第二章 数列参考答案

专题 1 高考中的数列基础知识

等差数列:

1．B; 2．C; 3．C; 4．B; 5．B; 6．A; 7．C; 8．B; 9．A; 10．C; 11．B; 12．B; 13．B; 14．B; 15．B; 16．A; 17．A; 18．A; 19．C; 20．B; 21．14; 22．$a_n=6n-3$; 23．20; 24．6; 25．10; 26.27; 27．8; 28．$\frac{5}{6}n^2-\frac{7}{6}n$; 29．20; 30．15; 31．35; 32．1; $\frac{1}{4}n(n+1)$; 33．74; 34．-1; 35．110; 36．81; 37．63;

38． （1）$\{a_n\}$是等差数列，且$a_1=ln2$，$a_2+a_3=5ln2$．可得：$2a_1+3d=5ln2$，可得$d=ln2$，$\{a_n\}$的通项公式；$a_n=a_1+(n-1)d=nln2$，

（2）$e^{a_n}=e^{ln2^n}=2^n$，$\therefore e^{a_1}+e^{a_2}+\ldots+e^{a_n}=2^1+2^2+2^3+\ldots+2^n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$．

39.（1）$\because$等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=-7$，$S_3=-15$，

$\therefore a_1=-7$，$3a_1+3d=-15$，解得$a_1=-7$，$d=2$，$\therefore a_n=-7+2(n-1)=2n-9$；

（2）$\because a_1=-7$，$d=2$，$a_n=2n-9$，$\therefore S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{1}{2}(2n^2-16n)=n^2-8n=(n-4)^2-16$，

$\therefore$当$n=4$时，前n项的和S_n取得最小值为-16．

40.【解析】(1) (I)由$a_n^2+2a_n=4S_n+3$，可知$a_{n+1}^2+2a_{n+1}=4S_{n+1}+3$

两式相减得$a_{n+1}^2-a_n^2+2(a_{n+1}-a_n)=4a_{n+1}$，即$2(a_{n+1}+a_n)=a_{n+1}^2-a_n^2=(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)$，

$\because a_n>0$，$\therefore a_{n+1}-a_n=2$，$\because a_1^2+2a_1=4a_1+3$，$\therefore a_1=-1$（舍）或$a_1=3$，

则$\{a_n\}$是首项为3，公差$d=2$的等差数列，$\therefore\{a_n\}$的通项公式$a_n=3+2(n-1)=2n+1$

（2）$\because a_n=2n+1$，$\therefore b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})$，

$\therefore$数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3})=\frac{n}{3(2n+3)}$．

等比数列:

1．B; 2．C; 3．C; 4．C; 5．D; 6．C; 7．D; 8．B; 9．A; 10．B; 11．A; 12．A;
13．-63; 14．32; 15．1; 121; 16．64; 17．1; 18．3^{n-1}; 19．6; 20．5; 21．4; 22．50; 23．$(-2)^{n-1}$; 24．63; 25．2; $2^{n+1}-2$; 26．2; 27．$\frac{1}{4}$; 28．-7;

29.【解析】(1) $\because$等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_5=4a_3$．

$\therefore 1\times q^4=4\times(1\times q^2)$，解得 $q=\pm2$，当 $q=2$ 时，$a_n=2^{n-1}$，当 $q=-2$ 时，$a_n=(-2)^{n-1}$，

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为，$a_n=2^{n-1}$，或 $a_n=(-2)^{n-1}$．

（2）记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．当 $a_1=1$，$q=-2$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{1-(-2)^n}{1-(-2)}=\dfrac{1-(-2)^n}{3}$，

由 $S_m=63$，得 $S_m=\dfrac{1-(-2)^m}{3}=63$，$m\in N$，无解；

当 $a_1=1$，$q=2$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，

由 $S_m=63$，得 $S_m=2^m-1=63$，$m\in N$，解得 $m=6$．

30．【解析】（1）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$na_{n+1}=2(n+1)a_n$，则：$\dfrac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_n}{n}}=2$（常数），由于 $b_n=\dfrac{a_n}{n}$，故：$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$，

数列 $\{b_n\}$ 是以 b_1 为首项，2 为公比的等比数列．整理得：$b_n=b_1\cdot2^{n-1}=2^{n-1}$，所以：$b_1=1$，$b_2=2$，$b_3=4$．

（2）数列 $\{b_n\}$ 是为等比数列，由于 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$（常数）；

（3）由（1）得：$b_n=2^{n-1}$，根据 $b_n=\dfrac{a_n}{n}$，所以：$a_n=n\cdot2^{n-1}$．

31．【解析】（1）$\because S_n=1+\lambda a_n$，$\lambda\neq0$．$\therefore a_n\neq0$．

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=1+\lambda a_n-1-\lambda a_{n-1}=\lambda a_n-\lambda a_{n-1}$，即 $(\lambda-1)a_n=\lambda a_{n-1}$，

$\because \lambda\neq0$，$a_n\neq0$．$\therefore \lambda-1\neq0$．即 $\lambda\neq1$，即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$，$(n\geqslant2)$，

$\therefore \{a_n\}$ 是等比数列，公比 $q=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$，当 $n=1$ 时，$S_1=1+\lambda a_1=a_1$，即 $a_1=\dfrac{1}{1-\lambda}$，$\therefore a_n=\dfrac{1}{1-\lambda}\cdot(\dfrac{\lambda}{\lambda-1})^{n-1}$．

（2）若 $S_5=\dfrac{31}{32}$，则若 $S_5=1+\lambda[\dfrac{1}{1-\lambda}\cdot(\dfrac{\lambda}{\lambda-1})^4]=\dfrac{31}{32}$，即 $(\dfrac{\lambda}{1-\lambda})^5=\dfrac{31}{32}-1=-\dfrac{1}{32}$，则 $\dfrac{\lambda}{1-\lambda}=-\dfrac{1}{2}$，得 $\lambda=-1$．

32．【解析】（1）　设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\because a_3=2$，前 3 项和 $S_3=\dfrac{9}{2}$．

$\therefore a_1+2d=2$，$3a_1+3d=\dfrac{9}{2}$，解得 $a_1=1$，$d=\dfrac{1}{2}$．$\therefore a_n=1+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{n+1}{2}$．

（2）$b_1=a_1=1$，$b_4=a_{15}=8$，可得等比数列 $\{b_n\}$ 的公比 q 满足 $q^3=8$，解得 $q=2$．

$\therefore \{b_n\}$ 前 n 项和 $T_n=\dfrac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$．

33．【解析】（1）因为 $2S_n=3^n+3$，所以 $2a_1=3^1+3=6$，故 $a_1=3$，当 $n>1$ 时，$2S_{n-1}=3^{n-1}+3$，

此时，$2a_n=2S_n-2S_{n-1}=3^n-3^{n-1}=2\times3^{n-1}$，即 $a_n=3^{n-1}$，所以 $a_n=\begin{cases}3,n=1\\3^{n-1},n>1.\end{cases}$.

（2）因为 $a_nb_n=\log_3 a_n$，所以 $b_1=\frac{1}{3}$，当 $n>1$ 时，$b_n=3^{1-n}\cdot\log_3 3^{n-1}=(n-1)\times3^{1-n}$，所以 $T_1=b_1=\frac{1}{3}$；

当 $n>1$ 时，$T_n=b_1+b_2+\ldots+b_n=\frac{1}{3}+(1\times3^{-1}+2\times3^{-2}+\ldots+(n-1)\times3^{1-n})$，

所以 $3T_n=1+(1\times3^0+2\times3^{-1}+3\times3^{-2}+\ldots+(n-1)\times3^{2-n})$，

两式相减得：$2T_n=\frac{2}{3}+(3^0+3^{-1}+3^{-2}+\ldots+3^{2-n}-(n-1)\times3^{1-n})=\frac{2}{3}+\frac{1-3^{1-n}}{1-3^{-1}}-(n-1)\times3^{1-n}=\frac{13}{6}-\frac{6n+3}{2\times3^n}$，

所以 $T_n=\frac{13}{12}-\frac{6n+3}{4\times3^n}$，经检验，$n=1$ 时也适合，综上可得 $T_n=\frac{13}{12}-\frac{6n+3}{4\times3^n}$.

34.【解析】设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由题意得：$\begin{cases}a_1q=6\\6a_1+a_1q^2=30\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a_1=3\\q=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=2\\q=3\end{cases}$，

当 $a_1=3$，$q=2$ 时：$a_n=3\times2^{n-1}$，$S_n=3\times(2^n-1)$；

当 $a_1=2$，$q=3$ 时：$a_n=2\times3^{n-1}$，$S_n=3^n-1$.

35.【解析】（1）设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 $a_3^2=9a_2a_6$ 得 $a_3^2=9a_4^2$，所以 $q^2=\frac{1}{9}$.

由条件可知各项均为正数，故 $q=\frac{1}{3}$. 由 $2a_1+3a_2=1$ 得 $2a_1+3a_1q=1$，所以 $a_1=\frac{1}{3}$.

故数列 $\{a_n\}$ 的通项式为 $a_n=\frac{1}{3^n}$.

（2）$b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\ldots+\log_3 a_n=-(1+2+\ldots+n)=-\frac{n(n+1)}{2}$，

故 $\frac{1}{b_n}=-\frac{2}{n(n+1)}=-2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$ 则 $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}=-2[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]=-\frac{2n}{n+1}$，

所以数列 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 的前 n 项和为 $-\frac{2n}{n+1}$.

错位相减：

1.（1）$a_n=2^n$；（2）$5-\frac{2n+5}{2^n}$.

2.（1）$\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n-2$，$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^n$.（2）$(3n-4)2^{n+2}+16$.

3.（1）$a_n=\frac{2}{2n-1}$.（2）$1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$.

4.（1）$a_n=6n+5$；$b_n=4+3(n-1)=3n+1$；（2）$T_n=3n\cdot2^{n+2}$.

5.（1）$b_n=n(n\in N^*)$；（2）$T_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2(n\in N^*)$.

6.（1）$a_n=2^{n-1}$，n∈N*；$b_n=2n-1$，n∈N*.（2）$S_n=(2n-3)\cdot2^n+3(n\in N^*)$.

7.（1）$a_n=\frac{1}{9}(2n+79)$，$b_n=9\cdot(\frac{2}{9})^{n-1}$；（2）$T_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$.

8.（1）$a_n=1+2(n-1)=2n-1$；（2）$\therefore T_n=\frac{(3n-1)\cdot 4^{n+1}+4}{9}$.

9.（1）$a_n=2+(n-2)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n+1$，（2）$S_n=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{n-2}{2^{n+1}}=2-\frac{n+4}{2^{n+1}}$.

10.（1）数列$\{\frac{a_n}{n}\}$是以 1 为首项，以 1 为公差的等差数列；（2）$S_n=\frac{2n-1}{4}\cdot 3^{n+1}+\frac{3}{4}$

11.（1）$c_n=2n-1$；（2）$S_n=(n-1)3^n+1$.

12.（I）$a_n=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1+n}{2}$ （II）$2(1-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}$

13.（1）$\{a_n\}$的通项公式$a_n=2^{n-1}$；（2）$T_n=1+(n-1)2^n$.

14.（1）$a_n=2n$.（2）数列$\{b_n\}$的前n项和T_n为$\frac{n}{2n+2}$.

15.（1）$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)(-1)=2-n$；（2）$2(-1-\frac{1}{2n-1})=\frac{n}{1-2n}$.

16.（1）$a_n=2n-1$，$(n\in N^*)$.（2）$T_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$.

17.（1）略；（2）$a_n=2n-1$；（3）略

18.（1）$a_n=2^n$.（2）$T_n=(n-1)2^{n+1}+2$.

19（1）$a_n=3n-1$，$b_n=2^n$.（2）$T_n-8=(3n-4)2^{n+1}$. $T_n-8=a_{n-1}b_{n+1}$ $(n\in N^*,n\geq 2)$.

20. （I）$a_n=2-n$；（II）$S_n=\frac{n}{2^{n-1}}$.

数列构造

1. C ；2.A；3.A ；4.D；5.B 6.$-\frac{1}{n}$. 7. $\frac{2}{5}$；8. <u>1</u>；9. <u>47</u>；10. <u>11</u>；11. $\frac{1}{2n-1}$；12. $2n^2+6n$；13. <u>$2^{n+1}-1$</u>；14. <u>1023</u>；15. <u>$2\times 3^{n-1}-1$</u>；16. 2^{n-1} $(n\in N^*)$；

17.（1）$a_4=\frac{7}{8}$；（2）数列$\{a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\}$是以$a_2-\frac{1}{2}a_1=1$为首项，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列；

（3）数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=(2n-1)\times(\frac{1}{2})^{n-1}$.

18.（1）$\{b_n\}$是首项为 1，公差为 2 的等差数列.（2）$\{a_n\}$的通项公式$a_n=(n-1)^2+1=n^2-2n+2$

19.（1）$a_n-1=\frac{5}{6}(a_{n-1}-1)$，（2）$n=15$.

20.【解析】（1）$a_n=(n^2-1)c^n+c^{n-1}$，（2）$(-\infty,-\frac{1+\sqrt{13}}{6})\cup[1,+\infty)$

21.（1）$b_1=4$，$b_2=\frac{17}{4},b_3=\frac{72}{17}$

（2）$c_n=b_nb_{n+1}=4b_n+1>17(n\geq 2)$）所以$s_n=c_1+c_2+c_n\geq 17n$

22【解析】（1）$\{b_n\}$是以 1 为首项，$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列.（2）$a_n=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}$ $(n\in N^*)$.

23.【解析】（1）$\{b_n\}$是以$b_1=3$为首项、以 2 为公比的等比数列.（2）$a_n=(3n-1)2^{n-2}$ $(n\in N^*)$.

24.（1）$b_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}$．（2）$S_n=n(n+1)+\frac{n+2}{2^{n-1}}-4$．

25.（1）$a_n=(a-1)c^{n-1}+1$．（2）$S_n=2-(n+2)(\frac{1}{2})^n$．

（3）证明：由（1）知 $a_n=(a-1)c^{n-1}+1$．若 $0<(a-1)c^{n-1}+1<1$，则 $0<(1-a)c^{n-1}<1$0<（1－a）cⁿ⁻¹<1.因为 $0<a_1=a<1$，$0<c^{n-1}<\frac{1}{1-a}(n\in N^*)$，由于 $c^{n-1}>0$ 对于任意 $n\in N^*$ 成立，知 $c>0$．下面用反证法证明 $c\le1$．假设 $c>1$．由函数 $f(x)=c^x$ 的图象知，当 $n\to+\infty$ 时，$c^{n-1}\to+\infty$，所以 $c^{n-1}<\frac{1}{1-a}$ 不能对任意 $n\in N^*$ 恒成立，导致矛盾．∴ $c\le1$．因此 $0<c\le1$

26. （1）$a_2=S_1+2^2=2+2^2=6$，$S_2=8$；$a_3=S_2+2^3=8+2^3=16$，$S_2=24$，$a_4=S_3+2^4=40$；（2）$\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列．（3）$a_n=(a_n-2a_{n-1})+2(a_{n-1}-2a_{n-2})+...+2^{n-2}(a_2-2a_1)+2^{n-1}a_1=(n+1)2^{n-1}$

27. （1）$a_n=\begin{cases}1+\frac{1-q^{n-1}}{1-q},q\ne1\\ n,q=1\end{cases}$（2）由（1），当 $q=1$ 时，显然 a_3 不是 a_6 与 a_9 的等差中项，故 $q\ne1$．由 $a_3-a_6=a_9-a_3$ 可得 $q^5-q^2=q^2-q^8$，由 $q\ne0$ 得 $q^3-1=1-q^6$，①整理得 $(q^3)^2+q^3-2=0$，解得 $q^3=-2$ 或 $q^3=1$（舍去）．于是 $q=-\sqrt[3]{2}$．另一方面，$a_n-a_{n+3}=\frac{q^{n+2}-q^{n-1}}{1-q}=\frac{q^{n-1}}{1-q}(q^3-1)$，$a_{n+6}-a_n=\frac{q^{n-1}-q^{n+5}}{1-q}=\frac{q^{n-1}}{1-q}(1-q^6)$．由①可得 $a_n-a_{n+3}=a_{n+6}-a_n$，n∈N*．所以对任意的 $n\in N^*$，a_n 是 a_{n+3} 与 a_{n+6} 的等差中项．

专题 2 裂项相消

1.【解析】(1)由 $a_1+\frac{1}{3}a_2+\frac{1}{5}a_3+\ldots+\frac{1}{2n-1}a_n=n$，得 $a_1=1$，当 $n\geqslant2$ 时，$a_1+\frac{1}{3}a_2+\frac{1}{5}a_3+\ldots+\frac{1}{2n-3}a_{n-1}=n-1$，

∴ $\frac{1}{2n-1}a_n=1$，$a_n=2n-1(n\geqslant2)$，$a_1=1$ 适合上式，∴ $a_n=2n-1$；

（2）∵ $\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{2}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$．

∴数列 $\{\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}\}$ 的前 84 项和 $S_{84}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{169}-\sqrt{167})=\frac{1}{2}(13-1)=6$．

2.【解析】依题意，$a_n=n+5$，$b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n=0$，即 $b_{n+2}+b_n=2b_{n+1}$，∴ $\{b_n\}$ 为等差数列，令 $\{b_n\}$ 得前 n 和为，S_n 所以，$S_9=153=9\left(\frac{11+b_7}{2}\right)$，$b_7=23$，$d=3$，$b_n=3n+2$；

（2）由（1）得，$c_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$，$\therefore T_n=\frac{n}{(2n+1)}>\frac{k}{57}$ 任意的 $n\in N^*$ 都成立，

容易判断 $T_n=\frac{n}{(2n+1)}\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$，所以 $\frac{k}{57}<\frac{1}{3}, k<19, \because k\in Z, k=18$．

3.【解析】$a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=1$，$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}(n\in N^*,n\geqslant 2)$，可得 $a_3=\frac{3}{2}$，$a_4=\frac{5}{2}$，$a_5=\frac{8}{2}$，$a_6=\frac{13}{2}$，$a_7=\frac{21}{2}$，$\ldots$，

则 $\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\frac{1}{a_3a_5}+\ldots+\frac{1}{a_{2018}a_{2020}}=\frac{4}{1\times 3}+\frac{4}{2\times 5}+\frac{4}{3\times 8}+\frac{4}{5\times 13}+\ldots+\frac{4}{mn}$

$=4[\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})+\frac{1}{5}(\frac{1}{3}-\frac{1}{8})+\frac{1}{8}(\frac{1}{5}-\frac{1}{13})+\ldots+\frac{1}{m}-\frac{1}{n}]$

$=4(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{15}+\frac{1}{15}-\frac{1}{40}+\frac{1}{40}-\frac{1}{8\times 13}+\ldots+\frac{1}{m}-\frac{1}{n})$

$=4(\frac{1}{2}-\frac{1}{n})=2-\frac{4}{n}$，由于 $\frac{4}{n}\in(0,1)$，则 $2-\frac{4}{n}\in(1,2)$，则 $\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\frac{1}{a_3a_5}+\ldots+\frac{1}{a_{2018}a_{2020}}$ 的整数部分为 1．故选 B．

4.【解析】数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\ldots+\frac{1}{n}a_n=n^2+n$，①

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\ldots+\frac{1}{n-1}a_{n-1}=(n-1)^2+(n-1)$，②

①−②得：$\frac{1}{n}a_n=2n$，故：$a_n=2n^2$，数列 $\{b_n\}$ 满足：$b_n=\frac{2n+1}{a_na_{n+1}}=\frac{2n+1}{4n^2(n+1)^2}=\frac{1}{4}[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}]$，

则：$T_n=\frac{1}{4}[1-(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{3})^2+\ldots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}]$，$=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{(n+1)^2})$，

