专题 1　高考中的数列基础知识

第一讲　等差数列

等差数列：考点 1　$a_n=a_1+(n-1)d$ 中的知三求一.

【例 1】若数列$\{a_n\}$是等差数列，且$a_1=1$，$a_3=5$，则a_{10}等于（　　）

A．19　　B．21　　C．37　　D．41

【解析】$a_1=1$，$a_5=a_1+2d=5$，$\therefore d=2$，$a_{10}=a_1+9d=19$.

【例 2】在等差数列$\{a_n\}$中，$a_4=0.8$，$a_{11}=2.2$，求它的首项，公差与a_{51}的值.

【解析】$a_{11}-a_4=7d=1.4$，$\therefore d=0.2$，$a_1=a_5-4d=0.2$，$a_{51}=a_1+50d=10.2$.

【例 3】在等差数列$\{a_n\}$中，$a_5=33$，$a_{45}=153$，则201是该数列的第（　　）项

A．60　　B．61　　C．62　　D．63

【解析】$a_{45}-a_5=40d=153-33=120$，$\therefore d=3$，$a_1+4d=33$，$\therefore a_1+12=33$，$a_1=21$，$a_1+(n-1)d=201$，$n=61$.

关于等差中项：　如果a,A,b成等差数列，则$A=\dfrac{a+b}{2}$，在等差数列$\{a_n\}$中，若$m,n,p,q\in N_+$且$m+n=p+q$.

1．$a_m+a_n=a_p+a_q$　　2．$a_p=a_q+(p-q)d$　　3．若$m+n=2p$　则　$a_m+a_n=2a_p$.

【例 4】（1）等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=5$，$a_6=33$，则$a_3+a_5=$_________.

（2）若$a_5=a$，$a_{10}=b$　求a_{15}.

（3）若　$a_5=6$，$a_8=15$　求a_{14}.

（4）等差数列的前n项和$a_1+a_2+\cdots+a_5=30$，若$a_6+a_7+\cdots+a_{10}=80$，求$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{15}$.

【解析】（1）$a_3+a_5=a_2+a_6=38$；（2）$a_{15}+a_5=2a_{10}$，$\therefore a_{15}+a=2b$，$\therefore a_{15}=2b-a$；（3）$a_8-a_5=3d=9$，$\therefore d=3$，$a_{14}=a_8+6d=33$；（4）$S_5,S_{10}-S_5,S_{15}-S_{10}$成等差数列，$\because S_5=a_1+a_2+\cdots+a_5=30$，$S_{10}-S_5=a_6+a_7+\cdots+a_{10}=80$，$\therefore S_{15}-S_{10}=a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{15}=80+(80-30)=130$.

1．$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，用此公式要求$S_n$必须具备三个条件：$n,a_1,a_n$.

2．$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$，此公式要求$S_n$必须具备三个条件：$n,a_1,d$　（有时比较有用）.

总之：两个公式都表明要求S_n必须已知n,a_1,d,a_n中三个.

【例 5】已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=50$，$d=-2$，$S_n=0$，则$n=$（　　）

A．48　　B．49　　C．50　　D．51

【解析】$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}=50n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times(-2)=0$，$\therefore n=0$（舍去）或$n=51$.

【例 6】设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_2+a_4=6$，则S_5等于（　　）

A．10　　B．12　　C．15　　D．30

【解析】$a_2+a_4=2a_1+4d=2a_3=6$，$\therefore a_3=3$，$S_5=5a_1+10d=5a_3=15$，故选 C.

【例 7】等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=-5$，$a_6=1$，此数列的通项公式为__________，设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 S_8 等于__________.

【解析】$\because a_6-a_3=3d=6$，$d=2$，$a_3=a_1+2d=-5$，$\therefore a_1=-9$，$a_n=a_1+(n-1)d=-11+2d$

$S_8=8a_1+\dfrac{8(8-1)}{2}\times 2=-16$.

秒杀秘籍：考点 2 等差数列与二次函数：对于任意数列一定有 $a_n=\begin{cases}S_1(n=1)\\S_n-S_{n-1}(n\ge 2)\end{cases}$

定理一： S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$\{a_n\}$ 为等差数列 $\Leftrightarrow$ $S_n=an^2+bn\,(a,b\in R)$.

若有 $S_n=an^2+bn+c\,(a,b,c\in R,c\ne 0)$，则 $\{a_n\}$ 是以 a_2 为首项的等差数列.

证明：根据等差数列前 n 项和公式 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$ 可知，$a=\dfrac{d}{2},b=a_1-\dfrac{d}{2}$.

定理二： 若有 $S_n=Aa_n^{\ 2}+\dfrac{1}{2}a_n+C\,(A,C\in R,)$，则 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $d=\dfrac{1}{2A}$.

证明：用 $n-1$ 代替 n，得 $S_{n-1}=Aa_{n-1}^{\ 2}+\dfrac{1}{2}a_{n-1}+C$，利用 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 作差得：

$$a_n=\left(Aa_n^{\ 2}+\frac{1}{2}a_n+C\right)-\left(Aa_{n-1}^{\ 2}+\frac{1}{2}a_{n-1}+C\right)=A\left(a_n^{\ 2}-a_{n-1}^{\ 2}\right)+\frac{1}{2}\left(a_n-a_{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow A\left(a_n^{\ 2}-a_{n-1}^{\ 2}\right)-\frac{1}{2}\left(a_n+a_{n-1}\right)=0\Rightarrow\left(a_n+a_{n-1}\right)\left(a_n-a_{n-1}-\frac{1}{2A}\right)=0$$

故 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $d=\dfrac{1}{2A}$

【例 8】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3n^2-2n$，求证数列 $\{a_n\}$ 成等差数列，并求其首项．公差．通项公式．

【解析】$a_1=S_1=3-2=1$，当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=3n^2-2n-[3(n-1)^2-2(n-1)]=6n-5$　$n=1$ 时亦满足，$\therefore a_n=6n-5$ 首项 $a_1=1$，$a_n-a_{n-1}=6n-5-[6(n-1)-5]=6$(常数)，$\therefore \{a_n\}$ 成等差数列且公差为 6.

【例 9】设数列 $\{a_n\}$ 其前 n 项和 $S_n=n^2-2n+3$，问这个数列成等差吗？

【解析】$n=1$ 时　$a_1=S_1=2$　　　$n\ge 2$ 时　$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-3$

$\because a_1$ 不满足 $a_n=2n-3$　$\therefore$　$a_n=\begin{cases}2 & n=1\\2n-3 & n\ge 2\end{cases}$　$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 不成等差数列，但从第 2 项起成等差数列.

【例 10】已知正数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $4S_n=(a_n+1)^2$，求 a_1,a_2 及 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【解析】（1）$a_1=1$，$a_2=3$

（2）$4S_n-4S_{n-1}=(a_n+1)^2-(a_{n-1}+1)^2$，$4a_n=a_n^{\ 2}-a_{n-1}^{\ 2}+2a_n-2a_{n-1}$，

$0=(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})-2(a_n+2a_{n-1})$，$0=(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)$，$\because \{a_n\}$ 为正数列，$\therefore a_n-a_{n-1}-2=0$，

$\therefore \{a_n\}$ 为首项为 1，公差为 2 的等差数列，$\therefore a_n=2n-1$.

秒杀秘籍：考点3　a_n与S_n之间一步转换

$a_{m_1}+a_{m_2}+a_{m_3}+\cdots\cdots+a_{m_n}=na_{\frac{m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots+m_n}{n}}$

例：$a_2+a_6+a_7=3a_5$；$3a_8-a_{12}=2a_6$．

公式一：$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n\Rightarrow S_n=n\cdot a_{\frac{n+1}{2}}$　　例：　$S_5=5a_3$；$S_{10}=10a_{\frac{11}{2}}$．

公式二：$a_n=\dfrac{S_{2n-1}}{2n-1}$　　例：$a_5=\dfrac{S_9}{9}$；$a_8=\dfrac{S_{15}}{15}$．

当m_1、m_2、m_3、…、m_n也成等差数列时，均有$a_{m_1}+a_{m_2}+a_{m_3}+\cdots\cdots+a_{m_n}=na_{\frac{m_1+m_n}{2}}$．

【例11】设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_2+a_4=6$，则S_5等于（　　）

A．10　　B．12　　C．15　　D．30

【解析】$a_2+a_4=2a_3=6\Rightarrow a_3=3$；$S_5=5a_{\frac{5+1}{2}}=5a_3=15$．

【例12】等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_7>0$，$a_8<0$，则下列结论正确的是（　　）

