专题 2 多面体的外接球

秒杀秘籍：第一讲 长方体切割体的外接球

设长方体相邻的三条边棱长分别为 a，b，c．

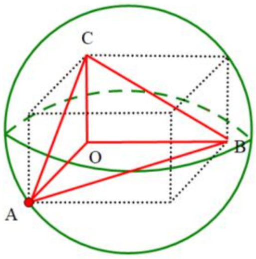


图 1 墙角体

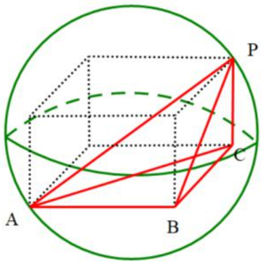


图 1 鳖臑

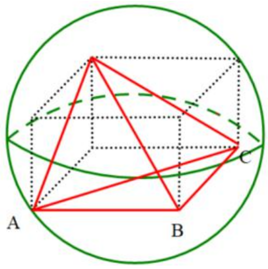


图 3 挖墙角体

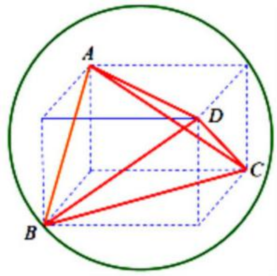


图 4 对角线相等的四面体

图 1 与图 2 有重垂线，三视图都是三个直角三角形，图 3 无重垂线，俯视图是一矩形，AC 为虚线，主视图和左视图为直角三角形．

图 4 中，$\left.\begin{matrix}AD=BC\\AB=CD\\AC=BD\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=BC^2=\alpha^2\\b^2+c^2=AC^2=\beta^2\\c^2+a^2=AB^2=\gamma^2\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2+c^2=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}\Rightarrow R=\sqrt{\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}}$，

$V_{A-BCD}=abc-\dfrac{1}{6}abc\times4=\dfrac{1}{3}abc$．

【例 1】在球面上有四个点 P、A、B、C.如果 PA、PB、PC 两两互相垂直，且 $PA=PB=PC=a$，则这个球的表面积是__________.

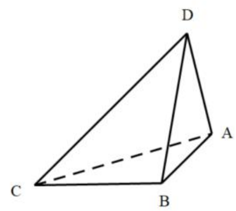
【解析】根据题意可得，P、A、B、C 位于一个棱长为 a 的正方体上，所以球为正方体的外接球，$R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，故这个球的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2=3\pi a^2$．

【例 2】在三棱锥 $A-BCD$ 中，侧棱 AB、AC、AD 两两垂直，ΔABC、ΔACD、ΔADB 的面积分别为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$、$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$、$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的体积为（　　）

A．$\sqrt{6}\pi$　　B．$2\sqrt{6}\pi$　　C．$3\sqrt{6}\pi$　　D．$4\sqrt{6}\pi$

【解析】因为 $ab=2S_1,bc=2S_2,ac=2S_3\Rightarrow a^2=\dfrac{S_1S_3}{2S_2},b^2=\dfrac{S_1S_2}{2S_3},c^2=\dfrac{S_2S_3}{2S_1}$，$R=\sqrt{\dfrac{S_1S_3}{2S_2}+\dfrac{S_1S_2}{2S_3}+\dfrac{S_2S_3}{2S_1}}$
$=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\sqrt{6}\pi$，故选 A.

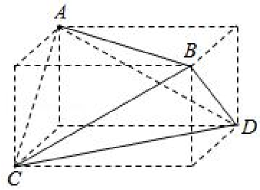
【例 3】如图所示，已知球 O 的面上有四点 A、B、C、D，$DA\perp$ 面ABC，$AB\perp BC$，$DA=AB=BC=\sqrt{2}$，则球 O 的体积等于__________.



【解析】易知 DA、AB、BC 位于一个正方体上，故球 O 半径为 $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\sqrt{6}\pi$．

【例 4】四面体 $A-BCD$ 中，$AB=CD=5$，$AC=BD=\sqrt{34}$，$AD=BC=\sqrt{41}$，则四面体 $A-BCD$ 外接球的表面积为（　　）



A．50π　　B．100π

C．150π　　D．200π

【解析】由题四面体 $A-BCD$ 是分别以 a，b，c 为长且侧棱两两垂直的三棱锥，从而可得到一个长、宽、高分别为 a，b，c 的长方体，并且 $a^2+b^2=25$，$a^2+c^2=34$，b^2+c^2，设球半径为 R，则有 $(2R)^2=a^2+b^2+c^2=50$，$\therefore 4R^2=50$，$\therefore$球的表面积为 $S=4\pi R^2=50\pi$．故选 A．

基础自测

1．三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$平面 ABC，$AC\perp BC$，$AC=BC=1$，$PA=\sqrt{3}$，则该三棱锥外接球的表面积为（　　）

A．5π　　B．$\sqrt{2}\pi$　　C．20π　　D．4π

2．在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=BC=4$，$PB=AC=5$，$PC=AB=\sqrt{11}$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为（　　）

A．8π　　B．12π　　C．26π　　D．24π

3．已知三棱锥 $P-ABC$ 的顶点都在球 O 的表面上，若 PA，PB，PC 两两互相垂直，且 $PA=PB=PC=2$，则球 O 的体积为（　　）

A．$12\sqrt{3}\pi$　　B．$8\sqrt{2}\pi$　　C．$4\sqrt{3}\pi$　　D．4π

4．《九章算术》中，将四个面都为直角三角形的三棱锥称之为鳖臑．若三棱锥 $P-ABC$ 为鳖臑，$PA\perp$平面 ABC，$PA=AB=2$，$AC=4$，三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上，则球 O 的表面积为（　　）

A．8π　　B．12π　　C．20π　　D．24π

5．已知三棱锥 $P-ABC$ 的各顶点都在同一球面上，且 $PA\perp$平面 ABC，若该棱锥的体积为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$AB=2$，$AC=1$，$\angle BAC=60°$，则此球的表面积等于（　　）

A．5π　　B．8π　　C．16π　　D．20π

6．已知三棱锥 $S-ABC$ 的各顶点都在一个半径为 r 的球面上，且 $SA=SB=SC=1$，$AB=BC=AC=\sqrt{2}$，则球的表面积为（　　）

