专题 5　分式数列

秒杀秘籍：第一讲　不动点与分式数列

1．$a_{n+1}=\dfrac{ra_n}{pa_n+q}$或$pa_na_{n+1}+qa_{n+1}-ra_n=0$，分别取倒数，得：$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{q}{ra_n}+\dfrac{p}{r}$．

（1）当$r=q$时，$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是以$\dfrac{1}{a_1}$为首项，$\dfrac{p}{r}$为公差的等差数列

（2）当$r\neq q$时，$\dfrac{1}{a_{n+1}}+\dfrac{\frac{p}{r}}{\frac{q}{r}-1}=\dfrac{q}{r}\left(\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{\frac{p}{r}}{\frac{q}{r}-1}\right)\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}+\dfrac{p}{q-r}=\dfrac{q}{r}\left(\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{p}{q-r}\right)$可得：数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{p}{q-r}\right\}$是以

$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{p}{q-r}$为首项，$\dfrac{q}{r}$公比的等比数列．

2. $a_{n+1}=\dfrac{aa_n+b}{ca_n+d}$，不动点递推法，令：$a_{n+1}=a_n=x$，即$cx^2-(a-d)x-b=0$；解出两个根为$\alpha,\beta$．

（1）当$\alpha\neq\beta$时，$\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=k\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\left(k=\dfrac{a-\alpha c}{a-\beta c}\right)$，数列$\left\{\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\right\}$是以$\dfrac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}$为首项，$k$为公比的等比数列

（2）当$\alpha=\beta$时，$\dfrac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\dfrac{1}{a_n-\alpha}+k\left(k=\dfrac{c}{\alpha c+d}\right)$，数列$\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$是以$\dfrac{1}{a_1-\alpha}$为首项，$k$为公差的等差数列

注意：这个式子是不需要记忆的，只要算出不动点，代入去求公比或者公差即可．

【例 1】已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=\dfrac{1}{2}$,满足$a_n=\dfrac{3a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}(n=2,3,\cdots)$，求$\{a_n\}$通项公式．

【解析】$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2a_{n-1}+1}{3a_{n-1}}=\dfrac{1}{3a_{n-1}}+\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{a_n}-1=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{a_{n-1}}-1)$，$\dfrac{1}{a_n}-1=\dfrac{1}{3^{n-1}}$，$a_n=\dfrac{3^{n-1}}{3^{n-1}+1}$．

【例 2】已知函数$f(x-1)=2-\dfrac{4}{x+1}$，$a_1=2$数列$\{a_n\}$满足：$a_n=f(a_{n-1})(n=2,3,\cdots)$求$\{a_n\}$的通项公式．

【解析】$f(x)=2-\dfrac{4}{x+2}$，$a_n=\dfrac{2a_{n-1}}{a_{n-1}+2}$，$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{n}{2}$，$\therefore a_n=\dfrac{2}{n}$．

【例 3】已知数列$\{a_n\}$是首项$a_1=3$,且$a_{n+1}=\dfrac{3a_n-4}{a_n-2}(n=1,2,\cdots)$，求$\{a_n\}$通项公式．

【解析】由$x=\dfrac{3x-4}{x-2}$，得$x_1=4,x_2=1$.所以$\dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}-4}=-2\cdot\dfrac{a_n-1}{a_n-4}$，$\left\{\dfrac{a_n-1}{a_n-4}\right\}$是以$-2$为首项，$-2$为公比的等不数列，$\dfrac{a_n-1}{a_n-4}=(-2)\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^n$，所以$a_n=\dfrac{1-(-2)^{n+2}}{1-(-2)^n}$．

【例 4】设数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，若$a_n=S_n+\dfrac{1}{S_n}+2(n\geq 2)$,$a_1=\dfrac{2}{3}$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项；　（2）求S_n．

【解析】因为$a_n=S_n-S_{n-1}=S_n+\dfrac{1}{S_n}+2$，所以$S_n=-\dfrac{1}{S_{n-1}+2}$．令$x=-\dfrac{1}{x+2}$，得$x=-1$．所以$\dfrac{1}{S_n+1}-\dfrac{1}{S_{n-1}-1}=1$，$\dfrac{1}{S_n-1}=3+(n-1)\times 1=n+2$，$S_n=-\dfrac{n+1}{n+2}$.故$a_n=-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$，$a_1=-\dfrac{2}{3}$（舍），

故 $a_n=\begin{cases}-\dfrac{2}{3} & 当n=1\\ -\dfrac{1}{(n+1)(n-1)} & 当n\geq 2\end{cases}$.

