



专题 7 数列的本质—函数迭代



秒杀秘籍·第一讲 函数迭代和数列的关系

已知函数 $y = f(x)$ 满足 $a_{n+1} = f(a_n)$, 则一定有 $a_{n+1} = f(a_n) = f_2(a_{n-1}) = \dots = f_n(a_1)$, 故函数 $y = f(x)$ 通过反复迭代产生的一系列数构成了数列 $\{a_n\}$ 或者记为 $\{b_n\}, \{x_n\}$, 而数列的每一项与函数迭代的关系可以如下表所示:

下面以函数 $y = 2x + 1$ 和数列 $a_{n+1} = 2a_n + 1$

数列	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_n	a_{n+1}
函数	x	$f(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_{n-1}(x)$	$f_n(x)$
数列	1	x	7	15	31	63		$2^n - 1$	$2^{n+1} - 1$
数列	-1	-1	-1	-1	-1	-1		-1	-1
函数	x	$2x + 1$	$4x + 3$	$8x + 7$	$16x + 15$	$32x + 31$	$2^{n-1}x + 2^{n-1} - 1$	$2^n x + 2^n - 1$

可以发现:

1. 数列的递推式和函数的迭代式是有着相同的法则的, 故数列的任何一项 (a_n, a_{n+1}) 都在函数 $y = f(x)$ 上.
2. 数列的通项公式是函数对 a_1 迭代 $n-1$ 次的结果, 即 $a_n = f_{n-1}(a_1)$, 每一次由于迭代产生出的因变量成为下一次迭代的自变量.
3. 数列的首相 a_1 对整个数列有很大的影响, 当迭代不断重复出现同一结果时, 我们将其称为不动点.



秒杀秘籍·第二讲 函数的迭代图像——蛛网图

函数的迭代图像, 简称蛛网图或者折线图, 函数 $y = f(x)$ 和直线 $y = x$ 共同决定.

其步骤如下:

1. 在同一坐标系中作出 $y = f(x)$ 和 $y = x$ 的图像 (草图), 并确定不动点. (如图 1 所示)

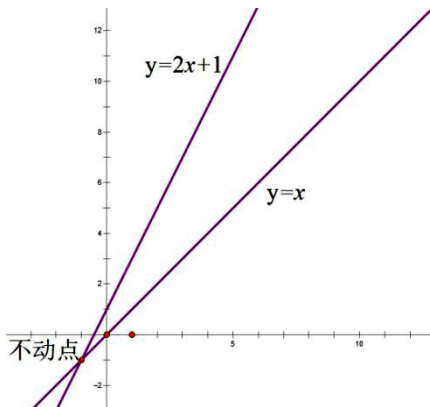


图 1

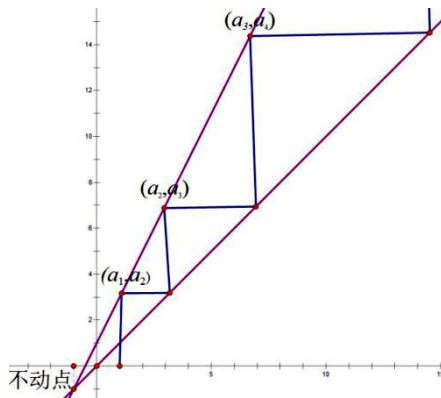


图 2

2. 在找出不动点之后, 确定范围, 将不动点之间的图像放大, 并找出起始点 a_1 (如图 2 所示)
3. 由 a_1 向 $y = f(x)$ 作垂直于 x 轴的直线与 $y = f(x)$ 相交, 并确定交点 (a_1, a_2) .
4. 由 (a_1, a_2) 向 $y = x$ 作平行于 x 轴的直线与 $y = x$ 相交, 并确定交点 (a_2, a_2) .
5. 由 (a_2, a_2) 向 $y = f(x)$ 作垂直于 x 轴的直线与 $y = f(x)$ 相交, 并确定交点 (a_2, a_3) .

重复 4, 5, 直至找到点 (a_n, a_{n+1}) 的最终去向.



