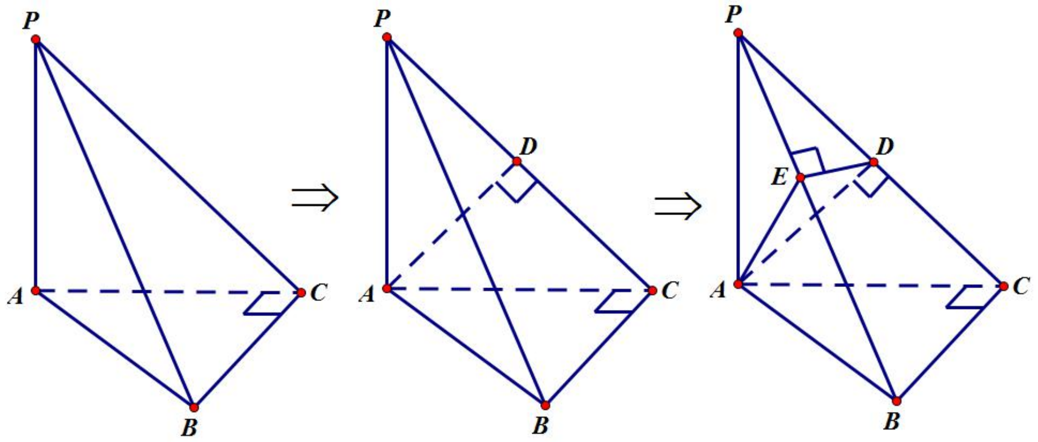
专题 7　线面垂直的判定与证明

秒杀秘籍：第一讲　在被垂直平面找垂直（鳖臑法则）

定理：若一条直线 l 垂直于一个平面，如果在被垂直的平面内找到相互垂直的两条线 $l_1 \perp l_2$（l_1 与 l 相交），则与 l 异面的直线 l_2 垂直于 l 和 l_1 构成的平面．鳖臑是最典型的例子．



当出现重垂线 PA 时，就需要在水平面 ACB 内找到两条垂直相交的直线 $AC \perp BC$，由于 AC 与重垂线 PA 相交，故能得到 $BC \perp 面PAC$，同理，PAC 作为被垂直的平面，在平面内找到 $AD \perp PC$，BC 与 PC 相交，故可以得到 $AD \perp 面PBC$，PBC 作为被垂直的平面，需要在这个面内找到垂直的两条直线，当 $DE \perp PB$ 时（或 $AE \perp PB$），能得到 $PB \perp 面ADE$．

具体书写格式：

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}PA \perp 面ACB \\ BC \subset 面ACB\end{array}\right\} \Rightarrow PA \perp CB \\ BC \perp AC \\ PA \cap AC = A\end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp 面PAC，同理 \left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}BC \perp 面PAC \\ AD \subset 面PAC\end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp BC \\ AD \perp PC \\ PC \cap BC = C\end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp 面PBC$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AD \perp 面PBC \\ PB \subset 面PBC\end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp PB \\ DE \perp PB(或AE \perp PB) \\ DE \cap AD = D(或AE \cap AD = A)\end{array}\right\} \Rightarrow PB \perp 面ADE$$

【例 1】已知 $\triangle ABC$ 中 $\angle ACB = 90°$，$SA \perp 面\ ABC$，$AD \perp SC$，求证：$AD \perp 面\ SBC$．

【证明】

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}SA \perp 面ACB \\ BC \subset 面ACB\end{array}\right\} \Rightarrow SA \perp BC \\ BC \perp AC \\ SA \cap AC = A\end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp 面SAC，同理 \left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}BC \perp 面SAC \\ AD \subset 面SAC\end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp BC \\ AD \perp SC \\ SC \cap BC = C\end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp 面SBC．$$

【例 2】已知 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=2$，$PA=AD=4$，E 为 BC 的中点.

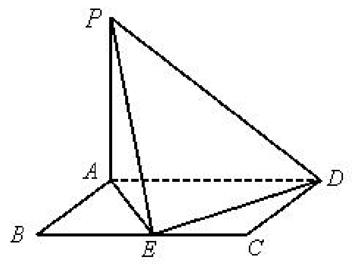
（1）求证：$DE\perp$ 平面 PAE；

（2）求直线 DP 与平面 PAE 所成的角.

