^x-a=0$，解得 $x_0=lna$．可得：$x_0=lna$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值，$f(x_0)=e^{x_0}-ax_0+2=a-alna+2$．

（2）法一：证明：$f(x)\leqslant g(x)$，即 $e^x-ax+2\leqslant xe^x+3$． $x=0$ 时，成立． $x>0$ 时，化为：$a\geqslant\dfrac{e^x-1-xe^x}{x}=h(x)$，

$h'(x)=\dfrac{-x^2e^x-e^x+1+xe^x}{x^2}$，令 $u(x)=-x^2e^x-e^x+1+xe^x$． $u(0)=0$．

$u'(x)=-2xe^x-x^2e^x-e^x+e^x+xe^x=-xe^x-x^2e^x<0$， $\therefore u(x)<u(0)=0$． $\therefore h'(x)<0$， $\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减． $\therefore$ 利用洛必达法则：$h(0)=\dfrac{e^x-e^x-xe^x}{1}|_{x=0}=0$， $\therefore a\geqslant 0$．



法二：（切线放缩） $f(x)\le g(x)$ $\Leftrightarrow e^x-ax+2\le xe^x+3$，即 $-ax-1\le e^x\left(x-1\right)$，令 $g\left(x\right)=-ax-1\left(x\ge 0\right)$， $h\left(x\right)=e^x\left(x-1\right)$，$h'\left(x\right)=xe^x\ge 0$，$h'\left(x\right)=0\Rightarrow x=0$，所以 $h\left(x\right)_{\min}=-1$ 画出 $g\left(x\right)$ 和 $h\left(x\right)$ 图像如图所示，当 $x\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$ 恒成立即 $g\left(x\right)$ 图像必须在 $h\left(x\right)$ 下方， $h\left(x\right)=e^x\left(x-1\right)$ 在 $x=0$ 时取得极值 $h\left(0\right)=-1$，而此时 $g\left(x\right)=-ax-1$ 取得极值 -1 时斜率 $-a=0$，所以 $-a\le 0$， $a\ge 0$.

17.【解析】（1） $f(x)=e^x-x^2+2a+b$， $f'(x)=e^x-2x$，由题意得 $\begin{cases}f(0)=1+2a+b=0\\ f'(0)=1=b\end{cases}$，即 $a=-1$， $b=1$；

（2）证明：由（I）可知， $f(x)=e^x-x^2-1$．令 $\varphi(x)=f(x)+x^2-x=e^x-x-1$， $\varphi'(x)=e^x-1$，

由 $\varphi'(x)=0$，得 $x=0$．当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $\varphi'(x)<0$， $\varphi(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $\varphi'(x)>0$， $\varphi(x)$ 单调递增． $\therefore\varphi(x)$ 的最小值为 $\varphi(0)=0$，从而 $f(x)\geqslant -x^2+x$；

（3） $f(x)>kx$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，等价于 $\dfrac{f(x)}{x}>k$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$， $x>0$． $\therefore g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{x(e^x-2x)-(e^x-x^2-1)}{x^2}=\dfrac{(x-1)(e^x-x-1)}{x^2}$.

由（II）可知，当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $e^x-x-1>0$ 恒成立，令 $g'(x)>0$，得 $x>1$， $g'(x)<0$，得 $0<x<1$，

$\therefore g(x)$ 的单调增区间为 $(1,+\infty)$，单调减区间为 $(0,1)$， $g(x)_{min}=g$ （1） $=e-2$． $\therefore k<e-2$．即实数 k 的取值范围为 $(-\infty,e-2)$．

18.【解析】（1） $\because f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$ $\therefore f'(x)=\dfrac{-x}{e^x}$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减，所以当 $x=0$ 时，函数 $f(x)$ 存在极大值 $f(0)=1$，无极小值；

（2）法一：令 $h(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{x+1}{e^x}+ax^2-1$， $h'(x)=-\dfrac{x}{e^x}+2ax=2ax\bullet\dfrac{e^x-\dfrac{1}{2a}}{e^x}$

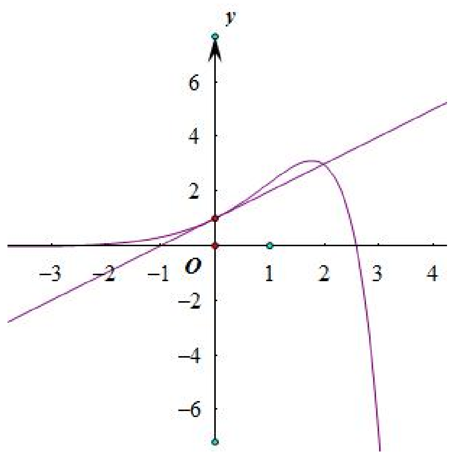
$\because 0<a<\dfrac{1}{2}$， $\therefore \dfrac{1}{2a}>1$，即 $ln\dfrac{1}{2a}>0$，令 $h'(x)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=ln\dfrac{1}{2a}$

当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $h'(x)>0$， $h(x)$ 单调递增；当 $x\in(0,ln\dfrac{1}{2a})$ 时， $h'(x)<0$， $h(x)$ 单调递减；

当时 $x\in(ln\dfrac{1}{2a},+\infty)$， $h'(x)>0$， $h(x)$ 单调递增，又 $h(0)=0$， $h(ln\dfrac{1}{2a})<h(0)=0$，

$h(\dfrac{1}{\sqrt{a}})=\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{a}}}{e^{\frac{1}{\sqrt{a}}}}+a(\dfrac{1}{\sqrt{a}})^2-1=\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{a}}}{e^{\frac{1}{\sqrt{a}}}}>0(ln\dfrac{1}{2a}<\dfrac{1}{\sqrt{a}})$，函数 $h(x)$ 在 R 上连续，所以 $h(x)$ 有一个零点 0，且在 $(ln\dfrac{1}{2a},\dfrac{1}{\sqrt{a}})$ 上有一个零点，即函数 $h(x)$ 有两个零点 $\therefore$ 当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，方程 $f(x)=g(x)$ 的实根个数为 2 个；

法二： $f(x)=g(x)$ 即 $\dfrac{x+1}{e^x}=1-ax^2\Leftrightarrow x+1=\left(1-ax^2\right)e^x$，令 $g\left(x\right)=x+1$， $h\left(x\right)=\left(1-ax^2\right)e^x$ （ $0<a<\dfrac{1}{2}$），则 $f(x)=g(x)$ 的实根个数等价于两函数图像交点个数， $h'\left(x\right)=\left(-ax^2-2ax+1\right)e^x$，令 $H\left(x\right)=-ax^2-2ax+1$， $\Delta=4a^2+4a>0$，又对称轴 $x=-1$ 且过 $(0，1)$ 所以 $H\left(x\right)$ 一定存在一个负根 x_1 和一个正根 x_2，当 $x<0$， $h\left(x\right)\to 0$ 此时两函数图像交点个数为零；当 $x=0$， $g\left(0\right)=h\left(0\right)=1$，一交点；



当 $x>0$，由于 $h\left(x\right)$ 在 $x\in\left(0，x_2\right)\uparrow$， $x\in\left(x_2，+\infty\right)\downarrow$，所以两函数图像必定存在一个交点．综上，方程 $f(x)=g(x)$ 的实根个数为 2.

（3）由（2）知，即证：当 $a\geqslant1$ 时，对于任意实数 $x\in[-1，+\infty)$，不等式 $h(x)\geqslant0$ 恒成立.

①在 $x\geqslant0$ 时，$\because a\geqslant1\ \therefore\ 0<\dfrac{1}{2a}\leqslant\dfrac{1}{2}$，又 $x\geqslant0$，$e^x\geqslant1$ 得：$h'(x)\geqslant0$，$\therefore h(x)$ 为在 $[0，+\infty)$ 上是增函数，故 $h(x)\geqslant h(0)=0$；

②在 $-1\leqslant x\leqslant0$ 时，由于 $a\geqslant1$，所以 $ax^2-1\geqslant x^2-1$ 要证明 $h(x)\geqslant0$ 成立，即证 $\dfrac{x+1}{e^x}+x^2-1\geqslant0$，

也即证 $(x+1)[\dfrac{1}{e^x}+x-1]\geqslant0$，由于 $x+1\geqslant0$，只需证 $\dfrac{1}{e^x}+x-1\geqslant0$.

不妨令 $m(x)=\dfrac{1}{e^x}+x-1$，$m'(x)=1-\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{e^x-1}{e^x}$. 由 $-1\leqslant x\leqslant0$，得 $m'(x)\leqslant0$ 且不恒为 0，

所以 $m(x)$ 在区间 $[-1，0]$ 上单调递减，$m(x)\geqslant m(0)=0$，从而 $\dfrac{1}{e^x}+x-1\geqslant0$ 得证.

综上，当 $a\geqslant1$ 时，对于任意实数 $x\in[-1，+\infty)$，$h(x)\geqslant0$ 恒成立，即不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立.

19.【解析】（1）$f'(x)=e^x-m$，①若 $m\leqslant0$，则 $f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 无极值，

②若 $m>0$，当 $x>lnm$ 时，$f'(x)>0$，当 $x<lnm$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,lnm)$ 单调递减，在 $(lnm,+\infty)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(lnm)$，由 $m-m(lnm+1)+1=1$，解得 $m=1$.

（3）令 $g(x)=e^x-m(x+1)+1+\dfrac{m}{2}ln(x+1)(x\geqslant0)$，$g'(x)=e^x-m+\dfrac{m}{2(x+1)}$，令 $h(x)=e^x-m+\dfrac{m}{2(x+1)}$，

$h'(x)=\dfrac{2(x+1)^2e^x-m}{2(x+1)^2}$，令 $p(x)=2(x+1)^2e^x-m$，显然 $p(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 单调递增，$\therefore p(x)\geqslant p(0)=2-m$.