【例 1】 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【解析】 如上图 1、图 2 可得, 函数 $y=2x+1$ 的不动点为 $(-1, -1)$, 故 $y=2x+1$ 满足 $y-(-1)=2[x-(-1)]$ 即 $y+1=2(x+1)$, 由数列 (a_n, a_{n+1}) 构成的任一点均位于函数 $y=2x+1$ 上, 故可知 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$, $\therefore a_n+1=2(a_{n-1}+1)=2^2(a_{n-2}+1)=2^3(a_{n-3}+1)=\dots=2^{n-1}(a_1+1)=2^n$; $\therefore a_n=2^n-1$.

【例 2】 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a(a>0), a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$, 证明: 存在常数 M , 使得对于任意的 $n \in N^*$, 都有 $a_n \leq M$.

【证明】 令 $y=2\sqrt{x}$, 当 $y=x$ 时, 函数的不动点有 $x_0=2\sqrt{x_0}$, 即 $x_0=0$ 或 $x_0=4$, 两个不动点 $(0,0), (4,4)$;

(1) 如图 3 所示, 当 $4>a>0$ 时, 通过蛛网图发现 $4>a_{n+1}>a_n>a_{n-1}>\dots>a_2>a_1$, 故 $a_n<4$, 故当 $4 \leq M$ 时, 一定有 $a_n \leq M$;

(2) 当 $a=4$ 时, 总有 $a_n=4$, 故当 $4 \leq M$ 时, 一定有 $a_n \leq M$;

(3) 如图 4 所示, 当 $a>4$ 时, 通过蛛网图发现 $4<a_{n+1}<a_n<a_{n-1}<\dots<a_2<a_1=a$, 故只需 $a \leq M$, 一定有 $a_n \leq M$;

综上, 存在常数 M , 使得对于任意的 $n \in N^*$, 都有 $a_n \leq M$.

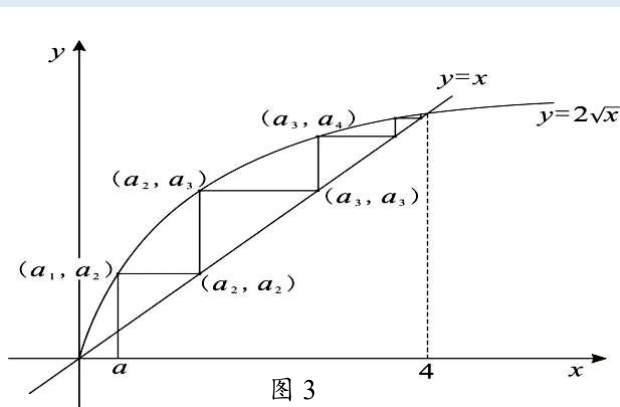


图 3

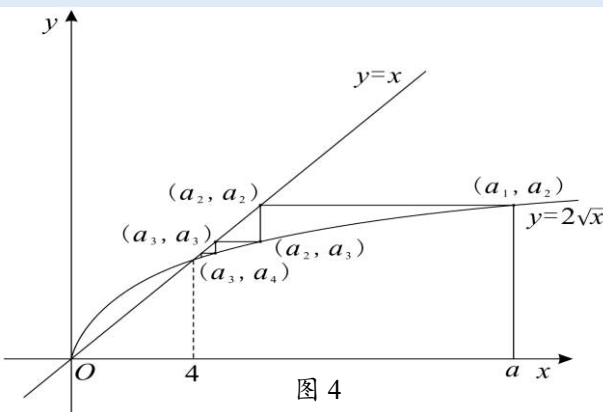


图 4

【例 3】 首项为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n^2+3), n \in N^*$, 若对 $n \in N^*$, 一切都有 $a_{n+1}>a_n$, 求 a_1 的取值范围.

【解析】 令 $y=\frac{1}{4}(x^2+3)$, 当 $y=x$ 时, 函数的不动点有 $x_0=1$ 或 $x_0=3$, 两个不动点 $(1,1), (3,3)$ (图 5)

(1) 如图 6 所示, 当 $3>a_1>1$ 时, 通过蛛网图发现 $1<a_{n+1}<a_n<a_{n-1}<\dots<a_2<a_1<3$, 故与题意要求不符合; (2) 如图 7 所示, 当 $0<a_1<1$ 时, 总有 $0<a_1<a_2<a_3<\dots<a_n<a_{n+1}<1$; (3) 如图 8 所示, 当 $a_1>3$ 时, 通过蛛网图发现 $a_{n+1}>a_n>a_{n-1}>\dots>a_2>3$, 综上, $a_1>3$ 或者 $0<a_1<1$ 时, $a_{n+1}>a_n$.

