专题 4 和数列与积数列问题

秒杀秘籍：第一讲 和数列与积数列问题

定义：若数列$\{a_n\}$满足$a_n+a_{n+1}=f(n)$称为和数列，$a_na_{n+1}=f(n)$称为积数列.

通项公式：

①当$a_n+a_{n+1}=f(n)=An+B$时，则$a_{n-1}+a_n=A(n-1)+B$，两式相减得：$a_{n+1}-a_{n-1}=A$，故$\{a_n\}$是隔项的等差数列，公差为A；$a_n=\begin{cases}a_1+A\left(\dfrac{n+1}{2}-1\right) & n\text{为奇数}\\ a_2+A\left(\dfrac{n}{2}-1\right) & n\text{为偶数}\end{cases}$

②$a_na_{n+1}=f(n)=q^n$时，则$a_{n-1}a_n=q^{n-1}$，两式相除得：$\dfrac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=q$，故$\{a_n\}$是隔项的等比数列，公比为$q$；

$$\therefore a_n=\begin{cases}a_1\cdot q^{\left(\frac{n+1}{2}-1\right)} & n\text{为奇数}\\ a_2\cdot q^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} & n\text{为偶数}\end{cases}$$

此类型题由于a_1和a_2作为数列奇数项和偶数项首项，会使得数列一些变形出现一些计算难度，故可以采用待定系数法来求统一的通项公式，考虑首项的因素，需要在原始的待定系数的前面加上$z(-1)^n$.

【例 1】已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=a$，$a_n+a_{n+1}=3n-54$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【解析】法一：$\because a_n+a_{n+1}=3n-54$，① $\therefore a_n+a_{n-1}=3(n-1)-54$，②$\therefore$由①－②得$a_{n+1}-a_{n-1}=3$，

$\therefore a_1$，a_3，a_5，与a_2，a_4，a_6，都是$d=3$的等差数列，又$a_1=a$，$a_1+a_2=3-54=-51$，$\therefore a_2=-51-a$，

$\therefore$当n为奇数时，$a_n=a+3(\dfrac{n+1}{2}-1)=\dfrac{3n+2a-3}{2}$，当$n$为偶数时，$a_n=-51-a+3(\dfrac{n}{2}-1)=\dfrac{3n-2a-108}{2}$，

$$\therefore a_n=\begin{cases}\dfrac{3n+2a-3}{2} & n\text{为奇数}\\ \dfrac{3n-2a-108}{2} & n\text{为偶数}\end{cases}.$$

法二:待定系数法，令$a_n=xn+y+z(-1)^n$，$a_{n+1}=xn+x+y+z(-1)^{n+1}$，$a_n+a_{n+1}=2xn+x+2y=3n-54$，

对比系数得：$x=\dfrac{3}{2}$，$y=-\dfrac{111}{4}$；由于$a_1=x+y-z=-\dfrac{105}{4}-z=a\Rightarrow z=-\dfrac{105}{4}-a$，

故$a_n=\dfrac{3}{2}n-\dfrac{111}{4}-\left(\dfrac{105}{4}+a\right)(-1)^n$

【例 2】已知$a_1=1$，$a_{n+1}\cdot a_n=2^n$，求a_n.

【解析】法一：$\because a_{n+1}\bullet a_n=2^n$，$\therefore lg(a_{n+1}\bullet a_n)=lg2^n$，$\therefore lga_{n+1}+lga_n=nlg2$．

$\therefore lga_{n+1}-\frac{1}{2}(n+1)lg2+\frac{1}{4}lg2=-[lga_n-\frac{1}{2}nlg2+\frac{1}{4}lg2]$，$\because a_1=1$，$\therefore lga_1-\frac{1}{2}lg2+\frac{1}{4}lg2=-\frac{1}{4}lg2$．

$\therefore$数列$\{lga_n-\frac{1}{2}nlg2+\frac{1}{4}lg2\}$是以$-\frac{1}{4}lg2$为首项，$-1$为公比的等比数列．

