专题 8　空间向量与立体几何

秒杀秘籍：第一讲　求平面法向量坐标的特殊方法

1．空间向量的概念：

在空间，我们把具有大小和方向的量叫做空间向量．向量一般用有向线段表示，同向等长的有向线段表示同一或相等的向量．

2．空间向量基本定理：

如果三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，那么对空间任一向量 $\vec{p}$，存在有序实数组 $\{x,y,z\}$，使得 $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$．

若三向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，我们把 $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 叫做空间的一个基底，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 都叫做基向量，空间任何三个不共面的向量都可以构成空间的一个基底．

3．向量的数量积：

已知向量 $\vec{a},\vec{b}$，则 $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos<\vec{a},\vec{b}>$ 叫做 $\vec{a},\vec{b}$ 的数量积，记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos<\vec{a},\vec{b}>$．

向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角公式 $\cos<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$．

4．平面的法向量：

如果表示向量 $\vec{n}$ 的有向线段所在直线垂直于平面 α，则称这个向量垂直于平面 α，记作 $\vec{n}\perp\alpha$，如果 $\vec{n}\perp\alpha$，那么向量 $\vec{n}$ 叫做平面 α 的法向量．

几点注意：

（1）法向量一定是非零向量；（2）一个平面的所有法向量都互相平行；（3）向量 $\vec{n}$ 是平面的法向量，向量 $\vec{m}$ 是与平面平行或在平面内，则有 $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$．

•第一步：写出平面内两个不平行的向量 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，

•第二步：那么平面法向量

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\right)=(y_1z_2-z_1y_2,z_1x_2-x_1z_2,x_1y_2-y_1x_2)$$

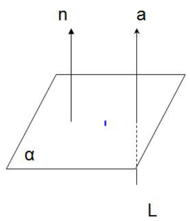
5．判定直线、平面间的位置关系

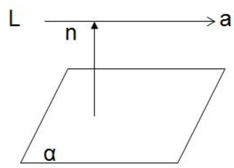
（1）直线与直线的位置关系：不重合的两条直线 a，b 的方向向量分别为 $\vec{a}$，$\vec{b}$．

①若 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$，即 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$，则 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$．　　②若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

（2）直线与平面的位置关系：直线 L 的方向向量为 $\vec{a}$，平面α的法向量为 $\vec{n}$，且 $L\perp\alpha$．

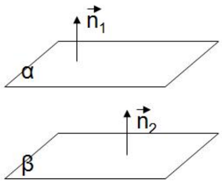
①若 $\vec{a}\,//\,\vec{n}$，即 $\vec{a}=\lambda\vec{n}$，则 $L\perp\alpha$　　②若 $\vec{a}\perp\vec{n}$，即 $\vec{a}\cdot\vec{n}=\mathbf{0}$，则 $a\,//\,\alpha$．

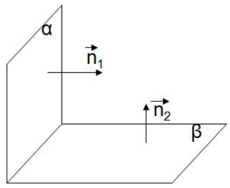




（3）平面与平面的位置关系：平面 α 的法向量为 $\vec{n}_1$，平面 β 的法向量为 $\vec{n}_2$．

①若 $\vec{n}_1\,//\,\vec{n}_2$，即 $\vec{n}_1=\lambda\vec{n}_2$，则 $\alpha//\beta$　　②若 $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$，即 $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$，则 $\alpha\perp\beta$

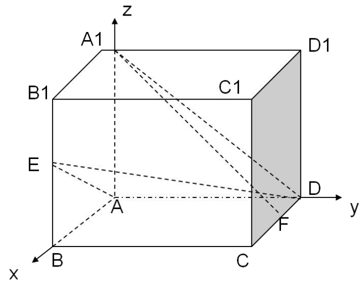




【例 1】正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别是 BB_1、CD 的中点，求证:平面 $AED\perp$平面 A_1FD .