【证明】(1)在 $\triangle ADE$ 中，$AD^2=AE^2+DE^2$，$\therefore AE\perp DE$

$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，$DE\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp DE$

又 $PA\cap AE=A$，$\therefore DE\perp$ 平面 PAE



【解析】（2）$\angle DPE$ 为 DP 与平面 PAE 所成的角

在 $Rt\triangle PAD$，$PD=4\sqrt{2}$，在 $Rt\triangle DCE$ 中，$DE=2\sqrt{2}$

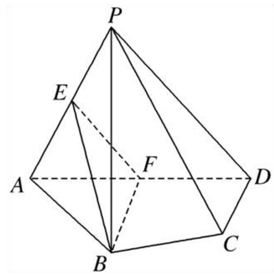
在 $Rt\triangle DEP$ 中，$PD=2DE$，$\therefore \angle DPE=30^0$.

【小结】按照推导式写的证明步骤比传统方式更简洁明了.

【例 3】如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=AD$，$\angle BAD=60°$，E，F 分别是 AP，AD 的中点．求证：

（1）直线 $EF/\!/$ 平面 PCD；

（2）平面 $BEF\perp$ 平面 PAD.



【证明】（1）在△PAD 中，因为 E，F 分别为 AP，AD 的中点，所以 $EF/\!/PD$.

又因为 $EF\not\subset$ 平面 PCD，$PD\subset$ 平面 PCD，所以直线 $EF/\!/$ 平面 PCD.

（2）连接 BD．因为 $AB=AD$，$\angle BAD=60°$，所以△ABD 为正三角形．因为 F 是 AD 的中点，所以 $BF\perp AD$．因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$BF\subset$ 平面 $ABCD$，

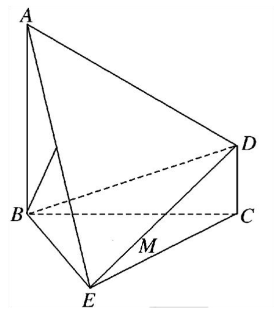
平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，所以 $BF\perp$ 平面 PAD.

又因为 $BF\subset$ 平面 BEF，所以平面 $BEF\perp$ 平面 PAD.

【例 4】如图，已知 $AB\perp$ 平面 BCE，$CD/\!/AB$，△BCE 是正三角形，$AB=BC=2CD$.

（1）在线段 BE 上是否存在一点 F，使 $CF/\!/$ 平面 ADE?

（2）求证：平面 $ADE\perp$ 平面 ABE.



【解析】（1）当 F 为 BE 的中点时，$CF/\!/$ 平面 ADE.

【证明】取 BE 的中点 F，AE 的中点 G，连接 FG、GD、CF，

$\therefore GF=\dfrac{1}{2}AB$，$GF/\!/AB$．$\because DC=\dfrac{1}{2}AB$，$CD/\!/AB$，

$\therefore CD/\!/GF$．$\therefore$ 四边形 $CFGD$ 是平行四边形.

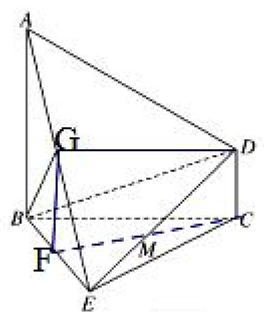
$\therefore CF/\!/GD$．又 $CF\not\subset$ 平面 ADE，$DG\subset$ 平面 ADE，

$\therefore CF/\!/$ 平面 ADE.

（2）$\because CF\perp BF$，$CF\perp AB$，$\therefore CF\perp$ 平面 ABE.

$\because CF/\!/DG$，$\therefore DG\perp$ 平面 ABE．$\because DG\perp$ 平面 ADE，

$\therefore$ 平面 $ABE\perp$ 平面 ADE.



秒杀秘籍：第二讲 等腰三角形三线合一构造法

在没有特殊的重垂线和水平面，证一些线面垂直则需要一些特殊的几何性质,由有着共底边的两个等腰三角形构成的立体图形，则两个顶点的连线一定垂直于底边.

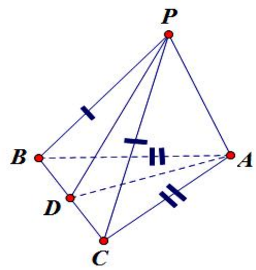
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}PB=PC\\BD=CD\end{array}\right\}\Rightarrow PD\perp BC\\\left.\begin{array}{l}AB=AC\\BD=CD\end{array}\right\}\Rightarrow AD\perp BC\\\qquad\qquad AD\bigcap PD=D\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp \text{面}PAD\Rightarrow BC\perp PA$$

【例 5】如图，已知空间四边形 $ABCD$ 中， $BC=AC$， $AD=BD$，E 是 AB 的中点.