$\therefore lga_n-\frac{1}{2}nlg2+\frac{1}{4}lg2=-\frac{1}{4}lg2\times(-1)^{n-1}$，$\therefore lga_n=\frac{1}{2}nlg2-\frac{1}{4}lg2+\frac{1}{4}\times(-1)^n lg2$，$\therefore a_n=2^{\frac{2n-1+(-1)^n}{4}}$，$n\in N^*$．

法二：待定系数法，$a_n=2^{xn+y+z(-1)^n}$，$a_{n+1}=2^{xn+x+y+z(-1)^n}$，$a_n\cdot a_{n+1}=2^{2xn+x+2y}=2^n$，对比系数得，$x=\frac{1}{2}$，

$y=-\frac{1}{4}$，$a_1=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-z}=1$，$\therefore z=\frac{1}{4}$，$\therefore a_n=2^{\frac{2n-1+(-1)^n}{4}}$，$n\in N^*$．

【例3】(2018•杭州期末)设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}\bullet a_n=2^n(n\in N^*)$，若$S_n$为数列前$n$项和，则$S_{2018}=$(　　)

A．$2^{2018}-1$　　B．$3\cdot2^{1009}-3$　　C．$2^{2009}-3$　　D．$2^{2010}-3$

【解析】$\because$数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}\bullet a_n=2^n(n\in N^*)$，$\therefore\frac{a_{n+2}a_{n+1}}{a_{n+1}a_n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}=2$，$a_2a_1=2$，解得$a_2=2$．

$\therefore$数列$\{a_n\}$的奇数项与偶数项分别成等比数列，公比都为2，首项分别为1，2．

则$S_{2018}=(a_1+a_3+\ldots+a_{2017})+(a_2+a_4+\ldots+a_{2018})=\frac{2^{1009}-1}{2-1}+\frac{2(2^{1009}-1)}{2-1}=3\bullet2^{1009}-3$．故选$B$．

【例4】(2018•亭湖模拟)已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=a$，$a_n+a_{n+1}=2n-1$．若对$\forall n\in N^*$，且$n\geqslant2$，不等式$(a_n-1)(a_{n+1}-1)\geqslant2(1-n)$恒成立，则实数$a$的取值范围是________．

【解析】不等式$(a_n-1)(a_{n+1}-1)\geqslant2(1-n)$恒成立，化为：$a_na_{n+1}-(a_n+a_{n+1})+1\geqslant2(1-n)$，由$a_n+a_{n+1}=2n-1$．

$\therefore$不等式化为：$a_na_{n+1}\geqslant0$，

法一：当n为奇数时，$a_n=a+(n-1)$，$a_{n+1}=-a+n$，$\therefore a_na_{n+1}=[a+(n-1)](-a+n)=-a^2+a+n(n-1)\geqslant0$，

即$-a^2+a\geqslant-n(n-1)$对$\forall n\in N^*$，且$n\geqslant2$恒成立．$\therefore-a^2+a\geqslant-6$，解得$-2\leqslant a\leqslant3$．

当n为偶数时，$a_n=-a+(n-1)$，$a_{n+1}=a+n$，$\therefore a_na_{n+1}\geqslant0$，即$-a^2+a\geqslant-n(n-1)$对$\forall n\in N^*$，且$n\geqslant2$恒成立．

$\therefore-a^2+a\geqslant-2$，解得$-2\leqslant a\leqslant1$．又$a>0$，可得$a$的取值范围为：$-2\leqslant a\leqslant1$．故答案为：$[-2，1]$．

法二：待定系数法，令$a_n=xn+y+z(-1)^n$，$a_{n+1}=xn+x+y+z(-1)^{n+1}$，$a_n+a_{n+1}=2xn+x+2y=2n-1$，