A．$S_7<S_8$　　B．$S_{15}<S_{16}$　　C．$S_{13}>0$　　D．$S_{15}>0$

【解析】$a_7=\dfrac{S_{2\times7-1}}{2\times7-1}=\dfrac{S_{13}}{13}>0\Rightarrow S_{13}>0$；$a_8=\dfrac{S_{2\times8-1}}{2\times8-1}=\dfrac{S_{15}}{15}<0\Rightarrow S_{15}<0$；$a_8=S_8-S_7<0$；$\because a_7>0$，$a_8<0,\therefore a_{16}=S_{16}-S_{15}<0$．

【例13】有两个等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，其前n项和分别为S_n，T_n，若对$n\in\mathbf{N}_+$有$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{7n+2}{2n+3}$成立，求$\dfrac{a_5}{b_5}$．

【解析】$\dfrac{a_5}{b_5}=\dfrac{\frac{S_9}{9}}{\frac{T_9}{9}}=\dfrac{S_9}{T_9}=\dfrac{7\times9+2}{2\times9+3}=\dfrac{65}{21}$．

【例14】若$\{a_n\}$为等差数列，S_n是其前n项和，且$S_{11}=\dfrac{22\pi}{3}$，则$\tan a_6$的值为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$-\sqrt{3}$　　C．$\pm\sqrt{3}$　　D．$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】$S_{11}=11a_6\Rightarrow a_6=\dfrac{2\pi}{3}$；$\tan a_6=-\sqrt{3}$．

【例15】若S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若S_{17}为一确定常数，则下列各式也为确定常数的是（　　）

A．a_2+a_{15}　　B．$a_2\cdot a_{15}$　　C．$a_2+a_9+a_{16}$　　D．$a_2\cdot a_9\cdot a_{16}$

【解析】$S_{17}=17a_9$；$a_2+a_{15}=2a_{\frac{17}{2}}$；$a_2+a_9+a_{16}=3a_9$，故选C．

【例16】在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_4+a_6+a_{10}+a_{12}=90$，则$a_{10}-\dfrac{1}{3}a_{14}=$________．

【解析】$a_4+a_6+a_{10}+a_{12}=4a_8=90\Rightarrow a_8=\dfrac{45}{2}$；$a_{10}-\dfrac{1}{3}a_{14}=\dfrac{1}{3}(3a_{10}-a_{14})=\dfrac{1}{3}\cdot2a_{\frac{3\times10-14}{2}}=\dfrac{2}{3}a_8=15$．

秒杀秘籍推广：考点4 只有 S 的模型与最值问题

等差数列中：$\dfrac{S_{m+n}}{m+n}=\dfrac{S_m-S_n}{m-n}$.

例如：若 $S_m=S_n$，则一定有：$S_{m+n}=0$；$a_{\frac{m+n+1}{2}}=0$.

若 $m+n=p+q$，则有 $\dfrac{S_{2m+m}}{3m}=\dfrac{S_{2m}-S_m}{2m-m}$ 可以求出 $S_{3m,}$，甚至 S_{4m} $\dfrac{S_m}{m}+\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{S_p}{p}+\dfrac{S_q}{q}$ 特别的，若 $m+n=2p$，则有 $\dfrac{S_p}{m}+\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{S_p}{p}$.

S_n 有最大值 $\Leftrightarrow\begin{cases}a_n>0\\a_{n+1}<0\end{cases}$；$S_n$ 有最小值 $\Leftrightarrow\begin{cases}a_n<0\\a_{n+1}>0\end{cases}$，若 $a_n=0$，则有 $S_n=S_{n-1}$ 同时取得最值

$S_n>0$，n 的最大值 $\Leftrightarrow\begin{cases}S_n>0\\S_{n+1}<0\end{cases}$；$S_n<0,n$ 的最大值 $\Leftrightarrow\begin{cases}S_n<0\\S_{n+1}>0\end{cases}$.

【例17】设等差数列的前 n 项的和为 S_n，且 $S_4=16$，$S_8=64$，求 S_{12}.

【解析】$\dfrac{S_{12}}{12}=\dfrac{S_8-S_4}{8-4}\Rightarrow S_{12}=144$.

【例18】若 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,有 $S_8-S_3=10$，则 S_{11} 的值为（ ）

A．12 B．18 C．44 D．22

【解析】$\dfrac{S_{8+3}}{8+3}=\dfrac{S_8-S_3}{8-3}\Rightarrow S_{11}=\dfrac{10}{5}\times 11=22$.

【例19】设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_7=S_9=63$，则 $a_2+a_4+a_9=$________；$a_4+a_{13}=$________.

【解析】$S_7=S_9\Rightarrow\dfrac{S_{9+7}}{9+7}=\dfrac{S_9-S_7}{9-7}=a_{\frac{17}{2}}=0$；$S_9=63=9a_5\Rightarrow a_5=7$；$a_2+a_4+a_9=3a_5=21$；$a_4+a_{13}=2a_{\frac{17}{2}}=0$.

【例20】设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $\dfrac{S_4}{S_8}=\dfrac{1}{3}$，则 $\dfrac{S_8}{S_{16}}$ 等于（ ）

A．$\dfrac{3}{10}$ B．$\dfrac{1}{3}$ C．$\dfrac{1}{9}$ D．$\dfrac{1}{8}$

【解析】设 $S_4=k,S_8=3k$ $\because\dfrac{S_{8+4}}{8+4}=\dfrac{S_8-S_4}{8-4}$ $\therefore S_{12}=6k$；$\dfrac{S_8}{S_{16}}=\dfrac{3k}{10k}=\dfrac{3}{10}$，故 $\dfrac{S_8}{S_{16}}=\dfrac{3k}{10k}=\dfrac{3}{10}$.

【例21】等差数列 $\{a_n\}$ 中，记 S_n 为前 n 项和，若 $a_1+a_7+a_{13}$ 是一确定的常数，下列各式中，也为确定常数的是________.

① a_{21}；② a_7；③ S_{13}；④ S_{14}；⑤ S_8-S_5

【解析】$a_1+a_7+a_{13}=3a_7=m$，$a_7=\dfrac{S_{13}}{13}\Rightarrow S_{13}=\dfrac{13}{3}m$，$\dfrac{S_{13}}{13}=\dfrac{S_8-S_5}{8-5}\Rightarrow S_8-S_5=m$.

达标训练

1. （2018•新课标I）记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $3S_3=S_2+S_4$， $a_1=2$，则 $a_5=$（　　）

A． -12　　B． -10　　C． 10　　D． 12

2. （2017•新课标I）记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $a_4+a_5=24$， $S_6=48$，则 $\{a_n\}$ 的公差为（　　）

A． 1　　B． 2　　C． 4　　D． 8

3. （2016•新课标I）已知等差数列 $\{a_n\}$ 前 9 项的和为 27， $a_{10}=8$，则 $a_{100}=$（　　）

A． 100　　B． 99　　C． 98　　D． 97

4. （2015•重庆）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2=4$， $a_4=2$，则 $a_6=$（　　）

A． -1　　B． 0　　C． 1　　D． 6

5. （2015•新课标I）已知 $\{a_n\}$ 是公差为1的等差数列， S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_8=4S_4$，则 $a_{10}=$（　　）

A． $\frac{17}{2}$　　B． $\frac{19}{2}$　　C． 10　　D． 12

6. （2015•新课标II）已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1+a_3+a_5=3$，则 $S_5=$（　　）

A． 5　　B． 7　　C． 9　　D． 11

7. （2014•福建）等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=2$， $S_3=12$，则 a_6 等于（　　）

A． 8　　B． 10　　C． 12　　D． 14

8. （2014•重庆）在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=2$， $a_3+a_5=10$，则 $a_7=$（　　）

A． 5　　B． 8　　C． 10　　D． 14

9. （2013•安徽）设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $S_8=4a_3$， $a_7=-2$，则 $a_9=$（　　）

A． -6　　B． -4　　C． -2　　D． 2

10. （2013•新课标I）设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_{m-1}=-2$， $S_m=0$， $S_{m+1}=3$，则 $m=$（　　）

A． 3　　B． 4　　C． 5　　D． 6

11. （2012•重庆）在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2=1$， $a_4=5$，则 $\{a_n\}$ 的前 5 项和 $S_5=$（　　）

A． 7　　B． 15　　C． 20　　D． 25

12. （2012•福建）等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1+a_5=10$， $a_4=7$，则数列 $\{a_n\}$ 的公差为（　　）

A． 1　　B． 2　　C． 3　　D． 4

13. （2012•辽宁）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_4+a_8=16$，则 $a_2+a_{10}=$（　　）