①当 $m\leqslant2$ 时，$p(x)\geqslant0$，$\therefore h'(x)\geqslant0$，$\therefore h(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 单调递增，$\therefore h(x)\geqslant h(0)=1-\dfrac{m}{2}\geqslant0$，即 $g'(x)\geqslant0$，$\therefore g(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 单调递增，所以 $g(x)\geqslant g(0)=2-m\geqslant0$，此时符合题意；

②当 $m>2$ 时，$p(0)<0$，$\therefore\exists x_0\in(0,+\infty)$，使 $p(x_0)=0$，故 $p(x)$ 在 $(0,x_0)$ 恒为负值，$h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，

此时 $h(x)<h(0)=1-\dfrac{m}{2}<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，所以 $g(x)<g(0)=2-m<0$，此时不符合题意，

故所求 m 的取值范围为 $(-\infty，2]$.

法二：令 $g(x)=e^x-m(x+1)+1+\dfrac{m}{2}ln(x+1)(x\geqslant0)$，$g(0)=2-m\geq0$，则必须有 $m\leq2$，$g'(x)=e^x-m+\dfrac{m}{2(x+1)}$，

构造函数 $h(x)=e^{x-1}-2+\dfrac{1}{x}$，显然 $e^{x-1}-x+x+\dfrac{1}{x}-2\geq0$，当仅当 $x=1$ 时等号成立，故 $e^x\geq2-\dfrac{1}{x+1}$，当 $x=0$ 时取等，当 $m\leq2$ 时，$\dfrac{m}{2}(2-\dfrac{1}{x+1})\leq2-\dfrac{1}{x+1}$（$x>-1$），显然 $g'(x)=e^x-m+\dfrac{m}{2(x+1)}\geq0$，故 $g(x)\geq g(0)$ 恒成立，即所求 m 的取值范围为 $(-\infty，2]$.

20.【解析】（1）根据题意，$f(x)=x(e^{2x}-a)$，$y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，设切点的坐标为 $(x_1，y_1)$，

则 $f'(x)=(e^{2x}-a)+2xe^{2x}=(2x+1)e^{2x}-a$，又由 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，切点为 $(x_1，y_1)$，则 $f'(x_1)=2$，

则有 $\begin{cases} y_1 = 2x_1 \\ y_1 = x_1e^{2x_1} - ax_1 \\ (2x_1+1)e^{2x_1} - a = 2 \end{cases}$，解可得 $a=-1$；

（1）法一：根据题意，$f(x)=x(e^{2x}-a)$，则 $f(x)\geqslant 1+x+lnx$，即 $x(e^{2x}-a)\geqslant 1+x+lnx$，变形可得 $xe^{2x}-(1+lnx)\geqslant(a+1)x$，又由 $x>0$，所以 $a+1\leqslant e^{2x}-\dfrac{1+lnx}{x}$，设 $g(x)=e^{2x}-\dfrac{1+lnx}{x}$，

其导数 $g'(x)=2e^{2x}+\dfrac{lnx}{x^2}=\dfrac{2x^2e^{2x}+lnx}{x^2}$，设 $h(x)=2x^2e^{2x}+lnx$，其导数 $h'(x)=4xe^{2x}(x+1)+\dfrac{1}{x}>0$，则函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；又由 $h(\dfrac{1}{e})<0$，h（1）>0，则存在 $x_0\in(\dfrac{1}{e}，1)$，满足 $h(x_0)=0$，即 $2x_0^2e^{2x_0}+lnx_0=0$，故 $g(x)_{min}=g(x_0)=e^{2x_0}-\dfrac{1+lnx_0}{x_0}$，若 $a+1\leqslant e^{2x}-\dfrac{1+lnx}{x}$，必有 $a+1\leqslant g(x_0)$，令 $t=x_0^2e^{2x_0}$，变形可得 $2x_0+2lnx_0=lnt$，由 $2x_0^2e^{2x_0}+lnx_0=0$，变形可得 $2t+lnx_0=0$，则有 $2x_0+lnx_0=2t+lnt$，设 $F(x)=2x+lnx$，分析易得 $F(x)=2x+lnx$ 为增函数，则有 $x_0=t$，则 $g(x_0)=e^{2x_0}-\dfrac{1+lnx_0}{x_0}=2$，必有 $a+1\leqslant 1$，解可得 $a\leqslant 1$，故 a 的取值范围为 $(-\infty，1]$．

法二：$x(e^{2x}-a)\geqslant 1+x+lnx$，变形可得 $xe^{2x}-(1+lnx)\geqslant(a+1)x$，即 $e^{2x+\ln x}-(1+lnx)\geqslant(a+1)x$，构造函数 $h(x)=e^x-x-1$，显然 $h(x)\ge 0$ 恒成立，当仅当 $x=0$ 时等号成立，故 $h(2x+\ln x)=e^{2x+\ln x}-2x-(1+lnx)\ge 0$ 恒成立，当仅 $x=x_0$，且满足 $2x_0+\ln x_0=0$ 时等号成立，故 $e^{2x+\ln x}-(1+lnx)\ge 2x\ge(a+1)x$，又由 $x>0$，必有 $a+1\leqslant 1$，解可得 $a\leqslant 1$，故 a 的取值范围为 $(-\infty，1]$．

21.【解析】(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x+x-1$，则 $f'(x)=e^x+1$，$f'(1)=e+1$，$f(1)=e$，所以在点 $(1，f(1))$ 处的切线方程为 $y-e=(e+1)(x-1)$，整理为 $y=(e+1)x-1$．

（1）由 $f(x)\ge x^2$，得 $a\ge\dfrac{1-x^2-e^x}{x^2}$，令 $g(x)=\dfrac{1-x^2-e^x}{x^2}$，则 $g'(x)=\dfrac{(x-1)(1+x-e^x)}{x^2}$，令 $h(x)=1+x-e^x$，则 $h'(x)=1-e^x<0$．则 $h(x)$ 在 $(0，1)$ 上单调递减，$h(x)<h(0)=0$；$g'(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增，则有 $g(x)<g(1)=2-e$，所以 $a\in[2-e，+\infty)$．

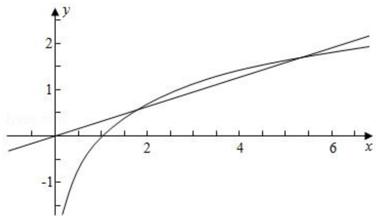
法二：由 $e^x\ge ex+(x-1)^2$（证明略）以及题意 $f(x)\ge x^2\Leftrightarrow e^x+ax-1\ge x^2\Leftrightarrow e^x\ge x^2-ax-1$，即 $e^x\ge(2+a)x+(x-1)^2$，所以 $a\in[2-e，+\infty)$．

专题3 对数切线放缩

1.【解析】法一：当 $a=10$ 时，函数 $f(x)=x-\sqrt{x}-10lnx$，$x=e$ 时，$f(e)<0$，$x=100$ 时，$f(100)>0$，所以函数存在零点，所以 A、B 不正确；当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x-\sqrt{x}-\frac{1}{2}lnx$，$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}$，$x>1$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，函数是增函数，f（1）$=0$，所以 $a=\frac{1}{2}$ 时，函数没有零点，所以 C 不正确，故选 D．

法二：令 $\sqrt{x}=t$，则 $f(t)=t^2-t-a\ln t^2=t^2-t-2a\ln t$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上存在零点，由于 $\ln x\le x^2-x$，切点为 $(1,0)$，根据函数图像性质可得，$2a>1$ 时一定存在零点，故选 D．

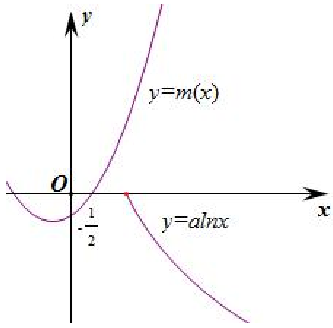
2.【解析】函数 $f(x)=lnx-ax$ 在 R 上有两个不同的零点可化为 $y=lnx$ 与 $y=ax$ 在 R 上有两个不同的交点，作函数 $y=lnx$ 与 $y=ax$ 在 R 上的图象如下，当直线与 $y=lnx$ 相切时，则 $\frac{lnx}{x}=\frac{1}{x}$，解得，$x=e$；故直线与 $y=lnx$ 相切时，切线的斜率 $a=\frac{1}{e}$；故实数 a 的取值范围是 $(0,\frac{1}{e})$；故答案为：$(0,\frac{1}{e})$．

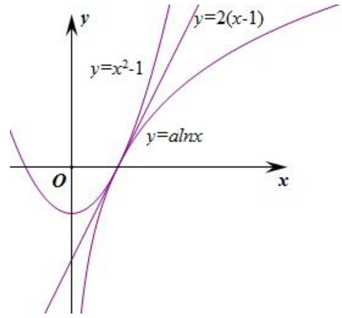


3.【解析】法一：（1）若 $a<0$，由 $\frac{1}{2}x^2+(1-m)x-\frac{1}{2}\geqslant alnx$，显然 $y=alnx$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，且经过点 $(1,0)$，而 $y=m(x)=\frac{1}{2}x^2+(1-m)x-\frac{1}{2}$ 的图象开口向上，且经过点 $(0,-\frac{1}{2})$，故只需令 m（1）$\geqslant 0$ 即可，即 $1-m\geqslant 0$，即 $m\leqslant 1$，符合题意．