【证明】以 A 为原点建立如图所示的的直角坐标系 A-xyz ，

设:正方体的棱长为 2，那么 $E(2,0,1)$ ，$A_1(0,0,2)$ ，$F(1,2,0)$ ，$D(0,2,0)$ ，



于是 $\overrightarrow{AE}=(2,0,1)$ ，$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$

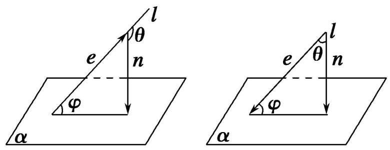
设平面 AED 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$ 得 $\begin{cases}2x+z=0\\2y=0\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}z\\y=0\end{cases}$

取 $z=2$ 得 $\overrightarrow{n_1}=(-1,0,2)$ 同理可得平面 A_1FD 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(2,0,1)$

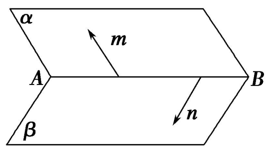
$\because\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=-2+0+2=0\therefore$ 平面 $AED\perp$ 平面 A_1FD .

6．空间角的计算

（1）两条异面直线所成角的求法：设直线 a，b 的方向向量为 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ ，其夹角为 θ，则 $\cos\varphi=|\cos\theta|=\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$(其中 φ 为异面直线 a，b 所成的角).



（2）直线和平面所成角的求法如图所示，设直线 l 的方向向量为 $\vec{e}$，平面 α 的法向量为 $\vec{n}$，直线 l 与平面 α 所成的角为 φ，两向量 $\vec{e}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角为 θ，

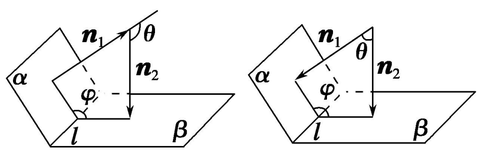


则有 $\sin\varphi=|\cos\theta|=\dfrac{|\vec{e}\cdot\vec{n}|}{|\vec{e}||\vec{n}|}$ ，或者 $\sin\varphi=\cos\theta$.

（3）二面角的求法

①利用向量求二面角的大小，可以不作出平面角，如图所示，〈$\vec{m}$ ，$\vec{n}$〉即为所求二面角的平面角.

②对于易于建立空间直角坐标系的几何体，求二面角的大小时，可以利用这两个平面的法向量的夹角来求.

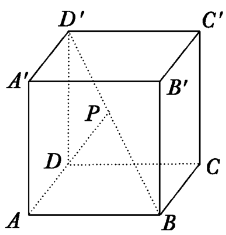


如图所示，二面角 $\alpha-l-\beta$，平面 α 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}$ ，平面 β 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}$ ，〈$\overrightarrow{n_1}$ ，$\overrightarrow{n_2}$〉$=\theta$，则二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 θ 或 $\pi-\theta$.

【例 2】如图所示，已知点 P 在正方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$的对角线 BD'上，$\angle PDA=60°$.

（1）求 DP 与 CC'所成角的大小；

（2）求 DP 与平面 $AA'D'D$ 所成角的大小.



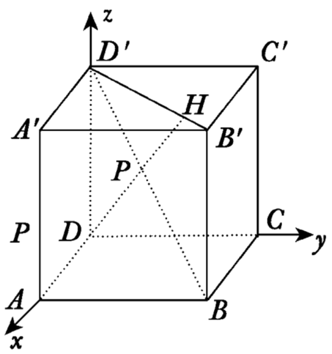
【解析】如图所示，以 D 为原点，DA 为单位长度建立空间直角坐标系 D—xyz.

则 $\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$ ，$\overrightarrow{CC'}=(0,0,1)$. 连接 BD，$B'D'$. 在平面 $BB'DD'$ 中，

延长 DP 交 $B'D'$ 于 H. 设 $\overrightarrow{DH}=(m,m,1)$ $(m>0)$ ，

由已知 $\left\langle\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DA}\right\rangle=60°$，由 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DH}=\left|\overrightarrow{DA}\right|\left|\overrightarrow{DH}\right|\cos\left\langle\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DH}\right\rangle$ ，

可得 $2m=\sqrt{2m^2+1}$，解得 $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\overrightarrow{DH}=(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1)$．



（1）因为 $\cos\left\langle\overrightarrow{DH},\overrightarrow{CC'}\right\rangle=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\times0+\frac{\sqrt{2}}{2}\times0+1\times1}{1\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

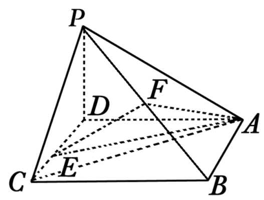
所以 $\left\langle\overrightarrow{DH},\overrightarrow{CC'}\right\rangle=45^\circ$，即 DP 与 CC' 所成的角为 45°．