A．12π　　B．8π　　C．4π　　D．3π

7．三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上，已知 PA，PB，PC 两两垂直，$PA=1$，$PB+PC=4$，当三棱锥的体积最大时，球 O 的体积为（　　）

A．36π　　B．9π　　C．$\dfrac{9\pi}{2}$　　D．$\dfrac{9\pi}{4}$

8．如图所示，平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=CD=2$，$BD=2\sqrt{2}$，$BD\perp CD$，将其沿对角线 BD 折成四面体 $ABCD$，使平面 $ABD\perp$平面 BCD，若四面体 $ABCD$ 的顶点在同一个球面上，则该球的体积为（　　）

A．$\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

B．24π

C．$4\sqrt{3}\pi$

D．12π

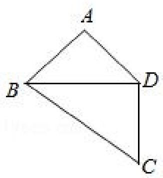


图1

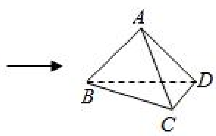


图2

秒杀秘籍：第二讲　三棱柱的切割体的外接球

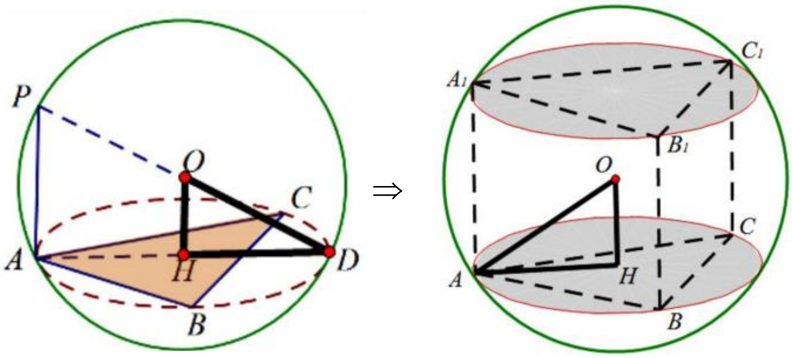


图 1 立着放的模型

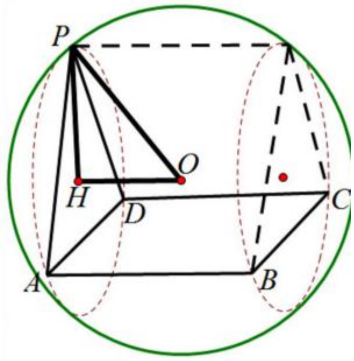
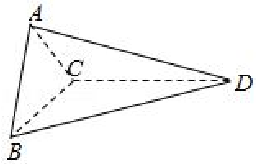


图 2 躺着放的模型

图 1：立着放的模型一定有重垂线，且重垂线在底面的射影一定位于底面三个顶点中的一个，底面三角形非直角三角形，将重垂线长度设为 h，底面三角形外接圆半径设为 r，$2r=\dfrac{a}{\sin A}$ 可以求出，则 $R=\sqrt{r^2+\left(\dfrac{h}{2}\right)^2}$；

图 2：躺着放的模型，底面是直角三角形或者矩形，侧面非直角三角形，底面一条棱垂直于侧面，$R=\sqrt{r^2+\left(\dfrac{h}{2}\right)^2}$．

【例 5】如图，三棱锥的所有顶点都在一个球面上，在 ΔABC 中，$AB=\sqrt{3}$，$\angle ACB=60°$，$\angle BCD=90°$，$AB\perp CD$，$CD=2\sqrt{2}$，则该球的体积为___________．

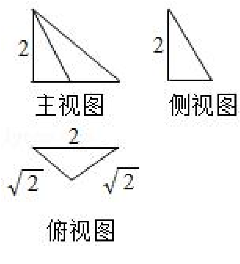


【解析】此图可以理解为躺着的三棱柱，以 ΔABC 所在平面为底面，则由正弦定理得截面圆的半径为 $r=\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60°}=1$，依题意得 $CD\perp$ 平面 ABC，故 $h=CD=2\sqrt{2}$，则球的半径为 $R=\sqrt{r^2+\left(\dfrac{h}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$，所以球的体积为 $\dfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^3=4\sqrt{3}\pi$．

【例 6】已知如图是一个空间几何体的三视图，则该几何体的外接球的表面积为（　　）

A．8π　　　　B．16π

C．32π　　　　D．64π



【解析】此图可以理解为立着的三棱柱，底面为一等腰直角三角形，则由正弦定理得截面圆的半径为 $r=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{\sin 90°}=1$ 依题意得 $h=2$，则球的半径为 $R=\sqrt{r^2+\left(\dfrac{h}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$

所以球的体积为 $4\pi\left(\sqrt{2}\right)^2=8\pi$．

9．如图是某几何体的三视图，正视图是等边三角形，侧视图和俯视图为直角三角形，则该几何体外接球的表面积为（　　）

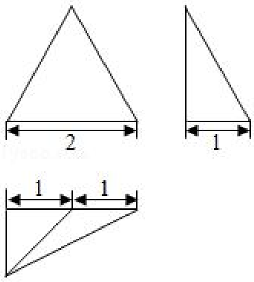
A．$\dfrac{20\pi}{3}$　　B．8π　　C．9π　　D．$\dfrac{19\pi}{3}$

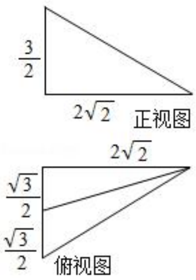
10．三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥外接球的体积为（　　）

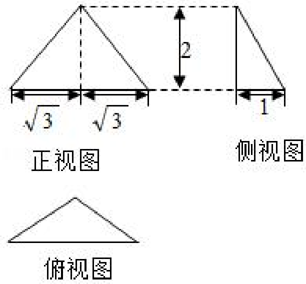
A．$4\sqrt{3}\pi$　　B．$2\sqrt{3}\pi$　　C．$4\sqrt{2}\pi$　　D．$2\sqrt{2}\pi$

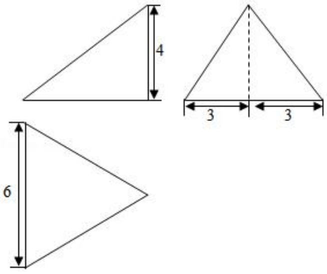
11. 四面体 $ABCD$ 的四个顶点都在球 O 的表面上，$AB\perp$ 平面 BCD，三角形 BCD 是边长为3的等边三角形，若 $AB=4$，则球 O 的表面积为（　　）