对比系数得：$x=1$，$y=-1$；由于$a_1=x+y-z=-z=a\Rightarrow z=-a$，故$a_n=n-1-a(-1)^n$；

$a_na_{n+1}\ge0$对$\forall n\in N^*$，且$n\geqslant2$恒成立，则$\begin{cases}a_2=1-a\ge0\\a_3=2+a\ge0\end{cases}\Rightarrow-2\le a\le1$，故答案为：$[-2，1]$．

秒杀秘籍：第二讲　递推中含有隔项规律的数列求和

定理：若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)^n a_n=An+B$，S_n为其前n项和，则S_4，S_8-S_4，$S_{12}-S_8\cdots$成等差数列，公差为$8A$；④⑤⑥

证明：$\begin{cases} a_2-a_1=\ \ A+B & (1) \\ a_3+a_2=2A+B & (2) \\ a_4-a_3=3A+B & (3) \end{cases}$　$2\times(2)-(1)+(3)$得：$a_1+a_2+a_3+a_4=6A+2B$，同理

$\begin{cases} a_6-a_5=5A+B & (4) \\ a_7+a_6=6A+B & (5) \\ a_8-a_7=7A+B & (6) \end{cases}$　$2\times(5)-(4)+(6)$得：$a_5+a_6+a_7+a_8=14A+2B$，故S_4，S_8-S_4，

$S_{12}-S_8\cdots$是以$6A+2B$为首项，$8A$为公差的等差数列；此类型题可以求出通项，但花的时间太多，显然每4项为一个整体操作更简单．一些数列含有周期性，需要列举几项，发现规律后在简化．

【例5】（2018•河南一模）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)^{n+1}a_n=2$，则其前100项和为（　　）

A．250　　　B．200　　　C．150　　　D．100

【解析】$n=2k-1(k\in N^*)$时，$a_{2k}+a_{2k-1}=2$．

$\therefore$其前100项和$S_{100}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\ldots+(a_{99}+a_{100})=2\times 50=100$．故选$D$．

【例6】（2019•潍坊期中）数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，则$\{a_n\}$的前44项和为（　　）

A．990　　　B．870　　　C．640　　　D．615

【解析】法一：令$a_1=a$，由$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，可得$a_2=1+a$，$a_3=2-a$，$a_4=7-a$，

$a_5=a$，$a_6=9+a$，$a_7=2-a$，$a_8=15-a$，

$a_9=a$，$a_{10}=17+a$，$a_{11}=2-a$，$a_{12}=24-a$，…

可得$(a_1+a_3)+(a_5+a_7)+(a_9+a_{11})+\ldots+(a_{41}+a_{43})=2+2++2+\ldots+2=2\times 11=22$；

$a_2+a_6+a_{10}+\ldots+a_{42}=(1+a)+(9+a)+\ldots+(81+a)=11(1+a)+\frac{1}{2}\times 11\times 10\times 8=451+11a$；

$a_4+a_8+a_{12}+\ldots+a_{44}=(7-a)+(15-a)+\ldots+(87-a)=11(7-a)+\frac{1}{2}\times 11\times 10\times 8=517-11a$；

即有前44项和为$22+451+11a+517-11a=990$．故选：A．

法二：$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，列举前4项和，显然$S_4=6A+2B=12-2=10$，$S_8-S_4=10+8A=26$，故S_4，S_8-S_4，$S_{12}-S_8\cdots$是以10为首项，16为公差的等差数列，故$S_{44}=11S_4+\frac{11\times 10}{2}\times 16=990$．

【例 7】(2019•佛山模拟)数列$\{a_n\}$满足$a_n=\begin{cases}\dfrac{a_{n-1}}{2},a_{n-1}\text{是偶数}\\3a_{n-1}+1,a_{n-1}\text{是奇数.}\end{cases}$若$a_1=34$,则数列$\{a_n\}$的前 100 项的和是_________.