求证：（1） $AB\perp$平面 CDE;

（2）平面 $CDE\perp$平面 ABC.

【证明】（1） $\left.\begin{array}{l}BC=AC\\AE=BE\end{array}\right\}\Rightarrow CE\perp AB$ 同理，$\left.\begin{array}{l}AD=BD\\AE=BE\end{array}\right\}\Rightarrow DE\perp AB$



又$\because CE\cap DE=E$

$\therefore AB\perp$平面 CDE

（2）由（1）有 $AB\perp$平面 CDE 又$\because AB\subset$平面 ABC，

$\therefore$平面 $CDE\perp$平面 ABC

【例 6】如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是 $\angle DAB=60°$ 且边长为 a 的菱形，侧面 PAD 是等边三角形，且平面 PAD 垂直于底面 $ABCD$.

（1）若 G 为 AD 的中点，求证：$BG\perp$平面 PAD;

（2）求证：$AD\perp PB$.

【证明】（1）$\triangle ABD$ 为等边三角形且 G 为 AD 的中点，$\therefore BG\perp AD$

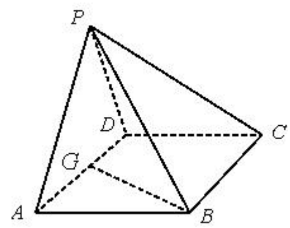
又平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，

$\therefore BG\perp$平面 PAD；

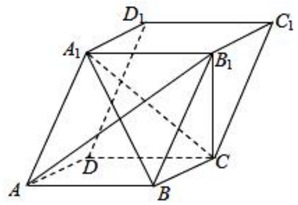
（2）PAD 是等边三角形且 G 为 AD 的中点，$\therefore AD\perp PG$

且 $AD\perp BG$，$PG\cap BG=G$，$\therefore AD\perp$平面 PBG，

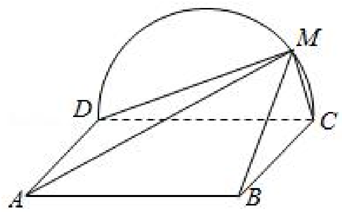
$PB\subset$平面 PBG，$\therefore AD\perp PB$.



1.（2018•江苏）在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB$，$AB_1\perp B_1C_1$．求证：平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 A_1BC．



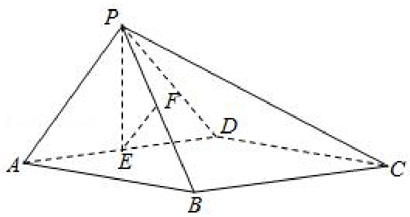
2.（2018•新课标III）如图，矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直，M 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C，D 的点．求证：平面 $AMD\perp$ 平面 BMC．



3．（2018•北京）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PA\perp PD$，$PA=PD$，E，F 分别为 AD，PB 的中点．

（1）求证：$PE\perp BC$；

（2）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PCD．

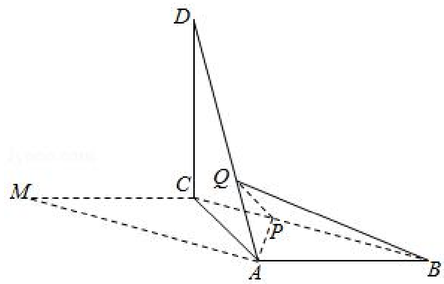


4．（2018•新课标I）如图，在平行四边形 $ABCM$ 中，$AB=AC=3$，$\angle ACM=90^\circ$，以 AC 为折痕将 ΔACM 折起，使点 M 到达点 D 的位置，且 $AB\perp DA$．

（1）求证：平面 $ACD\perp$ 平面 ABC；

（2）Q 为线段 AD 上一点，P 为线段 BC 上一点，

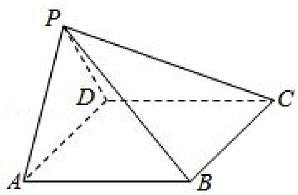
且 $BP=DQ=\frac{2}{3}DA$，求三棱锥 $Q-ABP$ 的体积．