（2）平面 $AA'D'D$ 的一个法向量 $\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$．

因为 $\cos\left\langle\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DC}\right\rangle=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\times0+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\mathbf{1}+1\times\mathbf{0}}{1\times\sqrt{2}}=\dfrac{\mathbf{1}}{2}$

所以 $\left\langle\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DC}\right\rangle=60^\circ$，可得 DP 与平面 $AA'D'D$ 所成的角为 30°．

【例 3】如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PD\perp$底面 $ABCD$，$AD=PD$，E，F 分别为 CD，PB 的中点．



（1）求证：$EF\perp$平面 PAB；

（2）设 $AB=\sqrt{2}\,BC$，求 AC 与平面 AEF 所成角的大小．

【证明】（1）以 D 为原点，DC，DA，DP 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系．设 $PD=1$，$AB=a$，则 $C=(a,0,0)$，$A=(0,1,0)$，

$P=(0,0,1)$，$E=(\dfrac{a}{2},0,0)$，$B=(a,1,0)$，$F=(\dfrac{a}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$．

$\therefore\overrightarrow{EF}=(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$，$\overrightarrow{AB}=(a,0,0)$，$\overrightarrow{PA}=(0,1,-1)$．$\therefore\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{PA}=0$．$\therefore EF\perp AB$，

$EF\perp PA\Rightarrow EF\perp$平面 PAB．

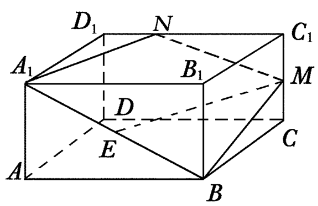
【解析】（2）$\because AB=\sqrt{2}BC$，$\therefore a=\sqrt{2}$，从而 $\overrightarrow{AC}=(\sqrt{2},-1,0)$，$\overrightarrow{AE}=(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-1,0)$，$\overrightarrow{EF}=(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$．

设平面 AEF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0$ 即 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-y=0$；$\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0$ 即 $\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}z=0$

令 $x=\sqrt{2}$，则 $y=1$，$z=-1$，$\therefore$平面 AEF 的一个法向量为 $\vec{n}=(\sqrt{2},1,-1)$．

设 AC 与平面 AEF 所成角为 α，则 $\sin\alpha=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AC},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\times2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$．

【例 4】如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=\dfrac{1}{2}AB$，点 E，M 分别图为 A_1B，C_1C 的中点，过 A_1，B，M 三点的平面 A_1BMN 交 C_1D_1 于点 N．

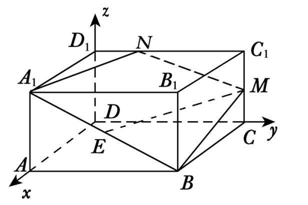


（1）求证:EM∥平面 $A_1B_1C_1D_1$；

（2）求二面角 $B-A_1N-B_1$ 的正切值．

【证明】(1) 建立图所示空间直角坐标系，设 $AB=2a$，$AA_1=a(a>0)$，则 $A_1(2a$，0，$a)$，$B(2a$，$2a$，$0)$，$C(0$，$2a$，$0)$，$C_1(0$，$2a$，$a)$．∵E 为 A_1B 的中点，M 为 CC_1 的中点，∴E（$2a$，a，$\dfrac{a}{2}$），M（0，$2a$，$\dfrac{a}{2}$）．∴$\overrightarrow{EM}=(-2a$，a，$0)$．∴EM∥平面 $A_1B_1C_1D_1$．

【解析】(2) 设平面 A_1BM 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$．∵ $\overrightarrow{A_1B}=(0,2a,-a)$，$\overrightarrow{BM}=(-2a,0,\frac{a}{2})$，∴由 $\vec{n}\perp\overrightarrow{A_1B}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{BM}$，$2ay-az=0$，$\Rightarrow x=\frac{z}{4}$，$-2ax+\frac{az}{2}=0$．$\Rightarrow y=\frac{z}{2}$，∴令 $z=a$，则 $\vec{n}=(\frac{a}{4},\frac{a}{2},a)$ 而平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，设二面角为θ，则 $\cos\theta=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n_1}|}{|\vec{n}||\vec{n_1}|}=\frac{4}{\sqrt{21}}=\frac{4\sqrt{21}}{21}$，又∵二面角为锐二面角，