【例 5】已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2},a_{n+1}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}-a_n}$.

（1）求$\{a_n\}$的通项；

（2）若数列$\{b_n\}$满足 $a_n(b_n+a_1)=1$，求证：$b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots b_{2n+1}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}(n=2,3,\cdots)$.

【解析】（1）由递推式 $a_{n+1}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}-a_n}$，得 $x=\dfrac{2}{2\sqrt{2}-x}$，$x=\sqrt{2}$.所以 $\dfrac{1}{a_{n+1}-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{a_n-\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\dfrac{1}{a_n-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}+(n-1)\cdot(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(n+1)$，$a_n=\dfrac{\sqrt{2}n}{n+1}$.

（2）$b_n=\dfrac{1}{a_n}-a_1=\dfrac{n+1}{\sqrt{2}n}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{n}$，$b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{2n+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1})$

$<\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\underbrace{\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{n+1}}_{n+1个})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{n+1}{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

秒杀秘籍：第二讲　分式数列比大小模型

构造 $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ 与 1 比大小，或者构造 $f(n+1)-f(n)$ 与 0 比大小，从而找到最大项.

常见的放缩技巧:①$\dfrac{1}{q^n+m}<\dfrac{1}{q^n}<\dfrac{1}{q^n-m}(m>0)$;②$\dfrac{1}{n(n+1)}<\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n(n-1)}$;③$\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{n-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}$.

【例 6】已知数列$\{a_n\}$是首项为 $a_1=\dfrac{1}{2}$，满足 $\dfrac{1}{2}a_n+S_n\cdot S_{n-1}=0(n=2,3,\cdots)$.

（1）求：$\{a_n\}$通项公式；

（2）设 $b_n=2(1-n)a_n$，求 $f(n)=\dfrac{b_{n+2}}{(n+5)b_{n+1}}$ 的最大值和相应的 n 值；（3）$T_n=b_2{}^2+b_3{}^2+\cdots b_{n+1}{}^2,(n=2,3,\cdots)$，求证 $T_n<1$.

【解析】（1）因为 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$,代入原递推式，得 $S_n\cdot S_{n-1}+\dfrac{1}{2}(S_n-S_{n-1})=0$ 两边同除以 $S_n\cdot S_{n-1}$，得

$\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_n-1}=2$. 即数列$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$是以首项为 2、公差为 2 的等差数列. 所以 $\dfrac{1}{S_n}=2+(n-1)\times 2=2n$，即 $\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{2n}$.

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=-\dfrac{1}{2n(n-1)}(n\geq 2)$，故 $a_n\begin{cases}\dfrac{1}{2} & n=1\\ -\dfrac{1}{2n(n-1)} & n\geq 2\end{cases}$.

（2）由已知得 $b_1=0$，$b_n=2(1-n)\cdot\dfrac{-1}{2n(n-1)}=\dfrac{1}{n}$.

所以 $f(n)=\dfrac{\frac{1}{n+2}}{(n+5)\cdot\frac{1}{n+1}}=\dfrac{1}{\frac{(n+1)^2+5(n+1)+4}{n+1}}=\dfrac{1}{(n+1)+\frac{4}{n+1}+5}\le\dfrac{1}{2\cdot2+5}=\dfrac{1}{9}$，当且仅当 $n+1=\dfrac{4}{n+1}$，即 $n=1$ 时，$f(n)_{\max}=\dfrac{1}{9}$.

（3）$Tn=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}<1$.

【例 7】已知数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公差为 $\dfrac{4}{3}$ 的等差数列，且 $b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+3+\cdots+n}$.

（1）求证：$\{a_n\}$ 是等差数列；

（2）数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1=a_1,c_2=a_2+a_3,c_3=a_4+a_5+a_6,\cdots c_n=a_{\frac{n^2-n}{2}+1}+a_{\frac{n^2-n}{2}+2}+\cdots+a_{\frac{n^2+n}{2}}$，求 $\{c_n\}$ 的通项；

（3）设 $T_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{c_1{}^2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{c_2{}^2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{c_3{}^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{c_n{}^2}}$，求证：$T_n<\dfrac{7}{4}$.