A．36π　　B．28π　　C．16π　　D．4π









第 9 题图　　第 10 题图　　第 12 题图　　第 13 题图

12. 已知一个三棱锥的三视图如下图所示，其中俯视图是顶角为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的等腰三角形，则该三棱锥外接球的表面积为（　　）

A．20π　　B．17π　　C．16π　　D．8π

13. 如图，某三棱锥的正视图、侧视图和俯视图分别是直角三角形、等腰三角形和等边三角形，若该三棱锥的顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（　　）

A．27π　　B．48π　　C．64π　　D．81π

14. 已知 A，B，C，D 是同一球面上的四个点，其中 ΔABC 是正三角形，$AD\perp$ 平面 ABC，$AD=2AB=6$，则该球的体积为（　　）

A．$32\sqrt{3}\pi$　　B．48π　　C．24π　　D．16π

秒杀秘籍：第三讲　切瓜模型（两个平面互相垂直，最大高和最小高问题）

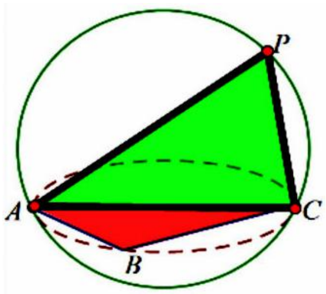


图 1 面$PAC\perp BAC, AB\perp BC$

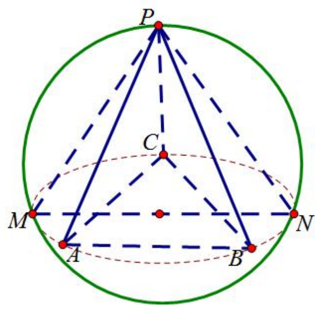
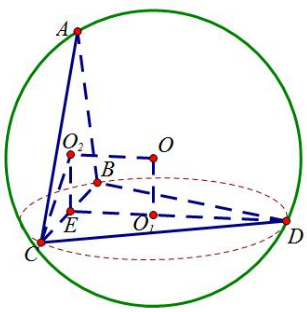


图 2 底面 ABC 固定，P 在球面上运动，V_{P-ABC} 最值问题

图 1：由图可知，小圆 ABC 直径 AC 长可以求出，平面 PAC 必在大圆上，由 $2R=\dfrac{a}{\sin A}$，解出 R．

图 2：先根据 $2r=\dfrac{a}{\sin A}$ 求出底面圆的直径 MN，再根据几何性质求出球大圆的直径，最后根据垂径定理算出 P 到底面距离的最大值和最小值．



双半径单交线公式：$R^2=R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2}-\dfrac{l^2}{4}$

$R^2=OD^2=OO_1^{\ 2}+O_1D^2=O_2E^2+O_1D^2$

$=(O_2C^2-CE^2)+O_1D^2=O_2C^2-(\dfrac{1}{2}BC)^2+O_1D^2=R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2}-\dfrac{l^2}{4}$

注意：常见的切瓜模型中，一旦出现 $R_1=\frac{l}{2}$ 或 $R_2=\frac{l}{2}$ 时，则 $R=R_2$ 或 $R=R_1$.

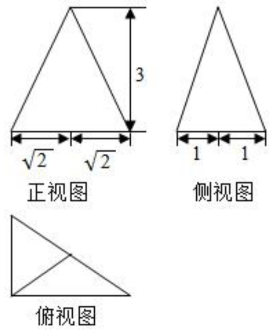
此公式参考王文勇老师的《大招秒杀秘籍》一书，在此向努力教研的勇哥致敬！

双半径单交线公式适合所有的直二面角模型，两个半平面的外接圆半径分别为 R_1 和 R_2，两半平面交线长度为 l，此公式属于一种开挂般的存在，在前面的直三棱柱切割体模型当中也可以使用，一旦两个半平面的二面角不是 $90°$ 时，此公式将不再适用.

【例 7】某几何体的三视图如图所示，则它的外接球表面积为（　　）

A. 12π　　B. 16π

C. 20π　　D. 24π



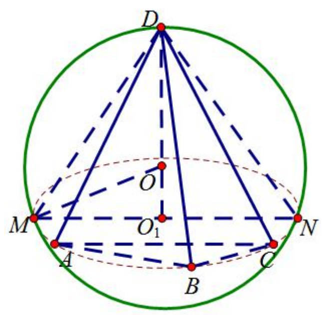
【解析】**法一**：由已知中的三视图可得：该几何底是一个以俯视图为底面的三棱锥，底面两直角边长分别为 2，$2\sqrt{2}$，故斜边长为 $2\sqrt{3}$，过斜边的侧面与底面垂直，且高为 3 的等腰三角形，设其外接球的半径为 R，则 $R^2=(3-R)^2+(\sqrt{3})^2$

解得：$R=2$，故它的外接球表面积 $S=4\pi R^2=16\pi$，故选 B.

法二：两垂直平面用双半径单交线公式，由于底面的外接圆半径为 $R_1=\sqrt{3}$，与其垂直的面是一个等边三角形，其外接圆半径为 $2R_2=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60°}=4$，交线 $l=2\sqrt{3}$,故 $R^2=R_1^2+R_2^2-\frac{l^2}{4}=2$，故选 B.

【例 8】已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点均在同一个球面上，底面 ΔABC 满足 $AB=BC=\sqrt{3}$，$AC=3$，若该三棱锥体积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$，则其外接球的半径为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. $\frac{2}{3}$



【解析】如图所示，由 $AB=BC=\sqrt{3}$，$AC=3$，可得 $\cos B=\frac{3+3-9}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$

$\therefore B=120°$，$\therefore S_{ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sin 120°=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，设 ΔABC 的外接圆的半径为 r，则 $\frac{3}{\sin 120°}=2r\Rightarrow r=\sqrt{3}$. 当 $DO_1\perp$ 平面 ABC 时，该三棱锥取得体积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$，符合切瓜模型，满足球顶高最大原理，由 $V_{D-ABC}=\frac{1}{3}\times DO_1\times\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，解得 $DO_1=3$. 设三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的球心为 O，$R^2=(3-R)^2+(\sqrt{3})^2$，解得 $R=2$. 故选 B.