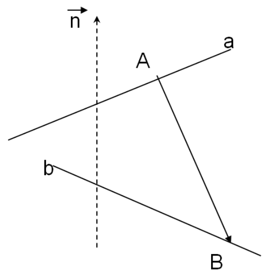
∴ $\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{21}}=\frac{4\sqrt{21}}{21}$，从而 $\tan\theta=\frac{\sqrt{5}}{4}$ 即二面角 $B—A_1N—B_1$ 的正切值为 $\frac{\sqrt{5}}{4}$．

7．求解空间中的距离

（1）异面直线间的距离：两条异面直线间的距离也不必寻找公垂线段，只需利用向量的正射影性质直接计算．

如图，设两条异面直线 a、b 的公垂线的方向向量为 $\vec{n}$， 这时分别在 a、b 上任取 A、B 两点，则向量在 $\vec{n}$ 上的正射影长就是两条异面直线 a、b 的距离．

∴ $d=|\overrightarrow{AB}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$，即两异面直线间的距离等于两异面直线上分别任取两点的向量和公垂线方向向量的数量积的绝对值与公垂线的方向向量模的比值．



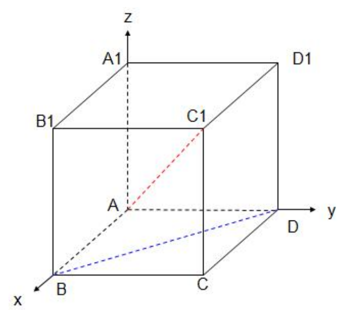
【例 5】在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求异面直线 AC_1 与 BD 间的距离．

【解析】建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，，则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$D(0,1,0)$，$C_1(1,1,1)$，设异面直线 AC_1 与 BD 的公垂线的方向向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则由

$\overrightarrow{AC_1}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{BD}=-(-1,1,0)$ 得

$$\begin{cases}x+y+z=0\\-x+y=0\end{cases},\text{解得}\begin{cases}x=-\frac{z}{2}\\y=-\frac{z}{2}\end{cases},\text{取}z=2$$

得：$\vec{n}=(-1,-1,2)$，∵ $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$

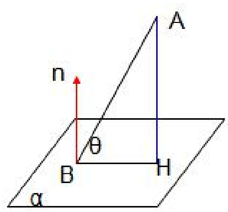


∴异面直线 AC_1 与 BD 间的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|-1-0+0|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$．

（2）点到平面的距离

A 为平面α外一点(如图)，$\vec{n}$ 为平面α的法向量，过 A 作平面α的斜线 AB 及垂线 AH．

$$|\overrightarrow{AH}|=|\overrightarrow{AB}|\cdot\sin\theta=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\cos<\overrightarrow{AB},n>|=|\overrightarrow{AB}|\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}\quad d=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$



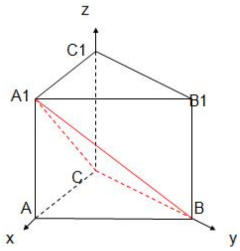
【小结】点到平面的距离等于平面内外两点的向量和平面的法向量的数量积的绝对值与平面的法向量模的比值．

【例 6】在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=\sqrt{2}$，$AC=BC=1$，$\angle ACB=90°$，求 B_1 到面 A_1BC 的距离．

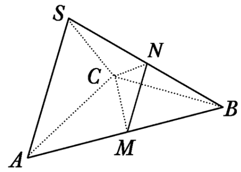
【解析】以 C 为原点建立空间直角坐标系 $C-xyz$，则 $C(0,0,0)$，$A_1(1,0,\sqrt{2})$，$B(0,1,0)$，$B_1(0,1,\sqrt{2})$．设面 A_1BC 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，由 $\overrightarrow{CA_1}=(1,0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{CB}=(0,1,0)$

得 $\vec{n}=(-\sqrt{2},0,1)$ $\because \overrightarrow{BB_1}=\left(0,0,\sqrt{2}\right)$ $\therefore d=\dfrac{\left|\overrightarrow{BB_1}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|0+0+\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