A． 12　　B． 16　　C． 20　　D． 24

14. （2012•辽宁）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_4+a_8=16$，则该数列前 11 项和 $S_{11}=$（　　）

A． 58　　B． 88　　C． 143　　D． 176

15. （2011•江西）设 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差 $d=-2$， S_n 为其前 n 项和，若 $S_{10}=S_{11}$，则 $a_1=$（　　）

A． 18　　B． 20　　C． 22　　D． 24

16. （2010•福建）设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=-11$， $a_4+a_6=-6$，则当 S_n 取最小值时， n 等于（　　）

A． 6　　B． 7　　C． 8　　D． 9

17. （2010•安徽）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2$，则 a_8 的值为（　　）

A． 15　　B． 16　　C． 49　　D． 64

18. （2010•重庆）在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1+a_9=10$，则 a_5 的值为（　　）

A． 5　　B． 6　　C． 8　　D． 10

19. （2010•大纲版II）如果等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_4+a_5=12$，那么$a_1+a_2+...+a_7=$（　　）

A． 14　　B． 20　　C． 28　　D． 35

20. （2009•安徽）已知$\{a_n\}$为等差数列，$a_1+a_3+a_5=105$，$a_2+a_4+a_6=99$，以S_n表示$\{a_n\}$的前n项和，则使得S_n达到最大值的n是（　　）

A． 21　　B． 20　　C． 19　　D． 18

21. （2018•上海）记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_3=0$，$a_6+a_7=14$，则$S_7=$________.

22. （2018•北京）设$\{a_n\}$是等差数列，且$a_1=3$，$a_2+a_5=36$，则$\{a_n\}$的通项公式为________.

23.（2016•江苏）已知$\{a_n\}$是等差数列，S_n是其前n项和，若$a_1+a_2{}^2=-3$，$S_5=10$，则a_9的值是________.

24. （2016•北京）已知$\{a_n\}$为等差数列，S_n为其前n项和．若$a_1=6$，$a_3+a_5=0$，则$S_6=$________.

25. （2015•广东）在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=25$，则$a_2+a_8=$________.

26. （2015•安徽）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n+a_{n-1}+\frac{1}{2}(n\geq 2)$，则数列$\{a_n\}$的前9项和等于________.

27. （2014•北京）若等差数列$\{a_n\}$满足$a_7+a_8+a_9>0$，$a_7+a_{10}<0$，则当$n=$___时，$\{a_n\}$的前n项和最大.

28. （2013•上海）若等差数列的前6项和为23，前9项和为57，则数列的前n项和$S_n=$________.

29. （2013•广东）在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_3+a_8=10$，则$3a_5+a_7=$________.

30. （2013•上海）在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1+a_2+a_3+a_4=30$，则$a_2+a_3=$________.

31. （2012•江西）设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是等差数列，若$a_1+b_1=7$，$a_3+b_3=21$，则$a_5+b_5=$________.

32. （2012•北京）已知$\{a_n\}$为等差数列，S_n为其前n项和，若$a_1=\frac{1}{2}$，$S_2=a_3$，则$a_2=$________，$S_n=$________.

33. （2011•重庆）在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_7=37$，则$a_2+a_4+a_6+a_8=$________.

34. （2011•辽宁）S_n为等差数列a_n的前n项和，$S_2=S_6$，$a_4=1$，则$a_5=$________.

35. （2011•天津）已知$\{a_n\}$为等差数列，S_n为$\{a_n\}$的前n项和，$n\in N^*$，若$a_3=16$，$S_{20}=20$，则S_{10}值为________.

36. （2011•湖南）设S_n是等差数列$\{a_n\}$（$n\in N^*$）的前n项和，且$a_1=1$，$a_4=7$，则$S_9=$________.

37. （2010•辽宁）设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_3=3$，$S_6=24$，则$S_9=$________.

38. （2018•北京）设$\{a_n\}$是等差数列，且$a_1=\ln 2$，$a_2+a_3=5\ln 2$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求$e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots e^{a_n}$.

39. （2018•新课标II）记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $a_1=-7$， $S_3=-15$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求 S_n，并求 S_n 的最小值．

40. （2015•新课标I）记 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $a_n>0$， $a_n^{\ 2}+2a_n=4S_n+3$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和．

第二讲　　等比数列

一．关于等比中项：

如果在 a．b 中插入一个数 G，使 a．G．b 成 GP，则 G 是 a．b 的等比中项．

$\frac{G}{a}=\frac{b}{G}\Rightarrow G^2=ab\Rightarrow G=\pm\sqrt{ab}$（注意两解且同号两项才有等比中项）

例：2 与 8 的等比中项为 G，则 $G^2=16\quad G=\pm4$

二．等比数列的有关性质：

1．与首末两项等距离的两项积等于首末两项的积。与某一项距离相等的两项之积等于这一项的平方．

2．若 $m+n=p+q$，则 $a_ma_n=a_pa_q$．

【例 1】求下列各数列的通项公式：

（1）等比数列 $\{a_n\}$，$a_1=-2$，$a_3=-8$；

（2）$a_1=5$，且 $2a_{n+1}=-3a_n$．

【解析】（1）$a_3=a_1q\Rightarrow q^2=4\Rightarrow q=\pm2\qquad\therefore a_n=(-2)2^{n-1}=-2^n$ 或 $a_n=(-2)(-2)^{n-1}=(-2)^n$．

（2）$q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{3}{2}$　　又：$a_1=5\quad\therefore a_n=5\times(-\frac{3}{2})^{n-1}$．

【例 2】在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-16$，$a_4=8$，则 $a_7=$（　　）

A．-4　　B．±4　　C．-2　　D．±2

【解析】$\because a_1a_7=(a_4)^2$，$\therefore a_7=\frac{{a_4}^2}{a_1}=\frac{64}{-16}=-4$．

【例 3】在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 a_3,a_9 是方程 $3x^2-11x+9=0$ 的两根，则 a_6 的值是__________．

【解析】$\because a_3a_9=(a_6)^2=\frac{9}{3}=3$，$\therefore a_6=\pm\sqrt{3}$．

【例 4】在等比数列 $\{a_n\}$，已知 $a_1=5$，$a_9a_{10}=100$，求 a_{18}．

【解析】$\because a_1a_{18}=a_9a_{10}$，$\therefore a_{18}=\frac{a_9a_{10}}{a_1}=\frac{100}{5}=20$．

【例 5】　在等比数列 $\{b_n\}$ 中，$b_4=3$，求该数列前七项之积．

【解析】$b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7=(b_1b_7)(b_2b_6)(b_3b_5)b_4\quad\because {b_4}^2=b_1b_7=b_2b_6=b_3b_5$，

$\therefore$ 前七项之积 $\left(3^2\right)^3\times3=3^7=2187$

三．判断一个数列是否成 GP 的方法：1．定义法　　2．中项法　　3．通项公式法

【例 6】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_n=\frac{1}{3}(a_n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$．

（1）求 a_1，a_2，a_3 的值；

（2）求证：数列 $\{a_n\}$ 是等比数列；

（3）求 a_n 的通项公式及 S_{10}．

【解析】$\because S_n=\frac{1}{3}(a_n-1)(n\in\mathbf{N}^*)\quad\therefore\quad S_1=a_1=\frac{1}{3}(a_1-1)\Rightarrow a_1=-\frac{1}{2}$，同理，$a_2=\frac{1}{4};a_3=-\frac{1}{8}$

又∵$a_n=S_n-S_{n-1}$　∴ $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{3}(a_n-1)-\frac{1}{3}(a_{n-1}-1)\Rightarrow a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}$

∴$\{a_n\}$是首项为$-\frac{1}{2}$公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列，∴ $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$； $S_{10}=\frac{1}{3}(a_{10}-1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{10}}-\frac{1}{3}$.

【例7】设数列$\{a_n\}$前n项之和为S_n，若$S_1=1,S_2=2$，$S_{n+1}-3S_n+2S_{n-1}=0(n\geq 2)$，问：数列$\{a_n\}$成$GP$吗？

【解析】∵ $S_{n+1}-3S_n+2S_{n-1}=0$，∴ $(S_{n+1}-S_n)-2(S_n-S_{n-1})=0$，即 $a_{n+1}-2a_n=0$

即：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2\ (n\geq 2)$，∴ $\{a_n\}$成$GP(n\geq 2)$ 又：$a_1=S_1=1,a_2=S_2-S_1=1,\frac{a_2}{a_1}\neq 2$，

∴ $\{a_n\}$不成GP，但$(n\geq 2)$时成GP，即：$a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ 2^{n-1} & (n\geq 2)\end{cases}$

四．S_n一般公式推导：设$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n$　①

乘以公比q，$qS_n=a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n+qa_n$　②

①–②：$(1-q)S_n=a_1-qa_n$，$q\neq 1$时：$S_n=\frac{a_1-qa_n}{1-q}=\frac{a_1-aq^n}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

$q=1$时：$S_n=na_1$

注意：（1）a_1，q，n，S_n和a_1，a_n，q，S_n各已知三个可求第四个.