（2）若 $a\geqslant 0$，由 $f(x)\geqslant mx$ 可得 $m\leqslant\frac{x}{2}-\frac{alnx}{x}+1-\frac{1}{2x}$，令 $g(x)=\frac{x}{2}-\frac{alnx}{x}+1-\frac{1}{2x}(x\geqslant 1)$，则 $g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{a(1-lnx)}{x^2}+\frac{1}{2x^2}=\frac{x^2+2a(lnx-1)+1}{2x^2}$，令 $h(x)=x^2+2a(lnx-1)+1(x\geqslant 1)$，则 $h'(x)=\frac{2(x^2+a)}{x}$，则 $h'(x)>0$，故 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增，$\therefore h(x)\geqslant h$（1）$=2-2a=2(1-a)$，

①若 $0\leqslant a\leqslant 1$，则 $h(x)\geqslant h$（1）$\geqslant 0$，即 $g'(x)\geqslant 0$，$\therefore g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore g(x)\geqslant g$（1）$=1$，故 $m\leqslant 1$，符合题意．②若 $a>1$，则 $h(x)$ 的最小值 h（1）$=2(1-a)<0$，$\therefore$ 存在 $x_0\in[1,+\infty)$ 使得当 $x\in[1,x_0)$ 时，$h(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，$\therefore g(x)$ 在 $[1,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore g(x)$ 的最小值为 $g(x_0)$，故 $m\leqslant g(x_0)$，而 $g(x_0)<g$（1）$=1$，故 m 的最大值不为1，不符合题意．综上，a 的取值范围是 $(-\infty,1]$．故答案为：$(-\infty,1]$．





法二：$f(x)=\frac{1}{2}x^2-alnx+x-\frac{1}{2}\ge mx\Rightarrow x^2-1-2alnx\ge 2(m-1)x$ 对任意 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，且 m 最大值为 1，故 $x^2-1-2alnx\ge 0$ 恒成立，由于 $y=x^2-1$ 与 $y=2alnx$ 均过定点 $(1,0)$，如图所示，根据切线和函数凹凸反转性质可知 $x^2-1\ge 2(x-1)\ge 2lnx$，即 $2a\le 2$，a 的取值范围是 $(-\infty,1]$．

4．【解析】法一：$\because$ 函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}+k(lnx-x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，

$\therefore f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}+\frac{k(1-x)}{x}=\frac{(e^x-kx)(x-1)}{x^2}$．$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的唯一一个极值点 $\therefore x=1$ 是导函数 $f'(x)=0$ 的唯一根．$\therefore e^x-kx=0$ 在 $(0,+\infty)$ 无变号零点，令 $g(x)=e^x-kx$，$g'(x)=e^x-k$，① $k\leqslant 0$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立．$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 时单调递增的，$g(x)$ 的最小值为 $g(0)=1$，$g(x)=0$ 无解② $k>0$ 时，$g'(x)=0$ 有解为：$x=lnk$，$0<x<lnk$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，$lnk<x$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递，增$\therefore g(x)$ 的最小值为 $g(lnk)=k-klnk$，$\therefore k-klnk>0$，$\therefore k<e$，由 $y=e^x$ 和 $y=ex$ 图象，它们切于 $(1,e)$，综上所述，$k\leqslant e$．故选 A．

法二：(同构式切线放缩法) $f(x)=\frac{e^x}{x}+k(lnx-x)=\frac{e^x}{x}-kln\frac{e^x}{x}=t-klnt$，$f'(t)=1-\frac{k}{t}=\frac{t-k}{t}$，显然 $e^x\ge ex$，当仅当 $x=1$ 时等号成立，故 $t>e$ 时，$f'(t)=0$ 无解，所以必须 $k\le e$，故选 A．

5．【解析】法一：$f(x)=xlnx-ax^2(x>0)$，$f'(x)=lnx+1-2ax$．令 $g(x)=lnx+1-2ax$，$\because$ 函数 $f(x)=x(lnx-ax)$ 有两个极值点，则 $g(x)=0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有两个实数根．$g'(x)=\frac{1}{x}-2a=\frac{1-2ax}{x}$，当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)>0$，则函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增，因此 $g(x)=0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上不可能有两个实数根，应舍去．当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{2a}$，令 $g'(x)>0$，解得 $0<x<\frac{1}{2a}$，此时函数 $g(x)$ 单调递增；令 $g'(x)<0$，解得 $x>\frac{1}{2a}$，此时函数 $g(x)$ 单调递减．$\therefore$ 当 $x=\frac{1}{2a}$ 时，函数 $g(x)$ 取得极大值．当 x 趋近于 0 与 x 趋近于 $+\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，要使 $g(x)=0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有两个实数根，则 $g(\frac{1}{2a})=ln\frac{1}{2a}>0$，解得 $0<a<\frac{1}{2}$．$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(0,\frac{1}{2})$．故选 A．

法二：(对数切线放缩法) $f(x)=xlnx-ax^2(x>0)$，$f'(x)=lnx+1-2ax$．令 $g(x)=lnx+1-2ax$，由于 $\ln x\le x-1$，故当 $2a<1$ 时，$lnx=2ax-1$ 有两个交点，$a\le 0$ 时，由于单调性变化，仅有一个交点，故选 A．

6．【解析】法一：方程 $f(x)=(a+1)x$ 恰有两个不同的解，即方程 $\frac{1}{2}x^2-(a+1)x+alnx=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有 2 个解，令 $g(x)=\frac{1}{2}x^2-(a+1)x+alnx$，其中 $x\in(0,+\infty)$，$g'(x)=x-(a+1)+\frac{a}{x}=\frac{(x-1)(x-a)}{x}$，

(1) $a<0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增，$\because$ 有 2 个零点，故 g (1) <0，即 $-\frac{1}{2}<a<0$，

(2) $a=0$ 时，$g(x)=\frac{1}{2}x^2-x$ 只有 1 个零点 2，舍，

（3）$0<a<1$ 时，$g(x)$ 在 $(0,a)$ 递增，在 $(a,1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增，$\because$ 有 2 个零点，且 g（1）$=-a-\frac{1}{2}<0$，故 $g(a)=0$，无解，舍，

（4）$a=1$ 时，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，不可能有 2 个零点，舍，

（5）$a>1$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，在 $(1,a)$ 递减，在 $(a,+\infty)$ 递增，

$\because g$（1）$=-a-\frac{1}{2}<0$，不可能有 2 个零点，舍，综上，$a\in(-\frac{1}{2}$，$0)$ 时，方程 $f(x)=(a+1)x$ 恰有 2 个解，故选 A．

法二：$\frac{1}{2}x^2-(a+1)x+alnx=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有 2 个解，即 $-\frac{1}{2a}x+\frac{a+1}{a}=-\frac{x-2(a+1)}{2a}=\frac{lnx}{x}$ 有两交点，由于 $\frac{\ln x}{x}\le x-1$，两函数的切点为（1,0），根据题意直线的零点一定满足 $2(a+1)>1\Rightarrow a>-\frac{1}{2}$，且直线必须为单调递增，所以 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时一定有两交点，当 $a\ge 0$ 时，仅有一个交点，不合题意，故选 A．

7.【解析】法一：$\because$ 函数 $f(x)=xlnx+1$ 的图象总在直线 $y=ax$ 的上方，$\therefore xlnx+1-ax>0$ 对任意 $x>0$ 恒成立，令 $F(x)=xlnx-ax+1$，则 $x>0$，$F'(x)=lnx-a+1$，由 $F'(x)=0$，得 $x=e^{1-a}$．当 $x\in(0,e^{1-a})$ 时，$F'(x)<0$，当 $x\in(e^{1-a}$，$+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，$\therefore F(x)_{min}=F(e^{1-a})=e^{1-a}lne^{1-a}-ae^{1-a}+1>0$，解得 $a<1$，$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1)$．故选 A．

法二：（切线放缩）$xlnx\ge x-1>ax-1\Rightarrow a<1$，故选 A．

8.【解析】当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$(ax-lnx)(ax-e^x)\leqslant 0$，$\therefore\begin{cases}ax-lnx\geqslant 0\\ax-e^x\leqslant 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}a\geqslant\frac{1}{e}\\a\leqslant e\end{cases}$，（过原点的切线斜率问题）或 $\begin{cases}ax-lnx\leqslant 0\\ax-e^x\geqslant 0\end{cases}$，无解，综上可得：实数 a 的取值范围是：$[\frac{1}{e},e]$．故选 B．

9.【解析】法一：根据题意，因为 $f(x)=e^x-a\ln x+2ax-1$，所以 $f'(x)=e^x-\frac{a}{x}+2a$．令 $f'(x)=e^x-\frac{a}{x}+2a=0$，得 $a=\frac{xe^x}{1-2x}$，再令 $g(x)=\frac{xe^x}{1-2x}(x>0)$，因为函数 $f(x)=e^x-a\ln x+2ax-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有两个极值点，所以 $g(x)=a$ 有两个零点．又 $g'(x)=-\frac{e^x(2x+1)(x-1)}{(1-2x)^2}(x>0)$，令 $g'(x)>0$，得 $0<x<1$，所以 $x\ne\frac{1}{2}$；令 $g'(x)<0$，得 $x>1$，所以函数 $g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减．由于 $g(0)=0$，$g(1)=-e$，根据数形结合法可得 $a<-e$，即 $a\in(-\infty,-e)$．故选 D．

法二：（指数切线放缩）$f'(x)=e^x-\frac{a}{x}+2a=0\Rightarrow e^x=-a(2-\frac{1}{x})$ 有两个交点，根据上一讲到指数与反比例函数切线放缩得 $e^{x-1}\ge 2-\frac{1}{x}\Rightarrow e^x\ge e(2-\frac{1}{x})$，故当仅当 $-a>e$ 时有两个交点，即 $a\in(-\infty,-e)$．故选 D．

10.【解析】法一：$f'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}-k$，若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，故 $k\le\frac{1-lnx}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，令 $g(x)=\frac{1-lnx}{x^2}$，$(x>0)$，$g'(x)=\frac{2lnx-3}{x^3}$，令 $g'(x)>0$，解得：$x>e^{\frac{3}{2}}$，令 $g'(x)<0$，解得：$0<x<e^{\frac{3}{2}}$，故 $g(x)$ 在 $(0,e^{\frac{3}{2}})$ 递

减，在 $(e^{\frac{3}{2}}$，$+\infty)$ 递增，故 $g(x)_{min}=g(e^{\frac{3}{2}})=-\dfrac{1}{2e^3}$，故答案为：$(-\infty,-\dfrac{1}{2e^3}]$.