或 $\because \overrightarrow{A_1B_1}=\left(-1,1,0\right)$ $\therefore d=\dfrac{\left|\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|\sqrt{2}+0+0\right|}{\sqrt{2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



【例 7】在三棱锥 $S-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 4 的正三角形，平面 $SAC\perp$ 平面 ABC，$SA=SC=2\sqrt{3}$，M，N 分别为 AB，SB 的中点，如图所示．求点 B 到平面 CMN 的距离．

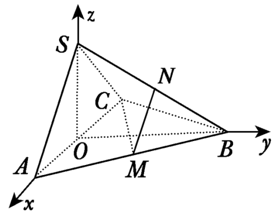


【解析】取 AC 的中点 O，连接 OS，OB．$\because SA=SC$，$AB=BC$，$\therefore AC\perp SO$，$AC\perp BO$．

$\because$ 平面 $SAC\perp$ 平面 ABC，平面 $SAC\cap$ 平面 $ABC=AC$，$\therefore SO\perp$ 平面 ABC，$\therefore SO\perp BO$．

如图所示，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则 B（0，$2\sqrt{3}$，0），C（−2，0，0），

S（0，0，$2\sqrt{3}$），M（1，$\sqrt{3}$，0），N（0，$\sqrt{3}$，$\sqrt{2}$）$\therefore \overrightarrow{CM}=(3,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{MN}=(-1,0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{MB}=(-1,\sqrt{3},0)$．



设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 CMN 的一个法向量，$\overrightarrow{CM}\cdot n=3x+\sqrt{3}y=0$，

$\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}=-x+\sqrt{2}z=0$ =0，取 $z=1$，则 $x=\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{6}$，$\therefore \vec{n}=(\sqrt{2},-\sqrt{6},1)$

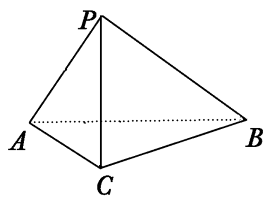
$\therefore$ 点 B 到平面 CMN 的距离 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{MB}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$．

【例 8】如图示，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AC=BC=2$，$\angle ACB=90^\circ$，$AP=BP=AB$，$PC\perp AC$．

（1）求证：$PC\perp AB$；

（2）求二面角 B-AP-C 的余弦值；

（3）求点 C 到平面 APB 的距离．



【证明】（1）$\because AC=BC$，$AP=BP$，$\therefore \triangle APC\cong\triangle BPC$．又 $PC\perp AC$，$\therefore PC\perp BC$．

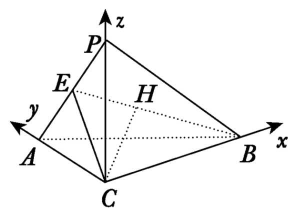
$\because AC\cap BC=C$，$\therefore PC\perp$ 平面 ABC．$\because AB\subset$ 平面 ABC，$\therefore PC\perp AB$．

【解析】（2）如图，以 C 为原点建立空间直角坐标系 C—xyz．

则 C（0，0，0），A（0，2，0），B（2，0，0）．设 P（0，0，t），

$\because |PB|=|AB|=2\sqrt{2}$，$\therefore t=2$，$P$（0，0，2）取 AP 中点 E，连接 BE，CE．

$\because |AC|=|PC|$，$|AB|=|BP|$，$\therefore CE\perp AP$，$BE\perp AP$．



$\therefore \angle BEC$ 是二面角 B—AP—C 的平面角．$\because E$（0，1，1），$\overrightarrow{EC}=(0,-1,-1)$，

$\overrightarrow{EB}=(2,-1,-1)$，

$\therefore \cos\angle BEC=\dfrac{\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{EB}}{\left|\overrightarrow{EC}\right|\left|\overrightarrow{EB}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\therefore$ 二面角 B—AP—C 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

（3）$\because AC=BC=PC$，$\therefore C$ 在平面 APB 内的射影为正 $\triangle APB$ 的中心 H，且 CH 的长即为点 C 到平面 APB 的距离．如（2）中建立的空间直角坐标系 C-xyz．

$\because BH=2HE$，$\therefore$ 点 H 的坐标为（$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{3}$）．$\therefore |CH|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．$\therefore$ 点 C 到平面 APB 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．