由于 $T_n<\frac{n}{n+1}\lambda(n\in N^*)$ 恒成立，故：$\frac{1}{4}(1-\frac{1}{(n+1)^2})<\frac{n}{n+1}\lambda$，整理得：$\lambda>\frac{n+2}{4n+4}$，当 $n=1$ 时，$(\frac{2n+1}{4n+4})_{max}=\frac{3}{8}$．故选 D．

5.【解析】

$$a_n=\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{4}\frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{4}\frac{4n^2-1+1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$S_n=\frac{n}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{n}{2n+1}\right)$$

6.【解析】

$$a_n=\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\frac{n+2}{n!+(n+1)n!+(n+2)!}=\frac{n+2}{(n+2)n!+(n+2)!}=\frac{1}{n!+(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

$$\therefore S_n=\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

7.【解析】$a_n=\frac{5n+4}{n(n+1)(n+2)}=\frac{5n+2}{n(n+1)}-\frac{5n+7}{(n+1)(n+2)}$，则 $S_n=\frac{7}{2}-\frac{5n+7}{(n+1)(n+2)}=\frac{7n^2+11n}{2(n+1)(n+2)}$，故存在 $a=7,b=11$ 符合题意

8.【解析】$\frac{n+2}{n\times(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)2^n}$，$S_n=\frac{3}{1\times 2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{7}{2\times 3}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{n+2}{n\times(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{(n+1)2^n}$

9.【解析】(1) $\because a_n-\frac{S_n}{2}=1(n\in N^*)$，$\therefore a_{n+1}-\frac{S_{n+1}}{2}=1$，两式作差可得：$(a_{n+1}-a_n)-\frac{S_{n+1}-S_n}{2}=0$，$\therefore a_{n+1}=2a_n$，

即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$．在 $a_n-\dfrac{S_n}{2}=1$ 中取 $n=1$，可得 $a_1=2$．$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列，则 $a_n=2^n$；

（2）证明：$\because b_n=\dfrac{2^n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}(n\in N^*)$，$\therefore b_n=\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，

$\therefore T_n=(\dfrac{1}{2^1-1}-\dfrac{1}{2^2-1})+(\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1})+\ldots+(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1})=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$．$\therefore T_n$ 是一个单调递增数列，

当 $n=1$ 时，$(T_n)_{min}=T_1=1-\dfrac{1}{2^2-1}=\dfrac{2}{3}$，当 $n\to+\infty$ 时，$T_n\to 1$．$\therefore T_n\in[\dfrac{2}{3},1)$．

10．【解析】（1）因为 $\dfrac{1}{a_1-1}+\dfrac{2}{a_2-1}+\dfrac{3}{a_3-1}+\ldots+\dfrac{n}{a_n-1}=n$……………①当 $n=1$ 时，$a_1=2$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{1}{a_1-1}+\dfrac{2}{a_2-1}+\dfrac{3}{a_3-1}+\ldots+\dfrac{n-1}{a_{n-1}-1}=n-1$………②由①－②得：$a_n=n+1$，

因为 $a_1=2$ 适合上式，所以 $a_n=n+1(n\in N^*)$

（2）证明：由（I）知，$b_n=\dfrac{2n+1}{(a_n-1)^2(a_{n+1}-1)^2}=\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$

$\therefore T_n=(\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2})+(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2})+\ldots+(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2})=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$ $\because \dfrac{1}{(n+1)^2}>0$，即 $T_n<1$．

11．【解析】（1）$a_{n+1}+1=\dfrac{a_n+1}{a_n+2}$，$a_n\neq-1$ 且 $a_1=1$，$\therefore \dfrac{1}{a_{n+1}+1}=\dfrac{a_n+2}{a_n+1}$，即 $\dfrac{1}{a_{n+1}+1}=\dfrac{(a_n+1)+1}{a_n+1}$，

$\therefore \dfrac{1}{a_{n+1}+1}-\dfrac{1}{a_n+1}=1$，

数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n+1}\right\}$ 是等差数列，$\therefore \dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{1}{2}+(n-1)\bullet 1$，$\therefore \dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{2n-1}{2}$，$\therefore a_n=\dfrac{3-2n}{2n-1}$．

（2）由（1）知 $b_n=\dfrac{2}{2n-1}$，$\therefore c_n=(-1)^{n-1}nb_nb_{n+1}=(-1)^{n-1}n\bullet\dfrac{2}{2n-1}\bullet\dfrac{2}{2n+1}$，$\therefore c_n=(-1)^{n-1}(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n+1})$

$S_{2019}=(1+\dfrac{1}{3})-(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5})+(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7})+\ldots+(\dfrac{1}{2\times2019-1}+\dfrac{1}{2\times2019+1})=\dfrac{4040}{4039}$．

12．【解析】（1）由题意，$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\ldots+\dfrac{a_n}{n+1}=n^2+n$，当 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\ldots+\dfrac{a_{n-1}}{n}=(n-1)^2+n-1$，

两式相减得，$\dfrac{a_n}{n+1}=2n$，即 $a_n=2n(n+1)(n\geqslant 2)$．当 $n=1$ 时，$a_1=4$ 也符合，$\therefore a_n=2n(n+1)$；

（2）$b_n=\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2n(n+1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$，$\therefore S_n=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{n}{2(n+1)}$．

由 $S_n=\dfrac{n}{2(n+1)}>\dfrac{9}{20}$，解得 $n>9$．$\therefore$ 满足 $S_n>\dfrac{9}{20}$ 的最小正整数 $n=10$．

13．【解析】（1）等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n，且 $S_n=2^{n+1}-b$，$n=1$ 时，$a_1=S_1=4-b$；$n\geqslant 2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-b-2^n+b=2^n$，由于数列为等比数列，可得 $4-b=2$，即 $b=2$；则 $a_n=2^n$，$n\in N^*$；

（2）证明：$b_n=\dfrac{a_n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}=\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，

前 n 项和 $T_n=1-\frac{1}{4-1}+\frac{1}{4-1}-\frac{1}{8-1}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$，

由于 $2^{n+1}-1\geqslant 3$，可得 $0<\frac{1}{2^{n+1}-1}\leqslant\frac{1}{3}$，则 $T_n\geqslant\frac{2}{3}$．

14．【解析】由 $a_{n+1}-a_n=a_n^2$，得 $a_{n+1}=a_n^2+a_n=a_n(a_n+1)\geqslant 6$，$\therefore\ \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(a_n+1)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+1}$，

$\therefore\ \frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$，$\therefore\ \frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}=(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2})+(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3})+\ldots+(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})=\frac{1}{2}-\frac{1}{a_{n+1}}\in(0,\frac{1}{2})$，

$\because\ \frac{a_n}{a_n+1}=1-\frac{a_n}{a_{n+1}}$，$\therefore T_m=\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+1}+\ldots+\frac{a_m}{a_m+1}=m-(\frac{1}{2}-\frac{1}{a_{m+1}})=m-\frac{1}{2}+\frac{1}{a_{m+1}}<m-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=m-\frac{1}{3}$

$\because T_m<2018$，$\therefore m-\frac{1}{3}<2018$，$\therefore m<2018+\frac{1}{3}$ $\therefore$ 正整数 m 的最大值为 2018，　故选：B

15．【解析】$a_1=\frac{6}{5}$，$a_n=\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}(n\in N^*)$，可得 $a_1>1$，$a_n-1>0$，$a_{n+1}-1>0$，即有 $a_n(a_n-1)=a_{n+1}-1$，

取倒数可得 $\frac{1}{a_n(a_n-1)}=\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}$，即有 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}$，

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_2-1}+\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_3-1}+\ldots+\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}=5-\frac{1}{a_{n+1}-1}<5$，

由对 $n\in N^*$，都有 $k>\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$ 成立，可得 $k\geqslant 5$，则 k 的最小值为 5．故选：C．

16．【解析】$a_1=\frac{4}{3}$，且 $a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)(n\in N^*)$，$\therefore a_{n+1}-a_n=a_n^2+1>0$，$\therefore a_{n+1}>a_n$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，可得 $a_2-1=\frac{4}{3}\times(\frac{4}{3}-1)+1=\frac{4}{9}$，$a_3-1=\frac{13}{9}\times(\frac{13}{9}-1)=\frac{52}{81}$，$a_4-1=\frac{6916}{6561}>1$，…，$\therefore a_{2018}-1>1$．

$\therefore\ \frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n(a_n-1)}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}$，可得：$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}$，

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots\frac{1}{a_{2017}}=(\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_2-1})+(\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_3-1})+(\frac{1}{a_3-1}-\frac{1}{a_4-1})+\ldots+(\frac{1}{a_{2017}-1}-\frac{1}{a_{2018}-1})$

$=3-\frac{1}{a_{2018}-1}\in(2,3)$．$\therefore\ \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots\frac{1}{a_{2017}}$ 的整数部分是 2．故选：C．

17．【解析】$\because a_1=1$，$a_{n+1}=a_n^2+a_n>1$，$\therefore\ \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(a_n+1)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+1}$，即 $\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$，则 $\frac{a_n}{a_n+1}=1-\frac{1}{a_n+1}$，

则 $\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\ldots\frac{a_{2018}}{1+a_{2018}}=2018-(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_{2018}})$，

$\because\ \frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_{2018}}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{2018}}-\frac{1}{a_{2019}}=1-\frac{1}{a_{2019}}$，

$\therefore\ \frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\ldots\frac{a_{2018}}{1+a_{2018}}=2018-(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_{2018}})=2018-1+\frac{1}{a_{2019}}=2017+\frac{1}{a_{2019}}$，

$\because\ \frac{1}{a_{2019}}\in(0,1)$，$\therefore[2017+\frac{1}{a_{2019}}]=2017$，即 $[\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\ldots\frac{a_{2018}}{1+a_{2018}}]=2017$，故答案为：2017

18．【解析】由题设知，$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$，$\therefore\ \frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n(a_n-1)}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}$，$\therefore\ \frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n}$，

通过累加，得 $m=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{2014}}=\frac{1}{a_1-1}=2-\frac{1}{a_{2015}-1}$．由 $a_{n+1}-a_n=(a_n-1)^2\geqslant 0$，即 $a_{n+1}\geqslant a_n$，

由 $a_1=\frac{3}{2}$，$a_2=\frac{7}{4}$，$a_3=\frac{37}{16}$．$\therefore a_{2019}\geqslant a_{2018}\geqslant a_{2017}\geqslant\ldots\geqslant a_3>2$，$\therefore a_{2019}-1>1$，$\therefore 0<\frac{1}{a_{2019}-1}<1$，$\therefore 1<m<2$，

所以 m 的整数部分为 1．故选：B．

19.【解析】$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{4}{3}$，$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)(n\in N^*)$．可得：$a_{n+1}-a_n=(an-1)^2>0$，$\therefore a_{n+1}>a_n$，

因此数列 $\{a_n\}$ 单调递增．则 $a_2-1=\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}$，可得 $a_2=\frac{13}{9}$，同理可得：$a_3=\frac{133}{81}$，$a_4=\frac{13477}{6561}$．$\frac{1}{a_3-1}=\frac{81}{52}>1$，

$\frac{1}{a_4-1}=\frac{6561}{6916}<1$，另一方面：$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}$，$\therefore S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$

$=(\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_2-1})+(\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_3-1})+\ldots+(\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1})=3-\frac{1}{a_{n+1}-1}$，

当 $n=1$ 时，$S_1=\frac{1}{a_1}=\frac{3}{4}$，其整数部分为 0；当 $n=2$ 时，$S_2=\frac{3}{4}+\frac{9}{13}=1+\frac{23}{52}$，其整数部分为 1；

当 $n=3$ 时，$S_3=\frac{3}{4}+\frac{9}{13}+\frac{81}{133}=2+\frac{355}{6561}$，其整数部分为 2；当 $n\geqslant 4$ 时，$S_n=2+1-\frac{1}{a_{n+1}-1}\in(2,3)$，其整数部分为 2．综上可得：$S_n$ 的整数部分的所有可能值构成的集合是 $\{0，1，2\}$．故选：A．

20.【解析】

$\because a_1=\frac{1}{2}$ $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{2018}+a_n(n\in N^*)\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{2018}=\frac{a_n^2}{2018^2}+\frac{a_n}{2018}\Rightarrow\frac{2018}{a_{n+1}}=\frac{2018}{a_n}\left(\frac{2018}{a_n+2018}\right)\Rightarrow\frac{1}{a_n+2018}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$

故 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2018+a_i}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=2-\frac{1}{a_{n+1}}$，$\because a_{n+1}=\frac{a_n^2}{2018}+a_n(n\in N^*)$，$\therefore a_{n+1}-a_n=\frac{a_n^{\ 2}}{2018}>0$，即 $a_{n+1}>a_n$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 单调递增，即题目要符合条件：$\frac{1}{2018+a_1}+\frac{1}{2018+a_2}+\cdots+\frac{1}{2018+a_{n-1}}=2-\frac{1}{a_n}>1$，且 $\frac{1}{2}<a_{n-1}\leq 1$；

$\frac{n-1}{2018+1}<\frac{1}{2018+a_1}+\frac{1}{2018+a_2}+\cdots+\frac{1}{2018+a_{n-1}}<\frac{n-1}{2018+\frac{1}{2}}$，即 $\frac{n-1}{2019}\geq 1$，$n\geq 2020$，使 $a_n>1$ 的正整数 n 的最小值是 2020，故选 C．

21.【解析】证明:（1）由题意，可知：$2a_{n+1}-2a_n=a_n^2-4a_n+4=(a_n-2)^2\geqslant 0$，$\therefore a_{n+1}\geqslant a_n$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列．又 $\because a_1=3$，$\therefore a_{n+1}\geqslant a_n\geqslant\ldots\geqslant a_1=3>0$，$\therefore(a_n-2)^2\geqslant\ldots\geqslant(a_1-2)^2=1>0$．$\therefore a_{n+1}>a_n$．

（2）由题意，可知：$\because 2a_{n+1}=a_n^2-2a_n+4$，$\therefore 2a_{n+1}-4=a_n^2-2a_n$．即：$2(a_{n+1}-2)=a_n(a_n-2)$

$\Rightarrow\frac{1}{2(a_{n+1}-2)}=\frac{1}{a_n(a_n-2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{a_n})\Rightarrow\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{a_{n+1}-2}$．

$\therefore\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1-2}-\frac{1}{a_2-2}+\frac{1}{a_2-2}-\frac{1}{a_3-2}+\ldots+\frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{1}{a_1-2}-\frac{1}{a_{n+1}-2}=1-\frac{1}{a_{n+1}-2}$．

$\because n\in N^*$，又由（I），知：$a_{n+1}\geqslant a_2=\frac{7}{2}$，$\therefore \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}=1-\frac{1}{a_{n+1}-2}\geqslant\frac{1}{3}$；

又由 $2(a_{n+1}-2)=a_n(a_n-2)$，得：$\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{2}{a_n}\bullet\frac{1}{a_n-2}\leqslant\frac{2}{3}\bullet\frac{1}{a_n-2}\leqslant\ldots\leqslant(\frac{2}{3})^n\bullet\frac{1}{a_1-2}=(\frac{2}{3})^n$，

$\therefore \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}=1-\frac{1}{a_{n+1}-2}\leqslant 1-(\frac{2}{3})^n$．$\therefore \frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\leqslant 1-(\frac{2}{3})^n(n\in N^*)$．命题得证．

21．【解析】（1）令 $m=1$，则，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n,\therefore\{a_n\}$成等比数列，故$a_n=\frac{1}{2^n}$，

$b_{n+1}=b_1+b_n,\therefore\{b_n\}$成等差数列，$\therefore b_n=-\frac{n}{2}$

（2）$b_n=\frac{4c_n+n}{3c_n+n}=-\frac{n}{2},\therefore c_n=-\frac{2n+n^2}{3n+8}$

（3）$\because d_n=\frac{a_n}{c_n}=-\frac{3n+8}{2^n\cdot n(n+2)}=\frac{1}{2^n(n+2)}-\frac{1}{2^{n-2}n}$，

$T_n=(\frac{1}{2\times 3}-\frac{1}{2^{-1}\times 1})+(\frac{1}{2^2\times 4}-\frac{1}{2^0\times 2})+\cdots+[\frac{1}{2^n(n+2)}-\frac{1}{2^{n-2}n}]=-\frac{1}{2^{-1}\times 1}-\frac{1}{2^0\times 2}+\frac{1}{2^{n-1}(n+1)}+\frac{1}{2^n(n+2)}$，而

当 $n\geq 2$ 时，$0<\frac{3n+5}{2^n(n^2+3n+2)}<\frac{1}{2^n}=a_n$，故 $-\frac{5}{2}<T_n<a_n-\frac{5}{2}$．

23．【解析】（1）$\because a_2=0$，$a_3=-\frac{3}{4}$，$a_4=-\frac{8}{5}$．

（2）假设存在使数列$\left\{\frac{a_n+an}{a_n+n}\right\}$成为以—1为公差的等差数列，

$\frac{a_{n+1}+a(n+1)}{a_{n+1}+n+1}-\frac{a_n+an}{a_n+n}=-1$，化简可得，$a=-2$

（3）$\frac{a_n-2n}{a_n+n}=-n,\therefore a_n=\frac{2n-n^2}{n+1}$，$\frac{1}{3^{\frac{n+2}{2}}a_{n+2}}=-\frac{n+3}{n(n+2)}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n+2}{2}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n3^{\frac{n}{2}}}-\frac{1}{(n+2)3^{\frac{n+2}{2}}}\right)$

$S_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)3^{\frac{n+1}{2}}}-\frac{1}{(n+2)3^{\frac{n+2}{2}}}\right)=-\frac{2\sqrt{3}+1}{12}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)3^{\frac{n+1}{2}}}+\frac{1}{(n+2)3^{\frac{n+2}{2}}}\right)>-\frac{2\sqrt{3}+1}{12}$

24．【解析】（1）数列$\{x_n\}$满足 $x_1=1$，$x_{n+1}=x_n^2+x_n$，$n\in N^*$，设 $P_n=\pi_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}$，$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}$，

可得 $x_{n+1}=x_n^2+x_n=x_n(1+x_n)$，即有 $\frac{1}{1+x_n}=\frac{x_n}{x_{n+1}}$，$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n(1+x_n)}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{1+x_n}$，即有 $\frac{1}{1+x_n}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}$，

可得 $P_5+S_5=\frac{x_1}{x_2}\bullet\frac{x_2}{x_3}\ldots\frac{x_5}{x_6}+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_5}-\frac{1}{x_6}=\frac{x_1}{x_6}+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_6}=\frac{1}{x_6}+1-\frac{1}{x_6}=1$；

（2）$x_1=1$，$x_{n+1}=x_n^2+x_n$，$n\in N^*$，可得 $\frac{x_i}{1+x_i}=1-\frac{1}{1+x_i}=1-(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_{i+1}})$，

可得 $\sum_{i=1}^{2019}\frac{x_i}{1+x_i}=2009-(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_{2019}}-\frac{1}{x_{2020}})=2019-1+\frac{1}{x_{2020}}=2018+\frac{1}{x_{2020}}$，

由 $x_1=1$，$x_{n+1}=x_n^2+x_n>1$，可得 $\frac{1}{x_{2020}}\in(0,1)$，即有 $[\sum\limits_{i=1}^{2019}\frac{x_i}{1+x_i}]=2018$；

（3）设定义在正整数集 N^* 上的函数 $f(n)$ 满足，当 $\frac{m(m-1)}{2}<n\leqslant\frac{m(m+1)}{2}(m\in N^*)$ 时，$f(n)=m$，

当 $m=1$ 时，$0<n\leqslant 1$，可得 f（1）$=1$；

当 $m=2$ 时，$1<n\leqslant 3$ 时，f（2）$=f$（3）$=2$；

当 $m=3$ 时，$3<n\leqslant 6$ 时，f（4）$=f$（5）$=f$（6）$=3$，

…，$m=k$ 时，可得 $f(n)=k(k$ 个 $k)$，

可得 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(i)=1+(2+2)+(3+3+3)+(4+4+4+4)+\ldots+(k+k+\ldots+k)+\ldots=1+2^2+3^2+4^2+\ldots+k^2+\ldots$，