（2）注意求和公式中是q^n，通项公式中是q^{n-1}不要混淆.

（3）应用求和公式时$q\neq 1$，必要时应讨论$q=1$的情况.

【例8】在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=2$，$a_5=128$，则它的公比$q=$______，前n项和$S_n=$______.

【解析】$q^3=\frac{a_5}{a_2}=64\Rightarrow q=4$，又$a_1=\frac{a_2}{q}=\frac{1}{2}$，∴ $a_n=\frac{1}{2}\times 4^{n-1}$，$S_n=\frac{\frac{1}{2}(1-4^n)}{1-4}=\frac{1}{6}(4^n-1)$.

秒杀秘籍：考点1　等比数列与一次函数

定理一：$S_n=Aa_n+B$，则$\{a_n\}$是等比数列

证明：$\{a_n\}$是等比数列，其前n项的和为S_n，则$S_n=\frac{a_1-qa_n}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\Rightarrow A=\frac{-q}{1-q},B=\frac{a_1}{1-q}$.

根据$a_n=\begin{cases}S_1(n=1)\\ S_n-S_{n-1}(n\geq 2)\end{cases}$可以确定等比数列的通项公式.

若$S_n=Aa_n(A\neq 0)$，则$\{a_n\}$是从第二项a_2为首项的等比数列.

定理二：$S_n=A\cdot q^n+B$，当仅当$A=-B$时，$\{a_n\}$是等比数列；当仅当$A\neq -B$时，$\{a_n\}$是从第二项a_2为首项的等比数列.

证明：$\{a_n\}$是等比数列，其前n项的和为S_n，则$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1q^n}{1-q}\Rightarrow A=\frac{-a_1}{1-q},B=\frac{a_1}{1-q}$.

【例9】在数列$\{a_n\}$中，已知对任意正整数n，有$S_n=2^n-1$，则$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=$________.

【解析】$\because a_1=S_1=2-1=1$　又$\because a_n=S_n-S_{n-1}$　$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}(n\geq 2)$；

当 $n=1$ 时，$a_1=2^0=1$ 也成立，$\therefore\{a_n\}$是首项为 1 公比为 2 的等比数列，　$\therefore a_n=2^{n-1}$；

$\{a_n^2\}$是首项为 1，公比为 4 的等比数列，　$\therefore a_n^2=4^{n-1}$；$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\dfrac{1-4^n}{1-4}=\dfrac{4^n-1}{3}$.

【例 10】已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=-2$ 且 $a_{n+1}=S_n$，求 a_n 和 S_n.

【解析】$\because a_{n+1}=S_n$　又$\because a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$　$\therefore S_{n+1}=2S_n$

$\therefore\{S_n\}$是公比为 2 的等比数列，其首项为 $S_1=a_1=-2$，$\therefore S_1=a_1\times 2^{n-1}=-2^n$ $\therefore$ 当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=-2^{n-1}$

$\therefore a_n=\begin{cases}-2 & (n=1)\\ -2^{n-1} & (n\geq 2)\end{cases}$　$\therefore S_n=-2^n$.

【例 11】若等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2\times 3^{n+1}+m$，则 m 的值为_________.

【解析】$\because a_1=S_1=2\times 3^2+m=18+m$　又$\because a_n=S_n-S_{n-1}$

$\therefore\ a_n=S_n-S_{n-1}=2\cdot 3^{n+1}-2\cdot 3^n=4\cdot 3^n(n\geq 2)$；

当 $n=1$ 时，$a_1=4\cdot 3=12$，$\therefore\{a_n\}$是等比数列，　$\therefore a_1=12=18+m$；$\therefore m=-6$.

【例 12】在等比数列$\{a_n\}$中，$S_n=\dfrac{1}{4}a_n+1$，求公式 a_n.

【解析】$\because S_n=\dfrac{1}{4}a_n+1$，$\therefore S_1=a_1=\dfrac{1}{4}a_1+1$，$a_1=\dfrac{4}{3}$；当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{4}a_n+1-\dfrac{1}{4}a_{n-1}-1$

$\therefore a_n=-\dfrac{4}{3}a_{n-1}$，$\therefore\{a_n\}$是首项为 $\dfrac{4}{3}$ 公比为 $-\dfrac{4}{3}$ 的等比数列，　$\therefore a_n=-\left(-\dfrac{4}{3}\right)^n$.

秒杀秘籍：　考点 2　等差和类比等比积

秒杀公式：$a_{m_1}\cdot a_{m_2}\cdot a_{m_3}\cdot\ldots\cdot a_{m_n}=(a_{\frac{m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots+m_n}{n}})^n$

例：$a_2\cdot a_6\cdot a_7=(a_5)^3$；　$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=(a_{\frac{1+n}{2}})^n$；$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_9=(a_5)^9$

拓展：若 m_1、m_2、$m_3\cdots m_n$ 成等差数列时，有 $a_{m_1}\cdot a_{m_2}\cdot a_{m_3}\cdot\ldots\cdot a_{m_n}=(a_{\frac{m_1+m_n}{2}})^n$

例：$a_3\cdot a_6\cdot a_9=(a_6)^3$；　$a_7\cdot a_9\cdot a_{11}\cdot\cdots\cdot a_{21}=(a_{14})^8$.

【例 13】在等比数列$\{a_n\}$中,如果 $a_3\cdot a_4=5$，那么 $a_1\cdot a_2\cdot a_5\cdot a_6$ 等于（　　）

A．25　　B．10　　C．-25　　D．-10

【解析】$\because a_3\cdot a_4=\left(a_{\frac{7}{2}}\right)^2=5$，$\therefore a_1\cdot a_2\cdot a_5\cdot a_6=\left(a_{\frac{7}{2}}\right)^4=5^2=25$.

【例 14】正项等比数列$\{a_n\}$中，a_1，a_{99} 是方程 $x^2-10x+16=0$ 的两根，则 $a_{20}\cdot a_{50}\cdot a_{80}=$（　　）

A．32　　B．64　　C．128　　D．256

【解析】根据韦达定理，$\because a_1a_{99}=(a_{50})^2=16\Rightarrow a_{50}=4$，$\therefore a_{20}a_{50}a_{80}=(a_{50})^3=4^3=64$.

【例 15】在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{10}=3$，则$a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot a_6\cdot a_7\cdot a_8\cdot a_9=$（　　）

A．81　　B．$27\sqrt[5]{27}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．243

【解析】$\because a_1a_{10}=\left(a_{\frac{11}{2}}\right)^2=3$，$\therefore a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9=\left(a_{\frac{11}{2}}\right)^8=3^4=81$.

【例 16】已知等比数列$\{a_n\}$的公比为正数，且$a_4a_6+2a_5a_7+a_6a_8=36$，则a_5+a_7为（　　）

A．6　　B．12　　C．18　　D．24

【解析】$\because a_4a_6+2a_5a_7+a_6a_8=a_5^2+2a_5a_7+a_7^2=(a_5+a_7)^2=36$，$\therefore a_5+a_7=6$.

【例 17】已知由正数组成的等比数列$\{a_n\}$中,公比$q=2$，$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_{30}=2^{45}$,则$a_1\cdot a_4\cdot a_7\cdots a_{28}=$（　　）

A．2^5　　B．2^{10}　　C．2^{15}　　D．2^{20}

【解析】$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_{30}=a_{\frac{31}{2}}^{\ 30}=2^{45}\Rightarrow a_{\frac{31}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$，$a_1\cdot a_4\cdot a_7\cdots a_{28}=a_{\frac{29}{2}}^{\ 10}=\left(\dfrac{a_{\frac{31}{2}}}{q}\right)^{10}=\left(\dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{2}\right)^{10}=2^5$.

秒杀秘籍：考点 3 等间隔的等比数列比值

秒杀公式：$\dfrac{a_{m_1+k}+a_{m_2+k}+\cdots a_{m_n+k}}{a_{m_1}+a_{m_2}+\cdots a_{m_n}}=q^k$.