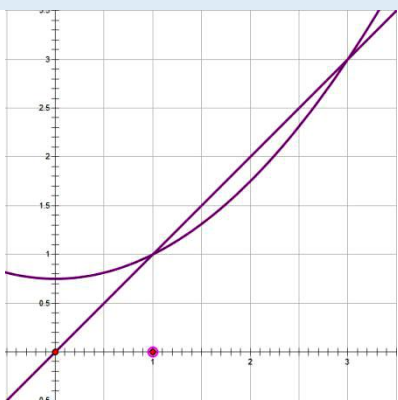


图 5

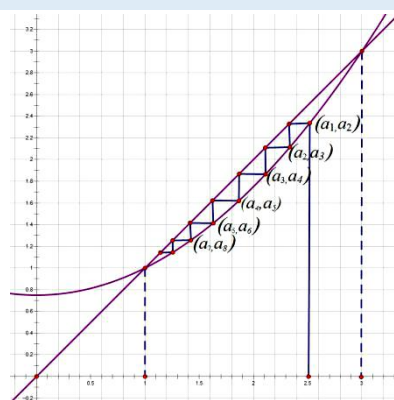


图 6

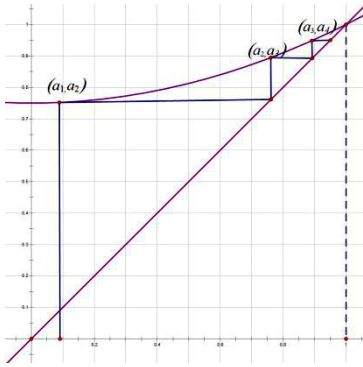


图 7

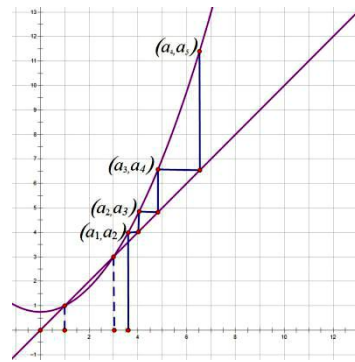


图 8

秒杀秘籍·第三讲 蛛网图与数列的单调性

定理 1: $y = f(x)$ 的单调增区间存在两个不动点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 且在两个不动点之间形成一上凸的图形时, (如图 9) 则数列 $a_{n+1} = f(a_n)$ 在两个不动点之间的区间是递增的, 即 $a_{n+1} > a_n$, 在两不动点以外的区间则是递减的, 即 $a_{n+1} < a_n$.

定理 2: $y = f(x)$ 的单调增区间存在两个不动点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 且在两个不动点之间形成一下凹的图形时, (如图 10) 则数列 $a_{n+1} = f(a_n)$ 在两个不动点之间的区间是递减的, 即 $a_{n+1} < a_n$, 在两不动点以外的区间则是递增的, 即 $a_{n+1} > a_n$.