由 $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+18^2=\frac{18\times(18+1)(2\times18+1)}{6}=2109$，由 $2109-90=2019$，$90\div18=5$，

可得当 $n=\frac{1}{2}\times18\times(18+1)-5=166$ 时，满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(i)=2019$．

专题 3　经典的一阶递推

1．【解析】数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，且满足 $a_{n+1}-a_n=(-\frac{1}{2})^n(n\in N^+)$，可得

$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1})$

$=1+(-\frac{1}{2})+\frac{1}{4}+\ldots+=(-\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1-\frac{1}{(-2)^n}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^n]$，存在正整数 n，使得 $(a_n-\lambda)(a_{n+1}-\lambda)<0$ 成立，

当 n 为偶数时，$a_n=\frac{2}{3}[1-(\frac{1}{2})^n]$，递增，可得 a_n 的最小值为 $a_2=\frac{1}{2}$；$a_{n+1}=\frac{2}{3}[1+(\frac{1}{2})^{n+1}]$，递减，可得 a_{n+1} 的最大值为 $a_3=\frac{3}{4}$，可得 $a_n<\lambda<a_{n+1}$，即有 $\frac{1}{2}<\lambda<\frac{3}{4}$；当 n 为奇数时，$a_n=\frac{2}{3}[1+(\frac{1}{2})^n]$，递减，可得 a_n 的最大值为 $a_1=1$；$a_{n+1}=\frac{2}{3}[1-(\frac{1}{2})^{n+1}]$，递增，可得 a_{n+1} 的最小值为 $a_2=\frac{1}{2}$，可得 $a_{n+1}<\lambda<a_n$，即有 $\frac{1}{2}<\lambda<1$；

则 λ 的取值范围是 $(\frac{1}{2}$，$1)$，故选 C．

2．【解析】由题意，可知：$\because 4n^2-16n+15=(2n-3)(2n-5)$，$\therefore(2n-5)a_{n+1}=(2n-3)a_n+(2n-3)(2n-5)$，

等式两边同时除以 $(2n-3)(2n-5)$，可得：$\frac{a_{n+1}}{2n-3}=\frac{a_n}{2n-5}+1$，可设 $b_n=\frac{a_n}{2n-5}$，则 $\frac{a_{n+1}}{2n-5}=b_{n+1}$，

$\therefore b_{n+1}=b_n+1$，即：$b_{n+1}-b_n=1$．$\because b_1=\frac{a_1}{2\times1-5}=\frac{21}{-3}=-7$．$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是以 -7 为首项，1 为公差的等差数列．

$\therefore b_n=-7+(n-1)\times1=n-8$，$n\in N^*$．$\therefore a_n=(n-8)(2n-5)=2n^2-21n+40$．可把 a_n 看成关于 n 的二次函数，

则根据二次函数的性质，可知：当 $n=5$ 或 $n=6$ 时，a_n 可能取最小值．$\because$ 当 $n=5$ 时，

$a_5=2\times5^2-21\times5+40=-15$，

当 $n=6$ 时，$a_6=2\times6^2-21\times6+40=-14$．$\therefore$ 当 $n=5$ 时，a_n 取得最小值．故选 A．

3.【解析】$(3n-5)a_{n+1}=(3n-2)a_n-9n^2+21n-10$，即为 $(3n-5)a_{n+1}-(3n-2)a_n=-(3n-5)(3n-2)$，

可得 $\frac{a_{n+1}}{3n-2}-\frac{a_n}{3n-5}=-1$，设 $b_n=\frac{a_n}{3n-5}$，即 $b_{n+1}-b_n=-1$，可得 $\{b_n\}$ 是 $\frac{-8}{-2}=4$ 为首项、-1 为公差的等差数列，

可得 $b_n=4-(n-1)=5-n$，即 $a_n=(3n-5)(5-n)$，可得 $a_n:-8$，3，8，7，0，-13，-32，-57，-88，…，$(n>5$，各项递减，且为负的)，由 n，$m\in N^*$，$n>m$，则 S_n-S_m 的最大值为 $(-8+3+8+7+0)-(-8)=18$．故选 C．

4.【解析】法一：$\because a_{n+1}=3a_n+2^n$，$\therefore\frac{a_{n+1}}{2^n}=\frac{3a_n}{2^n}+1$，$\therefore\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}\bullet\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}+1=\frac{3}{2}(\frac{a_n}{2^n}+1)$，$\because a_1=1$，

$\therefore\frac{a_1}{2^1}+1=\frac{3}{2}$，$\therefore$ 数列 $\{\frac{a_n}{2^n}+1\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首相以 $\frac{3}{2}$ 为公比的等比数列，$\therefore\frac{a_n}{2^n}+1=(\frac{3}{2})^n$，$\therefore a_n=3^n-2^n$，故选 A．

法二：令 $a_{n+1}+A\cdot2^{n+1}=3(a_n+A\cdot2^n)$，$\because a_{n+1}=3a_n+2^n$，对比系数得：$A=1$，$\therefore$ 数列 $\{a_n+2^n\}$ 是以 3 为首项，

3

为公比的等比数列，$\therefore a_n+2^n=3^n$，$\therefore a_n=3^n-2^n$，$\therefore b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n-2^n}=\frac{3\bullet(\frac{3}{2})^n-2}{(\frac{3}{2})^n-1}=3+\frac{1}{(\frac{3}{2})^n-1}$，

$\because\forall n\in N^*$，

$\therefore(\frac{3}{2})^n-1\geqslant\frac{1}{2}\therefore0<\frac{1}{(\frac{3}{2})^n-1}\leqslant2$，$\therefore3<b_n\leqslant5$，对于 $\forall n\in N^*$，都有 $b_n>t$ 恒成立，$\therefore t\leqslant3\ \therefore t$ 的最大值为 3，故选 A．

5.【解析】由 $\frac{a_{n+1}}{2n-3}=\frac{a_n}{2n-5}+1$，即 $\frac{a_{n+1}}{2n-3}-\frac{a_n}{2n-5}=1$，$\frac{a_1}{2-5}=-5$．$\therefore$ 数列 $\{\frac{a_n}{2n-5}\}$ 为等差数列，首项为 -5，

公差为 1．$\therefore\frac{a_n}{2n-5}=-5+n-1$，可得：$a_n=(2n-5)(n-6)$，当且仅当 $3\leqslant n\leqslant5$ 时，$a_n<0$．已知 n，$m\in N$，$n>m$，

则 S_n-S_m 的最小值为 $a_3+a_4+a_5=-3-6-5=-14$．故选 C．

7．【解析】$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$na_{n+1}=2(n+1)a_n$，化为 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=2\frac{a_n}{n}$，$\therefore$ 数列 $\frac{a_n}{n}$ 是等比数列，首项为 1，

公比为 2．$\therefore\frac{a_n}{n}=2^{n-1}$，$\therefore a_n=n\bullet2^{n-1}$．$\therefore S_n=1+2\times2+3\times2^2+\ldots\ldots+n\bullet2^{n-1}$，

$2S_n=2+2\times2^2+\ldots\ldots+(n-1)\bullet2^{n-1}+n\bullet2^n$.

$\therefore -S_n=1+2+2^2+\ldots\ldots+2^{n-1}-n\bullet2^n=\dfrac{2^n-1}{2-1}-n\bullet2^n$．可得：$S_n=(n-1)\bullet2^n+1$．则它的前 100 项和 $S_{100}=99\times2^{100}+1$．故答案为 $99\times2^{100}+1$.

7.【解析】(1) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+2^n+2(n\in N^*)$，$\therefore(a_{n+1}-2^{n+1})-(a_n-2^n)=2$．$a_1-2=0$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n-2^n\}$ 为等差数列，首项为 0，公差为 2；　(2) 由 (1) 可得：$a_n-2^n=0+2(n-1)$，可得：

$a_n=2^n+2(n-1)$，$\therefore S_n=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}+2\times\dfrac{n(0+n-1)}{2}=2^{n+1}-2+n^2-n$.

8.(1) 证明：由 $na_{n+1}=(n+1)a_n+n(n+1)$，得 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+1$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=1$，$\therefore$ 数列 $\{\dfrac{a_n}{n}\}$ 是以 2 为首项，以 1 为公差的等差数列，则 $\dfrac{a_n}{n}=2+(n-1)\times1=n+1$，即 $a_n=n(n+1)$；(2)【解析】由 (1) 知，$a_n=n(n+1)$，

则 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，$\therefore \dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_{99}}=(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\ldots+(\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100})=1-\dfrac{1}{100}=\dfrac{99}{100}$.

9.【解析】(1) 由题意可得：$a_{n+1}+\lambda(n+1)+\mu=3(a_n+\lambda n+\mu)$，化为：$a_{n+1}=3a_n+2\lambda n+2\mu-\lambda$.

又 $a_{n+1}=3a_n+4n$．$\therefore 2\lambda=4$，$2\mu-\lambda=0$．解得 $\lambda=2$，$\mu=1$.

(2) 对于 (I) 中的 λ，μ，则 $c_n=(\lambda n+\mu)(a_n+\lambda n+\mu)=(2n+1)(a_n+2n+1)$.

$\because \{a_n+2n+1\}$ 是公比为 3 的等比数列，$a_1+3=3$．$\therefore a_n+2n+1=3^n$，$\therefore c_n=(2n+1)\bullet3^n$.

$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3\times3+5\times3^2+7\times3^3+\ldots\ldots+(2n+1)\bullet3^n$.

$\therefore 3S_n=3\times3^2+5\times3^3\ldots\ldots+(2n-1)\bullet3^n+(2n+1)\bullet3^{n+1}$.

$\therefore -2S_n=3\times3+2\times(3^2+3^3+\ldots+3^n)-(2n+1)\bullet3^{n+1}=3+2\times\dfrac{3(3^n-1)}{3-1}-(2n+1)\bullet3^{n+1}$，整理为 $S_n=n\bullet3^{n+1}$.

10.【解析】(1) 由已知得 $S_n=n^2a_n$，所以 $S_{n-1}=(n-1)^2a_{n-1}$，所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}(n\geq2)$，所以 $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$，所以 $a_n(n+1)=a_{n-1}(n-1)\Rightarrow a_n(n+1)\cdot n=a_{n-1}\cdot n\cdot(n-1)$.数列 $\{a_n(n+1)\cdot n\}$ 为常数数列，即 $a_n\cdot n(n+1)=a_1\times1\times2=2$，$a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}$；故 $S_n=n^2a_n=\dfrac{2n}{n+1}$.

(2) $b_n=\dfrac{S_n}{n!}=\dfrac{2n}{(n+1)n!}=2[\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}]$，

$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=2[(\dfrac{1}{1!}-\dfrac{1}{2!})+(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!})+\cdots+\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}]=2[1-\dfrac{1}{(n-1)!}]<2$.

又因为当 $n\geq2$ 时，$(n+1)!>n+1$，所以 $T_n=2-\dfrac{2}{(n+1)!}>2-\dfrac{2}{n+1}=\dfrac{2n}{n+1}$，故当 $n\geq2$ 时有 $\dfrac{2n}{n+1}<T_n<2$.

11.【解析】(1) $a=0$ (2) $a_n=\frac{n-1}{n-2}a_{n-1}$，$\frac{a_n}{n-1}=\frac{a_{n-1}}{n-2}=\cdots=\frac{a_2}{1}$，$a_n=(n-1)a^2$ 故 $\begin{cases}a_1=0 & 当n=1\\(n-1)p & 当n\ge 2\end{cases}$.

(3) $b_n=2+2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$，$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=2n+2(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})<2n+3$.

12.【解析】因为 $a_{n+1}+a_n=n^2+n$，所以

$$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)=1+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)$$

$$=\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)+1.$$

13.【解析】$\because S_n=n(5n-4)a_n$，$\because S_{n-1}=(5n^2-4n-1)a_n$，且$S_{n-1}=(n-1)(5n-9)a_{n-1}$，$a_n=S_n-S_{n-1}$，

即 $(5n+1)a_n=(5n-9)a_{n-1}$，$(5n+1)(5n-4)a_n=(5n-4)(5n-9)a_{n-1}=1\times 6\times a_1$. $a_n=\frac{6}{(5n+1)(5n-4)}$

14.【解析】$\because \frac{a_n}{5n+2}=\frac{a_{n-1}}{5n-8}+\frac{25}{5n+2}$，即$\frac{a_n}{(5n+2)(5n-3)}=\frac{a_{n-1}}{(5n-3)(5n-8)}+\frac{25}{(5n+2)(5n-3)}$，

故 $\frac{a_n}{(5n+2)(5n-3)}-\frac{a_{n-1}}{(5n-3)(5n-8)}=5\left(\frac{1}{5n-3}-\frac{1}{5n+2}\right)$ 使用累加法可得，即$\frac{a_n}{(5n+2)(5n-3)}=\frac{5n-3}{5n+2}$ 所以 $a_n=(5n-3)^2$

15.【解析】$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}-\frac{a_n}{n!}=(n+2)$，$\frac{a_n}{n!}-\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}=(n+1)$，$\ldots$ $\frac{a_2}{2!}-\frac{a_1}{1!}=3$，以上 n 个式子累加可得，

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}-\frac{a_1}{1}=\frac{(3+(n+2))n}{2}\quad\therefore a_n=\frac{n^2+3n-2}{2}n!$$

16.【解析】由已知得 $\frac{1}{a_n}=\frac{3}{a_{n-1}}+2\cdot 3^{n-1}$，则 $\frac{1}{3^n a_n}=\frac{3}{3^n a_{n-1}}+\frac{2\cdot 3^{n-1}}{3^n}$，即 $\frac{1}{3^n a_n}=\frac{1}{3^{n-1}a_{n-1}}+\frac{2}{3}$.

所以数列 $\{\frac{1}{3^n a_n}\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为公差的等差数列.所以 $\frac{1}{3^n a_n}=\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\frac{2}{3}=\frac{2n-1}{3}$，即 $a_n=\frac{1}{(2n-1)\cdot 3^{n-1}}$.

17.【解析】因为 $a_{n+1}-3(n+1)+2=\frac{1}{3}(a_n-3n+2)$，且 $a_1-3+2=1$，所以数列 $\{a_n-3n+2\}$ 是以 1 为首项，$\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列，则 $a_n-3n+2=\frac{1}{3^{n-1}}$，即 $a_n=\frac{1}{3^{n-1}}+3n-2$.

18.【解析】令 $a_{n+1}+A(n+1)^2+B(n+1)+C=-(a_{n-1}+An^2+Bn+C)$，再求得 A，B，C，最后求得 $a_n=(-1)^{n-1}+\frac{n}{2}-\frac{n^2}{2}$.

19.【解析】因为 a_n,S_n 是一元二次方程 $x^2-3n^2x+b_n=0$ 的两个根，所以 $\begin{cases}a_n+S_n=3n^2\\a_nS_n=b_n\end{cases}$，由 $a_n+S_n=3n^2$ 得 $a_{n+1}+S_{n+1}=3(n+1)^2$，两式相减得 $a_{n+1}-a_n+S_{n+1}-S_n=6n+3$，所以 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}(6n+3)$，令 $a_{n+1}+A(n+1)+B=\frac{1}{2}(a_n+An+B)$，则 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{2}An-\frac{1}{2}B-A$，比较以上两式的系数，得

$\begin{cases}-\frac{1}{2}A=3\\-\frac{1}{2}B-A=\frac{3}{2}\end{cases}$，解得$\begin{cases}A=-6\\B=9\end{cases}$.所以 $a_{n+1}-6(n+1)+9=\frac{1}{2}(a_n-6n+9)$.又 $a_1+S_1=3$，$a_1=\frac{3}{2}$，所以数列 $\{a_n-6n+9\}$是以$\frac{9}{2}$为首项、$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.所以 $a_n-6n+9=\frac{9}{2}(\frac{1}{2})^{n-1}$，$a_n=6n+\frac{9}{2^n}+9$，

$S_n=3n^2-a_n=3n^2-6n-\frac{9}{2^n}+9$，所以 $b_n=(6n+\frac{9}{2^n}-9)(3n^2-6n-\frac{9}{2^n}+9)$.

20.【解析】(1) 依题意，令 $a_{n+1}+\lambda(n+1)^2+\mu(n+1)+\gamma=2(a_n+\lambda n^2+\mu n+\gamma)$ 所以

$a_{n+1}=2a_n+\lambda n^2+\mu n-2\lambda n+\gamma-\lambda-\mu$

即$\begin{cases}\lambda=-1\\\mu-2\lambda=3\\\gamma-\lambda-\mu=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}\lambda=-1\\\mu=1\\\gamma=0\end{cases}$.所以数列 $\{a_n-n^2+n\}$是以 2 为公比、$a_1-1+1=1$ 为首项等比数列.所以

$a_n-n^2+n=2^{n-1}$，$a_n=n^2+2^{n-1}-n$，即存在 $\lambda=-1,\mu=1$，使得数列 $\{a_n-n^2+n\}$成等比数列.

(2) $b_n=\frac{1}{a_n+n-2^{n-1}}=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})}=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$，所以当 $n\geq 2$ 是，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$<1+(\frac{1}{2-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2+\frac{1}{2}})+(\frac{1}{3-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3+\frac{1}{2}})+\cdots+(\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}})=1+\frac{2}{3}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}<1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$；当 $n=2$ 时，

$S_2=b_1+b_2=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$，$\frac{6n}{(n+1)(2n+1)}=\frac{12}{3\times 5}=\frac{4}{5}<\frac{5}{4}$；当 $n=3$，$b_n=\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.所以

$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n>(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n}=\frac{n}{n+1}$.又当 $n\geq 3$ 时，$2n+1>6$，即 $1>\frac{6}{2n+1}$，

所以 $S_n>\frac{n}{n+1}\cdot\frac{6}{2n+1}=\frac{6n}{(n+1)(2n+1)}$.故 $\frac{6n}{(n+1)(2n+1)}\leq S_n<\frac{5}{3}$.

21.【解析】(1) 当 $n=1$ 时，$4S_1=8+3a_1-3$，得 $a_1=5$.当 $n\geq 2$ 时，由 $4S_n=8n+3a_n-3$，得 $4S_{n-1}=8(n-1)^2+3a_{n-1}-3$. 两式相减得 $4a_n=4(S_n-S_{n-1})=8(2n-1)+3(a_n-a_{n-1})$，故 $a_n=-3a_{n-1}+16_n-8$ ①

令 $a_n+p_n+q=-3[a_{n-1}+p(n-1)+q]$，$a_n=-3a_{n-1}-4p_n-4q+3p$ ②.比较①②系数得 $-4p=16$，$p=-4$，所以 $a_n-4n-1=(a_1-4-1)\cdot(-3)^{n-1}=0$，$a_n=4n+1$.

(2) $\frac{1}{\sqrt{b_k}}=\frac{1}{\sqrt{a_k}\cdot\sqrt{a_k-2}\cdot\sqrt{a_k+2}}=\frac{1}{\sqrt{a_k}}(\frac{1}{\sqrt{a_k-2}}-\frac{1}{\sqrt{a_k+2}})\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k+2}-\sqrt{a_k-2}}$

$=\frac{\sqrt{a_k+2}+\sqrt{a_k-2}}{4\sqrt{a_k}}(\frac{1}{\sqrt{a_k-2}}-\frac{1}{\sqrt{a_k+2}})$，又因为 $(\sqrt{a_k+2}+\sqrt{a_k-2})^2-(2\sqrt{a_k})^2=2(\sqrt{a_k^2-4}-a_k)<0$，

所以 $\frac{\sqrt{a_k+2}+\sqrt{a_k-2}}{\sqrt{a_k}}<2$，$\frac{1}{\sqrt{b_k}}<\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{a_k-2}}-\frac{1}{\sqrt{a_k+2}})=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{a_k-2}}-\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}-2}})$.