15. 矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=3$，沿 AC 将矩形 $ABCD$ 折起，使面 $BAC\perp$ 面 DAC，则四面体 $A-BCD$ 的外接球的体积为（　　）

A. $\frac{125}{12}\pi$　　B. $\frac{125}{9}\pi$　　C. $\frac{125}{6}\pi$　　D. $\frac{125}{3}\pi$

16. 点 A，B，C，D 在同一个球面上，$AB=BC=\sqrt{2}$，$AC=2$，若球的表面积为 $\frac{25}{4}\pi$，则四面体 $ABCD$ 体积最大值为（　　）

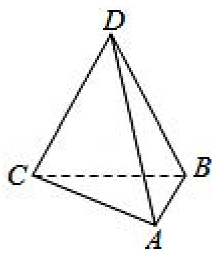
A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 2

17. 在四面体 $S-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$AB=BC=\sqrt{2}$，$SA=SC=2$，平面 $SAC\perp$ 平面 BAC，则该四面体外接球的表面积为（　　）

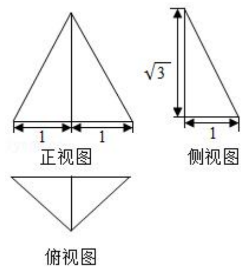
A. $\dfrac{16}{3}\pi$　　B. 8π　　C. $\dfrac{8}{3}\pi$　　D. 4π

18. 如图所示的三棱锥 $D-ABC$ 的四个顶点均在球 O 的球面上，ΔABC 和 ΔDBC 所在平面相互垂直，$AB=3$，$AC=\sqrt{3}$，$BC=CD=BD=2\sqrt{3}$，则球 O 的表面积为（　　）

A. 4π　　B. 12π　　C. 16π　　D. 36π



第 4 题图

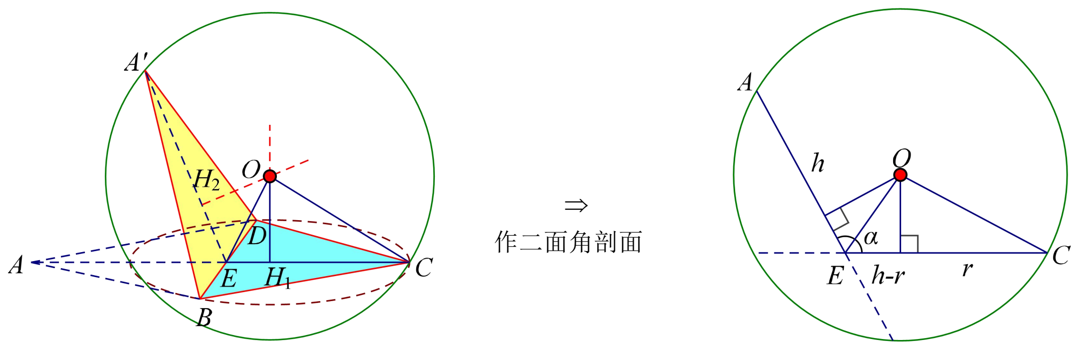


第 5 题图

19. 一个几何体的三视图如图所示，其中正视图是一个正三角形，则该几何体的外接球的体积为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　B. π　　C. $\dfrac{26}{3}\pi$　　D. $\dfrac{32\sqrt{3}}{27}\pi$

秒杀秘籍：第四讲　全等三角形折叠模型



题设：两个全等的三角形或者等腰拼在一起，或者菱形折叠，设折叠的二面角 $\angle A'EC=\alpha$，$CE=A'E=h$

如图，作左图的二面角剖面图如右图：H_1 和 H_2 分别为 $\Delta BCD,\Delta A'BD$ 外心，$CH_1=r=\dfrac{BD}{2\sin\angle BCD}$，

$EH_1=h-r$，$OH_1=(h-r)\tan\dfrac{\alpha}{2}$，**故** $R^2=OC^2=OH_1{}^2+CH_1{}^2=r^2+(h-r)^2\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$.

凡是有二面角的四面体，一定要找到二面角的平面角，将其作剖面图，对剖面图进行分析时，利用圆内接四边形和三角形性质，可以求出外接球半径，特殊情况要用 $2R=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ **进行处理.**

【例 9】已知菱形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=60°$，$AB=3$，对角线 AC 与 BD 的交点为 O，把菱形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折起，使得 $\angle AOC=90°$，则折得的几何体的外接球的表面积为（　　）

A. 15π　　B. $\dfrac{15\pi}{2}$　　C. $\dfrac{7\pi}{2}$　　D. 7π

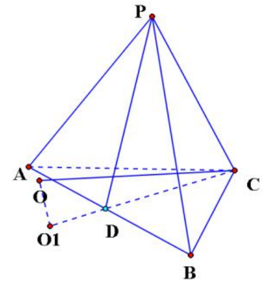
【解析】法一：菱形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=60°$，$AB=3$，三角形 ABD 的外接圆的半径为 $r=\dfrac{3}{2\sin 60°}=\sqrt{3}$，

高 $h=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，对角线 AC 与 BD 的交点为 O，使得 $\alpha=\angle AOC=90°$，则折得的几何体的外接球的半径为：

$R=\sqrt{(\sqrt{3})^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\right)^2\tan^2 45°}=\frac{\sqrt{15}}{2}$，外接球的表面积为 $S=4\pi\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2=15\pi$，故选 A.

法二：直二面角符合双半径单交线模型，$R_1=R_2=\frac{1}{2}\frac{3}{\sin 60°}=\sqrt{3}$，且 $\frac{l}{2}=\frac{3}{2}$，则一定有 $R^2=R_1^2+R_2^2-\frac{l^2}{4}=\frac{15}{4}$，故选 A.