法二：（同构式）若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，$k\le\dfrac{1-lnx}{x^2}=\dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{e}{x})^2\cdot\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{2e^2}\ln(\dfrac{e}{x})^2\cdot\dfrac{e^2}{x^2}=\dfrac{1}{2e^2}\cdot t\cdot\ln t$，由于 $t\ln t\in(-\infty,-\dfrac{1}{e}]$，故 $k\le\dfrac{1}{2e^2}\cdot(-\dfrac{1}{e})=-\dfrac{1}{2e^3}$，故答案为：$(-\infty,-\dfrac{1}{2e^3}]$.

11.【解析】法一：$f'(x)=2ax-lnx-1$，若 $f(x)$ 在 $[\dfrac{1}{e}$，$+\infty)$ 递增，则 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $[\dfrac{1}{e}$，$+\infty)$ 恒成立，则 $a\geqslant\dfrac{lnx+1}{2x}$ 在 $[\dfrac{1}{e}$，$+\infty)$ 恒成立，令 $g(x)=\dfrac{lnx+1}{2x}$，$x\in[\dfrac{1}{e}$，$+\infty)$，则 $g'(x)=-\dfrac{2lnx}{4x^2}$，令 $g'(x)>0$，解得：$x<1$，令 $g'(x)<0$，解得：$x>1$，故 $g(x)$ 在 $[\dfrac{1}{e}$，$1)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 递增，故 $g(x)max=g$（1）$=\dfrac{1}{2}$，故 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$；

法二：$f'(x)=2ax-lnx-1\ge 0$ 在区间 $[\dfrac{1}{e}$，$+\infty)$ 恒成立，由于 $\ln x\le x-1$，切点在 $(1,0)$，切点在区间内，故 $2a\ge 1$ 时满足条件，故答案为：$[\dfrac{1}{2}$，$+\infty)$.（口诀：切点在区间内，切点定最值，切点在区间外，端点定最值）

12.【解析】$f'(x)=b+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{bx^2+2x+b}{x^2}$，①$b\geqslant 0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在定义域单调递增，不符合题意；②$b<0$，$\triangle=4-4b^2>0$，$-1<b<0$，所以 $-1<b<0$，故答案为：$(-1,0)$.

13.【解析】法一：不等式 $e^x-1\geqslant kx+lnx$，对于任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立．等价于 $k\leqslant\dfrac{e^x-1-lnx}{x}$ 对于任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立．令 $f(x)=\dfrac{e^x-1-lnx}{x}$，$(x>0)$，$f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)+lnx}{x^2}$，令 $g(x)=e^x(x-1)+lnx$，$(x>0)$，则 $g'(x)=e^x+\dfrac{1}{x}>0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$g(1)=0$，$\therefore x\in(0,1)$ 时，$g(x)<0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)>0$．$\therefore x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$．$\therefore x\in(0,1)$ 时，$f(x)$ 单调递减，$x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增．$\therefore f(x)_{min}=f(1)=e-1$ $\therefore k\leqslant e-1$．故答案为：$e-1$.

法二：（同位同构式构造法）构造函数 $f(x)=e^x-x-1$，故 $e^x-ex+x-1-\ln x=ef(x-1)+f(\ln x)\ge 0$，当仅当 $x=1$ 时等号成立；同构式切线放缩最关键的点就是常数一定要消去，否则构造失败，$\therefore k\leqslant e-1$.

14.【解析】（1）当 $a=2$ 时，$f(x)=lnx-2x$，所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-2$．故切线的斜率 $k=f'$（1）$=-1$，则切线方程为 $y+2=-(x-1)$，即 $x+y+1=0$.

（2）法一：$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a$，①当 $a=0$ 时，$f(x)=lnx$ 有唯一零点 $x=1$，不合题意；

②当 $a<0$ 时，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的增函数，因为 f（1）$=-a>0$，$f(e^a)=a-ae^a=a(1-e^a)<0$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 有唯一零点，不合题意；

③当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{a}$，所以，当 $x\in(0,\dfrac{1}{a})$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上是增函数；

当 $x\in(\frac{1}{a}，+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}，+\infty)$ 上是减函数．所以在区间 $(0,+\infty)$ 上，函数 $f(x)$ 有极大值为 $f(\frac{1}{a})=ln\frac{1}{a}-1=-lna-1$，$\because e^a>a>0$，故 $\frac{1}{e^a}<\frac{1}{a}$，且 $e^a>1$，$\therefore f(\frac{1}{e^a})=-a-\frac{a}{e^a}=-a(1+\frac{1}{e^a})<0$，且当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，若 $f(x)$ 无零点，则 $f(\frac{1}{a})<0$，即 $-lna-1<0$，解得 $a>\frac{1}{e}$，故所求实数 a 的取值范围是 $(\frac{1}{e}，+\infty)$．

法二：(参变分离) $f(x)=lnx-ax=0$ 时，$a=\frac{\ln x}{x}$，令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，$x=e$ 时，$g'(e)=0$，显然 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$，故 $a>\frac{1}{e}$ 时，$f(x)=lnx-ax$ 无零点；

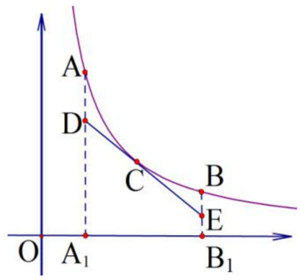
(3) 法一：设 $x_1>x_2>0$，由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 可得 $lnx_1-ax_1=0$，$lnx_2-ax_2=0$，$\therefore lnx_1-lnx_2=a(x_1-x_2)$，

即 $a=\frac{ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$，要证：$x_1+x_2>\frac{2}{a}$，只需证 $a(x_1+x_2)>2$，即证：$ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$．令 $t=\frac{x_1}{x_2}>1$，于是 $ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}\Leftrightarrow lnt>\frac{2(t-1)}{t+1}$．设函数 $h(t)=lnt-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，求导得 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，所以函数 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数，所以 $h(t)>h$ (1) $=0$，即不等式 $lnt>\frac{2(t-1)}{t+1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，故所证不等式 $x_1+x_2>\frac{2}{a}$ 成立．

法二：(对数平均不等式) 设 $x_1>x_2>0$，由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 可得 $lnx_1-ax_1=0$，$lnx_2-ax_2=0$，

$\therefore lnx_1-lnx_2=a(x_1-x_2)$，即 $\frac{1}{a}=\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$，故只需证：$\frac{1}{a}=\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$，

如图所示，在反比例函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 上任取两点 $A\left(a,\frac{1}{a}\right),B\left(b,\frac{1}{b}\right)$，点 $C\left(\frac{a+b}{2},\frac{2}{a+b}\right)$ 为 AB 在双曲线上的中点，$AA_1\perp x$ 轴交其于 A_1，$BB_1\perp x$ 轴交其于 B_1，过 C 作双曲线切线交 AA_1 和 BB_1 于 D,E 两点，根据 $S_{ACBB_1A_1}>S_{DEB_1A_1}\Rightarrow\int_a^b\frac{1}{x}dx>\frac{2}{a+b}\cdot(b-a)$，即 $\frac{b-a}{\ln b-\ln a}<\frac{a+b}{2}$，故 $\frac{1}{a}=\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$，即 $x_1+x_2>\frac{2}{a}$．



15.【解析】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $x>0$，$f'(x)=a-1-lnx$，若 $f'(x)=0$，则 $lnx=a-1$，$x=e^{a-1}$，又 $\because f'(x)$ 是单调递减的，$\therefore$ 当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,e^{a-1})$	e^{a-1}	$(e^{a-1}，+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	增函数	极大值	减函数

$\therefore f(x)$ 在区间 $(0,e^{a-1})$ 内为增函数，在区间 $(e^{a-1}，+\infty)$ 内为减函数．

（2）法一：$f(1)=0$，$f'(x)=a-1-lnx$．当 $a\leqslant 1$ 时，在 $x\geqslant 1$ 上，$f'(x)\leqslant 0$，故函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$f(x)\leqslant f(1)=0$．当 $a>1$ 时，在 $x\geqslant 1$ 上，$f'(x)=a-1-lnx=0$，解得 $x_1=e^{a-1}>1$．又 $f'(x)=a-1-lnx$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore$ 在 $(1,x_1)$ 上 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(1,x_1)$ 上单调递增，$f(x)\geqslant f$（1）$=0$ 与任意 $x\geqslant 1$，恒有 $f(x)\leqslant 0$ 成立矛盾．综上，实数 a 的取值范围为 $(-\infty$，$1]$．

法二：（切线放缩）若 $f(x)\leqslant 0$ 成立，则 $a(x-1)\leq xlnx$，过点 $(1,0)$ 作 $g(x)=x\ln x$ 的切线，可得方程 $0-x_0\ln x_0=(1+\ln x_0)(1-x_0)$，即 $0=1-x_0+\ln x_0$，易知 $x_0=1$，$a\leq g'(x_0)=1$，实数 a 的取值范围为 $(-\infty$，$1]$．

16.【解析】（1）因为点 $(1,1)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上，所以 $a=1$，$f(x)=\sqrt{x}-lnx$．又 $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$，所以 $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$．在该点处曲线的切线方程为 $y-1=-\dfrac{1}{2}(x-1)$ 即 $x+2y-3=0$