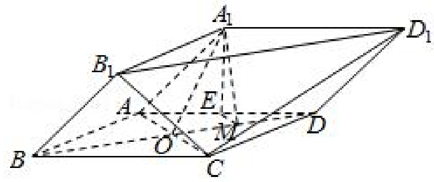
5．（2017•新课标I）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB//CD$，且 $\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$．

（1）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PAD；

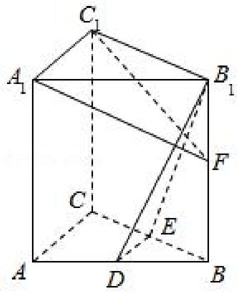
（2）若 $PA=PD=AB=DC$，$\angle APD=90^\circ$，且四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{8}{3}$，求该四棱锥的侧面积．



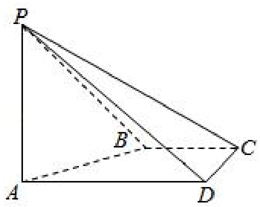
6．（2017•山东）由四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 后得到的几何体如图所示，四边形 $ABCD$ 为正方形，O 为 AC 与 BD 的交点，E 为 AD 的中点，$A_1E\perp$ 平面 $ABCD$，设 M 是 OD 的中点，求证：平面 $A_1EM\perp$ 平面 B_1CD_1．



7．（2016•江苏）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D，E 分别为 AB，BC 的中点，点 F 在侧棱 B_1B 上，且 $B_1D\perp A_1F$，$A_1C_1\perp A_1B_1$．求证：平面 $B_1DE\perp$ 平面 A_1C_1F．



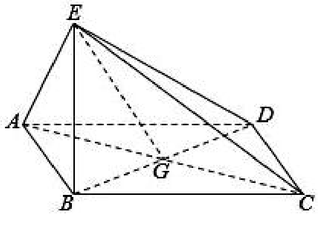
8．（2016•四川）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp CD$，$AD//BC$，$\angle ADC=\angle PAB=90^\circ$，$BC=CD=\frac{1}{2}AD$．求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PBD．



9．（2015•新课标I）如图，四边形 $ABCD$ 为菱形，G 为 AC 与 BD 的交点，$BE\perp$ 平面 $ABCD$．

（1）求证：平面 $AEC\perp$ 平面 BED；

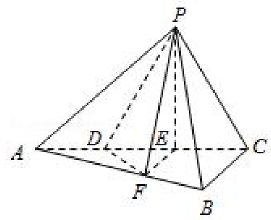
（2）若 $\angle ABC=120^\circ$，$AE\perp EC$，三棱锥 $E-ACD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，求该三棱锥的侧面积．



10. （2015•重庆）如图，三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，点 D、E 在线段 AC 上，且 $AD=DE=EC=2$，$PD=PC=4$，点 F 在线段 AB 上，且 $EF//BC$．

（1）求证：$AB\perp$ 平面 PFE；

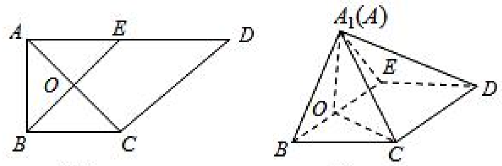
（2）若四棱锥 $P-DFBC$ 的体积为 7，求线段 BC 的长．



11. （2015•陕西）如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$，$AB=BC=\dfrac{1}{2}AD=a$，$E$ 是 AD 的中点，O 是 AC 与 BE 的交点．将 ΔABE 沿 BE 折起到如图 2 中△ A_1BE 的位置，得到四棱锥 A_1-BCDE．