所以 $\frac{1}{\sqrt{b_1}}+\frac{1}{\sqrt{b_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{b_n}}<\frac{1}{2}[(\frac{1}{\sqrt{a_1-2}})-\frac{1}{\sqrt{a_2-2}}+(\frac{1}{\sqrt{a_2-2}})-\frac{1}{\sqrt{a_3-2}}+\cdots+(\frac{1}{\sqrt{a_n-2}}-\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}-2}})]=$

$\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{a_1-2}}-\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}-2}})<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

22.【解析】(1) 由 $S_n=n^2+\frac{1}{2}a_n$，得 $S_{n+1}=(n+1)^2+\frac{1}{2}a_{n+1}$，两式相减得 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2n+1+\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$，所以 $\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)=2n+1$，故 $a_{n+1}+A(n+1)+B=-(a_n+An+B)$，$a_{n+1}=-a_n-2An-A-2B$，比较以上两式，得 $-2A=4$，$-A-2B=2$，故 $A=-2$，$B=0$.所以 $a_{n+1}-2(n+1)=-(a_n-2n)$.又 $S_1=1^2+\frac{1}{2}a_1$，$a_1=2$。故数列 $\{a_n-2n\}$ 是以 $a_1-2=0$ 为首项、-1 为公比的公比的等比数列，所以 $a_n-2n=0\cdot(-1)^{n-1}=0$，即 $a_n=2n$.

（2）令 $f(n)=(1-\frac{1}{a_1})(1-\frac{1}{a_2})\cdots(1-\frac{1}{a_n})\sqrt{2n+1}$，所以 $\frac{f(n+1)}{f(n)}=(1-\frac{1}{a_{n+1}})\cdot\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}}=\frac{(2n+1)\sqrt{2n+3}}{(2n+2)\sqrt{2n+1}}<1$，所以

$f(n+1)<f(n)$，$\{f(n)\}$ 为递减数列，$f(n)\max=f(1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.所以原不等式 $f(n)<a-\frac{3}{2a}$ 对于一切 $n\notin N*$ 恒成立，所以 $f(n)_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{2}<a-\frac{3}{2a}\Rightarrow\frac{(a-\sqrt{3})(2a+\sqrt{3})}{a}>0$，即 $a>\sqrt{3}$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<0$.

23.【解析】（1）由已知，$\frac{1}{\sqrt{a_1}}=\frac{1}{2\sqrt{a_1a_2}}$，得 $a_2=\frac{1}{4}$；$\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2a_3}}=\frac{1}{2\sqrt{a_2a_3}}$，得 $a_3=\frac{1}{9}$.

（2）当 $n\geq 2$ 时，$\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n}}=\frac{1}{2\sqrt{a_na_{n+1}}}$，　① $\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}}=\frac{1}{2\sqrt{a_{n-1}a_n}}$.②

②—①得 $\frac{1}{\sqrt{a_n}}=\frac{1}{2\sqrt{a_na_{n+1}}}-\frac{1}{2\sqrt{a_{n-1}a_n}}$，所以 $\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}}=2$，所以数列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{a_{2n-1}}}\right\}$，$\left\{\frac{1}{\sqrt{a_{2n}}}\right\}$ 皆为等差数列.

所以 $\frac{1}{\sqrt{a_{2n-1}}}=\frac{1}{\sqrt{a_1}}+2(n-1)=2n-1$，$\frac{1}{\sqrt{a_{2n}}}=\frac{1}{\sqrt{a_2}}+2(n-1)=2n-1$.综上，$\frac{1}{\sqrt{a_n}}=n$，所以 $a_n=\frac{1}{n^2}$.

（3）$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\cdots+\sqrt{a_na_{n+1}}=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$，

$\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}=\sqrt{\frac{n^2}{(n+1)^2}}=\frac{n}{n+1}$ 所以等式成立.

24．【解析】（1）由已知得 $f'(x)=(a_n-a_{n-1})x-(a_{n+1}-a_n)(n\geq2)$，依题意有 $f'(t)=0$，所以 $(a_n-a_{n-1})t-(a_{n+1}-a_n)=0$.

又 $t\neq0$，所以 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=t$，所以数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 t 为公比的等比数列.又首项 $a_2-a_1=t^2-t$，所以

$a_{n+1}-a_n=(t^2-t)\cdot t_{n-1}=(t-1)\cdot t_n$，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}t^k$.

又 $a_1+(t+1)\sum_{k=1}^{n-1}t^k=t+(t-1)\cdot\frac{t(1-t^{n-1})}{1-t}=t-t+t^n=t^n$，故 $a_n=t^n$.

（2）因为 $b_n=a_n\ln|a_n|=t_n\ln|t^n|=nt^n\ln|t|$，所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=(t+2t^2+3t^3+\cdots+nt^n)\ln|t|$.①

式①两边都乘以 t 得 $tSn=[t2+2t^3+3t^4+\cdots+(n-1)t^n+nt^{n-1}]\ln|t|$　②.

①—②的 $(1-t)S_n=(t+t^2+t^3++(n-1)t^n-nt^{n+1})\ln|t|=[\frac{t(1-t^n)}{1-t}-nt^{n+1}]\ln|t|$ 所以 $Sn=[\frac{t(1-t^n)}{(1-t)^2}-\frac{nt^{n-1}}{1-t}]\ln|t|$.

（3）因为 $t=-\sqrt{\frac{7}{10}}$，所以 $-1<t<0$.当 n 为偶数时，$bn=nt^n\ln|t|<0$；当 n 为偶数时，$bn=nt^n\ln|t|>0$ 最大项必为奇数.设最大项为 b_{2k+1}，则 $\begin{cases}b_{2k+1}\ge b_{2k-1}\\ b_{2k+1}\ge b_{2k+3}\end{cases}$，即 $\begin{cases}(2k+1)t^2\ge 2k-1\\ 2k+1\ge(2k+3)t^2\end{cases}$.因 $t^2=\frac{7}{10}$ 所以 $\frac{11}{6}\le k\frac{17}{6}$，即 $k=2$.

故数列 $\{b_n\}$ 中最大项为第 5 项.

专题 4 和数列与积数列

1.【解析】$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+a_n=2n-3$，$\therefore a_{n+2}+a_{n+1}=2(n+1)-3=2n-1$，$a_{n+2}-a_n=2$，

当 $n=1$ 时，$a_2+a_1=-1$，$\therefore a_2=-3$．$\therefore$ 数列 $\{a_{2n}\}$ 是等差数列，首项为 -3，公差为 2.

$\therefore a_{2n}=-3+2(n-1)=2n-5$．$\therefore a_{2014}=2014-5=2009$．故选 D．

2.【解析】$\because a_1=1$，$a_na_{n+1}=2^n$，$\therefore n=1$ 时，$a_2=2$．$n\geqslant 2$ 时，$\frac{a_na_{n+1}}{a_{n-1}a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=2$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的奇数项与偶数项分别成等比数列，公比为 2．则 $S_{20}=(a_1+a_3+\ldots+a_{19})+(a_2+a_4+\ldots+a_{20})$

$=\frac{2^{10}-1}{2-1}+\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=3\times1023=3069$．故选 D．

3.【解析】$\because a_1=1$，$a_{n+1}\bullet a_n=2^n(n\in N^*)$，$\therefore$ 当 $n=1$ 时，$a_2\bullet a_1=2$，$\therefore a_2=2$，$\therefore a_n\bullet a_{n-1}=2^{n-1}(n\geqslant 2)$，

$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=2$，$\therefore$ 从第 2 项开始，每隔一项，即偶数项，以 2 为首项，以 2 为公比的等比数列，

从第 1 项开始，每隔一项，即为奇数项，以 1 为首项，以 2 为公比的等比数列，

$\therefore S_{2017}=\frac{1\times(1-2^{1009})}{1-2}+\frac{2\times(1-2^{1008})}{1-2}=2^{1009}-1+2^{1009}-2=2^{1010}-3$，故选：$B$．

4.【解析】设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q>0$，$\because a_na_{n+1}=2^{2n}\ (n\in N^*)$，$\therefore \frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\frac{2^{2(n+1)}}{2^{2n}}=4=q^2$，解得 $q=2$．

$\therefore a_n^2\times2=2^{2n}$，$a_n>0$．解得 $a_n=2^{\frac{2n-1}{2}}$．则 $a_6-a_5=2^{\frac{11}{2}}-2^{\frac{9}{2}}=16\sqrt{2}$．故选 D．

5.【解析】法一：$a_1=1$，$a_n\bullet a_{n+1}=2^n(n\in N^*)$．$n=1$ 时，$a_1a_2=2$，$a_2=2$．$\therefore n\geqslant 2$ 时，$\frac{a_na_{n+1}}{a_{n-1}a_n}=\frac{2^n}{2^{n-1}}$，化为：

$\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=2$．$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的奇数项与偶数项分别成等比数列，首项分别为 1，2，公比都为 2．$\therefore A$，B 不正确.

$a_{2019}=2^{1009}$，因此 C 不正确.

$S_{2019}=(a_1+a_3+\ldots\ldots+a_{2019})+(a_2+a_4+\ldots\ldots+a_{2018})=(1+2+2^2+\ldots\ldots+2^{1009})+(2+2^2+\ldots\ldots+2^{1009})$

$=\dfrac{2^{1010}-1}{2-1}+\dfrac{2(2^{1009}-1)}{2-1}=2^{1011}-3$．因此 D 正确．故选 D．

法二：待定系数法，$a_n=2^{xn+y+z(-1)^n}$，$a_{n+1}=2^{xn+x+y+z(-1)^n}$，$a_n\cdot a_{n+1}=2^{2xn+x+2y}=2^n$，对比系数得，$x=\dfrac{1}{2}$，

$y=-\dfrac{1}{4}$，$a_1=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-z}=1$，$\therefore z=\dfrac{1}{4}$，$\therefore a_n=2^{\frac{2n-1+(-1)^n}{4}}$，$n\in N^*$．$A$、$B$、$C$ 均错，求和同法一．

6.【解析】$\because S_{n+1}+S_n=\dfrac{n^2-19n}{2}$①由等差数列前 n 项和的性质，知数列 $\{a_n\}$ 为单调递增的等差数列，

将 n 换为 $n+1$ 得，$S_{n+2}+S_{n+1}=\dfrac{(n+1)^2-19(n+1)}{2}$②，②－①得，$a_{n+2}+a_{n+2}=n-9$，

当 $n=9$ 时，$a_{11}+a_{10}=0$，又 $a_{10}<a_{11}$，$\therefore a_{11}>0$，$a_{10}<0$，$\therefore n=10$ 时，S_n 取最小值．故选 A．

7.【解析】若数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=3n+1$，$n\in N^*$，可得 $a_1+a_2=4$，$a_3+a_4=10$，$a_5+a_6=16$，

$\ldots$，$a_{2n}+a_{2n-1}=6n-2$，相加可得 $a_1+a_2+\ldots+a_{2n}=4+10+16+\ldots+(6n-2)=\dfrac{1}{2}n(4+6n-2)=3n^2+n$．

8.【解析】法一：$\because$ 数列 $\{a_n\}(n\in N^*)$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=(\dfrac{1}{2})^n$，

$\therefore(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\ldots+(a_{2n-1}+a_{2n})=\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{2})^3+\ldots+(\dfrac{1}{2})^{2n-1}=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{4^n})}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{2}{3}(1-\dfrac{1}{4^n})$，$\therefore S_{2n}=\dfrac{2}{3}(1-\dfrac{1}{4^n})$．

又 $a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\ldots+(a_{2n-2}-a_{2n-1})=1+(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{1}{2})^4+\ldots+(\dfrac{1}{2})^{2n-2}=1+\dfrac{(\frac{1}{2})^2(1-\frac{1}{4^{n-1}})}{1-\frac{1}{4}}=1+\dfrac{1}{3}(1-\dfrac{1}{4^{n-1}})$．

即 $S_{2n-1}=1+\dfrac{1}{3}(1-\dfrac{1}{4^{n-1}})$．$\therefore a_{2n}=S_{2n}-S_{2n-1}=\dfrac{1}{3\cdot2^{2n-1}}-\dfrac{2}{3}$．$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{3\cdot2^{2n-1}}-\dfrac{2}{3})=-\dfrac{2}{3}$．

法二：待定系数法，令 $a_n=x\cdot(\dfrac{1}{2})^n+y(-1)^n$，则 $a_{n+1}=x\cdot(\dfrac{1}{2})^{n+1}+y(-1)^{n+1}$，$a_{n+1}+a_n=\dfrac{3}{2}x\cdot(\dfrac{1}{2})^n=(\dfrac{1}{2})^n$，对比

系数得 $x=\dfrac{2}{3}$，$a_1=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}-y=1$，$\therefore y=-\dfrac{2}{3}$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=\dfrac{2}{3}\cdot(\dfrac{1}{2})^{2n}-\dfrac{2}{3}(-1)^{2n}=-\dfrac{2}{3}$

9.【解析】由数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_{n+1}+a_n=2n+1$，可得 $a_1+a_2=3$，$a_3+a_4=7$，$a_5+a_6=11$，$\ldots$，

$a_{29}+a_{30}=59$，$a_{31}+a_{32}=63$，可得，$S_{30}=\dfrac{15\times(3+59)}{2}=465<500$，$S_{32}=465+63=528>500$．

由 $S_n=500$，若 $a_2<2$，则 n 的最大值为 31，故答案为：31．

10.【解析】法一：$\because$ 对于任意的 $n\in N^*$ 都有 $S_n+S_{n+1}=n^2$，①　$\therefore S_{n+1}+S_{n+2}=(n+1)^2$，②

②－①差得 $a_{n+1}+a_{n+2}=(n+1)^2-n^2=2n+1$，③，则当 $n\geqslant2$ 时，$a_n+a_{n+1}=2n-1$④

③－④得 $a_{n+2}-a_n=2$，也就是隔 2 项成等差数列，公差为 2.

$\because\{a_n\}$ 为单调递增的数列 $\therefore$ 只要保证 $a_1<a_2<a_3$，即 $a_1<a_2<2+a_1$，可以保证整个数列单调递增.

当 $n=1$ 时，$a_1+a_1+a_2=1$，即 $a_2=1-2a_1$，代入 $a_1<a_2<2+a_1$，得 $a_1<1-2a_1<2+a_1$，即 $\begin{cases}a_1<1-2a_1\\1-2a_1<2+a_1\end{cases}$ $\begin{cases}a_1<\frac{1}{3}\\a_1>-\frac{1}{3}\end{cases}$，即 $-\frac{1}{3}<a_1<\frac{1}{3}$，即 a_1 的取值范围为 $(-\frac{1}{3}，\frac{1}{3})$，故选 B.

以上方法是错的，但这是参考答案给的方法，错误原因在于递推式 $a_{n+2}-a_n=2$ 中，$n\geq 2$，因为和式代换 $a_{n+2}-a_n=(S_{n+2}+S_{n+1})-(S_{n+1}+S_n)$ 当中，一定有 $n\geq 2$，此结论只能说明数列从第二项起隔项递增，也可以尝试 $S_1+S_2=2a_1+a_2=1\Rightarrow a_2=1-2a_1$，$S_2+S_3=2a_1+2a_2+a_3=4\Rightarrow a_3=4-2(1-2a_1)-2a_1=2+2a_1$，与参考答案中的 $a_3=2+a_1$ 矛盾，故 $\begin{cases}a_1<1-2a_1\\1-2a_1<2+2a_1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_1<\frac{1}{3}\\a_1>-\frac{1}{4}\end{cases}$，即 $-\frac{1}{4}<a_1<\frac{1}{3}$，即 a_1 的取值范围为 $(-\frac{1}{4}，\frac{1}{3})$，故选 D.

法二：待定系数法，令 $S_n=An^2+Bn+C+D(-1)^n$，则 $S_{n+1}=A(n+1)^2+B(n+1)+C+D(-1)^{n+1}$，由于 $S_n+S_{n+1}=2An^2+(2A+2B)n+A+B+2C=n^2$，对比系数得：$A=\frac{1}{2}$，$B=-\frac{1}{2}$，$C=0$，$S_1=-D=a_1$，则 $S_2=\frac{1}{2}\times 2^2-\frac{1}{2}\times 2+D=1-a_1$，$S_3=\frac{1}{2}\times 3^2-\frac{1}{2}\times 3-D=3+a_1$，故 $a_2=1-2a_1$，$a_3=2+2a_1$，$\begin{cases}a_1<1-2a_1\\1-2a_1<2+2a_1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_1<\frac{1}{3}\\a_1>-\frac{1}{4}\end{cases}$，即 $-\frac{1}{4}<a_1<\frac{1}{3}$，即 a_1 的取值范围为 $(-\frac{1}{4}，\frac{1}{3})$，故选 D.（待定系数法一定不会错）

11.【解析】根据题意，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+a_n=(-1)^n(2n-1)$，当 n 为奇数时，有 $a_{n+1}+a_n=-(2n-1)$，其中当 $n=1$ 时，有 $a_2+a_1=-1$，当 $n=3$ 时，有 $a_4+a_3=-5$，当 $n=5$ 时，有 $a_6+a_5=-9$，…

当 $n=59$ 时，有 $a_{60}+a_{59}=-(2\times 59-1)=-117$，则 $\{a_n\}$ 的前 60 项和 $S_{60}=(a_2+a_1)+(a_4+a_3)+\ldots+(a_{60}+a_{59})$ $=(-1)+(-5)+\ldots+(-117)=-(1+5+9+\ldots+117)$ $=-\frac{(1+117)\times 30}{2}=-1770$；故选：$C$.