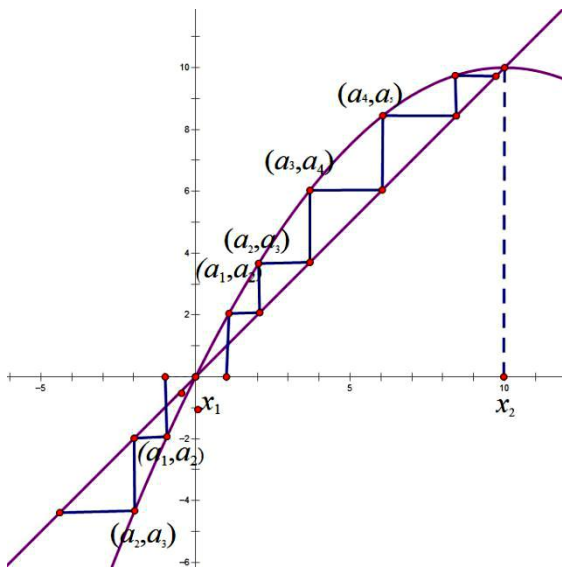


图 9

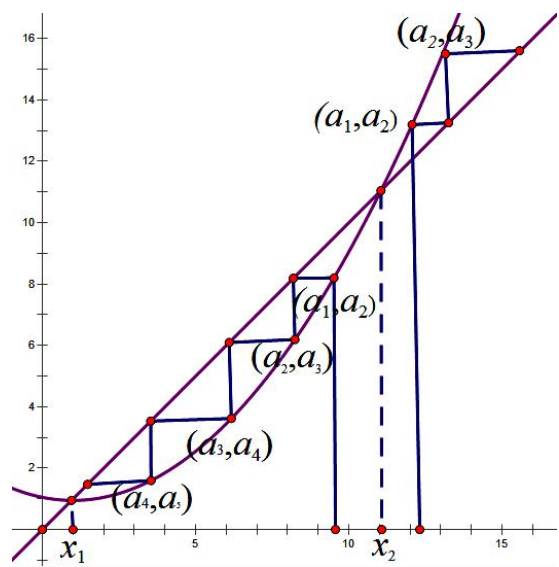


图 10

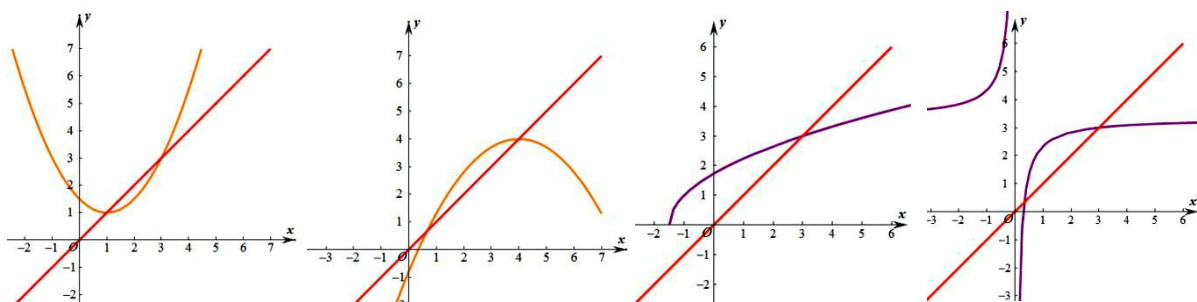
综上所述, 当 $y = f(x)$ 的单调增区间位于上凸内或者下凹外时, 即当迭代起点 a_1 位于此区域时, 一定有 $a_{n+1} > a_n$ 同理, 当迭代起点 a_1 位于单调增区间的上凸外或者下凹内时, 一定有 $a_{n+1} < a_n$.

数列的极限

根据蛛网图可知, 当一数列 $\{a_n\}$ 为单调上凸曲线时, 迭代点 (a_n, a_{n+1}) 会无限靠近大的不动点 x_2 , 我们将这个大的不动点 x_2 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_2$; 当一数列 $\{a_n\}$ 为单调下凹曲线时, 迭代点 (a_n, a_{n+1}) 会无限靠近小的不动点 x_1 , 我们将这个小的不动点 x_1 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_1$.



几种常见的函数迭代图（未画折线）



$y = a(x-h)^2 + h (a > 0)$
 $y = a(x-h)^2 + h (a < 0)$
 $y = \sqrt{ax+b} (a > 0, b > 0)$
 $y = \frac{ax+b}{cx+d} (ad > bc)$

顶点为不动点抛物线 顶点为不动点的抛物线 横着的抛物线 二四象限反比例函数的平移函数

请思考： $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = h$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = h$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_2$

秒杀秘籍：第四讲 由耐克函数的迭代产生的数列

1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{a}{x} (a > 0)$ ，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = f(a_n)$ ，求不动点得， $x_0 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{a}{x_0}, x_0 = \sqrt{2a}$ ，故

不动点 $(\sqrt{2a}, \sqrt{2a})$ 为耐克函数的顶点（图 11），思考：为什么 $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{a}{x} (a > 0)$ 的不动点一定是顶点？

2. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}(x-h) + \frac{a}{x-h} + h (a > 0)$ ，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = f(a_n)$ ，求此函数的不动点得，