（2）法一：定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{a\sqrt{x}}{2x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{a\sqrt{x}-2}{2x}$ 讨论：(1）当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又 f（1）$=a\leqslant 0$，不满足 $f(x)\geqslant 2$；（2）当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 可得 $x=\dfrac{4}{a^2}$，列表可得

x	$(0,\dfrac{a^2}{4})$	$\dfrac{a^2}{4}$	$(\dfrac{4}{a^2},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减		单调递增

所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{4}{a^2})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{4}{a^2},+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{最小值}=f\left(\dfrac{4}{a^2}\right)=2-ln\dfrac{4}{a^2}$，所以令 $2-ln\dfrac{4}{a^2}\geqslant 2$ 解得 $a\geqslant 2$，所以 a 的取值范围为 $a\geqslant 2$．

法二：定义域为 $(0,+\infty)$，$f(x)\geqslant 2$ 恒成立即 $a\sqrt{x}-lnx\geqslant 2$ 恒成立，又 $\sqrt{x}>0$，所以 $a\geqslant\dfrac{2+lnx}{\sqrt{x}}$ 恒成立．令 $g(x)=\dfrac{2+lnx}{\sqrt{x}}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=-\dfrac{\sqrt{x}lnx}{2x^2}$，由 $g'(x)>0\Rightarrow 0<x<1$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$g(x)_{max}=g$（1）$=2$，所以 $a\geqslant 2$．

注意：本题的本质就是令 $t=\sqrt{x}$，则 $at-\ln t^2\geq 2\Rightarrow\dfrac{a}{2}t-1\geq\ln t$，显然 $a\geq 2$．

17.【解析】（1）$f(x)=\dfrac{e^x}{x}+a(x-lnx)$，定义域 $(0,+\infty)$．$f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}+a\dfrac{(x-1)}{x}=\dfrac{(x-1)(e^x+ax)}{x^2}$，当 $a=-e$ 时，$f'(x)=\dfrac{(x-1)(e^x-ex)}{x^2}$，由于 $e^x\geqslant ex$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增．故 $f(x)_{min}=f(1)=a+e=0$．

（2）法一：$f'(x)=\dfrac{(x-1)(e^x+ax)}{x^2}$，①当 $a=-e$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增．

$\therefore f(x)_{min}=f$（1）$=a+e=0$，$f(x)$ 只有一个零点．

②当 $a>-e$ 时，$ax>-ex$，故 $e^x+ax>e^x-ex\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增．$f(x)_{min}=f$（1）$=a+e>0$．故当 $a>-e$ 时，$f(x)$ 没有零点．

③当 $a<-e$ 时，令 $e^x+ax=0$，得 $\dfrac{e^x}{x}=-a$，令 $\varphi(x)=\dfrac{e^x}{x}$，$\varphi'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$，$\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增．$\therefore \varphi(x)_{min}=\varphi$（1）$=e$，$\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有两个零点 x_1，x_2，$0<x_1<1<x_2$，

$f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 单调递减，在 $(x_1$，$1)$ 单调递增，在 $(1,x_2)$ 单调递减，在 $(x_2$，$+\infty)$ 单调递增，$f(1)=a+e<0$，又 $x\to 0$ 时，$f(x)\to+\infty$，$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，此时 $f(x)$ 有两个零点，综上 $f(x)$ 有两个零点，则 $a<-e$．

法二：（同构式切线放缩法）$f(x)=\dfrac{e^x}{x}+a(x-lnx)=\dfrac{e^x}{x}+aln\dfrac{e^x}{x}$．令 $\dfrac{e^x}{x}=t(x>0)$，则 $x=\dfrac{1}{e}$ 时，$t_{\min}=e$，当 $\forall x\in(0,\dfrac{1}{e})\cup(\dfrac{1}{e},+\infty)$，$\exists t\in(e,+\infty)$，使 $y=\dfrac{e^x}{x}$ 与 $y=t$ 有两个交点，故当 $f(x)$ 有两个零点时，$f(t)=t+alnt=0$，即 $y=a$ 与 $y=-\dfrac{t}{\ln t}(t>e)$ 有且只有一个零点，根据函数 $y=-\dfrac{t}{\ln t}(t>e)$ 图像可得 $y=a<-e$．

18．【解析】(1）函数的定义域为 $(0,+\infty)$，函数的导数 $f'(x)=\dfrac{-lnx}{x^2}$，由 $f'(x)>0$ 得，$0<x<1$，即函数 $f(x)$ 为增函数，由 $f'(x)<0$ 得 $x>1$，即函数 $f(x)$ 为减函数，即当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 取得极大值，极大值为 f（1）$=1$．无极小值．

（3）当 $a\geqslant 1$ 时，$ae^x\geqslant e^x$，故要证不等式 $ae^x\geqslant(1+\dfrac{1}{x})(1+lnx)$ 成立，即证明 $e^x\geqslant(1+\dfrac{1}{x})(1+lnx)$ 成立，即 $\dfrac{e^x}{1+x}>\dfrac{1+lnx}{x}$，令 $g(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$，则 $g'(x)=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}>0$，$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在区间 $[0$，$+\infty)$ 上为增函数，故 $g(x)>g(0)=1$，即 $\dfrac{e^x}{1+x}>1$，由（1）得 $\dfrac{1+lnx}{x}\leqslant 1$，则 $\dfrac{e^x}{1+x}>\dfrac{1+lnx}{x}$ 成立，即 $ae^x\geqslant(1+\dfrac{1}{x})(1+lnx)$ 成立．

19．(1)【解析】$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x-a}{x^2}$．$(x>0)$．当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $f(1)=0$．因此 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$．当 $a>0$ 时，可得函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore x=a$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值即最小值，则 $f(a)=lna+1-a\geqslant 0$．令 $g(a)=lna+1-a$，$g(1)=0$．$g'(a)=\dfrac{1}{a}-1=\dfrac{1-a}{a}$，可知：$a=1$ 时，函数 $g(a)$ 取得极大值即最大值，而 $g(1)=0$．因此只有 $a=1$ 时满足 $f(a)=lna+1-a\geqslant 0$．故 $a=1$．$\therefore$ 实数 a 取值的集合是 $\{1\}$．注意：此题来自于 $\ln x\leq x-1$ 中将 $\dfrac{1}{x}$ 替换 x 后得到的 $\ln x\geq 1-\dfrac{1}{x}$，故 $a=1$；

（2）证明：由 (I) 可知：$a=1$ 时，$f(x)\geqslant 0$，即 $lnx\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$ 在 $x>0$ 时恒成立.

要证明：$e^x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2-lnx+x^2+(e-2)x$，即证明：$e^x\geqslant 1+x^2+(e-2)x$，即 $e^x-1-x^2-(e-2)x\geqslant 0$.

故构造 $h(x)=\dfrac{ex+(x-1)^2}{e^x}(x>0)$，则 $h(x)=\dfrac{-(x-1)(x+e-3)}{e^x}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)\uparrow$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)\downarrow$，得 $h(x)_{\max}=h(1)=1$，所以 $e^x\geq ex+(x-1)^2$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立

$\therefore \forall x>0$，$h(x)\geqslant 0$ 恒成立，即 $e^x-1-x^2-(e-2)x\geqslant 0$．综上可得：$e^x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2-lnx+x^2+(e-2)x$，成立.

22.【解析】(1) 根据题意可得，$f'(x)=\dfrac{a}{x}-e^x=\dfrac{a-xe^x}{x}(x>0)$，当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $y=f(x)$ 是减函数，无极值点；当 $a>0$ 时，令 $f(x)=0$，得 $a-xe^x=0$，即 $xe^x=a$，又 $y=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在一解，不妨设为 x_0，所以函数 $y=f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上是单调递增的，在 $(x_0,\ +\infty)$ 上是单调递减的；所以函数 $y=f(x)$ 有一个极大值点，无极小值点；总之：当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 无极值点；当 $a>0$ 时，函数 $y=f(x)$ 有一个极大值点，无极小值点；

（2）法一：证明：$a=2$ 时，$f(x)=2lnx-e^x$，$f'(x)=\dfrac{2-xe^x}{x}(x>0)$，由（1）可知 $f(x)$ 有极大值 $f(x_0)$，且 x_0 满足 $x_0e^{x_0}=2\ldots$①，又 $y=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，且 $0<2<e$，所以 $x_0\in(0,1)$，又知：$f(x)_{min}=f(x_0)=2lnx_0-e^{x_0}\ldots$②；由①可得 $e^{x_0}=\dfrac{2}{x_0}$，代入②得 $f(x)_{min}=f(x_0)=2lnx_0-\dfrac{2}{x_0}$，令 $g(x)=2lnx-\dfrac{2}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2(x+1)}{x^2}>0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数，所以 $g(x_0)<g(1)=-2<0$，即 $g(x_0)<0$，所以 $f(x)<0$.