例如：① $\dfrac{a_3+a_6+\cdots a_{99}}{a_2+a_5+\cdots a_{98}}=q$　② $\dfrac{a_3+a_6+\cdots a_{99}}{a_1+a_4+\cdots a_{97}}=q^2$　③ $\dfrac{a_7+a_8+a_9}{a_4+a_5+a_6}=q^3$　④ $\dfrac{a_7+a_8+a_9}{a_1+a_2+a_3}=q^6$

强调：一定要项数相等，才能用此定理。

推论：在等比数列$\{a_n\}$中，当项数$n=2k$时，$S_{偶}=qS_{奇}$.

秒杀公式：$S_{m+n}=S_m+q^mS_n=S_n+q^nS_m$.

例如：① $S_{10}=S_5+q^5S_5$；　② $S_{15}=S_5+q^5S_{10}=S_5\left(1+q^5+q^{10}\right)$；　③ $S_{2m}=S_m+q^mS_m$；

④ $S_{3m}=S_m+q^mS_{2m}=S_m\left(1+q^m+q^{2m}\right)$.

强调：两个公式其实表达的就是一个意思，整体成等比数列.

【例 18】已知$\{a_n\}$是公比为 2 的等比数列，则$\dfrac{a_1+a_2}{a_3+a_4}$的值为（　　）

A．$\dfrac{1}{8}$　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．1

【解析】$\dfrac{a_1+a_2}{a_3+a_4}=\dfrac{a_1+a_2}{q^2(a_1+a_2)}=\dfrac{1}{q^2}=\dfrac{1}{4}$.

【例 19】已知等比数列$\{a_n\}$的公比为$\dfrac{1}{2}$，并且$a_1+a_3+a_5+...+a_{99}=60$，那么$S_{100}$的值是（　　）

A．30　　B．90　　C．100　　D．120

【解析】$\dfrac{a_2+a_4+\cdots+a_{100}}{a_1+a_3+\cdots+a_{99}}=\dfrac{q(a_1+a_3+\cdots+a_{99})}{a_1+a_3+\cdots+a_{99}}=q=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore S_{100}=a_1+a_3+\cdots+a_{99}+q(a_1+a_3+\cdots+a_{99})=(1+q)(a_1+a_3+\cdots+a_{99})=60\times\dfrac{3}{2}=90$.

【例 20】设等比数列$\{a_n\}$中，前n项和为S_n，已知$S_3=8$，$S_6=7$，则$a_7+a_8+a_9$等于（　　）

A. $\frac{1}{8}$　　B. $-\frac{1}{8}$　　C. $\frac{57}{8}$　　D. $\frac{55}{8}$

【解析】$S_6=S_3+q^3S_3=8+8q^3=7\Rightarrow q^3=-\frac{1}{8}$，$\frac{a_7+a_8+a_9}{a_1+a_2+a_3}=q^6=\left(-\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{64}\Rightarrow a_7+a_8+a_9=\frac{1}{8}$.

【例 21】设等比数列$\{a_n\}$中，前n项和为S_n，已知$S_{10}=10$，$S_{20}=30$，求S_{30}.

【解析】$S_{20}=S_{10}+q^{10}S_{10}=10+10q^{10}=30\Rightarrow q^{10}=2$，$S_{30}=S_{10}+q^{10}S_{20}=10+2\times30=70$.

【例 22】已知$\{a_n\}$为等比数列，S_n是它的前n项和，$S_{10}=2$，$S_{30}-S_{10}=12$，则$S_{60}-S_{30}=$________.

【解析】$S_{30}=S_{10}+q^{10}S_{20}=S_{10}+q^{10}\left(S_{10}+q^{10}S_{10}\right)=S_{10}\left(1+q^{10}+q^{20}\right)\Rightarrow q^{10}+q^{20}=6$；

$\left(q^{10}+3\right)\left(q^{10}-2\right)=0\Rightarrow q^{10}=-3$（舍）；$q^{10}=2$；$S_{60}-S_{30}=q^{30}S_{30}=8\times14=112$.

达标训练

1. （2015•新课标II）已知等比数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_1+a_3+a_5=21$，则$a_3+a_5+a_7=$（　　）

A. 21　　B. 42　　C. 63　　D. 84

2. （2015•新课标II）已知等比数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{4}$，$a_3\cdot a_5=4(a_4-1)$，则$a_2=$（　　）

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{8}$

3. （2014•大纲版）等比数列$\{a_n\}$中，$a_4=2$，$a_5=5$，则数列$\{\lg a_n\}$的前8项和等于（　　）

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

4. （2014•大纲版）设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．若$S_2=3$，$S_4=15$，则$S_6=$（　　）

A. 31　　B. 32　　C. 63　　D. 64

5. （2013•新课标I）设首项为1，公比为$\frac{2}{3}$的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则（　　）

A. $S_n=2a_n-1$　　B. $S_n=3a_n-2$　　C. $S_n=4-3a_n$　　D. $S_n=3-2a_n$

6. （2012•安徽）公比为2的等比数列$\{a_n\}$的各项都是正数，且$a_3a_{11}=16$，则$a_5=$（　　）

A. 4　　B. 2　　C. 1　　D. 8

7. （2012•新课标）已知$\{a_n\}$为等比数列，$a_4+a_7=2$，$a_5\cdot a_6=-8$，则$a_1+a_{10}=$（　　）

A. 7　　B. 5　　C. -5　　D. -7

8. （2012•安徽）公比为$\sqrt[3]{2}$的等比数列$\{a_n\}$的各项都是正数，且$a_3a_{11}=16$，则$\log_2 a_{16}=$（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

9. （2012•大纲版）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$S_n=2a_{n+1}$，则当$n>1$时，$S_n=$（　　）

A. $(\frac{3}{2})^{n-1}$　　B. 2^{n-1}　　C. $(\frac{2}{3})^{n-1}$　　D. $\frac{1}{3}(\frac{1}{2^{n-1}}-1)$

10. （2012•北京）已知$\{a_n\}$为等比数列，下面结论中正确的是（　　）

A. $a_1+a_3\ge2a_2$　　B. $a_1^2+a_3^2\ge2a_2^2$　　C. 若$a_1=a_3$，则$a_1=a_2$　　D. 若$a_3>a_1$，则$a_4>a_2$

11.（2011•四川）数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=1$，$a_{n+1}=3S_n(n\geq 1)$，则$a_6=$（　　）

A．3×4^4　　B．$3\times 4^4+1$　　C．4^4　　D．4^4+1

12.（2010•大纲版I）已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$，$a_1\cdot a_2\cdot a_3=5$，$a_7\cdot a_8\cdot a_9=10$，则$a_4\cdot a_5\cdot a_6=$（　　）

A．$5\sqrt{2}$　　B．7　　C．6　　D．$4\sqrt{2}$

13.（2018•新课标I）记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和．若$S_n=2a_n+1$，则$S_6=$__________．

14.（2017•江苏）等比数列$\{a_n\}$的各项均为实数，其前n项和为S_n，已知$S_3=\frac{7}{4}$，$S_6=\frac{63}{4}$，则$a_8=$_____．

15.（2016•浙江）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_2=4$，$a_{n+1}=2S_n+1$，$n\in N^*$，则$a_1=$__________，$S_5=$__________．

16.（2016•新课标I）设等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_3=10$，$a_2+a_4=5$，则$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$的最大值为________．

17.（2015•广东）若三个正数a，b，c成等比数列，其中$a=5+2\sqrt{6}$，$c=5-2\sqrt{6}$，则$b=$__________．

18.（2015•湖南）设S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_1=1$，且$3S_1$，$2S_2$，S_3成等差数列，则$a_n=$__________．

19.（2015•新课标I）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n$，S_n为$\{a_n\}$的前n项和，若$S_n=126$，则$n=$__________．

20.（2014•广东）等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_1\cdot a_5=4$，则$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\log_2 a_4+\log_2 a_5=$_________．

21.（2014•江苏）在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，若$a_2=1$，$a_8=a_6+2a_4$，则a_6的值是________．

22.（2014•广东）若等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_{10}a_{11}+a_9a_{12}=2e^5$，则$\ln a_1+\ln a_2+\ldots+\ln a_{20}=$____．

23.（2013•新课标I）若数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=$________．

24.（2013•辽宁）已知等比数列$\{a_n\}$是递增数列，S_n是$\{a_n\}$的前n项和．若a_1，a_3是方程$x^2-5x+4=0$的两个根，则$S_6=$________．

25.（2013•北京）若等比数列$\{a_n\}$满足$a_2+a_4=20$，$a_3+a_5=40$，则公比$q=$_____，前n项和$S_n=$______．

26.（2012•辽宁）已知等比数列$\{a_n\}$为递增数列．若$a_1>0$，且$2(a_n+a_{n+2})=5a_{n+1}$，则数列$\{a_n\}$的公比$q=$_________．

27.（2012•广东）若等比数列$\{a_n\}$满足$a_2a_4=\frac{1}{2}$，则$a_1\cdot a_3{}^2\cdot a^5=$__________．

28.（2011•上海）若S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项的和，$8a_2+a_5=0$，则$\frac{S_6}{S_3}=$________．

29.（2018•新课标III）等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_5=4a_3$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记S_n为$\{a_n\}$的前n项和．若$S_m=63$，求m．

30. （2018•新课标I）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$na_{n+1}=2(n+1)a_n$，设$b_n=\dfrac{a_n}{n}$.