$x_0 - h = \frac{1}{2}(x_0 - h) + \frac{a}{x_0 - h}, x_0 = \sqrt{2a} + h$ ，故可知不动点 $(\sqrt{2a} + h, \sqrt{2a} + h)$ 为耐克函数的顶点（图 12）。

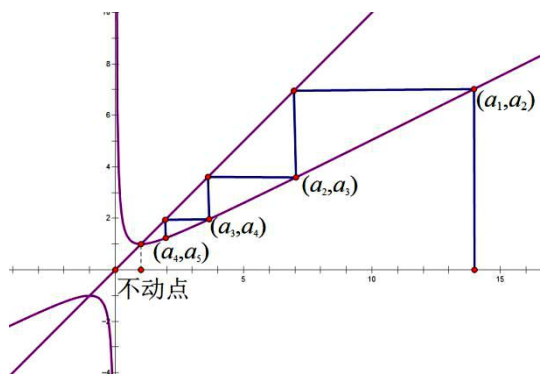


图 11

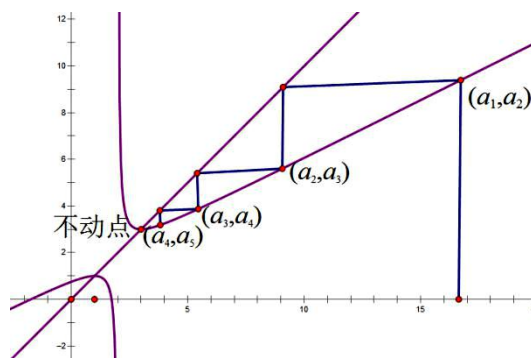


图 12

结论：耐克函数一般为收缩函数，即 $x_0 < a_{n+1} < a_n < a_{n-1} < \dots < a_2 < a_1$ 。

【例 4】 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{4}{x_n}\right) (n \in N^*)$ ，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A (A > 0)$ ，则 $A =$ _____。

【解析】 如图 11 可得，函数 $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$ 的不动点为 $(2, 2)$ 或者 $(-2, -2)$ ，由蛛网图可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ 。

【例 5】 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) (a > 0, n \in N^*)$ ，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A (A > 0)$ ，则 $A =$ _____。



【解析】如图 11 可得, 函数 $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ 的不动点为 $(\sqrt{2a}, \sqrt{2a})$, 由蛛网图可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2a}$.

【例 6】 设 $a > 2$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 求证: $x_n > 2$, 且 $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$.

【解析】 令 $y = \frac{x^2}{2(x-1)} = \frac{(x-1+1)^2}{2(x-1)} = \frac{[(x-1)+1]^2}{2(x-1)} = \frac{(x-1)^2 + 2(x-1) + 1}{2(x-1)} = \frac{(x-1)}{2} + \frac{1}{2(x-1)} + 1$ ($x > 2$); 可知 $y = \frac{(x-1)}{2} + \frac{1}{2(x-1)} + 1$ ($x > 2$) 由 $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}$ 向右移一个单位, 再向上移一个单位而得到, 故顶点坐标为 $(2, 2)$, 也是此函数的不动点. 如图 12 所示, 有 $2 < x_{n+1} < x_n < x_{n-1} < \dots < x_2 < x_1$.

【例 7】 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$, 求证: $1 < a_n < \frac{3}{2} + \frac{1}{n}$.

【证明】 如图 11 可得, 函数 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$ 的不动点为 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, 由蛛网图可知 $\sqrt{2} < a_{n+1} < a_n < \dots < a_2 < a_1 = 2$
 $a_1 = 2 < \frac{3}{2} + 1$; $a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{a_1} = 1 + \frac{1}{2} < \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$; $\therefore a_n \dots < a_4 < a_3 < a_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$.



秒杀秘籍: 第五讲 迭代函数与周期数列问题

已知 $a_{n+1} = \frac{aa_n + b}{ca_n + d}$ ($ad < bc$), 求 $\{a_n\}$ 的通项可由函数 $y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ 和直线 $y = x$ 的折线图决定. 函数 $y = f(x)$ 和直线 $y = x$ 一定没有交点, 即函数 $y = f(x)$ 一定没有不动点.

定理 3 当 $f(x) = f^{-1}(x)$ 时, $f_{2n-1}(x) = f(x); f_{2n}(x) = x$.