法二：（思路，详细过程请读者自己完成）$a=2$ 时，$f(x)=2lnx-e^x\leq 2\cdot\dfrac{x}{e}-e^x$，由于 $e^x\geq ex$，故命题得证；

22.【解析】(1) $\because g(x)=\dfrac{lnx-1}{x}(x>0)$，故 $g'(x)=\dfrac{2-lnx}{x^2}$，令 $g'(x)>0$，解得：$0<x<e^2$，令 $g'(x)<0$，解得：$x>e^2$，故 $g(x)$ 在 $(0,e^2)$ 递增，在 $(e^2,\ +\infty)$ 递减，故 $g(x)$ 极大值 $=g(e^2)=\dfrac{1}{e^2}$；

（2）（放对再放指，不行找基友）证明：要证 $f(x)+1<e^x-x^2$．即证 $e^x-x^2-xlnx-1>0$，

先证明 $lnx\leqslant x-1$，取 $h(x)=lnx-x+1$，则 $h'(x)=\dfrac{1-x}{x}$，易知 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 递减，故 $h(x)\leqslant h(1)=0$，即 $lnx\leqslant x-1$，当且仅当 $x=1$ 时取“=”，故 $xlnx\leqslant x(x-1)$，$e^x-x^2-xlnx\geqslant e^x-2x^2+x-1$，故只需证明当 $x>0$ 时，$e^x-2x^2+x-1>0$ 恒成立，构造函数 $t(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{e^x}$，则 $t'(x)=-\dfrac{(2x-1)(x-2)}{e^x}$，

x	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},2)$	2	$(2,+\infty)$

$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减	极小	单调递增	极大	单调递减

根据上表可知，由于 $h(0)=1$，$h(x)_{\max}=h(2)=\frac{7}{e^2}<1$，故 $x>0$ 时，$f(x)+1<e^x-x^2$．

23．【解析】(1) $a=0$ 时，$f(x)=e^x-1-x$，$f'(x)=e^x-1$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，故在单调递减，在单调递增，$f(x)_{min}=f(0)=0$，$\therefore f(x)\geqslant 0$

(2) $f'(x)=e^x-1-2ax$，令 $h(x)=e^x-1-2ax$，则 $h'(x)=e^x-2a$．

①当 $2a\leqslant 1$ 时，在 $[0,+\infty)$ 上，$h'(x)\geqslant 0$，$h(x)$ 递增，$h(x)\geqslant h(0)$，即 $f'(x)\geqslant f'(0)=0$，$\therefore f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 为增函数，$\therefore f(x)\geqslant f(0)=0$，$\therefore a\leqslant\frac{1}{2}$ 时满足条件；

②当 $2a>1$ 时，令 $h'(x)=0$，解得 $x=ln2a$，当 $x\in[0,ln2a)$ 上，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

$\therefore x\in(0,ln2a)$ 时，有 $h(x)<h(0)=0$，即 $f'(x)<f'(0)=0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $(0,ln2a)$ 为减函数，

$\therefore f(x)<f(0)=0$，不合题意，综上得实数 a 的取值范围为 $(-\infty,\frac{1}{2}]$；

(3) 由 (2) 得，当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$x>0$，$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$，即 $e^x-1>x+\frac{x^2}{2}$，欲证不等式 $(e^x-1)ln(x+1)>x^2$，只需证 $ln(x+1)>\frac{2x}{x+2}$，设 $F(x)=ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}$，则 $F'(x)=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$，$\because x>0$ 时，$F'(x)>0$ 恒成立，且 $F(0)=0$，$\therefore F(x)>0$ 恒成立．所以原不等式得证．

专题 4　三次函数的图象和性质

选择答案

$1-5:ADAAC$　$6-10:CBBBA$　$11-15:AB\ \ CC$　$16-20:DABCC$

$21-25:ADCBD$　$26-30:CBACB$　$31-35:ADCCB$　$36-39:ADCD$

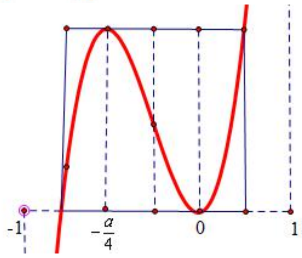
填空题答案：

1. $(0,1)$　2. -9　3. $(-1,+\infty)$　4. 2　5. $[-1,\frac{1}{2}]$　6. $(-3,-1)$　7. $(-\infty,-2)$　8. $(7,+\infty)$

9. $c<\frac{-10}{3}$

解答题答案：

1. $a=12$．解 $f'(x)=ax^2+4x$，另 $f'(x)=0$ 得 $x_1=-\frac{a}{4}$，$x_2=0$，画出四段论图像：因为 $f(0)=0$，易得 $f(x)_{\min}=f(-1)=\frac{6-a}{3}=-2$，得 $a=12$．

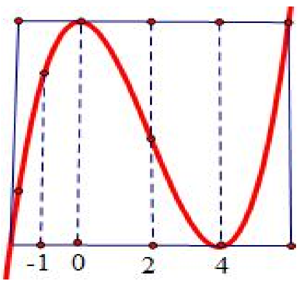


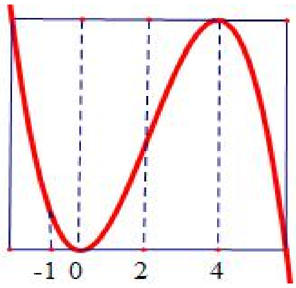
2. $a=2$，$b=3$.

【解析】显然 $a\neq 0$，$f'(x)=3ax^2-12ax=3a\left(x^2-4x\right)$，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=4$（舍去）

当 $a>0$，画出四段论图像左得 $f(x)_{\max}=f(0)=b=3$，$f(x)_{\min}=f(2)=-16a+3=-29$，得 $a=2$；

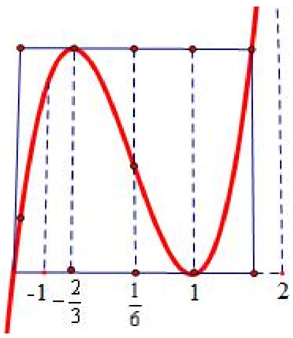
当 $a<0$，画出四段论图像右得 $f(x)_{\min}=f(0)=b=-29$，$f(x)_{\max}=f(2)=-16a-29=3$，得 $a=-2$；





3. (1) $b>\frac{1}{12}$，(2)$c\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

【解析】(1) 由题意得 $f'(x)=3x^2-x+b$，因为 $f(x)$ 在定义域内单调递增，所以 $f'(x)\geq 0$ 恒成立，即 $\Delta=1-2b\leq 0$，解得 $b\geq\frac{1}{12}$；(2) 由题意得 $x=1$ 为 $f'(x)=3x^2-x+b$ 的一个根，设另一个根为 x_0，易得 $x_0=-\frac{2}{3}$，$b=-2$，所以 $f'(x)=3x^2-x-2$，画出四段论图像易得 $f(x)_{\max}=f(2)=2+c$，即 $c^2>2+c$，解得 $c\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.



4.【解析】(1) 导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，过点 $(\frac{1}{3},0)$ 和 $(1,0)$. 可得：$x<\frac{1}{3}$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增；$\frac{1}{3}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减；$x>1$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增.

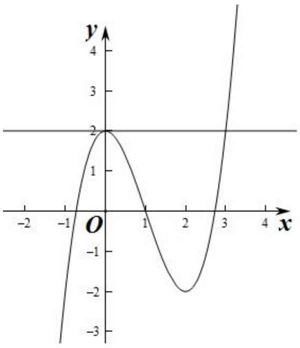
$\therefore$函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(\frac{1}{3},1)$，极大值点为 $\frac{1}{3}$．故答案为：$(\frac{1}{3},1)$，$\frac{1}{3}$．

（2）$\because f'(x)=3ax^2+2bx+1$，由题意知，$\begin{cases} f'(\frac{1}{3})=0; \\ f'(1)=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$．

（3）由 (II) 可得：$f(x)=x^3-2x^2+x+c$，由 (I) 可得：$\frac{1}{3}$ 为极大值点，1 为极小值点．$\because f(x)$ 恰有两个零点，$\therefore f(\frac{1}{3})=\frac{1}{27}-2\times\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+c=0$，或 f （1）$=1-2+1+c=0$，$c=-\frac{4}{27}$ 或 0．

5.【解析】（1）由 $g(x)=x^3-3x^2+2$，得 $g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，令 $g'(x)<0$，得 $0<x<2$，即 $g(x)$ 的递减区间为 $(0,2)$．又 $g(x)$ 在区间 $(0,m)$ 上递减，$\therefore (0，m)\subseteq(0，2)$，$\therefore 0<m\leqslant 2$，

（2）由 $g'(x)>0$ 得 $x>2$ 或 $x<0$，即 $g(x)$ 在 $(-\infty，0]$ 上递增，在 $[0，2]$ 上递减，在 $[2，+\infty)$ 上递增，即当 $x=0$ 时取得极大值，极大值为 $f(0)=2$，当 $x=2$ 时，取得极小值，极小值为 $f\left(2\right)=-2$，令 $g(x)=2$，解得 $x=0$ 或 $x=3$，若函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty，n]$ 上的最大值为 2，结合图象观察，得 $n\in[0，3]$，即实数 n 的取值范围是 $[0，3]$．



6．【解析】（1）当 $a=6$，且 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x-1$，所以 $f'(x)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=2$，或 $x=3$；当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调递增区间是 $(0,2)$，$(3,+\infty)$，单调递减区间是 $(2,3)$；

（2）当 $a<0$ 时，若 $x<0$，则 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-ax-1$，所以 $f'(x)=x^2-5x-a=x(x-5)-a$；因为 $x<0$，$a<0$，所以 $f'(x)>0$；若 $x>0$，则 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+ax-1$，所以 $f'(x)=x^2-5x+a$；令 $f'(x)=0$，$\triangle=25-4a>0$，所以有两个不相等的实根 x_1，x_2，且 $x_1x_2<0$；不妨设 $x_2>0$，所以当 x 变化时，$f'(x)$，

$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,x_2)$	x_2	$(x_2，+\infty)$
$f'(x)$	$+$	无定义	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	极大值	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$

因为函数 $f(x)$ 图象是连续不断的，所以当 $a<0$ 时，$f(x)$ 即存在极大值又有极小值.