（1）求b_1，b_2，b_3；

（2）判断数列$\{b_n\}$是否为等比数列，并说明理由；

（3）求$\{a_n\}$的通项公式.

31. （2016•新课标III）已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=1+\lambda a_n$，其中$\lambda\neq 0$.

（1）证明$\{a_n\}$是等比数列，并求其通项公式；

（2）若$S_5=\dfrac{31}{32}$，求λ.

32. （2015•重庆）已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_3=2$，前3项和$S_3=\dfrac{9}{2}$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设等比数列$\{b_n\}$满足$b_1=a_1$，$b_4=a_{15}$，求$\{b_n\}$前n项和T_n.

33. （2015•山东）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$2S_n=3^n+3$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式;

（2）若数列$\{b_n\}$，满足$a_nb_n=\log_3 a_n$，求$\{b_n\}$的前n项和T_n.

34. （2011•大纲版）设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_2=6$，$6a_1+a_3=30$，求a_n和S_n.

35. （2011•新课标）已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{3}$，公比$q=\frac{1}{3}$.

（1）S_n为$\{a_n\}$的前n项和，证明：$S_n=\frac{1-a_n}{2}$.

（2）设$b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+...+\log_3 a_n$，求数列$\{b_n\}$的通项公式.

第三讲　错位相减法

秒杀秘籍： 等差乘等比数列求和，令 $c_n=(An+B)\cdot q^n$，可以用错位相减法

$T_n=(A+B)q+(2A+B)q^2+(3A+B)q^3+\ldots+(An+B)q^n$ ①

$qT_n=(A+B)q^2+(2A+B)q^3+(3A+B)q^4+\ldots+(An+B)q^{n+1}$ ②

①−②得：$(1-q)T_n=(A+B)q-(An+B)q^{n+1}+A(q^2+q^3+\ldots+q^n)$.

整理得：$T_n=\left(\dfrac{An}{q-1}+\dfrac{B}{q-1}-\dfrac{A}{(q-1)^2}\right)q^{n-1}-\left(\dfrac{B}{q-1}-\dfrac{A}{(q-1)^2}\right)q$.

口诀：加 1 去 n，$q-1$ 值入，楼上楼下.

【例 1】求数列 $1+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+\dfrac{5}{2^4}+\cdots+\dfrac{n+1}{2^n}$ 的前 n 项和.

【解析】$T_n=(1+1)\dfrac{1}{2}+(2+1)\dfrac{1}{2^2}+(3+1)\dfrac{1}{2^3}+\cdots+(n+1)\dfrac{1}{2^n}$ ①

$\dfrac{1}{2}T_n=(1+1)\dfrac{1}{2^2}+(2+1)\dfrac{1}{2^3}+(3+1)\dfrac{1}{2^4}+\ldots+(n+1)\dfrac{1}{2^{n+1}}$ ②

①−②得：$\left(1-\dfrac{1}{2}\right)T_n=(1+1)\dfrac{1}{2}-(n+1)\dfrac{1}{2^{n+1}}+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$

整理得：$T_n=\left(\dfrac{n}{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\right)\dfrac{1}{2^{n+1}}-\left(\dfrac{1}{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\right)\dfrac{1}{2}=3-(n+3)\dfrac{1}{2^n}$

$(1n+1)\dfrac{1}{2^n}$

$\boxed{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}}$　$\dfrac{\text{楼上系数}1}{\text{楼下两数乘积}\frac{1}{4}}=4$

$(\quad)\dfrac{1}{2^{n+1}}-(\quad)\dfrac{1}{2}$（加1去$n$法则，将$\dfrac{1}{2^n}$次方在第一个式子加一，第二个式子去掉$n$）

$\left(\dfrac{n}{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{-\frac{1}{2}}-\quad\right)\dfrac{1}{2^{n+1}}-(\quad)\dfrac{1}{2}$（$q-1$值入，将$q-1=-\dfrac{1}{2}$作为分母，被$(An+B)$相除）

$\left(-2n\boxed{-2-4}\right)\dfrac{1}{2^{n+1}}-(-6)\dfrac{1}{2}$（楼上楼下，在剩下的空余中，将楼上除以楼下的结果输入，并将前式所得的常数项拿到后面括号里.）

【例 2】求数列 $1+3\times2+5\times2^2+\cdots+(2n-1)\cdot2^{n-1}$ 的前 n 项和.

【解析】$T_n=1\times1+3\times2+5\times2^2+\cdots+(2n-1)\cdot2^{n-1}$ (1)

$2T_n=1\times2+3\times2^2+5\times2^3+\ldots+(2n-1)\cdot2^n$ (2)

(1)−(2)得：$(1-2)T_n=1-(2n-1)2^n+\left(2+2^2+\cdots+2^{n-1}\right)$

整理得：$T_n=\left(\dfrac{\frac{2n}{2}}{1}-\dfrac{\frac{1}{2}}{1}-\dfrac{\frac{2}{2}}{1^2}\right)2^{n+1}-\left(-\dfrac{\frac{1}{2}}{1}-\dfrac{\frac{2}{2}}{1^2}\right)2^1=3+(2n-3)2^n$.

【例 3】设数列$\{a_n\}$满足：$a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots\cdots+2^{n-1}a_n=\frac{n}{2}(n\in N^*)$

（1）求数列$\{a_n\}$的通项；

（2）设$b_n=\frac{n}{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n．

【解析】（1）$a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots\cdots+2^{n-1}a_n=\frac{n}{2}(n\in N^*)\Rightarrow a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots\cdots+2^{n-2}a_{n-1}=\frac{n-1}{2}$

两式想减可得$2^{n-1}a_n=\frac{1}{2}\Rightarrow a_n=\frac{1}{2^n}$；

（2）错位相减，$S_n=2+2^{n+1}(n-1)$

【例 4】已知$f_n(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots a_nx^n, f_n(-1)=(-1)^n n$;

（1）求a_1,a_2,a_3的值；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项；

（3）求证：$f_n\left(\frac{1}{3}\right)<1$．

【解析】（1）因为$f_n(-1)=(-1)^n n$，所以

$f_1(-1)=-a_1=-1\Rightarrow a_1=1, f_2(-1)=-a_1+a_2=2\Rightarrow a_1=3, f_3(-1)=-a_1+a_2-a_3=-3\Rightarrow a_3=5.$

（2）因为 $f_n(-1)=-a_1+a_2-a_3+\ldots+(-1)^n a_n$，设$S_n=f_n(-1)$

所以$S_{n-1}=f_{n-1}(-1)=-a_1+a_2-a_3+\ldots+(-1)^{n-1}a_{n-1}(n\geq 2).$

$S_n-S_{n-1}=(-1)^n a_n=f_n(-1)-f_{n-1}(-1)(n\geq 2)=(-1)^n n-(-1)^{n-1}(-1)=(-1)^n n+(-1)^n(n-1)$, $a_n=2n-1$.

（3）错位相减， 因为$f_n(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}+3(\frac{1}{3})^2+5(\frac{1}{3})^3+\ldots+(2n-1)(\frac{1}{3})^{n-1}$ ①

（4）把式①两边同乘以$\frac{1}{3}$，得$\frac{1}{3}f_n(\frac{1}{3})=(\frac{1}{3})^2+3(\frac{1}{3})^3+5(\frac{1}{3})^4+\ldots+(2n-3)(\frac{1}{3})^{n-1}+(2n-1)(\frac{1}{3})^n$ ②

①−②得$\frac{2}{3}f_n(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}+2(\frac{1}{3})^2+2(\frac{1}{3})^3+2(\frac{1}{3})^4+\ldots 2(\frac{1}{3})^{n-1}-(2n-1)(\frac{1}{3})^n=\frac{2}{3}-\frac{1}{3^{n-1}}-(2n-1)(\frac{1}{3})^n<\frac{2}{3}$, $f_n(\frac{1}{3})<1$.