（1）求证：$CD\perp$ 平面 A_1OC；

（2）当平面 $A_1BE\perp$ 平面 $BCDE$ 时，四棱锥 A_1-BCDE 的体积为 $36\sqrt{2}$，求 a 的值．

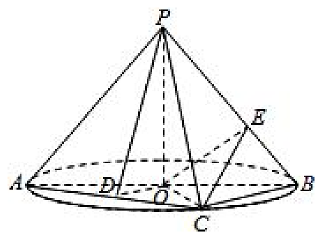


12. （2015•福建）如图，AB 是圆 O 的直径，点 C 是圆 O 上异于 A，B 的点，PO 垂直于圆 O 所在的平面，且 $PO=OB=1$，

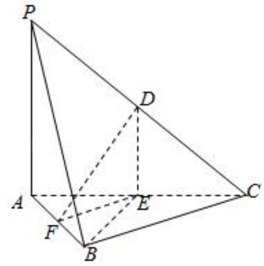
（1）若 D 为线段 AC 的中点，求证；$AC\perp$ 平面 PDO；

（2）求三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值；

（3）若 $BC=\sqrt{2}$，点 E 在线段 PB 上，求 $CE+OE$ 的最小值．



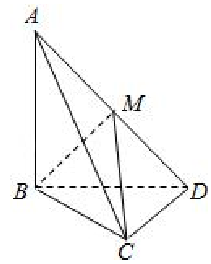
13．（2014•江苏）如图，在三棱锥$P-ABC$中，D，E，F分别为棱PC，AC，AB的中点，已知$PA\perp AC$，$PA=6$，$BC=8$，$DF=5$．求证：平面$BDE\perp$平面ABC．



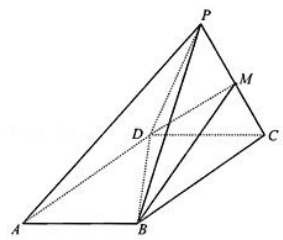
14．（2014•福建）如图，三棱锥$A-BCD$中，$AB\perp$平面BCD，$CD\perp BD$．

（1）求证：$CD\perp$平面ABD；

（2）若$AB=BD=CD=1$，M为AD中点，求三棱锥$A-MBC$的体积．



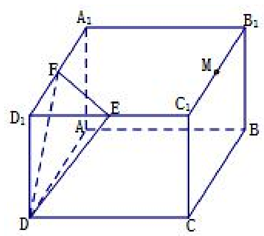
15．（2019•南通模拟）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为平行四边形，$AD=2$，$AB=1$，$\angle BAD=60^{\circ}$，平面$PCD\perp$平面$ABCD$，点M为PC上一点．求证：平面$MBD\perp$平面PCD．



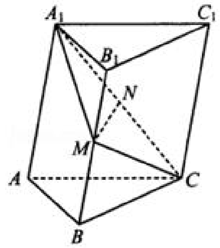
16．（2019•揭阳二模）已知如图，长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=BC=4$，$BB_1=2\sqrt{2}$，点E，F，M分别为C_1D_1，A_1D_1，B_1C_1的中点，过点M的平面α与平面DEF平行，且与长方体的面相交，交线围成一个几何图形．

（1）在图中画出这个几何图形，并求这个几何图形的面积（画图说出作法，不用说明理由）；

（2）求证：$D_1B\perp$平面DEF．



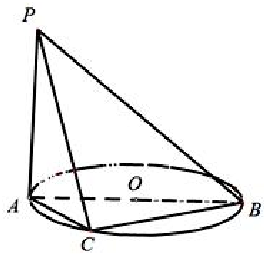
17. （2019•四川模拟）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，已知点 M 在棱 BB_1 上，且 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$，点 N 在线段 A_1C 上，且 $\overrightarrow{A_1N}=\overrightarrow{NC}$，且 $MN\perp AA_1$，$MN\perp A_1C$．求证：平面 $A_1MC\perp$ 平面 A_1ACC_1．



18. （2019•沭阳期中）如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 是 $\odot O$ 上的动点，PA 垂直于 $\odot O$ 所在的平面 ABC．

（1）求证：平面 $PAC\perp$ 平面 PBC；

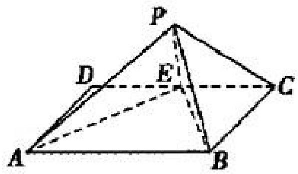
（2）设 $PA=3$，$AC=\sqrt{3}$，求点 A 到平面 PBC 的距离．



19. （2019•聊城二模）如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，E 为 CD 的中点，以 AE 为折痕把 ΔADE 折起，使点 D 到达点 P 的位置，且 $\angle PAB=60^\circ$．

（1）求证：平面 $PEC\perp$ 平面 PAB；

（2）若三棱锥 $E-PEC$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，求该三棱锥的表面积．



20. （2019•大兴一模）如图，四棱锥 $P-ABCD$，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，$PA\perp AB$，$AB//CD$，$\angle DAB=90^\circ$，$PA=AD$，$DC=2AB$，E 为 PC 中点．

（1）求证：$PA\perp BC$；

（2）求证：直线 $BE//$ 平面 PAD；

（3）求证：平面 $PBC\perp$ 平面 PDC．