例如: $f(x) = \pm \frac{a}{x}$ ($a \in \mathbb{R}$) (反比例函数, 如图 13); $f(x) = a - x$ (与直线 $y = x$ 垂直的直线, 如图 14)

$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, 当 $a + d = 0$ (将反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 向右向上移动相等的距离得到的图像, 如图 15)

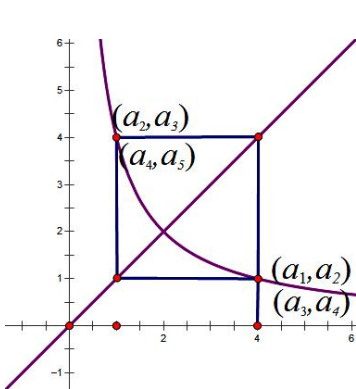


图 13

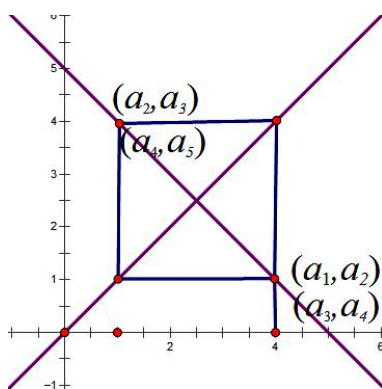


图 14

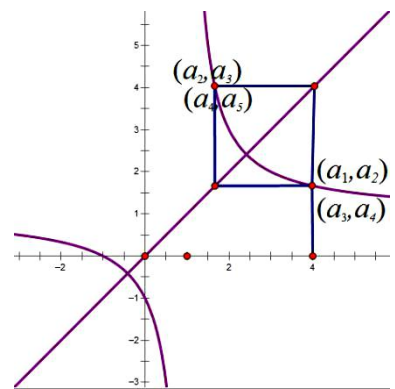


图 15

定理 4 函数 $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, 当 $(a + d)^2 = ad - bc$ 时, $f_{3n-2}(x) = f(x); f_{3n-1}(x) = f_2(x); f_{3n}(x) = x$



(将反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 仅向右或者向上移动相同单位得到的图像, 如图 16, 图 17)。

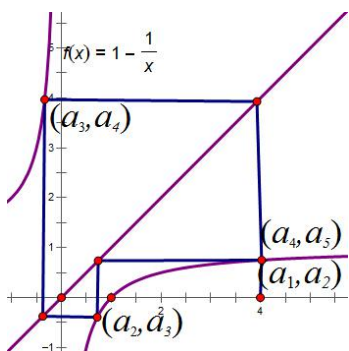


图 16

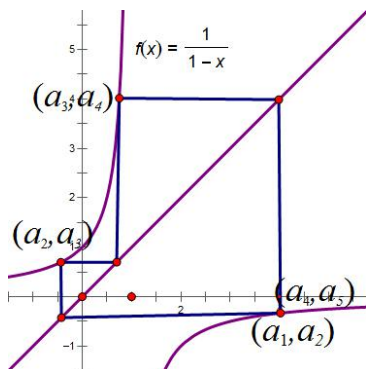


图 17

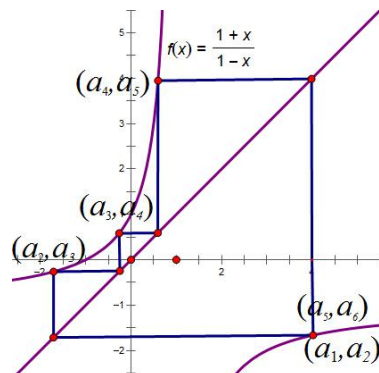


图 18

定理 5 函数 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, 当 $(a+d)^2 = 2(ad-bc)$ 时, $f_{4n-3}(x) = f(x)$; $f_{4n-2}(x) = f_2(x) = -\frac{1}{x}$;

$f_{4n-1}(x) = f_3(x)$; $f_{4n}(x) = x$ (将反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 向右向下移动相等的距离得到的图像, 如图 18)。

*定理 6 函数 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, 当 $(a+d)^2 = 3(ad-bc)$ 时, 每迭代六次为一周期; 当 $(a+d)^2 \geq 4(ad-bc)$, 则不会出现迭代周期。