12.【解析】（1）由 $a_{n+1}+a_n=4n+4$，$\therefore a_{n+2}+a_{n+1}=4(n+1)+4=4n+8$ $\therefore a_{n+2}-a_n=4$

$\therefore \{a_n\}$的奇数项与偶数项分别是公差为 4 的等差数列．又$a_1=1$，$\therefore a_2=7$ $\therefore a_n=\begin{cases}4n-3, & n\text{为正奇数}\\ 4n+3, & n\text{为正偶数}\end{cases}$

（2）若数列$\{a_n\}$是等差数列，则$a_n=a_1+(n-1)d$，$a_{n+1}=a_1+nd$．由$a_{n+1}+a_n=4n+4$，

得$(a_1+nd)+[a_1+(n-1)d]=4n+4$，即$2d=4$，$2a_1-d=4$，解得，$d=2$，$a_1=3$，所以存在存在$a_1=3$，

使$\{a_n\}$为等差数列．

13．【解析】法一：$a_2-a_1=1$，$a_3+a_2=3$，$a_4-a_3=5$，$a_5+a_4=7$，$a_6-a_5=9$，…

$a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{64}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\ldots+(a_{62}+a_{63})+a_{64}=a_1+1953+a_{64}$，

将$a_1-a_2=-1$，$a_3+a_2=3$，$a_4-a_3=5$，$-a_5-a_4=-7$，$-a_6-a_5=-9$，

$a_7+a_6=11$，$a_8-a_7=13$，$a_9+a_8=15\ldots$，$a_{64}-a_{63}=125$相加

得$a_1+a_{64}=-1+3+5-7-9+11+13-15-17+\ldots+123+125=127$，

$\therefore$则$\{a_n\}$的前 64 项和为：$1953+127=2080$．故选：D．

法二：$a_2-a_1=1$，$a_3+a_2=3$，$a_4-a_3=5$，故$S_4=10$，且S_4，S_8-S_4，$S_{12}-S_8\cdots$是以 10 为首项，16 为公差的等差数列，$S_{64}=16S_4+\dfrac{16\times15}{2}\times16=2080$

14．【解析】$\because a_{n+1}+(-1)^n a_n=n+2$，$\therefore a_2-a_1=3$，$a_3+a_2=4$，$a_4-a_3=5$．可得$a_3+a_1=1$，$a_2+a_4=9$，

同理可得：$a_5+a_7=a_3+a_1=1=a_9+a_{11}=a_{13}+a_{15}=a_{17}+a_{19}$．

$a_6+a_8=17$，$a_{10}+a_{12}=25$，$a_{14}+a_{16}=33$，$a_{18}+a_{20}=41$．

$\therefore \{a_n\}$的前 20 项和$=(a_1+a_3)+\ldots+(a_{17}+a_{19})+(a_2+a_4)+(a_6+a_8)+\ldots+(a_{18}+a_{20})$

$=5+9+17+25+33+41=130$．故选：A．

15．【解析】法一：数列$\{a_n-n\}$的前 2018 项和为 1，即有$(a_1+a_2+\ldots+a_{2018})-(1+2+\ldots+2018)=1$，

可得$a_1+a_2+\ldots+a_{2018}=1+1009\times2019$，由数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$n^2$，$b_n=a_{n+1}+(-1)^n a_n(n\in N^*)$，

可得$a_2=1+a_1$，$a_3=2-a_1$，$a_4=7-a_1$，$a_5=a_1$，$a_6=8+a_1$，$a_7=2-a_1$，$a_8=15-a_1$，$a_9=a_1$，…，

可得$a_1+a_2+\ldots+a_{2018}=(1+2+7)+(9+2+15)+(17+2+23)+\ldots+(4025+2+4031)+(a_1+4033+a_1)$

$=1+1009\times2019$，解得$a_1=\dfrac{3}{2}$．故答案为：$\dfrac{3}{2}$．

法二：由数列$\{b_n\}$的前n项和为n^2，$b_n=a_{n+1}+(-1)^n a_n=n^2-(n-1)^2=2n-1(n\in N^*)$，数列$\{a_n-n\}$的前 2018 项和为 1，即有$(a_1+a_2+\ldots+a_{2018})-(1+2+\ldots+2018)=1$，可得$a_1+a_2+\ldots+a_{2018}=1+1009\times2019$，由于 2018 不是 4 的倍数，故只能从$a_3$开始，$a_3$到$a_{2018}$之间的项数满足 4 的倍数，$a_3+a_4+a_5+a_6=18$，故$S_6-S_2$，$S_{10}-S_6$，$\cdots S_{2018}-S_{2014}$是公差为 16 的等差数列，$S_{2018}=a_1+a_2+18\times504+\dfrac{504\times503}{2}\times16=1+1009\times2019$，

即：$2a_1+1+18\times504+\dfrac{504\times503}{2}\times16=1+1009\times2019$，解得$a_1=\dfrac{3}{2}$．故答案为：$\dfrac{3}{2}$．

16.【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，$\because a_4=5$，$a_7=11$．

$\therefore a_1+3d=5$，$a_1+6d=11$，$\therefore a_1=-1$，$d=2$．$\therefore a_n=-1+2(n-1)=2n-3$．

又$b_n=(-1)^n\bullet a_n$，$b_{2n-1}+b_{2n}=-a_{2n-1}+a_{2n}=2$．则数列$\{b_n\}$的前 100 项之和$S_{100}=2\times50==100$．故选$D$．

17.【解析】数列$\{a_n\}$中，$a_{2n}=a_{2n-1}+(-1)^n\bullet n$，$a_{2n+1}=a_{2n}+n$，$\therefore a_{2n+1}-n=a_{2n-1}+(-1)^n\bullet n$，

化为：$a_{2n+1}-a_{2n-1}=n+(-1)^n\bullet n$，$\therefore a_3-a_1=1-1$，$a_5-a_3=2+2$，……，$a_{99}-a_{97}=49-49$，$a_{101}-a_{99}=50+50$．

相加可得：$a_{101}-a_1=1+2+\ldots\ldots+50+25=\dfrac{50\times(1+50)}{2}+25$．可得：$a_{101}=a_1+1300=1301$．故答案为：1301．

18.【解析】$\because a_{n+1}=2a_n+(-1)^n$，$\therefore a_{n+1}+\dfrac{1}{3}(-1)^{n+1}=2[a_n+\dfrac{1}{3}(-1)^n]$，$a_1+\dfrac{1}{3}\times(-1)=\dfrac{2}{3}$．

$\therefore$数列$\{a_n+\dfrac{1}{3}(-1)^n\}$是等比数列，首项为$\dfrac{2}{3}$，公比为 2．$\therefore a_n+\dfrac{1}{3}(-1)^n=\dfrac{2}{3}\times2^{n-1}$，解得：$a_n=\dfrac{2}{3}\times2^{n-1}-\dfrac{1}{3}(-1)^n$，

$\therefore S_n=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1-2^n}{1-2}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{-[1-(-1)^n]}{1-(-1)}=\dfrac{2(2^n-1)}{3}+\dfrac{1-(-1)^n}{6}$．则$S_{2n-1}=\dfrac{2(2^{2n-1}-1)}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4^n-1}{3}$．故答案为：$\dfrac{4^n-1}{3}$．

19.【解析】$a_{2k+1}=a_{2k}+2^k=a_{2k-1}+(-1)^k+2^k$，所以$a_{2k+1}-a_{2k-1}=2^k+(-1)^k$，同理$a_{2k-1}-a_{2k-3}=2^{k-1}+(-1)^{k-1}$，

$\ldots\ a_3-a_1=2+(-1)$，所以$(a_{2k+1}-a_{2k-1})+(a_{2k-1}-a_{2k-3})+\ldots+(a_3-a_1)$

$=(2^k+2^{k-1}+\ldots+2)+[(-1)^k+(-1)^{k-1}+\ldots+(-1)]$，由此得$a_{2k+1}-a_1=2(2^k-1)+\dfrac{1}{2}[(-1)^k-1]$，

于是$a_{2k+1}=2^{k+1}+\dfrac{1}{2}(-1)^k-\dfrac{3}{2}$，$a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^k=2^k+\dfrac{1}{2}(-1)^{k-1}-\dfrac{3}{2}+(-1)^k=2^k+\dfrac{1}{2}(-1)^k-\dfrac{3}{2}$，

$\{a_n\}$的通项公式为：当n为奇数时，$a_n=2^{\frac{n+1}{2}}+\dfrac{1}{2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}-\dfrac{3}{2}$；当$n$为偶数时，$a_n=2^{\frac{n}{2}}+\dfrac{1}{2}(-1)^{\frac{n}{2}}-\dfrac{3}{2}$；

则$S_{60}=(a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{59})+(a_2+a_4+a_6+..+a_{60})=[(2+2^2+2^3+\ldots+2^{30})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\ldots-\dfrac{1}{2})-\dfrac{3}{2}\times30]$

$+[(2+2^2+2^3+\ldots+2^{30})+(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{2})-\dfrac{3}{2}\times30]=2\times\dfrac{2(1-2^{30})}{1-2}+0-90=2^{32}-94$．故选：$C$．

20.【解析】$\because$在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=3$，且数列$\left\{a_n+(-1)^n\right\}$是公比为 2 的等比数列，$\therefore a_n+(-1)^n=2^n$，

$\therefore a_n=2^n-(-1)^n$，$\therefore a_1+a_2+\ldots+a_n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-\dfrac{-1\times[1-(-1)^n]}{1-(-1)}=2^{n+1}-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\times(-1)^n$，

$\because$ 对于任意的 $n\in N^*$，不等式 $a_1+a_2+\ldots+a_n\geqslant\lambda a_{n+1}$ 恒成立，

$\therefore$ 对于任意的 $n\in N^*$，不等式 $2^{n+1}-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\times(-1)^n\geqslant\lambda[2^{n+1}-(-1)^{n+1}]$ 恒成立，

$\therefore$ 对于任意的 $n\in N^*$，不等式 $\lambda\leqslant\dfrac{2^{n+1}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times(-1)^n}{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}$ 恒成立，当 $n=1$ 时，$\dfrac{2^{n+1}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times(-1)^n}{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}$ 取最大值 $\dfrac{2}{3}$，

$\therefore\lambda\leqslant\dfrac{2}{3}$．$\therefore$ 实数 λ 的取值范围是 $(-\infty,\ \dfrac{2}{3}]$．故选 C．

21．【解析】$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n(n+2)}$，$\therefore(-1)^{n+1}a_{n+1}+(-1)^n a_n=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$．

$\therefore$ 数列 $\{(-1)^n a_n\}$ 的前 40 项的和 $=\dfrac{1}{2}\times(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{39}-\dfrac{1}{41})=\dfrac{1}{2}\times(1-\dfrac{1}{41})=\dfrac{20}{41}$．故选 D．

专题 5　分式数列递推

1．【解析】（1）$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{2S_n^2}{2S_n-1}$，所以 $\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n-1}}=2$，$\dfrac{1}{S_n}=1+(n-1)\cdot 2=2n+1$，$S_n=\dfrac{1}{2n-1}$.故

$a_n=\begin{cases}1 & n=1\\ \dfrac{-2}{(2n-1)(2n-3)} & n\geq 2\end{cases}$．（2）$T_n=\dfrac{n}{2n+1}$．

2．【解析】$\dfrac{1}{a_n^2}-\dfrac{1}{a_{n-1}^2}=1$，$\dfrac{1}{a_n^2}=\dfrac{1}{a_1^2}+(n-1)=n+\dfrac{1}{a^2}$，$|a_n|=\dfrac{|a|}{\sqrt{1+na^2}}$．

3．【解析】（1）$A_n(-\dfrac{1}{a_{n+1}},a_n)$ 在 $f(x)$ 上，$a_n=\dfrac{2a_{n-1}}{a_{n-1}+2}$，$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{2}$，$a_n=\dfrac{2}{n}$．

（2）$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\dfrac{1}{4}(\sqrt{4n+1}-1)$

4．【解析】将已知递推式取倒数，得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$，所以

$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\dfrac{1}{a_{k+1}}-\dfrac{1}{a_k})=\dfrac{1}{a_1}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}[\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}]=2-\dfrac{1}{n!}$，所以 $\dfrac{1}{a_n}=2-\dfrac{1}{n!}=\dfrac{2n!-1}{n!}$，$a_n=\dfrac{n!}{2n!-1}$．

5．【解析】将已知递推式两边同除以 $a_{n-1}a_n$，得 $\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=2n-1$，所以 $\dfrac{1}{a_n}=1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$，所以

$a_n=\dfrac{1}{n^2}$．

6.【解析】由 $a_{n+1}(2a_n+1)=a_n$，可得：$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$，两边取倒数可得：$\dfrac{1}{a_{n+1}}=2+\dfrac{1}{a_n}$，即 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=2$，$\dfrac{1}{a_1}=-99$．

$\therefore$ 数列 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ 为等差数列，公差为 2，首项为 -99．$\therefore\dfrac{1}{a_n}=-99+2(n-1)=2n-101$．

$\therefore b_n=\dfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}-\dfrac{1}{a_{2n}a_{2n+1}}=(4n-2-101)(4n-101)-(4n-101)(4n+2-101)=-4(4n-101)=-16n+404$.

令 $b_n=-16n+404\geqslant 0$，解得 $n\leqslant 25+\dfrac{1}{4}$．$\therefore$ 当数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和取得最大值时，n 的值是 25．故选：B.

7.【解析】$\because 2a_na_{n+1}=a_n^2+1$，$\therefore a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n})$，$\because b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$，

$$\therefore b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1}=\frac{\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})-1}{\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})+1}=\frac{(a_n-1)^2}{(a_n+1)^2}=b_n^2>0,$$

$\because a_1=2$，$b_1=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore b_2=(\dfrac{1}{3})^2$，$\therefore b_3=(\dfrac{1}{3^2})^2=(\dfrac{1}{3})^4$，$b_4=((\dfrac{1}{3})^4)^2=(\dfrac{1}{3})^8$，$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是递减数列，

故选 D.

8.【解析】$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+1}$，$(n\in N^*)$，两边取倒数可得：$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{2a_n}+\dfrac{1}{2}$，化为：$\dfrac{1}{a_{n+1}}-1=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a_n}-1)$，

$\dfrac{1}{a_1}-1=1$，可得：数列 $\{\dfrac{1}{a_n}-1\}$ 是等比数列，首项为 1，公比为 $\dfrac{1}{2}$．$\therefore \dfrac{1}{a_n}-1=(\dfrac{1}{2})^{n-1}$，$\therefore a_n=1-\dfrac{1}{2^{n-1}+1}$.

$\therefore S_{2019}=2019-(\dfrac{1}{1+1}+\dfrac{1}{2+1}+\dfrac{1}{2^2+1}+\ldots+\dfrac{1}{2^{2018}+1})$，令 $T_n=\dfrac{1}{1+1}+\dfrac{1}{2+1}+\dfrac{1}{2^2+1}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{2^{2018}+1}$，

$\because \dfrac{1}{2^n}<\dfrac{1}{2^{n-1}+1}<\dfrac{1}{2^{n-1}}$，而 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{2^{2019}}=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{2019}})}{1-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2^{2019}}$，

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{2^{2018}}=\dfrac{1-\frac{1}{2^{2019}}}{1-\frac{1}{2}}=2(1-\dfrac{1}{2^{2019}})$．$\therefore 2017+\dfrac{1}{2^{2018}}<S_{2019}<2018+\dfrac{1}{2^{2019}}$，

$\because S_{2019}\in(k,k+1)$，则正整数 k 的值为 2018．故选 C.

9.【解析】(1) 由已知，点 $P(a_n{}^2,a_{n+1})$ 在曲线 $y=f(x)$ 上，得 $a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{a_n^2}{1+4a_n^2}}$.两边平方得 $a_{n+1}^2=\dfrac{a_n^2}{1+4a_n^2}$，取倒数得 $\dfrac{1}{a_{n+1}^2}-\dfrac{1}{a_n^2}=4$.所以数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n^2}\right\}$ 是以 5 为首项、4 为公差的等差数列，所以 $\dfrac{1}{a_n^2}=\dfrac{1}{a_1^2}+(n+1)\times 4=4n+1$.

又 $a_n>0$，所以 $a_n=\sqrt{\dfrac{1}{4n+1}}$.

(2) $b_n=\dfrac{a_n}{f(n)}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}>\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.故 $T_n>2(\sqrt{n+1}-1)$.

10.【解析】(1) 因为 $a_1\neq\dfrac{2}{3}$,所以 $f(x)=\dfrac{2bx}{ax-1}$.又 $f(1)=1$，所以 $a=2b+1$.依题意,

$\dfrac{2bx}{ax-1}=2x\Rightarrow 2ax^2-2(b+1)x=0$

$(a\neq 0)$ 只有一个根.所以 $4(1+b)^2-8a\cdot 0$，解得 $b=-1$，代入 $a=2b+1$ 的 $a=-1$.所以 $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$.

（2）因为 $a_{n+1}=f(an)$ 且 $f(x)=\frac{2x}{x+1}$，所以 $a_n=\frac{2a_n}{a_n+1}$，所以 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+1}$.上式两边取倒数，得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}$，即 $\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{2}(\frac{1}{a_n}-1)$. 又 $b_n=\frac{1}{a_n-1}$，所以 $b_n=(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{n-1}=(\frac{1}{2})^n$. 由于 $b_n=\frac{1}{2^n}$，即 $\frac{1}{a_1}-1=\frac{1}{2^n}$，得 $a_n=\frac{2^n}{2^n+1}$.

（3）$a_n\cdot b_n=\frac{2^n}{2^n+1}\times\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$，所以 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1$.

11.【解析】（1）$\because a_1=\frac{1}{2}$，$2a_{n+1}=1+a_{n+1}a_n$，$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$，$\therefore a_2=\frac{1}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$，$a_3=\frac{1}{2-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$，

$\therefore \frac{1}{1-a_{n+1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2-a_n}}=\frac{2-a_n}{1-a_n}=1+\frac{1}{1+a_n}$，$\therefore$ 数列 $\{\frac{1}{1-a_n}\}$ 是等差数列，

（2）由（I）可知 $\frac{1}{1-a_n}=2+1(n-1)=n+1$，$\therefore a_n=\frac{n}{n+1}$，$\therefore b_n=\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

$\therefore S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

12.【解析】（1）由 $b_{n+1}\cdot b_n=b_n+2$，得 $b_{n+1}=\frac{b_n+2}{b_n}$.由 $a_n=\frac{1}{b_n+2}$，得

$a_{n+1}=\frac{1}{b_{n+1}-2}=\frac{1}{\frac{b_n+2}{b_n}-2}=\frac{b_n}{2-b_n}=-\frac{2}{b_n-2}-1=-2a_n-1$，所以 $a_{n+1}+2a_n+1=0$.

（2）法 1：由（1）得 $a_{n+1}+\frac{1}{3}=-2(a_n+\frac{1}{3})$，又因为 $b_1=\frac{11}{7}$，所以 $a_1=\frac{1}{\frac{11}{7}-2}=-\frac{7}{3}$，所以数列 $\left\{a_n+\frac{1}{3}\right\}$ 是以 $a_1+\frac{1}{3}$ 为首项、-2 为公比的等比数列.所以 $a_n+\frac{1}{3}=-2\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^n$，$a_n=(-2)^n-\frac{1}{3}$.又由 $a_n=\frac{1}{b_n-2}$，得 $b_n-2=\frac{1}{a_n}$，故 $b_n=\frac{1}{a_n}+2=\frac{1}{(-2)^n-\frac{1}{3}}+2=\frac{3}{3(-2)^n-1}+2=\frac{6(-2)^n+1}{3(-2)^n-1}$.

13.【解析】（1）在递推数列 $a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$ 中用 x 代替 a_{n+1}，a_n,得 $x=\frac{1}{2-x}$.所以 $x^2-2x+1=0$，得 $x=1$.所以

$a_{n+1}-1=\frac{1}{2-a_n}-1=\frac{1-2+a_n}{2-a_n}=\frac{-1+a_n}{2-a_n}=-\frac{a_n-1}{a_n-2}$，取倒数得 $\frac{1}{a_{n+1}-1}=-\frac{a_n-1-1}{a_n-1}=\frac{1}{a_n-1}-1$，

$\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}=-1$.所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n-1}\right\}$ 是以 $\frac{1}{a_1-1}=-2$ 为首项、-1 为公差的等差数列.

所以 $\frac{1}{a_n-1}=-2+(n-1)(-1)=-(n+1)$，$a_n=\frac{n}{n+1}$.所以 $k=1$，使得数列 $\left\{\frac{1}{a_n-k}\right\}$ 成等差数列.