【解析】∵数列$\{a_n\}$满足$a_n=\begin{cases}\dfrac{a_{n-1}}{2},a_{n-1}\text{是偶数}\\3a_{n-1}+1,a_{n-1}\text{是奇数.}\end{cases}$,∵$a_1=34$,∴$a_2=\dfrac{1}{2}a_1=17$,$a_3=3a_2+1=3\times17+1=52$,$a_4=\dfrac{1}{2}a_3=26$,$a_5=\dfrac{1}{2}a_4=13$,$a_6=3a_5+1=40$,$a_7=\dfrac{1}{2}a_6=20$,$a_8=\dfrac{1}{2}a_7=10$,$a_9=\dfrac{1}{2}a_8=5$,$a_{10}=3a_9+1=16$,$a_{11}=\dfrac{1}{2}a_9=8$,$a_{12}=\dfrac{1}{2}a_{11}=4$,$a_{13}=\dfrac{1}{2}a_{12}=2$,$a_{14}=\dfrac{1}{2}a_{13}=1$,同理可得:$a_{15}=4$,$a_{16}=2$,$a_{17}=1$,…….

可得此数列从第 12 项开始为周期数列,周期为 3.

则数列$\{a_n\}$的前 100 项的和$=(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{11})+a_{12}+a_{13}+29(a_{14}+a_{15}+a_{16})$

$=(34+17+52+26+13+40+20+10+5+16+8)+4+2+29\times(1+4+2)\ =450$.故答案为:450.

【例 8】(2019•太原一模)已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n-(-1)^n a_n=2n-6+\dfrac{1}{2^n}$,$(n\in N^*)$则$S_{100}=$(　　)

A. 196　　B. 200　　C. $194+\dfrac{1}{2^{100}}$　　D. $198+\dfrac{1}{2^{102}}$

【解析】∵数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n-(-1)^n a_n=2n-6+\dfrac{1}{2^n}$,$(n\in N^*)$,∴$S_n=(-1)^n a_n+2n-6+\dfrac{1}{2^n}$,$(n\in N^*)$,$a_n=S_n-S_{n-1}=(-1)^n a_n+2n-6+\dfrac{1}{2^n}-(-1)^{n-1}a_{n-1}-(2n-2)+6-\dfrac{1}{2^{n-1}}=(-1)^n a_n-(-1)^{n-1}a_{n-1}-\dfrac{1}{2^n}+2$,

当n为奇数时,$2a_n+a_{n-1}=2-\dfrac{1}{2^n}$,当$n$为偶数时,$a_{n-1}=\dfrac{1}{2^n}-2$,∴$a_1=\dfrac{1}{2^2}-2$,$a_3=\dfrac{1}{2^4}-2$,$a_5=\dfrac{1}{2^6}-2$,…,$a_{99}=\dfrac{1}{2^{100}}-2$,$a_2=2-\dfrac{1}{2^3}-2a_3=6-\dfrac{1}{2^2}$,$a_4=6-\dfrac{1}{2^4}$,$a_6=6-\dfrac{1}{2^6}$,…,$a_{100}=6-\dfrac{1}{2^{100}}$,

∴$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=\ldots=a_{99}+a_{100}=4$,∴$S_{100}=50\times4=200$.故选$B$.

达标训练

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+a_n=2n-3$，若 $a_1=2$，则 $a_{2014}=$（　　）

A． 2007　　B． 2006　　C． 2005　　D． 2009

2. （2019•河南模拟）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1=1$，$a_na_{n+1}=2^n$，则 $S_{20}=$（　　）

A． 3066　　B． 3063　　C． 3060　　D． 3069

3. （2017•钦州月考）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}•a_n=2^n(n\in N^*)$，则 $S_{2017}=$（　　）

A． $2^{1010}-1$　　B． $2^{1010}-3$　　C． $3•2^{1008}-1$　　D． $2^{1009}-3$

4. （2018•合肥三模）若正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_na_{n+1}=2^{2n}$ $(n\in N^*)$，则 a_6-a_5 的值是（　　）

A． $\sqrt{2}$　　B． $-16\sqrt{2}$　　C． 2　　D． $16\sqrt{2}$

5. （2019•杭州期中）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_n•a_{n+1}=2^n(n\in N^*)$．$S_n$ 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则（　　）