【例 10】在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PB=AC=BC=2$，$AB=2\sqrt{3}$，$PC=1$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为（　　）

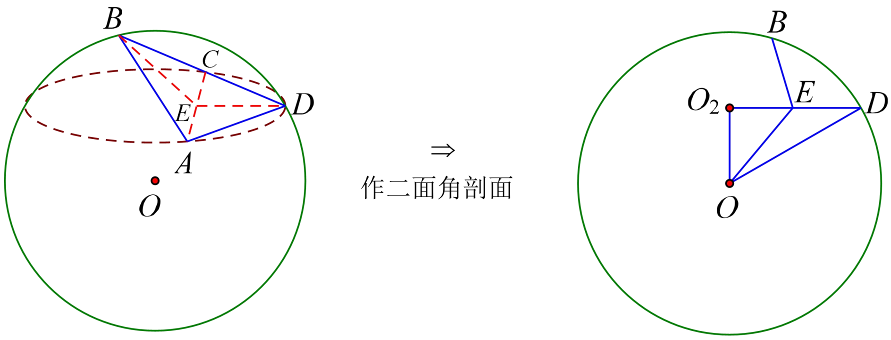


A. $\frac{4\pi}{3}$　　B. 4π

C. 12π　　D. $\frac{52\pi}{3}$

【解析】取 AB 中点 D，∵ $PA=PB=AC=BC=2$，∴ $PD=CD=1$，$PD\perp AB$，$CD\perp AB$，∴面 $PDC\perp$ 面 ABC，设 ΔABC 的外心为 O_1，外接圆半径为 r，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的球心为 O，则 $OO_1\perp$ 面 ABC，$\angle ACB=120°$，由 $r=\frac{AB}{2\sin 120°}=2$，$h=1$，设 $\angle PDC=\alpha=60°$(二面角平面角)，外接球的半径为 R，$R=\sqrt{r^2+(h-r)^2\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{(2)^2+(1-2)^2\tan^2 30°}=\sqrt{\frac{13}{3}}$ ∴则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=\frac{52\pi}{3}$，故选 D.

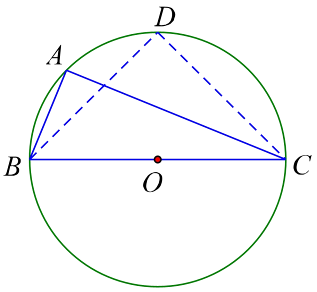
【例 11】在边长为 $2\sqrt{3}$ 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60°$，沿对角线 AC 折成二面角 $B-AC-D$ 为 $120°$ 的四面体 $ABCD$，则此四面体的外接球表面积为__________.

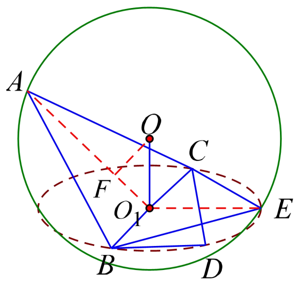


【解析】如图所示，典型的全等等腰三角形共底边：$ED=h=\sqrt{3},O_2D=r=2\sqrt{3},\angle BED=\alpha=120°$，可根据几何性质知道 $\angle O_2EO=60°$，$OO_2=EO_2\tan 60°=3$，$R=\sqrt{OO_2{}^2+DO_2{}^2}=\sqrt{(3)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{21}$，也可以不用画图直接一波流公式带走 $R=\sqrt{r^2+(h-r)^2\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}-2\sqrt{3})^2\tan^2 60°}=\sqrt{21}$，$S=4\pi R^2=84\pi$.

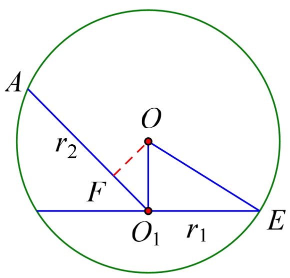
秒杀秘籍：第五讲　等腰三角形底边与一直角三角形斜边构成二面角的四面体

凡是遇到直角三角形，通常要转换直角顶点，因为直径所对的圆周角为直角，故可将直角顶点转换为共斜边的直角三角形直角顶点，如下图左：$\triangle ABC$ 以斜边 BC 为交线与其它平面形成的二面角可以转换为平面 DBC 与其它平面构成的二面角．



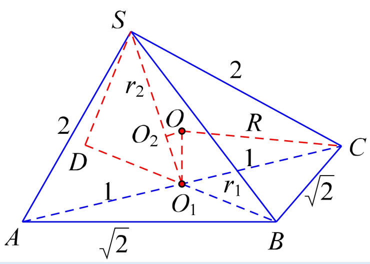


$\Rightarrow$
作二面角剖面

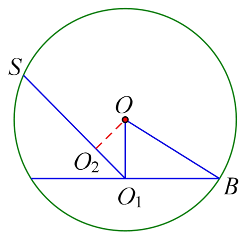


如上图中，$\triangle ABC$ 为等腰三角形，且 $AB=AC$，$\triangle DBC$ 是以 BC 为斜边的 $Rt\triangle$，$A-BC-D$ 二面角为 α，令 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r_2，BC 边上的高为 $AO_1=h_2$，$BC=2r_1$，F 为 $\triangle ABC$ 的外心，则根据剖面图可知，外接球半径 R 满足以下恒等式 $OE^2=OO_1{}^2+O_1E^2=R^2=\left(\dfrac{h_2-r_2}{\sin\alpha}\right)^2+(r_1)^2$．

【例 12】在四面体 $S-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$AB=BC=\sqrt{2}$，$\triangle SAC$ 为等边三角形，二面角 $S-AC-B$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则四面体 $S-ABC$ 的外接球表面积为_________.



$\Rightarrow$
作二面角剖面



【解析】如图所示，作出剖面：$\cos\angle SO_1B=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\sin\angle SO_1B=\sin\angle O_2OO_1=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$h_2=\sqrt{3},r_2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，直接刷公式一波流带走 $R^2=\left(\dfrac{h_2-r_2}{\sin\alpha}\right)^2+(r_1)^2=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$，$S=4\pi R^2=6\pi$．