（1）因为 $\ln(1+x)<x$ 在 $x>0$ 时成立，从而 $\ln(1+\frac{1}{n+1})<\frac{1}{n+1}$，所以 $1-\frac{1}{n+1}<1-\ln(1+\frac{1}{n+1})$，所以

$a_n=1-\frac{1}{n+1}<1-(1+\frac{1}{n+1})=1-\ln(n+2)+\ln(n+1)$，所以 $Sn=\sum_{k=1}^{n}ak<\sum_{k=1}^{n}[1+\ln(k+1)-\ln(k+2)]=$

$n+(\ln 2-\ln 3)+(\ln 3-\ln 4)+(\ln 4-\ln 5)+\cdots+(\ln 2-\ln 3)+[\ln(n+1)-\ln(n+2)]=n+\ln 2-\ln(n+2)=$

$n-[\ln(n+2)-\ln 2]=n-\ln\frac{n+2}{2}$，即 $S_n<n-\ln\frac{n+2}{2}$．

14．【证明】（1）$\because a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+3}$，$(n\in N^*)$，$\therefore\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}+2$，$\therefore\frac{1}{a_{n+1}}+1=3(\frac{1}{a_n}+1)$，$\because\frac{1}{a_1}+1=3$，

$\therefore\{\frac{1}{a_n}+1\}$ 是以 3 为首项，3 公比的等比数列，$\therefore\frac{1}{a_n}+1=3\times 3^{n-1}=3^n$．$\therefore a_n=\frac{1}{3^n-1}$．

【解析】（2）(i) 由（1）得 $b_n=\frac{n}{2^n}$，$T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}$①，$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\ldots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$②，两式

相减，得：$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-(\frac{1}{2})^n-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$，$\therefore T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$．

(ii) 由 (i) 得 $(-1)^n\lambda<2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n}{2^n}=2-\frac{2}{2^n}$，令 $C_n=2-\frac{2}{2^n}$，则 $\{C_n\}$ 是递增数列，若 n 为偶数时，$\lambda<2-\frac{2}{2^n}$ 恒成立，又 $\because c_2=\frac{3}{2}$，$\therefore\lambda<\frac{3}{2}$，若 n 为奇数时，$-\lambda<2-\frac{2}{2^n}$ 恒成立，$\because c_1=1$，$\therefore-\lambda<1$，$\therefore\lambda>-1$．综上，

λ 的取值范围是 $(-1,\frac{3}{2})$．

15．【解析】（1）当 $n=1$ 时，$2a_1=3a_1^{\ 2}+a_1-2$，即 $3a_1^{\ 2}-a_1-2=0$，$(3a_1+2)(a_1-1)=0$，

由 $a_1>0$ 得 $a_1=1$；当 $n\geqslant 2$ 时，由 $2S_n=3a_n^{\ 2}+a_n-2$ 得 $2S_{n-1}=3a_{n-1}^{\ 2}+a_{n-1}-2$，

所以两式相减得 $2a_n=3a_n^{\ 2}+a_n-3a_{n-1}^{\ 2}-a_{n-1}$，所以 $3(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})=a_n+a_{n-1}$，

由 $a_n>0$ 知 $a_n+a_{n-1}>0$ 所以 $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{3}$，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=1$，公差 $d=\frac{1}{3}$ 的等差数列．

（2）由（1）得 $a_n=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}$，由 $a_{b_1}=a_1=1,a_{b_2}=a_4=2$，所以数列 $\{a_{b_n}\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列所以 $a_{b_n}=2^{n-1}$，又 $a_{b_n}=\frac{1}{3}b_n+\frac{2}{3}$，所以 $a_{b_n}=\frac{1}{3}b_n+\frac{2}{3}=2^{n-1}$，即 $b_n=3\times 2^{n-1}-2$．

（3）由 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{1}{6}(n^2+5n)$，所以 $\frac{S_n}{b_n+2}=\frac{\frac{n^2+5n}{6}}{3\times 2^{n-1}}=\frac{n^2+5n}{9\times 2^n}$，设 $f(n)=\frac{S_n}{b_n+2}=\frac{n^2+5n}{9\times 2^n}$，

则 $\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{\frac{(n+1)^2+5(n+1)}{9\times 2^{n+1}}}{\frac{n^2+5n}{9\times 2^n}}=\frac{n^2+7n+6}{2n^2+10n}=\frac{1}{2}(1+\frac{2n+6}{n^2+5n})$，令 $\frac{f(n+1)}{f(n)}>1$ 得 $\frac{n^2+7n+6}{2n^2+10n}>1$，即 $n^2+3n-6<0$，

由 $n\in N^*$ 得 $n=1$，所以 f（1）$<f$（2）$>f$（3）$>f$（4）$>\ldots>f(n)>\ldots$，又因为 $f(1)=\dfrac{S_1}{b_1+2}=\dfrac{6}{18}=\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{4}$，

$f(2)=\dfrac{S_2}{b_2+2}=\dfrac{14}{36}=\dfrac{7}{18}>\dfrac{1}{4}$，$f(3)=\dfrac{S_3}{b_3+2}=\dfrac{24}{72}=\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{4}$，$f(4)=\dfrac{S_4}{b_4+2}=\dfrac{36}{144}=\dfrac{1}{4}$，

$f(5)=\dfrac{S_5}{b_5+2}=\dfrac{50}{288}=\dfrac{25}{144}<\dfrac{1}{4}$，所以当 $n\geqslant 5$ 时，$f(n)<\dfrac{1}{4}$，所以满足 $\dfrac{S_n}{b_n+2}<\dfrac{1}{4}$ 的最小正整数 n 为 5.

16．解（1）$b_1=\dfrac{3}{4}$，$b_2=\dfrac{4}{5}$，$b_3=\dfrac{5}{6}$，$b_4=\dfrac{6}{7}$；

（2）因为 $1-a_n=b_n$，$1+a_n=2-b_n$，所以 $b_{n+1}=\dfrac{b_n}{(1-a_n)(1+a_n)}=\dfrac{b_n}{b_n(2-b_n)}=\dfrac{1}{2-b_n}$.令 $x=\dfrac{1}{2-x}$，得 $x=1$，

故 $\dfrac{1}{b_{n+1}-1}-\dfrac{1}{b_n-1}=-1$.又 $\dfrac{1}{b_1-1}=\dfrac{1}{\frac{3}{4}-1}=-4$，$\dfrac{1}{b_n-1}=-4+(n-1)(-1)=-(n+3)$，所以 $b_n=-\dfrac{1}{n+3}+1=\dfrac{n+2}{n+3}$.

（3）因为 $a_n=1-b_n=1-\dfrac{n+2}{n+3}=\dfrac{1}{n+3}$，所以 $a_n\cdot a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}=\dfrac{1}{n+3}-\dfrac{1}{n+4}$，

$S_n=(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5})+(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6})+\cdots+(\dfrac{1}{n+3}-\dfrac{1}{n+4})=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{n+4}=\dfrac{n}{4(n+4)}$，$4aSn=4a\cdot\dfrac{n}{4(n+4)}<nb_n+1=\dfrac{n(n+3)}{n+4}$，所以 $a<n+3$.又所以当 $a<4$ 时，$4aS_n<nb_{n+1}$ 恒成立.

17．（1）【解析】对于数列 $\{a_n\}$，$a_{n+m}=a_n\bullet a_m=\dfrac{5}{3}\times(5\times3^{n+m-1})\neq a_n$，所以 $\{a_n\}$ 不是指数型数列.

对于数列 $\{b_n\}$，对任意 n，$m\in N^*$，因为 $b_{n+m}=4^{n+m}=4^n\bullet 4^m=b_n\bullet b_m$，所以 $\{b_n\}$ 是指数型数列.

（2）证明：由题意，$\{\dfrac{1}{a_n}+1\}$，是“指数型数列”，$a_n=2a_na_{n+1}+3a_{n+1}$，$\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3}{a_n}+2\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}+1=3(\dfrac{1}{a_n}+1)$，所以数列 $\{\dfrac{1}{a_n}+1\}$ 是等比数列，$\dfrac{1}{a_n}+1=(\dfrac{1}{a_n}+1)\times3^{n-1}=3^n$，$(\dfrac{1}{a_n}+1)(\dfrac{1}{a_m}+1)=3^n\bullet3^m=3^{m+n}=(\dfrac{1}{a_{n+m}}+1)$，数列 $\{\dfrac{1}{a_n}+1\}$ 是“指数型数列”.

（3）证明：因为数列 $\{a_n\}$ 是指数数列，故对于任意的 n，$m\in N^*$，有 $a_{n+m}=a_n\bullet a_m$，

$\Rightarrow a_{n+1}=a_n\bullet a_1\Rightarrow a_n=a_1^n=(\dfrac{a+1}{a+2})^n$，假设数列 $\{a_n\}$ 中存在三项 a_u，a_v，a_w 构成等差数列，不妨设 $u<v<w$，

则由 $2a_v=a_u+a_w$，得 $2(\dfrac{a+1}{a+2})v=(\dfrac{a+1}{a+2})u+(\dfrac{a+1}{a+2})w$，所以 $2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}=(a+2)^{w-u}+(a+1)^{w-u}$，

当 t 为偶数时，$2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}$ 是偶数，而 $(a+2)^{w-u}$ 是偶数，$(a+1)^{w-u}$ 是奇数，故 $2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}=(a+2)^{w-u}+(a+1)^{w-u}$ 不能成立；当 t 为奇数时，$2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}$ 是偶数，而 $(a+2)^{w-u}$ 是奇数，$(a+1)^{w-u}$ 是偶数，故 $2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}=(a+2)^{w-u}+(a+1)^{w-u}$ 也不能成立．所以，对任意 $a\in N^*$，$2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}=(a+2)^{w-u}+(a+1)^{w-u}$ 不能成立，即数列 $\{a_n\}$ 的任意三项都不成构成等差数列.

18．【解析】（1）数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数公比为 q 的等比数列，$a_1=2$，$a_2a_4=64$．则：$a_2\bullet a_4=a_3^2$，

解得：$a_3=8$，故：$q=2$，所以：$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2^n$．数列$\{b_n\}$满足：对任意的正整数n，都有

$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$①．所以：$2a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_{n-1}b_{n-1}=(n-2)\cdot 2^n+2$②，

①−②得：$a_nb_n=n\cdot 2^n$，所以：$b_n=n$，由于：$a_1b_1=2$，则：$b_1=1$（首项符合通项），故：$b_n=n$．

（2）由于$1-\frac{1}{2b_n}=1-\frac{1}{2n}>0$，所以：当$\lambda\leqslant 0$时，不等式成立．当$\lambda>0$时，原不等式可化为：

$\frac{1}{\lambda}>\sqrt{2n+1}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{2n})$，设$t_n=\sqrt{2n+1}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{2n})$，则：$t_n>0$，

故：$t_{n+1}>\sqrt{2n+1}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{2n})(1-\frac{1}{2n+2})$，所以：$\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}=\sqrt{\frac{4n^2+8n+3}{4n^2+8n+4}}<1$，

所以：数列$\{a_n\}$单调递减．则：$\frac{1}{\lambda}>t_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得：$0<\lambda<\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

（3）由题意知：设b_k是数列$\{C_n\}$中的项为c_t，由题意可知：$t=2+2^2+\ldots+2^{k-1}+k=2^k+k-2$，

所以：当$m=2^k+k-2$时，$T_m=2(2^k-2)+1+2+\ldots+k=2^{k+1}+\frac{k^2+k}{2}-4$，

设$2^{k+1}+\frac{k^2+k}{2}-4>2019$，解得：$k>10$，当$k=9$时，$m=2^9+9-2=2^9+7$，所以：$T_m=2^{10}+\frac{9^2+9}{2}-4=1065$，

因为$2019-1065=954=2\times 477$，且$2^9+7+477=996$，所以，当$m=996$时，$T_m=2019$．

专题6　经典的二阶递推

1.【解析】∵数列$\{a_n\}$满足$a_1=l$，$a_2=2$，$a_na_{n-2}=a_{n-1}(n\geqslant 3)$，∴$a_3=\frac{a_2}{a_1}=2$，$a_4=\frac{a_3}{a_2}=1$，同理可得：$a_5=\frac{1}{2}$，

$a_6=\frac{1}{2}$，$a_7=1$，$a_8=2$，……，可得$a_{n+6}=a_n$．∴数列$\{a_n\}$是周期为6的数列．

∴T_n有最大值，a_n有最大值，$T_{2019}=(a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_6)^{336}\cdot(a_1a_2a_3)=4$．$a_{2019}=a_3=2$．下列说法错误的是$A$．故选$A$．

2.【解析】$a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=1$，$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}(n\in N^*,n\geqslant 2)$，可得$a_3=\frac{3}{2}$，$a_4=\frac{5}{2}$，$a_5=\frac{8}{2}$，$a_6=\frac{13}{2}$，$a_7=\frac{21}{2}$，…，

$$\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\frac{1}{a_3a_5}+\ldots+\frac{1}{a_{2018}a_{2020}}=\frac{1}{a_2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}\right)+\frac{1}{a_3}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\frac{1}{a_{2019}}\left(\frac{1}{a_{2018}}-\frac{1}{a_{2020}}\right)=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2019}a_{2020}}$$

$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2019}a_{2020}}=2-\frac{1}{a_{2019}a_{2020}}$由于$\frac{1}{a_{2019}a_{2020}}\in(0,1)$，则$\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\frac{1}{a_3a_5}+\ldots+\frac{1}{a_{2018}a_{2020}}$的整数部分为1．故选$B$．

3.【解析】∵数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=2$，且$2na_n=(n-1)a_{n-1}+(n+1)a_{n+1}(n\geqslant 2$且$n\in N^*)$，∴令$b_n=na_n$，

则由 $2na_n=(n-1)a_{n-1}+(n+1)a_{n+1}$，得 $2b_n=b_{n-1}+b_{n+1}$，$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 构成以 1 为首项，以 $2a_2-a_1=3$ 为公差的等差数列，则 $b_n=1+3(n-1)=3n-2$，即 $na_n=3n-2$，$\therefore a_n=\dfrac{3n-2}{n}$，$\therefore a_{18}=\dfrac{3\times18-2}{18}=\dfrac{26}{9}$．故选 B．

4.【解析】$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$，此可以理解为从第二项开始是斐波那契数列，根据

$a_{n+2}=S_{n+2}-S_{n+1}=(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_1=S_n+a_1=S_n$，

$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2n-2}+a_{2n-1})=S_{2n-1}=a_{2n+1}$，故选 D．

注意：此题代入前 6 项也可以看出规律.

5.【解析】根据题意，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n-a_{n-1}$，则有 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$，又由 $a_1=2018$，$a_2=2017$，则

$a_3=a_2-a_1=2017-2018=-1$，$a_4=a_3-a_2=(-1)-2017=-2018$，$a_5=a_4-a_3=(-2018)-(-1)=-2017$，

$a_6=a_5-a_4=(-2017)-(-2018)=1$，$a_7=a_6-a_5=1-(-2017)=2018=a_1$，$a_8=a_7-a_6=2018-1=2017=a_2$，

则数列 $\{a_n\}$ 是周期为 6 的数列，且 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0$，

则 $S_{100}=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12})+\ldots\ldots(a_{97}+a_{98}+a_{99}+a_{100})=a_1+a_2+a_3+a_4=2016$．故选 A．

6.【解析】:法一:$\because$ 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n(n\in N^*)$，$\therefore a_3=a_2+2a_1=6$，$a_4=a_3+2a_2=10$，

$a_5=a_4+2a_3=22$，$a_6=a_5+2a_4=42$，$a_7=a_6+2a_5=86$，… $\therefore a_1+a_2=4=2^2$，$a_2+a_3=8=2^3$，

$a_3+a_4=16=2^4$，

$a_4+a_5=32=2^5$，$a_5+a_6=64=2^6$，$a_6+a_7=128=2^7$，…由此猜想：$a_{2019}+a_{2020}=2^{2020}$，

$\therefore \log_2(a_{2019}+a_{2020})=log_2 2^{2020}=2020$．故答案为：2020.

法二：特征根法：构造方程 $x^2-x-2=0$，$x_1=2$，$x_2=-1$，$\{a_{n+1}+a_n\}$ 是以 $a_1+a_2=4$ 为首项，2 为公比的等比数列，即 $a_{n+1}+a_n=2^{n+1}$，$\therefore a_{2019}+a_{2020}=2^{2020}$，$\therefore \log_2(a_{2019}+a_{2020})=log_2 2^{2020}=2020$．故答案为 2020.

7.【解析】$\because a_n=\dfrac{1}{\sqrt5}[(\dfrac{1+\sqrt5}{2})^n-(\dfrac{1-\sqrt5}{2})^n]$，$\therefore a_1=\dfrac{1}{\sqrt5}(\dfrac{1+\sqrt5}{2}-\dfrac{1-\sqrt5}{2})=\dfrac{1}{\sqrt5}\times\dfrac{2\sqrt5}{2}=1$，

同理可得：$a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=3$，$a_5=5$．故选 B．

8.【解析】由题意可得：$b_1=1$，$b_2=1$，$b_3=2$，$b_4=3$，$b_5=1$，$b_6=0$；$b_7=1$，$b_8=1$，$b_9=2$，$b_{10}=3$，

$b_{11}=1$，$b_{12}=0$，…….

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是周期为 6 的数列，由 $c_1=b_1$，$c_2=b_2$，$c_n=b_n-b_{n-1}(n\geqslant 3,n\in N^*)$，则 $c_1=b_1=1$，$c_2=b_2=1$，$c_3=1$，

$c_4=1$，$c_5=-2$，$c_6=-1$，$c_7=1$，$c_8=0$，$c_9=1$，$c_{10}=1$，$c_{11}=-2$，$c_{12}=-1$，$c_{13}=1$，$c_{14}=0$，…….

$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ 从第三项开始为周期是 6 的周期数列.

$\therefore c_1+c_2+c_3+\ldots+c_{2019}=1=1+(1+1-2-1+1+0)\times 336+1=3$．故答案为 3.

9.【解析】由 $a_1=1$，$a_n \bullet a_{n+2}=3a_{n+1}(n\in N^*)$，得：$n=1$ 时，$a_3=3a_2$，$n=2$ 时，$a_2\bullet a_4=3a_3$，即 $a_4=\dfrac{3a_3}{a_2}=\dfrac{9a_2}{a_2}=9$；

$n=3$ 时，$a_3a_5=3a_4$，即 $a_5=\dfrac{3a_4}{a_3}=\dfrac{3\times 9}{3a_2}=\dfrac{9}{a_2}$；$n=4$ 时，$a_4a_6=3a_5$，即 $a_6=\dfrac{3a_5}{a_4}=\dfrac{3\times\dfrac{9}{a_2}}{9}=\dfrac{3}{a_2}$；

$n=5$ 时，$a_5a_7=3a_6$，即 $a_7=\dfrac{3a_6}{a_5}=\dfrac{\dfrac{9}{a_2}}{\dfrac{9}{a_2}}=1$；$n=6$ 时，$a_6a_8=3a_7$，即 $a_8=\dfrac{3a_7}{a_6}=\dfrac{3}{\dfrac{3}{a_2}}=a_2$．…由上可知，数列

$\{a_n\}$ 是以 6 为周期的周期数列，则 $a_{2019}=a_{371\times 6+3}=a_3=3a_2$．$\therefore a_5\bullet a_{2019}=\dfrac{9}{a_2}\times 3a_2=27$．故答案为 27.

10.【解析】$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=9$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}(n\in N^*,n\geqslant 4)$，

即 $a_n+a_{n-3}=a_{n-1}+a_{n-2}(n\in N^*,n\geqslant 4)$，$a_4=a_3+a_2-a_1=12$，同理可得：$a_5=17$．$a_6=20$，$a_7=25$，$a_8=28$，

$a_9=33$，…….$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的奇数项与偶数项分别成等差数列，公差都为 8.

则 $a_{2018}=a_2+(1009-1)\times 8=4+4064=4068$．故答案为 4068.

11.【解析】由 $a_{n+1}+\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}=\dfrac{2n}{n+1}a_n(n\geqslant 2$ 且 $n\in N^*)$，变形为：$(n+1)a_{n+1}+(n-1)a_{n-1}=2na_n(n\geqslant 2$ 且 $n\in N^*)$，

$\therefore$ 数列 $\{na_n\}$ 为等差数列，首项为 1，公差为 $2a_2-a_1=3$．$\therefore na_n=1+3(n-1)$，化为：$a_n=3-\dfrac{2}{n}$．

不等式 $a_{n+1}-a_n>0.02$ 化为：$3-\dfrac{2}{n+1}-(3-\dfrac{2}{n})>0.02$，化为：$n(n+1)<100$，解得 $n<10$，

则满足不等式 $a_{n+1}-a_n>0.02$ 的正整数 n 的最大值为 9．故答案为 9.