7. 【解析】(1) 根据题意，函数 $f(x)=2x^3+3ax^2+1$，其定义域为 R，当 $a=0$ 时，$f(x)=2x^3+1$，其导数 $f'(x)=6x^2$，又由 f' (1) $=6$，f (1) $=3$，则 $f(x)$ 在点 $(1$，f (1) $)$ 的切线方程为 $y-3=6(x-1)$，即 $6x-y-3=0$；

(2) 根据题意，函数 $f(x)=2x^3+3ax^2+1$，其导数 $f'(x)=6x^2+6ax=6x(x+a)$，分 3 种情况讨论：

①，当 $a=0$ 时，$f'(x)=6x^2\geqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数；

②，当 $a>0$ 时，若 $f'(x)=6x(x+a)>0$，解可得 $x<-a$ 或 $x>0$，则 $f(x)$ 的递增区间为 $(-\infty,-a)$ 和 $(0,+\infty)$，递减区间为 $(-a,0)$；

③，当 $a<0$ 时，若 $f'(x)=6x(x+a)>0$，解可得 $x<0$ 或 $x>-a$，则 $f(x)$ 的递增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(-a,+\infty)$，递减区间为 $(0,-a)$；

综上可得：当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的递增区间为 $(-\infty,-a)$ 和 $(0,+\infty)$，递减区间为 $(-a,0)$；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的递增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(-a,+\infty)$，递减区间为 $(0,-a)$；

(3) 根据题意，分 3 种情况讨论：

①，当 $-a\leqslant 0$ 时，有 $a\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $[0$，$2]$ 上递增，此时 $f(x)$ 在区间 $[0$，$2]$ 上的最小值为 $f(0)=1$，

②，当 $0<-a<2$ 时，即 $-2<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $[0$，$-a]$ 上递减，在 $(-a,2)$ 上递增，此时 $f(x)$ 在区间 $[0$，$2]$ 上的最小值为 $f(-a)=a^2+1$，

③，当 $-a\geqslant 2$ 时，即 $a\leqslant -2$ 时，$f(x)$ 在 $[0$，$2]$ 上递减，此时 $f(x)$ 在区间 $[0$，$2]$ 上的最小值为 f (2) $=17+12a$，

综合可得：当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(0)=1$，

当 $-2<a<0$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(-a)=a^2+1$，

当 $a\leqslant -2$ 时，$f(x)$ 的最小值为 f (2) $=17+12a$.

8.【解析】(1) $f'(x)=6x^2-12x$，则 $6x^2-12x=-6$，所以，$x=1$，当 $x=1$，$y=-3$，所以 $-3=-6\times 1+m$，

解得 $m=3$．（2）$\because f(x)=2x^3-ax^2+1(a\in R$，$x\in(0,+\infty))$ $\therefore$ 由 $f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)=0$，得到 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{a}{3}$，当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)=2x(3x-a)>0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又因为函数 $f(x)$ 的图象过点 $(0,1)$，即 $f(0)=1>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内没有零点，不合题意，当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $x>\dfrac{a}{3}$，即函数 $f(x)$ 在区间 $(\dfrac{a}{3}$，$+\infty)$ 上单调递增，由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<\dfrac{a}{3}$，即函数 $f(x)$ 在区间在 $(0,\dfrac{a}{3})$ 上单调递减，且过点 $(0,1)$，要使函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点，则须 $f(\dfrac{a}{3})=0$，即 $\dfrac{2a^3}{27}-\dfrac{a^3}{9}+1=0$，解得 $a=3$，综上可得函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点时 $a=3$，此时函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,1)$

（4）当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(\dfrac{a}{3}$，$+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,\dfrac{a}{3})$ 上单调递减，此时函数 $f(x)$ 有两个极值点，极大值为 $f(0)=1$，极小值为 $f(\dfrac{a}{3})=1-\dfrac{a^3}{27}$，且 $f(-1)=-a-1$，f（1）$=3-a$．

①当 $\dfrac{a}{3}\geqslant 1$ 即 $a\geqslant 3$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减，$f(x)_{max}=f(0)=1$，又 $f(-1)=-1-a$，f（1）$=3-a$，即 $f(-1)<f$（1），$f(x)_{min}=-1-a$，所以 $1+(-1-a)=1$，解得 $a=-1$（舍）．

②当 $\dfrac{a}{3}<1$ 即 $0<a<3$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,\dfrac{a}{3})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{a}{3},1)$ 上单调递增

$f(-1)=-1-a<0$，即 $f(\dfrac{a}{3})=1-\dfrac{a^3}{27}>0$，所以 $f(x)_{min}=-1-a$．若 $f(0)-f$（1）$=a-2\geqslant 0$，即 $2\leqslant a<3$ 时，$f(x)_{max}=f(0)=1$，所以 $1+(-1-a)=1$，解得 $a=-1$（舍）．若 $f(0)-f$（1）$=a-2<0$，即 $0<a<2$ 时，$f(x)_{max}=f$（1）$=3-a$，所以 $(3-a)+(-1-a)=1$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$．综上，$a=\dfrac{1}{2}$．

8．【解析】(1) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}$ 的导数为 $f'(x)=x^2$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(1,\dfrac{5}{6})$ 处的切线斜率为 1，可得切线方程为 $y-\dfrac{5}{6}=x-1$ 即 $y=x-\dfrac{1}{6}$，切线与 x 轴和 y 轴的交点为 $(\dfrac{1}{6}$，$0)$，$(0,-\dfrac{1}{6})$，可得切线与 x 轴和 y 轴围成的三角形面积为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{72}$；

（2）$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}$，则 $f'(x)=x^2$，设切点为 $(m,\dfrac{1}{3}m^3+\dfrac{1}{2})$，则 $f'(m)=m^2$．可得过切点处的切线方程为 $y-\dfrac{1}{3}m^3-\dfrac{1}{2}=m^2(x-m)$，把点 $(2,a)$ 代入得 $a-\dfrac{1}{3}m^3-\dfrac{1}{2}=m^2(2-m)$，整理得 $4m^3-12m^2-3+6a=0$，若过点 $(2,a)$ 可作三条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，则方程 $4m^3-12m^2-3+6a=0$ 有三个不同根．令 $g(x)=4x^3-12x^2-3$，则 $g'(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$，当 $x\in(-\infty$，$0)\cup(2$，$+\infty)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(0,2)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,0)$，$(2,+\infty)$；单调减区间为 $(0,2)$．可得当 $x=0$ 时，$g(x)$ 有极

大值为 $g(0)=-3$；当 $x=2$ 时，$g(x)$ 有极小值为 g（2）$=-19$．由 $-19<-6a<-3$，得 $\frac{1}{2}<a<\frac{19}{6}$．

则实数 n 的取值范围是 $(\frac{1}{2}，\frac{19}{6})$．

10.【解析】(1) $f'(x)=3ax^2-6x$，由已知 f'（2）$=12a-12=0$，得 $a=1$，经检验当 $a=1$ 时，满足题意，故 $a=1$．(2) 由 (1) 可知 $a=1$，$f'(x)=3x(x-2)$，当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增；当 $0<x<2$ 时，$f(x)<0$，$f(x)$ 递减；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增；因此，$f(x)$ 极大值为 $f(0)=0$，极小值为 f（2）$=-4$，又由 $f(x)=0$ 得 $x=0$ 或 $x=3$，由 $f(x)=-4$ 得 $x=2$ 或 $x=-1$，故 $m-n$ 的最大值为 4．

11.【解析】(1) $f'(x)=3x^2+6ax+3(a^2-1)$．由题意得 f'（1）$=0$，即 $3+6a(a^2-1)=0$，解得 $a=0$ 或 $a=-2$．当 $a=0$ 时，$f'(x)=3x^2-3$，当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，满足题意．当 $a=2$ 时，$f'(x)=3x^2-12x+9$，当 $x<1$ 或 $x>3$ 时，$f'(x)>0$；当 $1<x<3$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，不满足题意．综上，$a=0$．

(2) $g(x)=x^3-3ax^2-3x+5a(a>0)$．所以 $g'(x)=3x^2-6ax-3$，因为 $\triangle=36a^2+36>0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 恒有两个极值点．由题意可知 x_1，x_2 是 $g'(x)=3x^2-6ax-3=0$ 的两根，所以 $x_1+x_2=2a$，$x_1x_2=-1$．由 $g(x_1)+g(x_2)\leqslant 0$，得 $x_1{}^3+x_2{}^3-3a(x_1{}^2+x_2{}^2)-3(x_1+x_2)+10a\leqslant 0$．即 $(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]-3a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-3(x_1+x_2)+10a\leqslant 0$．将 $x_1+x_2=2a$，$x_1x_2=-1$ 代入整理的 $a^3-a\geqslant 0$．因为 $a>0$，所以 $a^2-1\geqslant 0$ 解得 $a\geqslant 1$．所以 a 的最小值 1．

专题 6 同构式下的函数体系

1.【解析】由 $f(x)=x\cdot\ln x-a\cdot e^x$，得 $f'(x)=1+\ln x-a\cdot e^x=0$ 有两解，构造 $g(x)=e^{x-1}+x$，易得 $g(x)$ 在 $(0，+\infty\uparrow)$，又 $x\geq\ln x+1$，得 $g(x)\geq g(\ln x+1)$，即 $e^{x-1}+x\geq x+\ln x+1$，解得 $0<a<\frac{1}{e}$，选 A.

2.【解析】由题意得 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cdot\ln x=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1}{x}$，令 $\frac{1}{x}=t$，则 $f(x)=t-t\cdot\ln t$，$f'(x)=-\ln t$，由图像易得选 B．

3.【解析】因为 $f(x)=\frac{e^x}{x}$ 在 $(-\infty，0)$ 和 $(0，1)$ 上单调递减，在 $(1，+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)=\frac{e^{2x}}{x}=2\cdot\frac{e^{2x}}{2x}$ 在 $(-\infty，0)$ 上单调递减，选 B．

4.【解析】由 $2x^2e^{2x}+\ln x=0\Rightarrow 2xe^{2x}=-\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}=e^{\ln\frac{1}{x}}\ln\frac{1}{x}\Rightarrow 2x=\ln\frac{1}{x}\Rightarrow 2x_0+\ln x_0=0$．

5.【解析】$\ln a = me^{mb} \Rightarrow b\ln a = mbe^{mb} \Rightarrow b\ln a \le a\ln a = mbe^{mb}$，同构 $x\ln x = mxe^{mx}$，令 $f(x) = xe^{x}$，

即 $f(\ln x) = f(mx)$，得 $\ln x \le mx \Rightarrow m \ge \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)_{\max} = \dfrac{1}{e}$．选 A.