【解析】（1）根据题意得，$a^1+2a^2+3a^3+\cdots+na^n=\dfrac{n(n+1)}{2}b_n$，令 $Sn=a^1+2a^2+3a^3+\cdots+na^n$，则 $na_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n(n+1)}{2}b_n-\dfrac{n(n-1)}{2}b_{n-1}(n\ge2)=\dfrac{n}{2}[(n+1)b_n-(n-1)b_{n-1}]=\dfrac{n}{2}[n(b_n-b_{n-1})+b_n+b_{n-1}]$.故 $a_n=\dfrac{1}{2}[n(b_n-b_{n-1})+b_n+b_{n+1}]$.又因为 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项、$\dfrac{4}{3}$ 为公差的等差数列，所以 $b_n=1+(n-1)\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{3}n-\dfrac{1}{3}$，$b_n-b_{n-1}=\dfrac{4}{3}$.所以 $a_n=\dfrac{1}{2}[\dfrac{4}{3}n+\dfrac{4}{3}n-\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}(n-1)-\dfrac{1}{3}]=2n-1$，所以 $a_n-a_{n-1}=2$. $(n\ge2)$，故 $\{a_n\}$ 是等差数列.

（2）设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2$.依题意有

$c_n=S_{1+2+3+\cdots+n}-S_{1+2+3+\cdots+(n-1)}=\dfrac{S_{n(n+1)}}{2}-\dfrac{S_{n(n-1)}}{2}=[\dfrac{n(n+1)}{2}]^2-[\dfrac{n(n-1)}{2}]^2=n^3$.

（3）$T_1=1,T_2=\dfrac{5}{4}$，当 $n\ge3$ 时，$Tn=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots\dfrac{1}{n^2}<1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\times n}=\dfrac{5}{4}+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n})$ $\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{n}<\dfrac{7}{4}$，故 $T_n<\dfrac{7}{4}$.

【例 8】(2019•上海模拟)设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$a_n^2=S_n+S_{n-1}(n\in N^*$，$n\geqslant2)$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1\cdot b_2\ldots b_n=2^{\frac{n(n+1)}{2}}(n\in N^*)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=\dfrac{1}{2^{a_n}}-\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$，$T_n$ 是 $\{c_n\}$ 的前 n 项和，求正整数 m，使得对任意的 $n\in N^*$，均有 $T_m\geqslant T_n$；

（3）设 $B=\{x\,|\,x=k_1b_1+k_2b_2+\ldots+k_nb_n$，且 $x>0$，其中 k_1，k_2，…，$k_n\in\{-1$，$1\}\}(n\in N^*$，$n\geqslant2)$，求集合 B 中所有元素的和.

【解析】（1）①$a_1=1$，$a_n^2=S_n+S_{n-1}(n\in N^*$，$n\geqslant2)$，$\therefore a_{n+1}^2=S_{n+1}+S_n$，相减可得：$a_{n+1}^2-a_n^2=a_{n+1}+a_n$，

化为：$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-1)=0$，$\because a_{n+1}+a_n>0$，$\therefore a_{n+1}-a_n=1$，又 $a_2^2=S_2+S_1$，可得 $a_2^2-a_2-2=0$，$a_2>0$，

解得：$a_2=2$，$\therefore a_2-a_1=1$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 设等差数列，$a_n=1+n-1=n$．

②数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1\bullet b_2\ldots b_n=2^{\frac{n(n+1)}{2}}(n\in N^*)$．$n\geqslant 2$ 时，$b_1b_2\bullet\ldots b_{n-1}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$，$\therefore b_n=2^n$．

（2）$c_n=\dfrac{1}{2^{a_n}}-\dfrac{1}{a_n\bullet a_{n+1}}=\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{2^n}-(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$，

$\therefore T_n=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}-(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=-\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{n+1}$．

$T_{n+1}-T_n=-\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{n+2}-(-\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$．

$n\leqslant 3$ 时，$T_{n+1}\geqslant T_n$．$n\geqslant 4$ 时，$T_{n+1}\leqslant T_n$．当 $m=4$ 时，使得对任意的 $n\in N^*$，均有 $T_m\geqslant T_n$．

（3）$x=k_1b_1+k_2b_2+\ldots+k_nb_n$，且 $x>0$，其中 k_1，k_2，$\ldots$，$k_n\in\{-1，1\}(n\in N^*，n\geqslant 2)$，

①要使 $x>0$，则必须 $k_n=1$．其它 k_1，k_2，$\ldots$，$k_{n-1}\in\{-1，1\}(n\in N^*，n\geqslant 2)$，可任取 1，$-1$．