秒杀秘籍：第六讲　剖面图转化

定理：剖面图一致的外接球一定一致

两个等腰三角形（不全等）共底边的二面角，或等腰三角形底边与直角三角形直角边为公共边构成的二面角模型

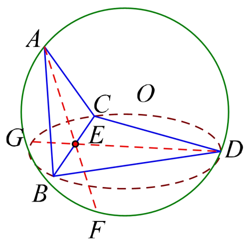


图6

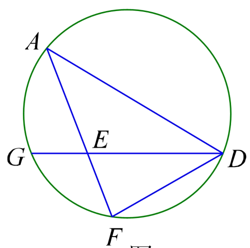


图7

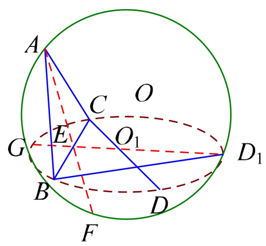


图8

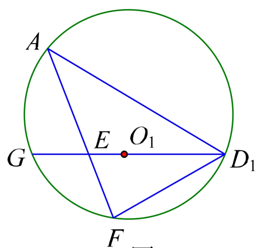


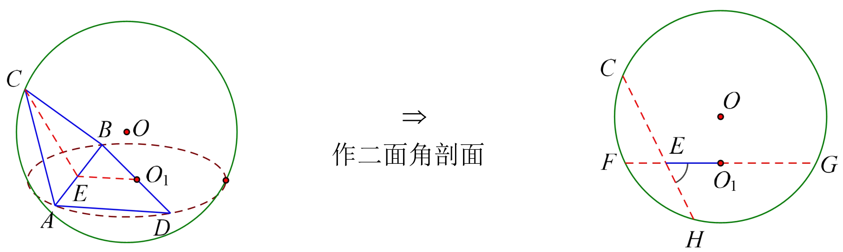
图9

如图 6：设二面角 $\angle AED=\alpha$ ， $AE=h_1$ ， $DE=h_2$ ， ΔABC 外接圆半径 r_1 ， $\triangle DBC$ 外接圆半径 r_2 ，延长 AE 交球于 F , DE 交球于 G ，作如图 6 的二面角剖面图如图 7 所示，根据相交弦定理 $|AE|\cdot|EF|=|GE|\cdot|ED|$ 可知，若 $|AE|=|DE|$ 或者 $|AE|=|GE|$ ，则和全等等腰三角形共底边完全一样，利用公式 $R^2=r^2+(h-r)^2\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$ 秒杀.（备注：若 $\angle BAC=60^\circ$ ，则 $|AE|=3|EF|$ ，若 $\angle BAC=120^\circ$ ，则 $|AE|=\dfrac{1}{3}|EF|$ ）

如图 8：CD 为 $Rt\Delta BCD$ 的斜边，设二面角 $\angle AED_1=\alpha$ ，$AE=h_1$ ，$D_1E=h_2$ ，$\triangle ABC$ 外接圆的半径为 r_1 ，$\triangle DBC$ 外接圆的半径为 $r_2=\dfrac{CD}{2}$ ， $O_1E=h_2-r_2$ ，延长 AE 交球于 F ， D_1E 交球于 G ，作如图 8 的二面角剖面图如图 9 所示，根据相交弦定理 $|AE|\cdot|EF|=|GE|\cdot|ED_1|$ 可知，若 $|AE|=|D_1E|$ 或者 $|AE|=|GE|$ ，利用公式 $R^2=r^2+(h-r)^2\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$ 秒杀.

【例 13】（2018•全国四模）已知三棱锥 $D-ABC$ 所有顶点都在球 O 的球面上，$\triangle ABC$ 为边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形，$\triangle ABD$ 是以 BD 为斜边的直角三角形，且 $AD=2$ ，二面角 $C-AB-D$ 为 120° ，则球 O 的表面积（　　）

A．$\dfrac{148\pi}{3}$　　B．28π　　C．$\dfrac{37\pi}{3}$　　D．36π



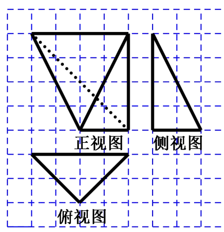
【解析】如图所示，$\begin{cases}CE=3\\ \angle CEG=120^\circ\Rightarrow EG=3\\ O_1E=1\end{cases}$，故此题符合模型四，$\begin{cases}h=CE=3\\ \alpha=\angle CEG=120^\circ\\ r=2,\end{cases}$，

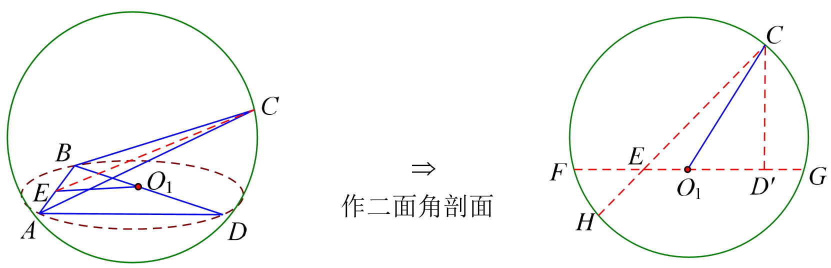
$R^2=r^2+(h-r)^2\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=7$ ， $S=4\pi R^2=28\pi$ ，故选 B.

【例 14】（2018•全国一模）如图，虚线小方格是边长为 1 的正方形，粗实（虚）线为某几何体的三视图，则该几何体外接球的表面积为（　　）

A．4π　　B．8π

C．16π　　D．32π



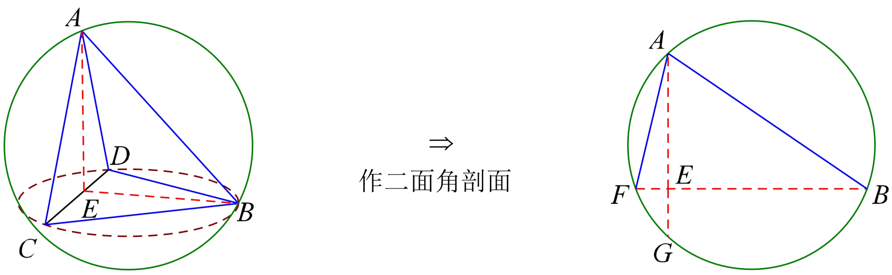


【解析】由题知$\begin{cases}CD'=2\\ O_1G=O_1F=2\sqrt{2}\Rightarrow O_1C=2\sqrt{2}\Rightarrow\angle FCG=90^\circ\Rightarrow R=O_1C=2\sqrt{2}\\ O_1E=O_1D'=2,\end{cases}$，故 $S=4\pi R^2=32\pi$，故选 D.

【例 15】（2018•长郡期末）四面体 $A-BCD$ 中，$\angle ABC=\angle ABD=\angle CBD=60^\circ$，$AB=3$，$CB=DB=2$．则此四面体外接球的表面积为（　　）

A. $\dfrac{19\pi}{2}$　　B. $\dfrac{19\sqrt{38}\pi}{24}$　　C. 17π　　D. $\dfrac{17\sqrt{17}\pi}{6}$

【解析】由题知，$\begin{cases}AB=3\\ \angle ABC=\angle ABD=60^\circ\\ CB=DB=2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}CD=2\\ AC=AD=\sqrt{7}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AE=\sqrt{6}\\ BE=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\angle AEB=90^\circ\\ \sin\angle ABE=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}$，作图如下：



法一：根据相交弦定理 $AE\cdot EG=BE\cdot EF$，由于△ BDC 为等边三角形，根据其外接圆知识可知 $|BE|=3|EF|$，

故可得$\begin{cases}|EF|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ |AF|=\dfrac{\sqrt{57}}{3}\end{cases}\Rightarrow 2R=\dfrac{|AF|}{\sin\angle ABE}=\dfrac{\sqrt{38}}{2}\Rightarrow S=4\pi R^2=\dfrac{19}{2}\pi$，故选 A.