6.【解析】$\log_2 x - k\cdot 2^{kx} \geqslant 0 \Rightarrow \log_2 x \ge k\cdot 2^{kx} \Rightarrow x\cdot \log_2 x \ge kx\cdot 2^{kx} \Rightarrow 2^{\log_2 x}\cdot \log_2 x \ge kx\cdot 2^{kx}$，即

$\log_2 x \ge kx \Rightarrow k \le \left(\dfrac{\log_2 x}{x}\right)_{\min} = \dfrac{\log_2 e}{e}$.

7.【解析】$e^{2\lambda x} - \dfrac{lnx}{2\lambda} \geqslant 0 \Rightarrow 2\lambda xe^{2\lambda x} \ge x\ln x = e^{\ln x}\ln x$，即 $2\lambda x \ge \ln x$ 恒成立，$\lambda \ge \left(\dfrac{\ln x}{2x}\right)_{\max} = \dfrac{1}{2e}$.

8.【解析】由题意得：$m\ln(x+1) - 3x - 3 > mx - 3e^{x} \Rightarrow 3(e^{x} - x - 1) > mx - m\ln(x+1)$，右边凑 1，

得 $3(e^{x} - x - 1) > m(x + 1 - \ln(x+1) - 1) \Rightarrow 3(e^{x} - x - 1) > m\left(e^{\ln(x+1)} - \ln(x+1) - 1\right)$，得 $m \le 3$.（说明：定义域大于零，所以 $x > \ln(x+1)$，即 $m = 3$ 成立）.

9.【解析】由 $e^{x} \ge x + 1$ 得 $e^{x - \frac{1}{2}} \ge x + \dfrac{1}{2}$，所以 $2e^{x - \frac{1}{2}} \ge 2x + 1$，即 $\dfrac{2}{\sqrt{e}}\cdot ex \ge 2x + 1$，所以 $0 < a < \dfrac{2}{\sqrt{e}}$（等号为相切，故不取）.

10.【解析】(1) 由题意得 $f(x) + \dfrac{\ln(-x)}{x} > \dfrac{1}{2}$，即 $-x - \ln(-x) + \dfrac{\ln(-x)}{x} > \dfrac{1}{2}$，令 $-x = t$，则 $t \in (0, e)$，只需证 $t - \ln t - \dfrac{\ln t}{t} > \dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{2t^2}{t+1} > \ln t$，当 $t \in (0, 1]$ 时明显成立，当 $t > 1$ 时 $\dfrac{2t}{t+1} > \dfrac{1}{e}$ 成立；

(2) 由 $\ln x \le x - 1$，得 $\ln(e^2 x) \le e^2\cdot x - 1$，即 $\ln x \le e^2 x - 3 \Rightarrow \ln(-x) \le -e^2 x - 3 \Rightarrow -e^2 x - \ln(-x) \ge 3$，当且仅当 $x = -e^{-2}$ 时等号成立，所以 $a = -e^{2}$.

11.【解析】(1) 略；

(2) 构造 $g(x) = \ln(1+x) - x$，易得 $g(x)$ 在 $-1 < x < 0$ 上 $\uparrow$，$g(x) \le g(0) = 0$，当 $a \leqslant -2$，

$f(x) = (x+a)ln(x+1) - ax \ge x\cdot \ln(1+x) - 2(\ln(1+x) - x)$，得 $f(x) \ge (x+2)\cdot \ln(1+x) + 2x$，即证

$(x-2)\cdot \ln(1+x) > -2x\cdot e^{-x}$，构造 $g(x) = x\cdot e^{x}$，易得在 $-1 < x < 0$ 时，$g(x)\downarrow$，又因为 $x \ge \ln(x+1)$，所以

$g(-x) \le g[-\ln(x+1)]$，即 $-x\cdot e^{-x} \le -\ln(x+1)\cdot e^{-\ln(x+1)}$，得 $-2x\cdot e^{-x} \le -2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$，又

$-2x\cdot e^{-x} < (x-2)\cdot \ln(1+x)$，所以只需证 $\dfrac{-2}{x+1} > x + 2$，即 $x^2 - x > 0$，显然成立，得证.

12.【解析】(1) 略；(2) 因为 $e^{x} + x \ge ex + \ln(ex)$，当且仅当 $x = 1$ 时等号成立，所以 $e^{x} - \ln x - 1 \ge (e-1)x$，

又 $e^{x} + bx - 1 = \ln x$，所以 $e^{x} - \ln x - 1 = -bx$，要使方程有两个实根，则 $-b > e - 1$，即 $b < 1 - e$.

13．【解析】（1）因为 $\frac{1}{e}x\geq\ln x$，所以 $\frac{1}{e}x^2\geq\ln x^2$，当且仅当 $x=\sqrt{e}$ 取等号，得 $\frac{1}{2e}x^2\geq\ln x$，由题意 $ax\geq\frac{\ln x}{x}\Rightarrow ax^2\geq\ln x$，所以 $a\geq\frac{1}{2e}$；

（2）因为 $x-1\geq\ln x$，所以 $x^2-1\geq2\ln x$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，得 $\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\geq\ln x$（在 $x=1$ 处相切），依题意 $f(x)=ax-\frac{lnx}{x}$ 与 a 相切等价于 $a\left(x^2-x\right)$ 与 $\ln x$ 相切，得 $a=1$．

14．【解析】（1）略；

（2）由题意得 $f(x)+1<e^x-x^2\Rightarrow x\ln x+1<e^x-x^2$，即证 $\frac{2x^2-x+1}{e^x}<1$，令 $g(x)=\frac{2x^2-x+1}{e^x}$，即证 $g(x)<1$，得 $g'(x)=\frac{-\left(2x^2-3x+2\right)}{e^x}<0$，所以 $g(x)\downarrow$，所以 $g(x)<g(0)=1$，得证．

15.【解析】(1) 略；(2) 由题意得 $kf(x)<\frac{1}{2}x\Rightarrow k\cdot\ln x<\frac{1}{2}x^2\Rightarrow k\cdot2\ln x<x^2\Rightarrow k\cdot\frac{\ln x^2}{x^2}<1$，构造 $g(x)=\frac{\ln x^2}{x^2}$，易得 $g(x)\in(-\infty,\ 0)\cup\left(0,\ \frac{1}{e}\right)$，所以 $0<k<e$．

16.【解析】(1) 略；(2) 由题意得 $x\cdot e^x>a(x+\ln x)\Rightarrow e^{x+\ln x}>a(x+\ln x)$，因为 $e^x\geq ex$ 得 $e^{x+\ln x}\geq e(x+\ln x)$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，所以等价于证明 $e(x+\ln x)>a(x+\ln x)$，即 $a<e$．

17.【解析】(1) 略；(2) 由题意得 $f(x)=x\cdot e^x+a(\ln x+x)=e^{x+\ln x}+a(\ln x+x)$，令 $\ln x+x=t$，得 $f(x)=g(t)=e^t+at$，$g'(t)=e^t+a$，得 $g'(t)=0\Rightarrow a=\ln(-a)$，所以 $f(x)_{\min}=m=g(\ln(-a))=-a+a\ln(-a)=-a\left(1+\ln\frac{1}{-a}\right)\leq-a\cdot\frac{1}{-a}=1$，所以 $m\leqslant1$．

18.【解析】(1) 略；(2) 由题意得 $xe^x-a(\ln x+x+1)+e\geq0$，令 $t=\ln x+x$，得 $e^t-a(t+1)+e\geq0$，又 $e^t\geq et$，所以 $et+e\geq a(t+1)$ 得 $a\leq e$．

19．【解析】（2）由题意得 $f(x)=\frac{e^x}{x}+a(\ln x-x)$，即 $f(x)=e^{x-\ln x}+a(\ln x-x)$，令 $x-\ln x=t(t\geq1)$，则 $f(x)=e^t-at$，令 $g(t)=e^t-at(t\geq1)$，则 $g'(t)=e^t-a$，当 $a\leq e$ 时，$g'(t)\geq0$，$g(t)\uparrow$，即 $g(t)\geq g(1)=e-a$；当 $a>e$，令 $g'(t)=0$，得 $t=\ln a$，$g(t)_{\min}=g(\ln a)=a-a\ln a$．

20.【解析】由题意得 $f(x)=\frac{\ln x+a}{x}$，$g(x)=e^{2x}-2$，$f(x)\leq g(x)\Rightarrow\frac{\ln x+a}{x}\leq e^{2x}-2$，即 $\ln x+a\leq e^{\ln x+2x}-2x$，即 $e^{\ln x+2x}-2x-\ln x\geq1$（当且仅当 $\ln x+2x=0$），$\therefore a\leq1$．

21．【解析】（2）由题意得 $xe^x+1>f(x)+m$ 即 $xe^x+1>x+\ln x+m=e^{x+\ln x}-(x+\ln a)+1\geq2$（$x+\ln x=0$ 时

取等），所以$m\in(-\infty，2)$．

22．【解析】（2）由题意得 $xe^{x}-ax-a\ln x>1$，$f(x)=e^{x+\ln x}-a(x+\ln x)\geq(1-a)(x+\ln x)+1\geq1$，即 $(1-a)(x+\ln x)\geq0$（$a=1$时取等），令 $f(x)-1=g(t)=e^{t}-(at+1)$，接下来分类讨论说明单调性．

23．【解析】(2）由题意得 $f(x)=e^{x+\ln x}-a(x+\ln x)$，令 $t=x+\ln x$，$f(x)=g(t)=e^{t}-at$，接下来分类讨论说明单调性．