证明：若 $k_n=-1$，则 $x=k_1\bullet 2+k_2\bullet 2^2+\ldots+k_{n-1}\bullet 2^{n-1}-k_n\bullet 2^n\leqslant 2+2^2+\ldots\ldots+2^{n-1}-2^n=\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-2^n=-2<0$，

此时 x 恒为负数，不成立．$\therefore k_n=1$．此时：$x\geqslant -2-2^2-\ldots\ldots-2^{n-1}+2^n=-\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}+2^n=2>0$，

故 k_1，k_2，$\ldots$，$k_{n-1}\in\{-1，1\}(n\in N^*，n\geqslant 2)$，可任取 1，$-1$．

②其它 k_1，k_2，$\ldots$，$k_{n-1}\in\{-1，1\}(n\in N^*，n\geqslant 2)$，可任取 1，$-1$．此时集合内的元素 x 共有 2^{n-1} 个互不相同的正数．

证明：k_1，k_2，$\ldots$，$k_{n-1}\in\{-1，1\}(n\in N^*，n\geqslant 2)$，

利用乘法原理可得：表示 x 的式子共有 2^{n-1} 个．

下面证明这 2^{n-1} 个式子所表示的 x 互不相等，具体如下：

证明：假如这 2^{n-1} 个式子所表示的 x 存在相等的数，

$x_1=2^n+k_{n-1}\bullet 2^{n-1}+\ldots\ldots+k_2\bullet 2^2+k_1\bullet 2=x_2=2^n+k_{n-1}'\bullet 2^{n-1}+\ldots\ldots+k_2'\bullet 2^2+k_1'\bullet 2$．$k_i$，$k_i'\in\{-1，1\}(i\in N^*，n-1\geqslant i\geqslant 2)$，即满足 $k_i\neq k_i'\in\{-1，1\}(i\in N^*，n-1\geqslant i\geqslant 2)$ 的第一组系数的下标数为 m．

则 $(k_m'-k_m)\bullet 2^m=(k_{m-1}-k_{m-1}')\bullet 2^{m-1}+(k_{m-2}-k_{m-2}')\bullet 2^{m-2}+\ldots\ldots+(k_1-k_1')\bullet 2$，

而 $|(k_{m-1}-k_{m-1}')\bullet 2^{m-1}+(k_{m-2}-k_{m-2}')\bullet 2^{m-2}+\ldots\ldots+(k_1-k_1')\bullet 2|\leqslant 2\bullet 2^{m-1}+2\bullet 2^{m-2}+\ldots\ldots+2\times 2=2^{m+1}-4<|(k_m'-k_m)\bullet 2^m|<2^{m+1}$．

因此，假设不成立，即这 2^{n-1} 个式子所表示的 x 互不相等.

③这 2^{n-1} 个 x 互不相等的正数 x（每个均哦 $k_nb_n=2^n$）.

由 $k_i=1$ 或 $-1(i=1$，2，……，$n-1)$ 等可能出现，因此所有 $k_ib_i(i=1$，2，……，$n-1)$ 部分的和为 0.

故集合 B 中所有元素的和为所有 $k_nb_n=2^n$ 的和，即 $2^n \bullet 2^{n-1}=2^{2n-1}$.

【例 9】已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1=\dfrac{1}{4}$，$a_n=\dfrac{a_{n-1}}{(-1)^n a_{n-1}-2}(n=2,3,\cdots)$.

（1）求证 $\left\{\dfrac{1}{a_n}+(-1)^n\right\}$ 是等比数列，并求 $\{a_n\}$ 通项公式；

（2）设 $b_n=\dfrac{1}{{a_n}^2}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

（3）令 $c_n=a_n\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2}$，$\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n，求证：$T_n<\dfrac{4}{7}(n=2,3,\cdots)$.

【解析】（1）由已知得 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{(-1)^n a_{n-1}-2}{a_{n-1}}=-\dfrac{2}{a_{n-1}}+(-1)^n$，所以 $\dfrac{1}{a_n}+(-1)^n=-2[\dfrac{1}{a_{n-1}}+(-1)^{n-1}]$.令 $x_n=\dfrac{1}{a_n}+(-1)^n$，得 $x_n=-2x_{n-1}$.所以 $\{x_n\}$ 是以 $\dfrac{1}{a_1}+(-1)=3$ 为首项、-2 为公比的等比数列，故 $\left\{\dfrac{1}{a_n}+(-1)^n\right\}$ 是等比数列

$x_n=3\cdot(-2)^{n-1}$，故 $a_n=\dfrac{1}{(-1)^{n-1}+3\cdot(-1)^{n-1}}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{1+3\cdot 2^{n-1}}$，即 $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{1+3\cdot 2^{n-1}}$.