达标训练

1. （2017•山东）已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，且$a_1+a_2=6$，$a_1a_2=a_3$.

（1）求数列$\{a_n\}$通项公式；

（2）$\{b_n\}$为各项非零的等差数列，其前n项和为S_n，已知$S_{2n+1}=b_nb_{n+1}$，求数列$\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

2. （2017•天津）已知$\{a_n\}$为等差数列，前n项和为S_n $(n\in N^*)$，$\{b_n\}$是首项为2的等比数列，且公比大于0，$b_2+b_3=12$，$b_3=a_4-2a_1$，$S_{11}=11b_4$.

（1）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{a_{2n}b_n\}$的前n项和$(n\in N^*)$.

3. （2017•新课标III）设数列$\{a_n\}$满足$a_1+3a_2+...+(2n-1)a_n=2n$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{\frac{a_n}{2n+1}\}$的前n项和.

4．（2016•山东）已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3n^2+8n$，$\{b_n\}$是等差数列，且$a_n=b_n+b_{n+1}$．

（1）求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）令$C_n=\dfrac{(a_n+1)^{n+1}}{(b_n+2)^n}$，求数列$\{C_n\}$的前$n$项和$T_n$．

5．（2015•浙江）已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足$a_1=2$，$b_1=1$，$a_{n+1}=2a_n\ (n\in N^*)$，$b_1+\dfrac{1}{2}b_2+\dfrac{1}{3}b_3+\ldots+\dfrac{1}{n}b_n$ $=b_{n+1}-1\ (n\in N^*)$．

（1）求a_n与b_n；

（2）记数列$\{a_nb_n\}$的前n项和为T_n，求T_n．

6．（2015•天津）已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，$\{b_n\}$是等差数列，且$a_1=b_1=1$，$b_2+b_3=2a_3$，$a_5-3b_2=7$．

（1）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设$c_n=a_n\cdot b_n\ (n\in N^*)$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和．

7.（2015•湖北）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，前n项和为S_n，等比数列$\{b_n\}$的公比为q，已知$b_1=a_1$，$b_2=2$，$q=d$，$S_{10}=100$．

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式

（2）当$d>1$时，记$c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n．

8．（2015•山东）已知数列$\{a_n\}$是首项为正数的等差数列，数列$\{\dfrac{1}{a_n\bullet a_{n+1}}\}$的前$n$项和为$\dfrac{n}{2n+1}$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（2）设$b_n=(a_n+1)\cdot 2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n．

9．（2014•新课标I）已知$\{a_n\}$是递增的等差数列，a_2，a_4是方程$x^2-5x+6=0$的根.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式;

（2）求数列$\{\dfrac{a_n}{2^n}\}$的前n项和.

10. （2014•安徽）数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$na_{n+1}=(n+1)a_n+n(n+1)$，$n\in N^*$．

（1）证明：数列$\{\frac{a_n}{n}\}$是等差数列；

（2）设$b_n=3^n\cdot\sqrt{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n．

11. （2014•江西）已知首项是1的两个数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$（$b_n\neq 0$，$n\in N^*$）满足$a_nb_{n+1}-a_{n+1}b_n+2b_{n+1}b_n=0$．

（1）令$c_n=\frac{a_n}{b_n}$，求数列$\{c_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=3^{n-1}$，求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n．

12. （2013•大纲版）等差数列$\{a_n\}$中，$a_7=4$，$a_{19}=2a_9$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\frac{1}{na_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n．

13. （2013•湖南）设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1 \neq 0$， $2a_n - a_1 = S_1 \cdot S_n$（ $n \in N^*$ ）.

（1）求 a_1， a_2，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

14. （2013•江西）正项数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_n^{\ 2} - (2n-1)a_n - 2n = 0$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n；

（2）令 $b_n = \dfrac{1}{(n+1)a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

15. （2013•新课标I）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_3 = 0$， $S_5 = -5$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）求数列 $\{\dfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}\}$ 的前 n 项和.

16. （2013•山东）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_4=4S_2$，$a_{2n}=2a_n+1$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\{b_n\}$满足$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots\frac{b_n}{a_n}=1-\frac{1}{2^n}$（$n\in N^*$），求$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

17. （2013•广东）设各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$4S_n={a_{n+1}}^2-4n-1$（$n\in N^*$）且a_2，a_5，a_{14}构成等比数列.

（1）证明：$a_2=\sqrt{4a_1+5}$；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（3）证明：对一切正整数n，有$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}\cdots\frac{1}{a_na_{n+1}}<\frac{1}{2}$.

18. （2012•江西）已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=kc^n-k$（其中c，k为常数），且$a_2=4$，$a_6=8a_3$.

（1）求a_n；

（2）求数列$\{na_n\}$的前n项和T_n.

19.（2012•天津）已知$\{a_n\}$是等差数列，其前n项和为S_n，$\{b_n\}$是等比数列，且$a_1=b_2=2$，$a_4+b_4=27$，$S_4-b_4=10$．

（1）求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

（2）记$T_n=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\,(n\in N^*)$，证明：$T_n-8=a_{n-1}b_{n+1}(n\in N^*$，$n\geq 2)$．

20.（2011•辽宁）已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_2=0$，$a_6+a_8=-10$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{\frac{a_n}{2^{n-1}}\}$的前n项和S_n．

第四讲 数列构造

秒杀秘籍：考点 1 整体等比构造

已知 $a_n=ka_{n-1}+b$，$a_1=a$，求通项 a_n.

设 $a_n+x=k(a_{n-1}+x)$ 则 $a_n=ka_{n-1}+x(k-1)$，从而 $x=\dfrac{b}{k-1}$，即数列 $\left\{a_n+\dfrac{b}{k-1}\right\}$ 是以 $a_1+\dfrac{b}{k-1}$ 为首项，公比为 k 的等比数列，从而可得：$a_n+\dfrac{b}{k-1}=(a_1+\dfrac{b}{k-1})k^{n-1}$，$a_n=(a+\dfrac{b}{k-1})k^{n-1}-\dfrac{b}{k-1}$.

简单的二阶整体等比

关于 $a_{n+1}=(k+1)a_n-ka_{n-1}$ 模型，或者（$a_{n+1}=xa_n+ya_{n-1},x+y=1$）可以转化为：

$a_{n+1}-a_n=k(a_n-a_{n-1})$，打开利用 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 成等比数列求出 $a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)k^{n-1}$，再利用迭加法求出 a_n.

【例 1】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n(n\in N^*)$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【解析】$a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}\Rightarrow a_{n+1}-a_n=2\left(a_n-a_{n-1}\right)$，故 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 为首项，2 为公比的等比数列，

即 $a_{n+1}-a_n=\left(a_2-a_1\right)2^{n-1}=2^n$，$\left.\begin{matrix}a_n-a_{n-1}=2^{n-1}\\ \cdots\\ a_2-a_1=2\end{matrix}\right\}$全部相加得：$a_n-a_1=2^n-2$ $\quad\therefore a_n=2^n-1$

秒杀解法：

$a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}\Rightarrow\begin{cases}a_{n+1}-a_n=2\left(a_n-a_{n-1}\right)\Rightarrow\{a_{n+1}-a_n\}\text{是等比数列}\Rightarrow a_{n+1}-a_n=2^n\\ a_{n+1}-2a_n=a_n-2a_{n-1}\Rightarrow\{a_{n+1}-2a_n\}\text{是常数数列}\Rightarrow a_{n+1}-2a_n=1\end{cases}$，将两式相减可得 $a_n=2^n-1$.

秒杀秘籍：考点 2 整体等差构造之倒数等差系列

（1）数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{n+1}=\dfrac{ba_n}{ka_n+b}$，则有 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{b+ka_n}{ba_n}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{k}{b}$

$\therefore\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是以 $\dfrac{1}{a_1}$ 为首项，$\dfrac{k}{b}$ 为公差的等差数列，即：$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1}+(n-1)\dfrac{k}{b}$.

（2）若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_n+kS_nS_{n-1}=0$，则有 $S_n-S_{n-1}+kS_nS_{n-1}=0$，两边同除以 S_nS_{n-1} 得：$\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n-1}}=k$，故 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 是以 $\dfrac{1}{a_1}$ 为首项，k 为公差的等差数列，即 $\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{a_1}+(n-1)k$，再用 $a_n=S_n-S_{n-1}$，求 $\{a_n\}$.