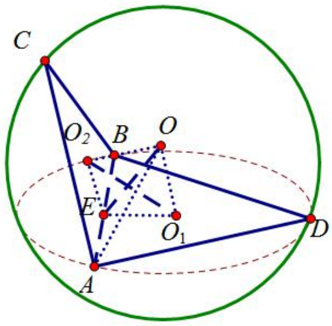
法二：双半径单交线公式，△ BCD 中，$R_1=\dfrac{2}{3}BE=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，△ ACD 中，$R_2=\dfrac{AD}{2\sin\angle ACD}=\dfrac{\sqrt{7}}{2\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}}=\dfrac{7}{2\sqrt{6}}$，$\dfrac{l}{2}=1$，

$R^2=R_1^2+R_2^2-\dfrac{l^2}{4}=\dfrac{19}{8}$，$S=4\pi R^2=\dfrac{19}{2}\pi$.

秒杀秘籍：第七讲 含二面角的外接球终极公式

双距离单交线公式：$R^2=\dfrac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{l^2}{4}$

如右图，若空间四边形 $ABCD$ 中，二面角 $C-AB-D$ 的平面角大小为 α，ABD 的外接圆圆心为 O_1，ABC 的外接圆圆心为 O_2，E 为公共弦 AB 中点，则 $\angle O_1EO_2=\alpha$，$O_1E=m$，$O_2E=n$，$AE=\dfrac{l}{2}$，$OA=R$，由于 O、O_1、E、O_2 四点共圆，且 $OE=2R'=\dfrac{O_1O_2}{\sin\alpha}$，根据余弦定理 $|O_1O_2|^2=m^2+n^2-2mn\cos\alpha$，

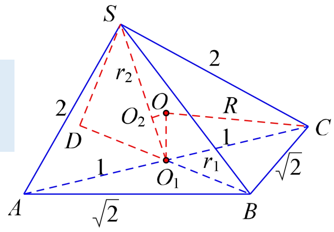


$R^2=|OE|^2+|AE|^2=\dfrac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{l^2}{4}$.

注意：此公式最好配合剖面图，需要求出两个半平面的外接圆半径，和外接圆圆心到公共弦的距离，通常是，剖面图能很快判断出两条相等弦的优先使用公式 $R^2=r^2+(h-r)^2\tan^2\frac{\alpha}{2}$.

下面以此公式来解答一下前面出现的例题：

【例 12】在四面体 $S-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$AB=BC=\sqrt{2}$，$\triangle SAC$ 为等边三角形，二面角 $S-AC-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，则四面体 $S-ABC$ 的外接球表面积为________.



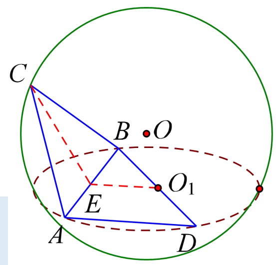
【解析】$m=0$，$n=|O_1O_2|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$R^2=|OO_1|^2+|O_1C|^2=\frac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{l^2}{4}=\frac{9}{4}$，$S=4\pi R^2=6\pi$.

【例 13】（2018•全国四模）已知三棱锥 $D-ABC$ 所有顶点都在球 O 的球面上，$\triangle ABC$ 为边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形，$\triangle ABD$ 是以 BD 为斜边的直角三角形，且 $AD=2$，二面角 $C-AB-D$ 为 $120°$，则球 O 的表面积为（　　）

A．$\frac{148\pi}{3}$　　　　B．28π

C．$\frac{37\pi}{3}$　　　　D．36π



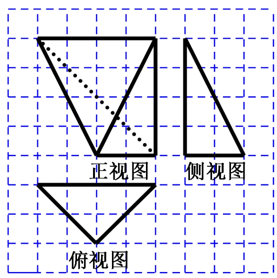
【解析】$m=|O_1E|=1$，$n=\frac{1}{3}|CE|=1$，$\alpha=120°$，$\frac{l}{2}=|AE|=\sqrt{3}$，

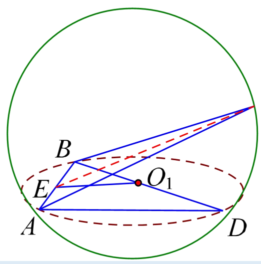
所以 $R^2=|OE|^2+|AE|^2=\frac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{l^2}{4}=7$，$S=4\pi R^2=28\pi$，选 B.

【例 14】（2018•全国一模）如图，虚线小方格是边长为 1 的正方形，粗实（虚）线为某几何体的三视图，则该几何体外接球的表面积为（　　）

A．4π　　　　B．8π

C．16π　　　　D．32π





【解析】$m=|O_1E|=2$，$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\frac{l}{2}=|AE|=2$，在 ABC 中，$h=CE=2\sqrt{5}$，

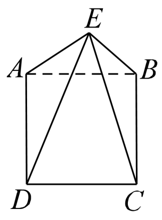
$R_2=\frac{|BC|}{2\sin A}=\frac{2\sqrt{6}}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$，$n=h-R_2=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，故 $R^2=\frac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{l^2}{4}=8$，故 $S=4\pi R^2=32\pi$，

故选 D.