（2）$b_n=\dfrac{1}{a_n^2}=(1+3\cdot 2^{n-1})2=9\cdot 4^{n-1}-6\cdot 2^{n-1}+1$，所以 $S_n=9\cdot\dfrac{1-4^n}{1-4}+6\cdot\dfrac{1-2^n}{1-2}+n=3\cdot 4^n+6\cdot 2^n+n-9$.

（3）因为 $\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2}=\dfrac{(-1)^{2(n-1)}}{1+3\cdot 2^{n-1}}=\dfrac{1}{1+3\cdot 2^{n-1}}$.所以 $c_n=a_n\cdot\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2}=\dfrac{(-1)^{2(n-1)}}{1+3\cdot 2^{n-1}}=\dfrac{1}{1+3\cdot 2^{n-1}}$ 当 $n\geq 3$ 时，

$$T_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3\times 2^1+1}+\frac{1}{3\times 2^2+1}+\cdots+\frac{1}{3\times 2^{n-1}+1}<\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+(\frac{1}{3\times 2^2}+\frac{1}{3\times 2^3}+\cdots+\frac{1}{3\times 2^{n-1}})=\frac{11}{28}+\frac{1}{6}[\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n-2}})}{1-\frac{1}{2}}]$$

$=\dfrac{11}{28}+\dfrac{1}{6}(1-\dfrac{1}{2^{n-2}})<\dfrac{11}{28}+\dfrac{1}{6}<\dfrac{4}{7}$，即 $T_n<\dfrac{4}{7}$.

达标训练

1．已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=1$，满足$a_n=\dfrac{2S_n^{\ 2}}{2S_n-1}(n=2,3,\cdots)$.

（1）求$\{a_n\}$通项公式；

（2）设$b_n=\dfrac{S_n}{2n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

2．已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$，满足$a_n=\dfrac{a_{n-1}}{\sqrt{a_{n-1}^{\ 2}+1}}(n=2,3,\cdots)$，求$\{a_n\}$通项公式.

3．已知函数$f(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+4}}(x<-2)$，点$\left(a_n,-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$在曲线$y=f(x)$上，且$a_1=1$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

4. 已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=1$，满足$a_n=\dfrac{n!a_{n-1}}{(n-1)a_{n-1}+n!}(n=2,3,\cdots)$，求$\{a_n\}$通项公式.

5. 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$(2n-1)a_na_{n-1}+a_n-a_{n-1}=0$ $(n=2,3,\cdots)$求$\{a_n\}$的通项公式.

6.（2018•广陵月考）已知各项均不为0的数列$\{a_n\}$满足$a_1=-\dfrac{1}{99}$，$a_{n+1}(2a_n+1)=a_n$，若$b_n=\dfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}-\dfrac{1}{a_{2n}a_{2n+1}}$，则当数列$\{b_n\}$的前$n$项和取得最大值时，$n$的值是（　　）

A．24　　B．25　　C．32　　D．33

7.（2018•广州一模）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$2a_na_{n+1}=a_n^2+1$，设$b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$，则数列$\{b_n\}$是（　　）

A．常数列　　B．摆动数列　　C．递增数列　　D．递减数列

8.（2018•嵊州期末）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+1}$，$(n\in N^*)$，若$S_{2019}\in(k,k+1)$，则正整数$k$的值为（　　）

A．2016　　B．2017　　C．2018　　D．2019

9. 已知函数$f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1+4x}}$，点$P(a_n{}^2,a_{n+1})$在曲线$y=f(x)$上，且$a_1=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，且$\{a_n\}$各项均为正数数列$b_n=\dfrac{a_n}{f(n)}$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式;

（2）设数列$\{b_n\}$的前n项和T_n，求证$T_n>2(\sqrt{n+1}-1)$.

10. 已知函数满足 $ax\cdot f(x)=2bx+f(x)$，$a\neq 0, x\neq \frac{1}{a}, f(1)=1$，且使 $f(x)=2x$ 仅有一个实根.

（1）求 $f(x)$；

（2）数列 $\{a_n\}$满足：$a_1=\frac{2}{3}, a_{n+1}=f(a_n)$，$b_n=\frac{1}{a_n}-1$ 求 $\{b_n\}$；

（3）在（2）的条件下，证明 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n<1$.