12.【解析】由 $2a_{n+1}=4a_n-2a_{n-1}+3$，得 $2(a_{n+1}-a_n)-2(a_n-a_{n-1})=3$，即 $(a_{n+1}-a_n)-(a_n-a_{n-1})=\dfrac{3}{2}(n\geqslant 2)$，

又 $a_2-a_1=-\dfrac{1}{2}-(-1)=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ 数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 构成以 $\dfrac{1}{2}$ 为首项，以 $\dfrac{3}{2}$ 为公差的等差数列，

则 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}(n-1)=\dfrac{3}{2}n-1$，$\therefore a_2-a_1=\dfrac{3}{2}\times 1-1$，$a_3-a_2=\dfrac{3}{2}\times 2-1$，… $a_n-a_{n-1}=\dfrac{3}{2}(n-1)-1$．

累加得：$a_n-a_1=\dfrac{3}{2}[1+2+\ldots+(n-1)]-(n-1)=\dfrac{3}{2}\bullet\dfrac{n(n-1)}{2}-(n-1)$，$\therefore a_n=\dfrac{3n^2-7n}{4}$．

则 $na_n=\frac{3}{4}n^3-\frac{7}{4}n^2$．令 $f(n)=\frac{3}{4}n^3-\frac{7}{4}n^2$，则 $f'(n)=\frac{9n^2-14n}{4}$，$f(n)$ 在 $(2,+\infty)$ 上为增函数，

$\because f$（1）$=-\frac{5}{4}$，f（2）$=2$．$\therefore na_n$ 的最小值为 $-\frac{5}{4}$．故答案为：$-\frac{5}{4}$．

13．【解析】令 $x^2=2x+3$，$x_1=3$，$x_2=-1$，$a_{n+2}+a_{n+1}+1=3(a_{n+1}+a_n+1)$，$a_2+a_1+1=4$．

$\therefore$ 数列 $\{a_{n+1}+a_n+1\}$ 为首项为 4，公比为 3 的等比数列，．$\therefore a_{n+1}+a_n+1=4\times3^{n-1}$①．

$a_{n+2}-3a_{n+1}-1=-(a_{n+1}-3a_n-1)$，$a_2-3a_1-1=-2$．$\therefore$ 数列 $\{a_{n+1}-3a_n-1\}$ 为首项为 -2，公比为 -1 的等比数列．$\therefore a_{n+1}-3a_n-1=-2\cdot(-1)^{n-1}$②．由①和②得 $\therefore a_n=3^{n-1}+\frac{(-1)^{n-1}-1}{2}$．或者写成 $a_n=\begin{cases}3^{n-1},n\text{为奇数}\\3^{n-1}-1,n\text{为偶数}\end{cases}$．

故答案为：$\begin{cases}3^{n-1},n\text{为奇数}\\3^{n-1}-1,n\text{为偶数}\end{cases}$．

14．【解析】$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$，两边同加 a_{n+1}，得 $a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$，又 $a_1=1$，$a_2=4$，$\therefore\{a_{n+1}+a_n\}$ 是首项为 5，公比为 2 的等比数列，$\therefore a_{n+1}+a_n=5\bullet2^{n-1}$①；$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$，两边同减 $2a_{n+1}$，得 $a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$，$\therefore\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是首项为 2，公比为 -1 的等比数列，$\therefore a_{n+1}-2a_n=2\bullet(-1)^{n-1}$②，

由①②得 $a_n=\frac{5}{3}\bullet2^{n-1}-\frac{2}{3}\bullet(-1)^{n-1}$．

15．【解析】采用暴力特征方程法求解．$\because a_{n+2}=\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n$，$\therefore$ 特征方程：$t^2-\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}=0$

解得：$t_1=1$，$t_2=-\frac{1}{3}$，设 $a_n=pt_1^n+qt_2^n$，$\because a_1=1$，$a_2=2$，$\therefore a_1=p-\frac{1}{3}q=1$，$a_2=p+\frac{1}{9}q=2$

解得：$p=\frac{7}{4}$，$q=\frac{9}{4}$，故有 $a_n=\frac{7}{4}+\frac{9}{4}\bullet(-\frac{1}{3})^n$．

16．【解析】$(I)a_2+a_1=3+a$，$a_2-3a_1=3-3a$，由 $a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}$ 得

$a_n+a_{n-1}=3(a_{n-1}+a_{n-2})a_n-3a_{n-1}=-(a_{n-1}-3a_{n-2})$

所以 $a_{n+1}+a_n=3^{n-1}(a_1+a_2)=(a+3)3^{n-1}a_{n+1}-3a_n=(-1)^{n-1}(3-3a)$

（2）由以上两式得 $a_n=\frac{1}{4}[(a+3)3^{n-1}-(-1)^{n-1}(3-3a)]$，$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}[(a+3)3^{n-1}+(-1)^{n-1}(3-3a)]$

当 n 为奇数时 $(a+3)3^{n-1}+(-1)^{n-1}(3-3a)=(3^{n-1}-3)a+3^n+3$，所以 $a_{n+1}-a_n>0\Rightarrow(3^{n-1}-3)a+3^n+3>0$

当 $n=1$ 时 $a<3$，当 $n\geqslant3$ 时 $a>-\frac{3^n+3}{3^{n-1}-3}=-3-\frac{12}{3^{n-1}-3}$ 关于 n 递增，所以 $-3\leqslant a<3$．

当 n 为偶数时 $(a+3)3^{n-1}+(-1)^{n-1}(3-3a)=(3^{n-1}+3)a+3^n-3$，所以 $a_{n+1}-a_n>0\Rightarrow a>-\frac{3^n-3}{(3^{n-1}+3)}=\frac{12}{3^{n-1}+3}-3$

关于 n 递减，所以 $a>-1$，综上 $a\in(-1，1)\cup(1，3)$．

17.【解析】(1) 因为 $a_{n+1}=a_n+2a_{n-1}(n\ge 2)$，$a_{n+1}+a_n=2(a_n+a_{n-1})$，所以数列 $\{a_{n+1}+a_n\}$ 是以 $a_1+a_2=4$，2 为公比的等比数列，所以 $a_{n+1}+a_n=2^{n+1}$①，又由 $a_{n+1}+a_n=2(a_n+a_{n-1})$，得 $a_{n+1}-2a_n=-(a_n-2a_{n-1})(n\ge 2)$，所以数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是以 $a_1-2a_2=-2$ 为首项、-1 为公比的等比数列，所以 $a_{n+1}-2a_n=-2\cdot(-1)^n-1=2\cdot(-1)^n$②，联立①②消去 a_{n+1}，得 $a_n=\frac{2}{3}[2^n-(-1)^n]$，当 $n=1$ 时也适合，所以 $a_n=\frac{2}{3}[2^n-(-1)^n]$.

(2) 当 n 为偶数时，$\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}=\frac{3}{2}(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^n-1})=\frac{3}{2}\cdot\frac{2^n+2^{n-1}}{(2^{n-1}+1)(2^n-1)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2^n+2^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 2^n-2^{n-1}+2^n-1}=$

$\frac{3}{2}\cdot\frac{2^n+2^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 2^n+2^{n-1}-1}<\frac{3}{2}\cdot\frac{2^n+2^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 2^n}=\frac{3}{2}\cdot(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n})(n\ge 2)$，所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{3}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}++\frac{1}{2^n})=$

$3-\frac{3}{2^n}<3$. 当 n 为奇数是=时，$a_n=\frac{3}{2}[2^n-(-1)^n]>0$，所以 $a_{n+1}>0$. 又 $n+1$ 为偶数，由（1）知

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}<3$.

(3) 因为 $f(n+1)-f(n)=[f(n)]^2\ge 0$，所以 $f(n+1)\ge f(n)$，由此得 $f(n+1)\ge f(n)\ge\cdots\ge f(1)=2>0$. 又

$\frac{1}{f(n+1)}=\frac{1}{[f(n)]^2+f(n)}=\frac{1}{f(n)[f(n)+1]}=\frac{1}{f(n)}-\frac{1}{f(n)+1}$，所以 $\frac{1}{f(n)+1}=\frac{1}{f(n)}-\frac{1}{f(n+1)}$，所以

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)+1}=\sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{f(k)}-\frac{1}{f(k+1)}]=\frac{1}{f(1)}-\frac{1}{f(n+1)}<\frac{1}{f(1)}=\frac{1}{2}$，即 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)+1}<\frac{1}{2}$.（参考裂项相消的部分）

18.【解析】令 $x^2-10x+21=0$，解得 $x=3或x=7$. 所以有 $\begin{cases}a_{n+1}-3a_n+1=7(a_n-3a_{n-1}+1)\\a_{n+1}-7a_n+3=3(a_n-7a_{n-1}+3)\end{cases}$

所以数列 $\{a_{n+1}-3a_n+1\}$ 是 $a_2-3a_1+1=5$ 为首项，7 为公比的等比数列，则 $a_{n+1}-3a_n+1=5\cdot 7^{n-1}$ ①

数列 $\{a_{n+1}-7a_n+3\}$ 是 $a_2-7a_1+3=3$ 为首项，3 为公比的等比数列. $a_{n+1}-7a_n+3=3^n$ ②

①-②得 $4a_n-2=5\cdot 7^{n-1}-3^n$，化简得 $a_n=\frac{5\cdot 7^{n-1}-3^n+2}{4}$.

19.【解析】(1) $a_{n+1}-2a_n=3(a_n-2a_{n-1})+2^{n+1}$，$a_{n+1}-3a_n=2(a_n-3a_{n-1})+2^{n+1}$，故 $p=-3,q=3$ 时，$\{a_{n+1}-3a_n+3\cdot 2^{n+1}\}$是以4为首项,3为公比的等比数列.

(2) $a_{n+1}-2a_n=3(a_n-2a_{n-1})+2^{n+1}$ $\frac{a_{n+1}-3a_n}{2^{n+1}}-\frac{(a_n-3a_{n-1})}{2^n}=1$，故存在实数 $\lambda=-3$，使得 $\left\{\frac{a_{n+1}+\lambda a_n}{2^{n+1}}\right\}$ 为等差数列；$\frac{(a_n-3a_{n-1})}{2^n}=n-\frac{7}{2}$，$a_n-3a_{n-1}=(2n-7)\cdot 2^{n-1}$

20.【解析】(1) $k=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+a_{n+2})$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\because a_1=1$，$a_2=a$，$\therefore$ 公差 $d=a-1$.

$\therefore S_{18}=171=18+\dfrac{18\times 17}{2}\times(a-1)$，解得 $a=2$．

（2）设数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，则它的公比 $q=\dfrac{a_2}{a_1}=a$，

$\therefore a_m=a^{m-1}$，$a_{m+1}=a^m$，$a_{m+2}=a^{m+1}$，任意相邻三项 a_m，a_{m+1}，a_{m+2} 按某顺序排列后成等差数列，

①a_{n+1} 为等差中项，则 $2a_{m+1}=a_m+a_{m+2}$．即 $a^{m-1}+a^{m+1}=2a^m$，解得 $a=1$，不合题意；

②a_m 为等差中项，则 $2a_m=a_{m+1}+a_{m+2}$，即 $2a^{m-1}=a^{m+1}+a^m$，化简 $a^2+a-2=0$，解得 $a=-2$ 或 $a=1$（舍去）；

③若 a_{m+2} 为等差中项，则 $2a_{m+2}=a_{m+1}+a_m$，即 $2a^{m+1}=a^m+a^{m-1}$，化简得：$2a^2-a-1=0$，解得 $a=-\dfrac{1}{2}$；

$\therefore k=\dfrac{a_{m+1}}{a_m+a_{m+2}}=\dfrac{a^m}{a^{m-1}+a^{m+1}}=\dfrac{a}{1+a^2}=-\dfrac{2}{5}$．综上可得，满足要求的实数 k 有且仅有一个 $-\dfrac{2}{5}$．

（3）$k=-\dfrac{1}{2}$，则 $a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(a_n+a_{n+2})$，$\therefore a_{n+2}+a_{n+1}=-(a_{n+1}+a_n)$，$a_{n+3}+a_{n+2}=-(a_{n+2}+a_{n+1})=a_{n+1}+a_n$，

当 n 是偶数时，$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=(a_1+a_2)+\ldots+(a_{n-1}+a_n)=\dfrac{n}{2}(a_1+a_2)=\dfrac{n}{2}(a+1)$．

当 n 是奇数时，$S_n=a_1+(a_2+a_3)+\ldots+(a_{n-1}+a_n)=1+\dfrac{n-1}{2}(a_2+a_3)=1+\dfrac{n-1}{2}[-(a_1+a_2)]=1-\dfrac{n-1}{2}(a+1)(n\geqslant 1)$，

$n=1$ 也适合上式，综上可得，$S_n=\begin{cases}1-\dfrac{n-1}{2}(a+1),n\text{为奇数}\\ \dfrac{n}{2}(a+1),n\text{为偶数}\end{cases}$．

专题 7　数列的本质

1.【答案】A.

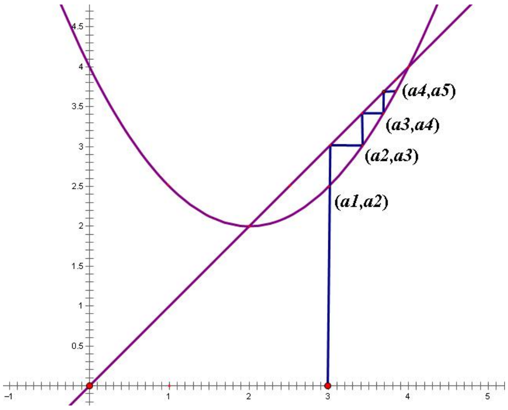
【解析】做一条 $y=x$ 的直线，和 $f(x)$ 交于不动点（0,0)，（1，1），当 $a_1\in(0,1)$ 时，在这两个不动点之间只有 A 选项图象是凸起的，故选 A.

2.【答案】B.

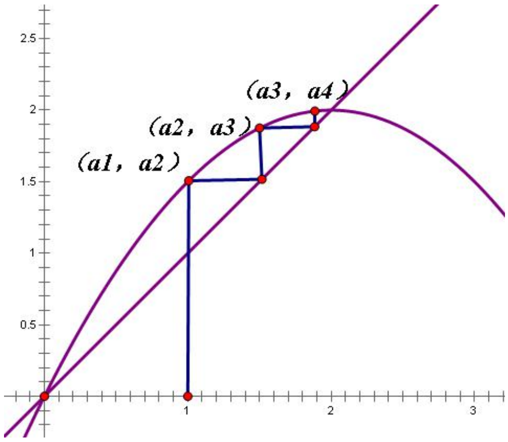
【解析】该函数通过分离常数法可以判断出来这是一个反比例函数变化过来的，画出反比例函数的图象。再画出 $y=x$ 的直线，相交于一个不动点（0,0)，当 $x>0$ 时，因为是凸函数，所以递减. 故选 B.

3.【答案】2 .

【解析】令 $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+4$，当 $y=x$ 时，如下图所示函数的不动点有 $x_0=2\text{或}x_0=4$，两个不动点 $(2,2),(4,4)$，$x_1=3$ 时，数列 $\{x_n\}$ 单调递减，此情况下 A=2.



（第 3 题图）



（第 4 题图）

4.【答案】2.

【解析】令 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$ ，当 $y=x$ 时，函数的不动点有 $x_0=0或x_0=2$，两个不动点 $(0，0),(2,2)$ ，$x_1=1$ 时，数列 $\{x_n\}$ 单调递增，此情况下 A=2.

5.【答案】3.

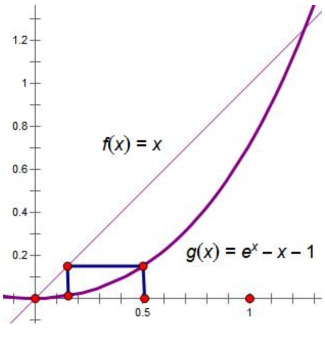
【解析】由定理 3 可知，$a+d$=0 的时候，符合题意，此时 $a-3=0$， $a=3$.

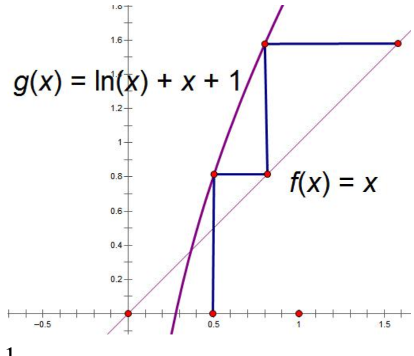
6.【答案】D

【解析】对 A． $f(x)=x^2$，$\therefore a_{n+1}=(a_n)^2$，可以算出不动点为（1,1），根据蛛网图，$a_1=\frac{1}{2}$ 时，故 $\{a_n\}$ 为递减数列，$S_{100}<\frac{1}{2}\times 100=50<100$．也可以取对数：$lna_{n+1}=2lna_n$，$\therefore$ 数列 $\{lna_n\}$ 是等比数列，首项为 $-ln2$，公比为 2． $S_{100}=\frac{-ln2(2^{100}-1)}{2-1}=-(2^{100}-1)ln2<0<100$．

对 B． $f(x)=x+\frac{1}{x}-2$， $\therefore a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}-2$， 可得不动点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$， 以此可得： $a_n=\frac{1}{2}$， 可得： $S_{100}=\frac{1}{2}\times 100=50<100$．

对 C． $f(x)=e^x-x-1$，$f'(x)=e^x-1$，$x<0$ 时，单调递减．令 $g(x)=e^x-x-1-x$，可得 $g(0)=0$，$g(1)<0$，$g(2)>0$，故不动点为 $x_1=0$， x_2 位于区间 $(1,2)$ 内，此函数为下凹函数，故数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，$a_1=\frac{1}{2},a_{n+1}=f(a_n)$， $n\in N^*$，则 $a_1>a_2>a_3>\cdots>a_{100}$，可得 $S_{100}<100$．

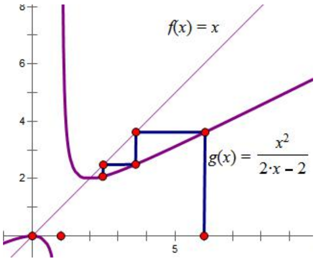


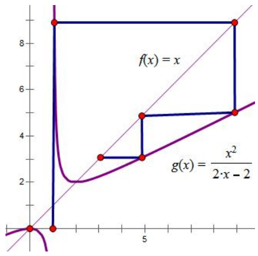


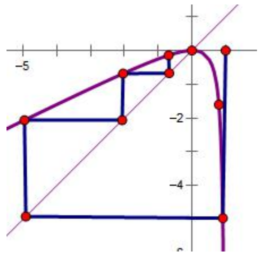
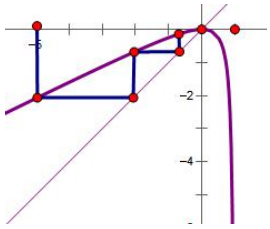
对 D． $f(x)=lnx+x+1$， 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， $a_1=\frac{1}{2},a_{n+1}=f(a_n)$， $n\in N^*$， 根据蛛网图， 则 $a_n>\cdots>a_3>a_2>a_1$，并且 $a_3>1$，以此类推可得 $S_{100}>100$．因此不满足 $S_{100}<100$．故选 D.