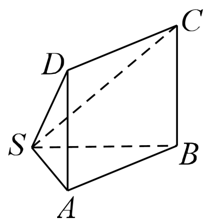
达标训练

1.（2019•潮州二模）如图，四棱锥 $E-ABCD$ 中，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，ΔABE 为 E 为直角顶点的等腰三角形，平面 $ABE\perp$ 平面 $ABCD$，则该几何体外接球的表面积为（　　）

A．12π　　B．$6\sqrt{2}\pi$　　C．$2\sqrt{2}\pi$　　D．8π



第 1 题图



第 5 题图

2.（2019•安徽模拟）在三棱锥 $E-ABD$ 中，已知 $AB=1$, $DA=\sqrt{3}$，三角形 BDE 是边长为 2 的正三角形，则三棱锥 $E-ABD$ 的外接球的最小表面积为（　　）

A．$\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{3}$　　B．$\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{3}$　　C．$\dfrac{16\pi}{3}$　　D．$\dfrac{32\sqrt{3}\pi}{27}$

3.（2019•成都模拟）三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，棱 AB，AC，AA_1 两两垂直，$AB=AC$，且三棱柱的侧面积为 $\sqrt{2}+1$，若该三棱柱的顶点都在同一个球 O 的表面上，则球 O 表面积的最小值为（　　）

A．π　　B．$\sqrt{2}\pi$　　C．2π　　D．4π

4.（2019•河北二模）已知四面体 $ABCD$ 的四个面都为直角三角形，且 $AB\perp$ 平面 BCD，$AB=BD=CD=2$，若该四面体的四个顶点都在球 O 的表面上，则球 O 的表面积为（　　）

A．3π　　B．$2\sqrt{3}\pi$　　C．$4\sqrt{3}\pi$　　D．12π

5.（2019•莆田二模）如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为矩形，$AB=2\sqrt{3}$，$AD=2$，$\angle ASB=120°$，$SA\perp AD$，则四棱锥外接球的表面积为（　　）

A．16π　　B．20π　　C．80π　　D．100π

6.（2019•南关月考）在四面体 $ABCD$ 中，若 $AB=CD=\sqrt{3}$，$AC=BD=2$，$AD=BC=\sqrt{5}$，则四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为（　　）

A．2π　　B．4π　　C．6π　　D．8π

7.（2019•武侯模拟）在梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AD\perp AB$，$AB=4$，$AD=CD=2$，将梯形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠成三棱锥 $D-ABC$，当二面角 $D-AC-B$ 是直二面角时，三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的表面积为（　　）

A．4π　　B．8π　　C．12π　　D．16π

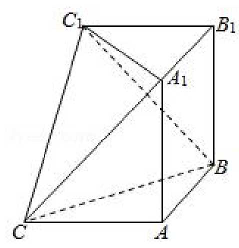
8.（2019•深圳模拟）如右图所示，AA_1，BB_1 均垂直于平面 ABC 和平面 $A_1B_1C_1$，$\angle BAC=\angle A_1B_1C_1=90°$，$AC=AB$　$AC=AB=A_1A=B_1C_1=\sqrt{2}$，则多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为（　　）

A．2π

B．4π

C．6π

D．8π



9.（2018•金牛模拟）已知四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=60^\circ$，沿对角线 BD 将 ΔABD 折起使 A 位于新位置 A'，且 $A'C=\sqrt{3}$，则三棱锥 $A'-BCD$ 的外接球的表面积为（　　）

A．$\dfrac{52\pi}{9}$　　B．$\dfrac{50\pi}{9}$　　C．6π　　D．25π

10.（2019•渝水月考）已知三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$AB=2\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{3}$，$PA=PB=3\sqrt{2}$，且二面角 $P-AB-C$ 的大小为 150°，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为（　　）

A．100π　　B．108π　　C．110π　　D．111π

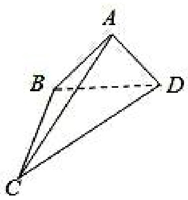
11.（2018•临川期末）在三棱锥 $S-ABC$ 中，$AB=BC=\sqrt{2}$，$SA=SC=AC=2$，二面角 $S-AC-B$ 的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积是（　　）

A．$\dfrac{3}{2}\pi$　　B．2π　　C．$\sqrt{6}\pi$　　D．6π

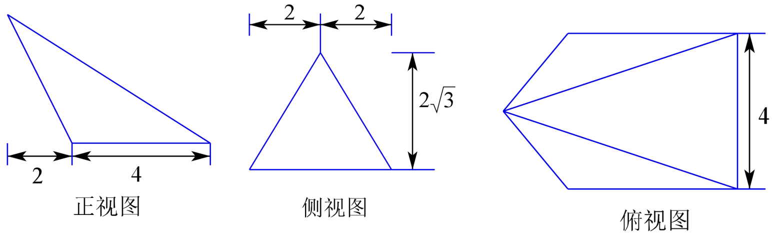
12.（2018•黄州三模）如图，四面体 $ABCD$ 中，面 ABD 和面 BCD 都是等腰 $Rt\triangle$，$AB=\sqrt{2}$，$\angle BAD=\angle CBD=\dfrac{\pi}{2}$，且二面角 $A-BD-C$ 的大小为 $\dfrac{5\pi}{6}$，若四面体 $ABCD$ 的顶点都在球 O 上，则球 O 的表面积为（　　）

A．12π　　B．20π　　C．24π　　D．36π

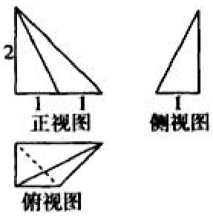
13. 已知一个四棱锥三视图如图所示，若此四棱锥的五个顶点在某个球面上，则该球的表面积为（　　）



12 题图



13 题图



14 题图

A．48π　　B．52π　　C．$\dfrac{172\pi}{3}$　　D．$\dfrac{196\pi}{3}$

14.（2019•河北一模）某棱锥的三视图如图所示，则该棱锥的外接球的表面积为（　　）

A．8π　　B．9π　　C．$\dfrac{41}{4}\pi$　　D．$\sqrt{41}\pi$

15.（2019•黄山一模）已知三棱锥 $A-BCD$，$BC=6$，且 ΔABC、ΔBCD 均为等边三角形，二面角 $A-BC-D$ 的平面角为 60°，则三棱锥外接球的表面积是_________.

16.（2019•城关月考）在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$AB=BC=3\sqrt{2}$，侧面 PAC 为正三角形，且顶点 P 在底面上的射影落在 ΔABC 的重心 G 上，则该三棱锥的外接球的表面积为_________.

17.（2019•宝鸡一模）已知一个四面体 $ABCD$ 的每个顶点都在表面积为 9π 的球 O 的表面上，且 $AB=CD=a$，$AC=AD=BC=BD=\sqrt{5}$，则 $a=$_________.

18.（2018•南平一模）在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=BC=AC=3$，$\angle PAC=\angle PAB$，$PA=2$，PA 与平面 ABC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为_________.