数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{n+1}=qa_n+rq^n$，则将边同时除以 q^n，得到 $\dfrac{a_{n+1}}{q}=\dfrac{a_n}{q^{n-1}}+r$，$\left\{\dfrac{a_n}{q^{n-1}}\right\}$ 是以 a_1 为首项，r 为公差的等差数列，即：$\dfrac{a_n}{q^{n-1}}=a_1+(n-1)r$，$\therefore a_n=[a_1+(n-1)r]\cdot q^{n-1}$.

【例 2】在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$，则 $a_n=$__________.

【解析】取倒数得：$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+2$，即 $\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=2(n>1)$ 所以数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列 $\dfrac{1}{a_n}=1+2(n-1)=2n-1$，$\therefore a_n=\dfrac{1}{2n-1}$.

【例 3】已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_n+2S_n\cdot S_{n-1}=0$（$n\geq 2$），$a_1=\dfrac{1}{2}$.

（1）求证：$\{\dfrac{1}{S_n}\}$是等差数列；

（2）求a_n的表达式.

【解析】(1) 因为$a_n=S_n-S_{n-1}$，所以$S_n-S_{n-1}+2S_nS_{n-1}=0$，两边同除以$S_nS_{n-1}$得：$\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n-1}}=2$，故$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$是以$\dfrac{1}{a_1}=2$为首项，2为公差的等差数列，即$\dfrac{1}{S_n}=2+2(n-1)=2n$，所以$S_n=\dfrac{1}{2n}$；（2）$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2(n-1)}=-\dfrac{1}{2n(n-1)}$.

【例 4】已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=2a_n+3\cdot 2^n$，$a_1=2$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【解析】将等式两边同时除以2^n得，$\dfrac{a_{n+1}}{2^n}=\dfrac{a_n}{2^{n-1}}+3$，所以$\left\{\dfrac{a_n}{2^{n-1}}\right\}$是以$a_1=2$为首项，3为公差的等差数列，即$\dfrac{a_n}{2^{n-1}}=2+3(n-1)=3n-1$，所以$a_n=(3n-1)\cdot 2^{n-1}$.

【例 5】已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\dfrac{2}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+1}$，$n=1$，2，3，….，证明：数列$\{\dfrac{1}{a_n}-1\}$是等比数列并求$\{a_n\}$的通项公式.

【解析】$\because a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+1}$，　$\therefore \dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}$　　$\dfrac{1}{a_{n+1}}-1=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}-1=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_n}-1\right)$

$\therefore\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$是以$\dfrac{1}{a_1}-1=\dfrac{1}{2}$为首项，$\dfrac{1}{2}$为公比的等比数列；　$\therefore \dfrac{1}{a_n}-1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$　$a_n=\dfrac{2^n+1}{2^n}$

达标训练

1．（2018•琼海模拟）设 S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $a_1=-1$，$a_{n+1}=S_n\cdot S_{n+1}$，则 $a_5=$（　　）

A．$\dfrac{1}{30}$　　B．$-\dfrac{1}{30}$　　C．$\dfrac{1}{20}$　　D．$-\dfrac{1}{20}$

2．（2018•曲靖一模）数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}=2a_n-1$，$a_3=2$，设其前 n 项和为 S_n，则 $S_6=$（　　）

A．$\dfrac{87}{4}$　　B．$\dfrac{63}{4}$　　C．15　　D．27

3．（2018•合肥一模）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $3S_n=2a_n-3n$ 3，则 $a_{2018}=$（　　）

A．$2^{2018}-1$　　B．$2^{2018}-6$　　C．$(\dfrac{1}{2})^{2018}-\dfrac{7}{2}$　　D．$(\dfrac{1}{3})^{2018}-\dfrac{10}{3}$

4．（2018•道里一模）设 S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $S_n=2a_n-3$，则 $S_n=$（　　）

A．2^n+1　　B．$2^{n+1}-1$　　C．$3\cdot 2^n-3$　　D．$3\cdot 2^{n-1}$

5．（2018•莆田二模）已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_n-a_{n+1}=3a_na_{n+1}$，则 $a_{10}=$（　　）

A．28　　B．$\dfrac{1}{28}$　　C．-28　　D．$-\dfrac{1}{28}$

6．（2015•新课标II）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=-1$，$a_{n+1}=S_{n+1}S_n$，则 $S_n=$__________.

7．（2018•甘肃模拟）已知$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$，则 $a_4=$__________.

8．（2018•潍坊一模）数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{2a_n+1}$，$a_3=\dfrac{1}{5}$，则 a_1=__________.

9．（2018•莆田二模）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+1$，则 $a_5=$__________.

10．（2018•张掖一模）已知数列$\{a_n\}$满足 $\dfrac{a_n+1}{a_{n+1}+1}=\dfrac{1}{2}$，且 $a_2=2$，则 $a_4=$__________.

11．（2018•莆田一模）已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_n-a_{n+1}=2a_na_{n+1}$，则 $a_n=$__________.

12．（2018•盐湖模拟）若数列$\{a_n\}$是正项数列，且 $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}=n^2+3n$，则 $\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\dfrac{a_3}{4}+\ldots+\dfrac{a_n}{n+1}=$__________.

13．（2018•西安二模）已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n+1$，则数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=$__________.

14．（2018•南通模拟）已知数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=2$，且 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$（$n\in N^*$），则数列$\{\dfrac{1}{a_n-1}\}$的前 10 项的和为__________.

15．（2018•商洛模拟）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=3S_n+2$，则 $a_n=$__________.

16．（2018•沈阳一模）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}(n\geq 2)$，则 $a_n=$__________.

17．（2015•广东）设数列 $\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$n\in N^*$．已知 $a_1=1$，$a_2=\dfrac{3}{2}$，$a_3=\dfrac{5}{4}$，且当 $n\geq 2$ 时，$4S_{n+2}+5S_n=8S_{n+1}+S_{n-1}$．

（1）求 a_4 的值；（2）证明：$\{a_{n+1}-\dfrac{1}{2}a_n\}$为等比数列；（3）求数列$\{a_n\}$的通项公式．

18．（2014•大纲版）数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$.

（1）设$b_n=a_{n+1}-a_n$，证明$\{b_n\}$是等差数列；

（2）求$\{a_n\}$的通项公式.

19．（2010•上海）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=n-5a_n-85$，$n\in N^*$.

（1）证明：$\{a_n-1\}$是等比数列；

（2）求数列$\{S_n\}$的通项公式，并求出使得$S_{n+1}>S_n$成立的最小正整数n.

20．（2010•重庆）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=ca_n+c^{n+1}(2n+1)(n\in N^*)$，其中实数$c\neq 0$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若对一切$k\in N^*$有$a_{2k}>a_{2k-1}$，求c的取值范围.

21．（2009•重庆）已知$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n-2}=4a_{n+1}+a_n$，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，$n\in N^*$.

（1）求b_1，b_2，b_3的值；

（2）设$c_n=b_nb_{n+1}$，S_n为数列$\{c_n\}$的前n项和，求证：$S_n\geq 17n$；

（3）求证：$|b_{2n}-b_n|<\dfrac{1}{64}\cdot\dfrac{1}{17^{n-2}}$.

22．（2009•陕西）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$，$n\in N^*$．

（1）令$b_n=a_{n+1}-a_n$，证明：$\{b_n\}$是等比数列；

（2）求$\{a_n\}$的通项公式．

23．（2009•全国卷II）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_1=1$，$S_{n+1}=4a_n+2(n\in N^*)$．

（1）设$b_n=a_{n+1}-2a_n$，证明数列$\{b_n\}$是等比数列；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式．

24．（2009•全国卷I）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=(1+\frac{1}{n})a_n+\frac{n+1}{2^n}$．

（1）设$b_n=\frac{a_n}{n}$，求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n．

25. （2008•安徽）设数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$，$a_{n+1}=ca_n+1-c$，$n\in N^*$，其中a，c为实数，且$c\neq 0$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$a=\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{2}$，$b_n=n(1-a_n)$，$n\in N^*$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n；

（3）若$0<a_n<1$对任意$n\in N^*$成立．证明：$0<c\leq 1$．

26. （2008•四川）设数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=2a_n-2^n$．

（1）求a_1，a_4；

（2）证明：$\{a_{n+1}-2a_n\}$是等比数列；

（3）求$\{a_n\}$的通项公式．

27. （2008•天津）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，且$a_{n+1}=(1+q)a_n-qa_{n-1}(n\geq 2,q\neq 0)$．

（1）设$b_n=a_{n+1}-a_n(n\in N^*)$，证明$\{b_n\}$是等比数列；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（3）若a_3是a_6与a_9的等差中项，求q的值，并证明：对任意的$n\in N^*$，a_n是a_{n+3}与a_{n+6}的等差中项．