7.【答案】A

【解析】$f(x)=\dfrac{x^2}{2x-2}=\dfrac{(x-1+1)^2}{2(x-1)}=\dfrac{1}{2}[(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+2]$，可得不动点为 $x_1=0$，$x_2=2$，$f(x)$ 在 $x>2$，或 $x<0$ 时递增，在 $1<x<2$，或 $0<x<1$ 时递减，如图所示，则当 $x\geqslant 2$ 时，根据蛛网图 1，$f(x)\geqslant\dfrac{1}{2}\times 4=2$，$f_1(x)\geqslant 2$，$f_2(x)\geqslant 2$，…，不等式 $f_{2018}(x)\geqslant 2$ 恒成立；当 $0<x\leqslant 2$ 时，根据蛛网图 2 和 3，$f_{2018}(x)$ 不单调；当 $x\leqslant 0$，根据蛛网图 4，$f(x)$ 递增，即有 $f(x)\leqslant 0$，可得 $f_1(x)\leqslant 0$，$f_2(x)\leqslant 0$，…，不等式 $f_{2018}(x)>0$ 无解．综上可得 B，C，D 均不正确；A 正确．故选 A．





8.【答案】

【解析】周期数列模型，由于 $(a+d)^2=ad-bc$，$T=3$，$a_1=0$，$a_2=\dfrac{0-\sqrt{3}}{0+1}=-\sqrt{3}$，$a_3=\dfrac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-3+1}=\sqrt{3}$，$a_4=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{3+1}=0\ \therefore a_{2008}=a_{669\times 3+1}=a_1=0$，故选 A．

9.【答案】B

【解析】$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{a_n-1}{a_n}(n\in N^*)$，$(a+d)^2=ad-bc$，$T=3$，$\therefore a_2=1-\dfrac{1}{a_1}=-1$，$a_3=1-\dfrac{1}{a_2}=2$，$a_4=1-\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{1}{2}$，又 $a_1+a_2+a_3=\dfrac{1}{2}-1+2=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{3}{2}\times 66=99$，$99+\dfrac{1}{2}<100$，$99+\dfrac{1}{2}-1<100$，$99+\dfrac{1}{2}-1+2=100.5>100$，$\therefore$ 则使 $a_1+a_2+\ldots+a_k<100$ 成立的最大正整数，$k=66\times 3+2=200$．故选 B．

10.【答案】A

【解析】根据题意，数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{2}{2-a_n}(n\in N^*)$，$(a+d)^2=2(ad-bc)$，$T=4$

则 $a_2=\dfrac{2}{2-a_1}=\dfrac{2}{2-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{4}{3}$，$a_3=\dfrac{2}{2-a_2}=\dfrac{2}{2-\dfrac{4}{3}}=3$，$a_4=\dfrac{2}{2-a_3}=\dfrac{2}{2-3}=-2$，$a_5=\dfrac{2}{2-a_4}=\dfrac{2}{2-(-2)}=\dfrac{1}{2}=a_1$，

进而可得：$a_6=a_2=\dfrac{4}{3}$，$a_7=a_3=3$，$a_8=a_4=-2$，…则 $a_n=a_{n+4}$，

则 $6S_{100}=6(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots+a_{100})=6\times 25\times(a_1+a_2+a_3+a_4)=6\times 25\times(\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{3}+3-2)=425$，故选 A．

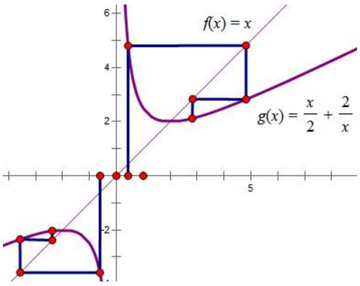
11.【答案】A

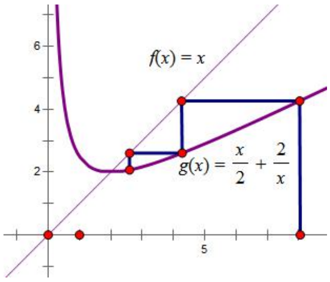
【解析】由于 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+(2-\sqrt{3})}{-(2-\sqrt{3})a_n+1}$，$a+d$ 与 $ad-bc$ 关系不满足常规套路，但是 $a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+(2-\sqrt{3})}{-(2-\sqrt{3})a_{n+1}+1}=\dfrac{\sqrt{3}x+1}{-x+\sqrt{3}}$，所以 $(a+d)^2=3(ad-bc)$，故 $\dfrac{T}{2}=6\Rightarrow T=12$，

$\therefore a_{2018}=a_{12\times 168+2}=a_2=\dfrac{a_1+(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})a_1}=\dfrac{5\sqrt{3}-6}{3}$．故选 A．

12.【答案】D

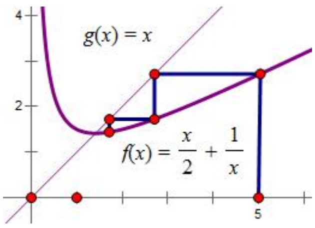
【解析】$\because a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{2}{a_n}$，不动点为 $x_1=2,x_2=-2$，根据蛛网图可得：递减区间会出现摆动数列，单调不确定，（1）$a_1=t\in(-2,0)$ 时，$a_2=\frac{a_1}{2}+\frac{2}{a_1}<-2$，可得：$a_n<-2(n\geqslant2)$．$\therefore a_2-a_1<0$，但是 $a_{n+1}-a_n>0(n\geqslant2)$，不合题意，舍去．同理，$a_1=t\in(-2,0)$ 时也属于函数递减区间，数列属于局部摆动数列，也不满足题意；（2）$a_1=t>2$ 时，$a_2=\frac{a_1}{2}+\frac{2}{a_1}>2$，可得：$a_n>2(n\geqslant2)$．$\therefore a_{n+1}-a_n<0$，符合题意．$a_1=t<-2$，数列属于递增数列，故选 D．

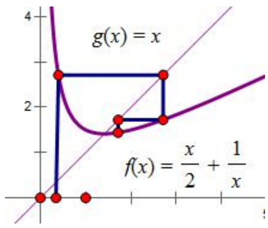




13.【答案】D

【解析】不动点为 $x_1=\sqrt{2},x_2=-\sqrt{2}$，不动点为顶点，根据蛛网图，故当 $a>0$ 时，数列极限为 $\sqrt{2}$，且 $a_n>\sqrt{2}$ 因此 A 不正确．$a>\sqrt{2}$ 时，数列为递减数列，$0<a<\sqrt{2}$ 时，数列前两项摆动，即 $a_1<a_2>a_3>a_4>\cdots>a_n$，因此 B 不正确．C 不正确．D：由 $a_1=a>0$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}(n\in N^*)$，$a_2=\frac{a}{2}+\frac{1}{a}$，令 $\frac{a}{2}+\frac{1}{a}=a$，解得 $a=\sqrt{2}$，则 $a_n=\sqrt{2}$，即为不动点，因此结论成立．故选 D．





14.【答案】B

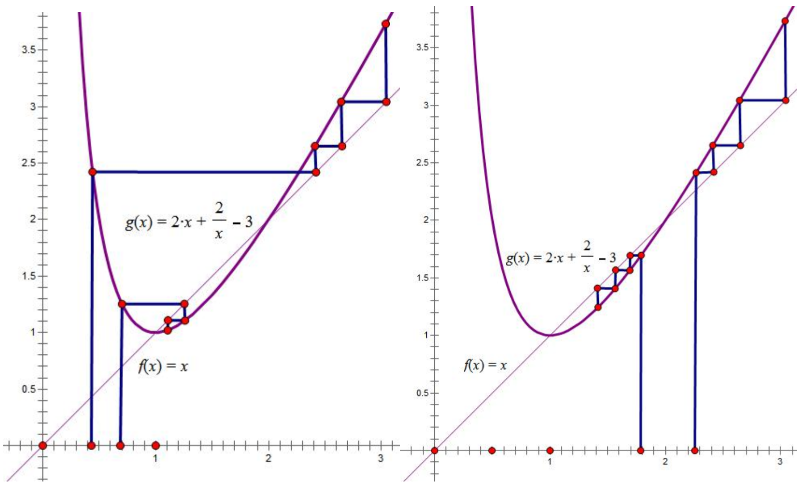
【解析】对于 A．不动点为 $x_1=0,x_2=1\because a_1\in(0,1)$，$f(x)=\sqrt{x}$ 在区间 $(0,1)$ 为上凸区间，$\therefore a_{n+1}=\sqrt{a_n}>a_n$，可得数列 $\{a_n\}$ 是递增数列；对于 B．不动点为 $x_1=0,x_2=1$，$\because a_1\in(0,1)$，$f(x)=2^x-1$ 在区间 $(0,1)$ 为下凹区间，不妨取 $a_1=\frac{1}{2}$，$f(x)=2^x-1$ 在区间 $a_2=2^{\frac{1}{2}}-1=\sqrt{2}-1<\frac{1}{2}$，因此数列 $\{a_n\}$ 是递减数列；对于 $C:f(x)=\sqrt{2x-x^2}$，属于一个圆心为 $(1,0)$，半径为 1 的圆的上半部分，不动点为 $x_1=0,x_2=1$，显然在区间 $(0,1)$ 为上凸区间，可知：当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $1\leqslant x\leqslant2$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减．$\because a_1\in(0,1)$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列；对于 D．画出图象 $y=\log_2(x+1)$，$y=x$，可知不动点为 $x_1=0,x_2=1$，在区间 $(0,1)$ 为上凸区间，在 $x\in(0,1)$ 时，$\log_2(x+1)>x$，$\therefore a_{n+1}=\log_2(a_n+1)>a_n$，因此数列 $\{a_n\}$ 是递增数列．故选 B．

15.【答案】A

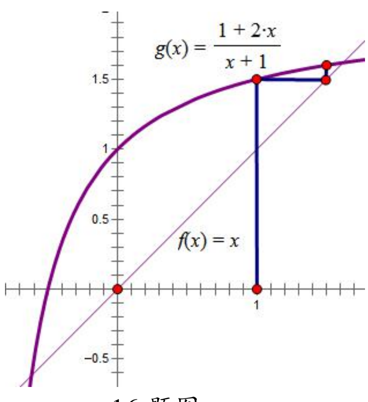
【解析】法一：数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2a_n+\frac{2}{a_n}-3$，首项 $a_1=a$，若数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，所以

$a_{n+1}-a_n=a_n+\frac{2}{a_n}-3>0$，则 $a_1+\frac{2}{a_1}-3>0$，即 $a+\frac{2}{a}-3>0$，当 $a>0$ 时，解得 $a\in(0,\ 1)\cup(2,\ +\infty)$．当 $a<0$ 时，不等式无解．若 $a_1=\frac{1}{2}$，此时 $a_2=a_3=\ldots=2$，不满足题意，排除 B，C，若 $a_1=\frac{1}{4}$，此时 $a_2=\frac{11}{2}$，$a_3=8+\frac{4}{11}$，满足题意，排除 D．故选 A．

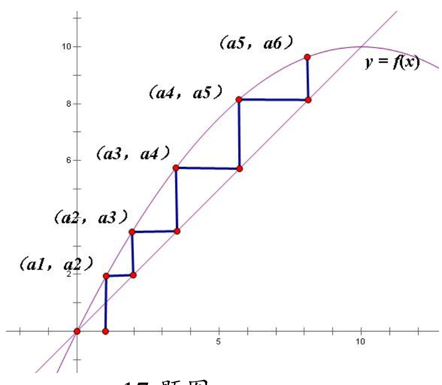
法二：蛛网图上来，令 $f(x)=2x+\frac{2}{x}-3$，可得不动点为 $x_1=1,x_2=2$，故根据函数的区间可知，在 $a\in(0,\ 1)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，故数列属于摆动数列区间，由于函数有极值，故需分类讨论，显然，考虑数列的另一个不动点(2,2)，则当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y=2$，故当 $a\in(0,\ \frac{1}{2})$，如图所示，数列从 a_2 开始弹到递增数列区间，当 $a\in(\frac{1}{2},\ 1)$时，数列处于从 a_2 开始弹到递减数列区间；$a\in(1,\ 2)$时，函数属于下凹区间，此时数列为递减数列，而当 $a\in(2,\ +\infty)$ 时，函数属于上凸区间，数列为单调递增，故选 A.



16.解：$y=\frac{1+2x}{1+x}$ 当 y=x 时，联立 $x^2-x-1=0$，解得不动点为 $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$a_1=1$，根据蛛网图可得，此数列位于函数的上凸区间，为递增数列，所以 $a_1<a_2<\cdots<a_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$



16 题图



17 题图

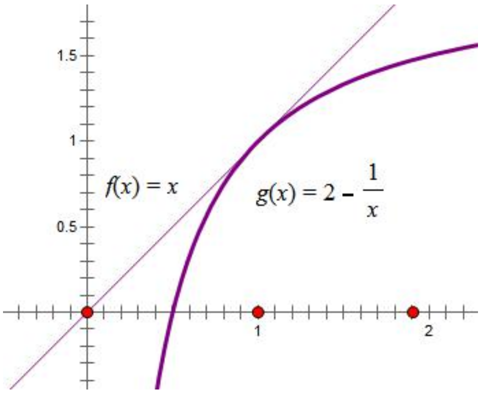
17.解：$y=-\frac{1}{10}x^2+2x$，当 y=x 的时，联立解得不动点为 $x_1=0$或x_2=10，$x_1=1$ 时候，通过蛛网图可以发现 $\{x_n\}$ 单调递增，且小于 x_2，即证 $10>x_{n+1}>x_n$

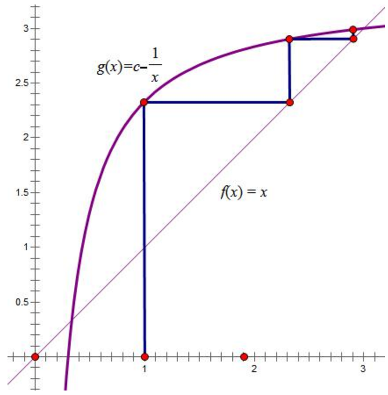
18.（1） $f(x)=\frac{4x-2}{x+1}$ 　$x_1=\frac{11}{19}$ 　$x_2=\frac{1}{5}$ 　$x_3=-1$ ，（2） x_0=1 或 2

（3） $f(x)=\frac{4x-2}{x+1}$ ，令 $y=x$ 　解得 $x^2-3x+2=0$ ，$x_1=1$，$x_2=2$，要满足 $x_n<x_{n+1}$，只需要 $1<x_0<2$

19. 解：令 $y=c-\frac{1}{x}$ ，由 $y=x$ 得不动点 $x_{1,2}=\frac{c\pm\sqrt{c^2-4}}{2}$ ，要 $a_n<a_{n+1}$，即数列 $\{a_n\}$ 递减

$\Rightarrow\frac{c-\sqrt{c^2-4}}{2}<1<\frac{c+\sqrt{c^2-4}}{2}\Rightarrow c>2$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_2=\frac{c+\sqrt{c^2-4}}{2}\leq 3\Rightarrow c\leq\frac{10}{3}$，综上知，$2<c\leq\frac{10}{3}$



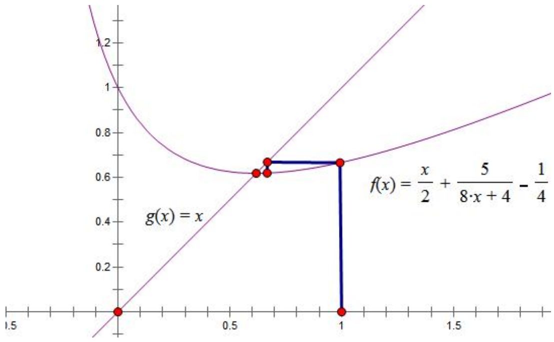


20.解：（1）∵ $f(x)=x^2+x-1$，α，β 是方程 $f(x)=0$ 的两个根 $(\alpha>\beta)$，∴ $\alpha=\frac{-1+\sqrt5}{2},\beta=\frac{-1-\sqrt5}{2}$；

（2） $f'(x)=2x+1$，$a_{n+1}=a_n-\frac{a_n^2+a_n-1}{2a_n+1}=a_n-\frac{\frac12a_n(2a_n+1)+\frac14(2a_n+1)-\frac54}{2a_n+1}=\frac14(2a_n+1)+\frac{\frac54}{2a_n+1}-\frac12$，

法一：∵ $a_1=1$，∴有基本不等式可知 $a_2\geqslant\frac{\sqrt5-1}{2}>0$（当且仅当 $a_1=\frac{\sqrt5-1}{2}$ 时取等号），∴ $a_2>\frac{\sqrt5-1}{2}>0$，同样 $a_3>\frac{\sqrt5-1}{2}$，$a_n>\frac{\sqrt5-1}{2}=\alpha(n=1,2)$，

法二：构造蛛网图 $a_{n+1}=F(a_n)=\frac{a_n}{2}+\frac{5}{8a_n+4}-\frac14$，不动点为 $x_1=\frac{\sqrt5-1}{2},x_2=\frac{-\sqrt5-1}{2}$，由于 $a_1=1$，故根据蛛网图可知 $a_1>a_2>\cdots>a_n>x_1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{\sqrt5-1}{2}$，$a_n>\alpha$



（3）$a_{n+1}-\beta=a_n-\beta-\frac{(a_n-\alpha)(a_n-\beta)}{2a_n+1}=\frac{a_n-\beta}{2a_n+1}(a_n+1+\alpha)$ 而 $\alpha+\beta=-1$，即 $\alpha+1=-\beta$，$a_{n+1}-\beta=\frac{(a_n-\beta)^2}{2a_n+1}$，

同理 $a_{n+1}-\alpha=\frac{(a_n-\alpha)^2}{2a_n+1},b_{n+1}=2b_n$，又 $b_1=ln\frac{1-\beta}{1-\alpha}=ln\frac{3+\sqrt5}{3-\sqrt5}=2ln\frac{3+\sqrt5}{2}$ $s_n=2(2^n-1)ln\frac{3+\sqrt5}{2}$

21．证明：（1）由 $x_1=\frac12$，$x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$，∴ $x_2=\frac23,x_3=\frac35,x_4=\frac58$，$x_5=\frac{8}{13},x_6=\frac{13}{21}$，…

由 $x_2>x_4>x_6$ 猜想：数列 $\{x_{2n}\}$ 是递减数列，下面用数学归纳法证明：

（1）当 $n=1$ 时，已证命题成立

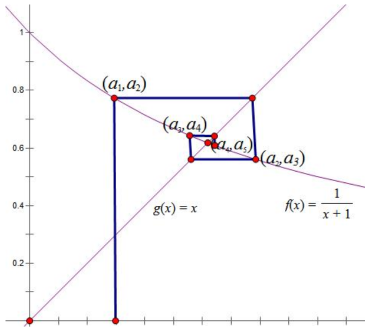
（2）假设当 $n=k$ 时命题成立，即 $x_{2k}>x_{2k+2}$ 易知 $x_{2k}>0$，

那么 $x_{2k+2}-x_{2k+4}=\dfrac{1}{1+x_{2k+1}}-\dfrac{1}{1+x_{2k+3}}=\dfrac{x_{2k+3}-x_{2k+1}}{(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+3})}=\dfrac{x_{2k}-x_{2k+2}}{(1+x_{2k})(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+2})(1+x_{2k+3})}>0$

即 $x_{2(k+1)}>x_{2(k+1)+2}$ 也就是说，当 $n=k+1$ 时命题也成立，结合（1）和（2）知，命题成立

由蛛网图可知，不动点为 $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\beta=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$，由于 $x_1=\dfrac{1}{2}$，故根据蛛网图可知 $x_1<x_3<\cdots<x_{2n-1}<\alpha$，

$x_2>x_4>\cdots>x_{2n}>\alpha$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，



（2）当 $n=1$ 时，$|x_{n+1}-x_n|=|x_2-x_1|=\dfrac{1}{6}$，结论成立

当 $n\geqslant 2$ 时，易知 $0<x_{n-1}<1$，$\therefore 1+x_{n-1}<2,x_n=\dfrac{1}{1+x_{n-1}}>\dfrac{1}{2}$ $\therefore (1+x_n)(1+x_{n-1})=(1+\dfrac{1}{1+x_{n-1}})(1+x_{n-1})=2+x_{n-1}\geqslant\dfrac{5}{2}$

$\therefore |x_{n+1}-x_n|=|\dfrac{1}{1+x_n}-\dfrac{1}{1+x_{n-1}}|=\dfrac{|x_n-x_{n-1}|}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}\leqslant\dfrac{2}{5}|x_n-x_{n-1}|\leqslant(\dfrac{2}{5})^2|x_{n-1}-x_{n-2}|\leqslant\ldots\leqslant(\dfrac{2}{5})^{n-1}|x_2-x_1|=\dfrac{1}{6}(\dfrac{2}{5})^{n-1}$.