A． 数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是等差数列　　B． 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列

C． $a_{2019}=2^{2019}$　　D． $S_{2019}=2^{1011}-3$

6. （2019•石家庄一模）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{n+1}+S_n=\dfrac{n^2-19n}{2}(n\in N^*)$，若 $a_{10}<a_{11}$，则 S_n 取最小值时 n 的值为（　　）

A． 10　　B． 9　　C． 11　　D． 12

7. （2019•赤峰期末）若数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=3n+1$，$n\in N*$，则 $a_1+a_2+\ldots+a_{2n}=$________．

8. （2019•黄浦一模）已知数列 $\{a_n\}(n\in N^*)$，若 $a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=(\dfrac{1}{2})^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=$________．

9. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_{n+1}+a_n=2n+1$，且 $S_n=500$．若 $a_2<2$，则 n 的最大值为________．

10. （2019•锡山区期中）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，对于任意的 $n\in N^*$ 都有 $S_n+S_{n+1}=n^2$，若 $\{a_n\}$ 为单调递增的数列，则 a_1 的取值范围为（　　）

A． $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$　　B． $(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$　　C． $(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4})$　　D． $(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3})$

11. （2019•昆明模拟）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+a_n=(-1)^n(2n-1)$，则 $\{a_n\}$ 的前 60 项和为（　　）

A． -1710　　B． -1740　　C． -1770　　D． -1800

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+a_n=4n+4$，$n\in N^*$

（1）若 $a_1=1$，试求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）是否存在 a_1，使 $\{a_n\}$ 为等差数列？

13．（2018•兴庆期末）数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，则$\{a_n\}$的前 64 项和为（　　）

A．4290　　B．4160　　C．2145　　D．2080

14．（2017•晋中期末）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}+(-1)^n a_n=n+2(n\in N^*)$，则$S_{20}=$（　　）

A．130　　B．135　　C．260　　D．270

15．（2018•常州期末）数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$b_n=a_{n+1}+(-1)^n a_n(n\in N^*)$，且数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$n^2$．已知数列$\{a_n-n\}$的前 2018 项和为 1，那么数列$\{a_n\}$的首项$a_1=$________．

16．（2018•郴州月考）在等差数列$\{a_n\}$中，$a_4=5$，$a_7=11$．设$b_n=(-1)^n\cdot a_n$，则数列$\{b_n\}$的前 100 项之和S_{100}为（　　）

A．-200　　B．-100　　C．200　　D．100

17．（2019•龙岩期末）在数列$\{a_n\}$中，$a_{2n}=a_{2n-1}+(-1)^n\cdot n$，$a_{2n+1}=a_{2n}+n$，$a_1=1$，则$a_{101}=$________．

18．（2018•赣州期末）数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，满足$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+(-1)^n$，则$S_{2n-1}=$________．

19．（2019•衡水月考）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^k$，$a_{2k+1}=a_{2k}+2^k(k\in N^*)$，则$\{a_n\}$的前 60 项的和$S_{60}=$（　　）

A．$2^{31}-154$　　B．$2^{31}-124$　　C．$2^{32}-94$　　D．$2^{32}-124$

20．（2019•洪山月考）在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=3$，且数列$\{a_n+(-1)^n\}$是公比为 2 的等比数列，对于任意的$n\in N^*$，不等式$a_1+a_2+\ldots+a_n\geqslant\lambda a_{n+1}$恒成立，则实数$\lambda$的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,\frac{2}{5}]$　　B．$(-\infty,\frac{1}{2}]$　　C．$(-\infty,\frac{2}{3}]$　　D．$(-\infty,1]$

21．（2019•湖北月考）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n(n+2)}$，则数列$\{(-1)^n a_n\}$的前 40 项的和为（　　）

A．$\dfrac{19}{20}$　　B．$\dfrac{325}{462}$　　C．$\dfrac{41}{84}$　　D．$\dfrac{20}{41}$