11.（2018•丽水期末）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}$，$2a_{n+1}=1+a_{n+1}a_n(n\in N^*)$.

（1）求 a_2，a_3 的值，并证明：数列 $\{\frac{1}{1-a_n}\}$ 是等差数列；

（2）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\frac{a_n}{n^2}(n\in N^*)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

12. 已知数列 $\{b_n\}$ 是首项 $b_1=\frac{11}{7}$，$b_{n+1}\cdot b_n=b_n+2$; 数列 $\{a_n\}$满足 $a_n=\frac{1}{b_n-2}(n=1,2,\cdots)$.

（1）求证：$a_{n+1}+2a_n+1=0$；

（2）求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项.

13．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2},a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$．

（1）是否存在常数k，使得数列$\left\{\frac{1}{a_n-k}\right\}$成等差数列？若存在求出$k$和$\{a_n\}$的通项；

（2）若$\ln(1+x)<x(x>0)$, S_n是数列$\{a_n\}$前n项和，求证：$S_n<n-\ln\frac{n+2}{2}$．

14．（2019•汕头月考）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+3}(n\in N^*)$．

（1）求证：$\{\frac{1}{a_n}+1\}$是等比数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）已知数列$\{b_n\}$，满足$b_n=\frac{n(3^n-1)}{2^n}a_n$．

（i）求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n；

（ii）若不等式$(-1)^n\lambda<T_n+\frac{n}{2^n}$对一切$n\in N^*$恒成立，求$\lambda$的取值范围．

15．（2018 秋•宿迁期末）已知数列$\{a_n\}$各项均为正数，S_n是数列$\{a_n\}$的前n项的和，对任意的$n\in N^*$都有$2S_n=3{a_n}^2+a_n-2$．数列$\{b_n\}$各项都是正整数，$b_1=1$，$b_2=4$，且数列a_{b_1},a_{b_2}，$a_{b_3},\ldots,a_{b_n}$是等比数列．

（1）证明：数列$\{a_n\}$是等差数列；

（2）求数列$\{b_n\}$的通项公式b_n；

（3）求满足$\dfrac{S_n}{b_n+2}<\dfrac{1}{4}$的最小正整数$n$．

16．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\dfrac{1}{4},a_n+b_n=1,\ b_{n+1}=\dfrac{b_n}{(1-a_n)(1+a_n)}(n=1,2,\cdots)$．

（1）求b_1，b_2，b_3，b_4；

（2）求$\{b_n\}$的通项；

（3）$S_n=a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}$，$4aS_n<nb_{n+1}$对于任意的$n\in N^*$恒成立，求实数$a$的取值范围．

17.（2019•门头沟一模）给定数列$\{a_n\}$，若满足$a_1=a(a>0$且$a\neq 1)$，对于任意的n，$m\in N^*$，都有$a_{n+m}=a_n\cdot a_m$，则称数列$\{a_n\}$为"指数型数列".

（1）已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式分别为$a_n=5\times 3^{n-1}$，$b_n=4^n$，试判断$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是不是"指数型数列"；

（2）若数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_n=2a_na_{n+1}+3a_{n+1}(n\in N^*)$，判断数列$\{\dfrac{1}{a_n}+1\}$是否为"指数型数列"，若是给出证明，若不是说明理由；

（3）若数列$\{a_n\}$是"指数型数列"，且$a_1=\dfrac{a+1}{a+2}(a\in N^*)$，证明：数列$\{a_n\}$中任意三项都不能构成等差数列.

18.（2018•镇江期末）设数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，$a_1=2$，$a_2a_4=64$．数列$\{b_n\}$满足：对任意的正整数n，都有$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$．

（1）分别求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

（2）若不等式$\lambda(1-\dfrac{1}{2b_1})(1-\dfrac{1}{2b_2})\ldots(1-\dfrac{1}{2b_n})<\dfrac{1}{\sqrt{2b_n+1}}$对一切正整数$n$都成立，求实数$\lambda$的取值范围；

（3）已知$k\in N^*$，对于数列$\{b_n\}$，若在b_k与b_{k+1}之间插入a_k个2，得到一个新数列$\{c_n\}$．设数列$\{c_n\}$的前m项的和为T_m，试问：是否存在正整数m，使得$T_m=2019$？如果存在，求出m的值；如果不存在，请说明理由．