【例 8】设 S 是实数集 R 的真子集, 且满足下列两个条件: ① $1 \notin S$; ② 若 $a \in S$, 则 $1 - \frac{1}{a} \in S$, 问:

(1) 若 $2 \in S$, 则 S 中一定还有哪几个数? (2) 集合 S 中能否只有一个元素? 说明理由。

【解析】(1) $\because 2 \in S, \therefore 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \in S; \therefore 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = -1 \in S; \therefore 1 - \frac{1}{-1} = 2 \in S$; 故 S 中共有

$2, -1, \frac{1}{2}$ 三个数(图 16、17) 其中点 (a_1, a_2) 表示点 $(2, \frac{1}{2})$, 点 (a_2, a_3) 表示点 $(\frac{1}{2}, -1)$, 点 (a_3, a_4) 表示点 $(-1, 2)$ 。

(2) 当集合 S 只有一个元素时, $1 - \frac{1}{a} = a, a^2 - a + 1 = 0, \Delta = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$, 无解, 故不存在这样的集合 S 。(图 16、17 中, $y = f(x)$ 与直线 $y = x$ 无交点)

【例 9】已知集合 A 的元素全为实数, 且满足: 若 $a \in A$, 则 $\frac{1+a}{1-a} \in A$ 。

(1) 若 $a = -3$, 求出 A 中其它所有元素;

(2) 0 是不是集合 A 中的元素? 请你设计一个实数 $a \in A$, 再求出 A 中的所有元素?

(3) 根据 (1) (2), 你能得出什么结论。

【解析】(1) $\because -3 \in S, \therefore \frac{1+a}{1-a} = -\frac{1}{2} \in S; \therefore \frac{1+a}{1-a} = \frac{1}{3} \in S; \therefore \frac{1+a}{1-a} = 2 \in S; \therefore \frac{1+a}{1-a} = -3 \in S$ 。故 S 中共有

$-3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2$ 四个数(图 18) 其中点 (a_1, a_2) 表示点 $(-3, -\frac{1}{2})$, 点 (a_2, a_3) 表示点 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, 点 (a_3, a_4) 表示点

$(\frac{1}{3}, 2)$, 点 (a_4, a_5) 表示点 $(2, -3)$, 点 (a_5, a_6) 表示点 $(-3, -\frac{1}{2})$ 。(2) 0 不是。(3) 略。



【例 10】已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_n = \frac{1+a_{n-1}}{1-a_{n-1}}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【解析】 $\because a_1 = 2, \therefore a_2 = \frac{1+a_1}{1-a_1} = -3, \therefore a_3 = \frac{1+a_2}{1-a_2} = -\frac{1}{2}, \therefore a_4 = \frac{1+a_3}{1-a_3} = \frac{1}{3}, \dots$ 故 $a_n = \begin{cases} 2(n=4k-3) \\ -3(n=4k-2) \\ -\frac{1}{2}(n=4k-1) \\ \frac{1}{3}(n=4k) \end{cases}$



秒杀秘籍·第六讲 摆动数列以及由求导构造函数单调性来解决数列问题

由反比例(递减函数)函数迭代构成的摆动数列,如图 19 所示,当 $f(x)$ 在区间为减函数时,和直线 $y=x$ 相交于不动点,那么由此函数迭代构成的数列为摆动数列,即奇数项和偶数项构成相反的单调性,但都螺旋靠近不动点,极限也是不动点。如图 19 所示 $a_1 < a_3 < a_5 < \dots < a_{2n-1}$, 同时 $a_2 > a_4 > a_6 > \dots > a_{2n}$; 如图 20 所示 $a_1 > a_3 > a_5 > \dots > a_{2n-1}$, 同时 $a_2 < a_4 < a_6 < \dots < a_{2n}$.

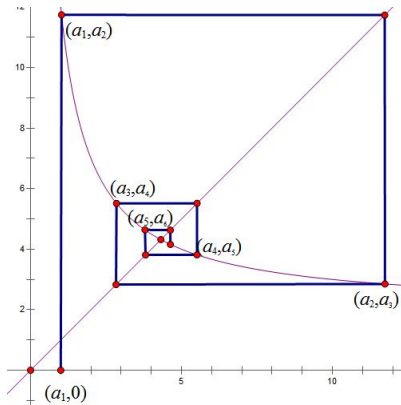


图 19

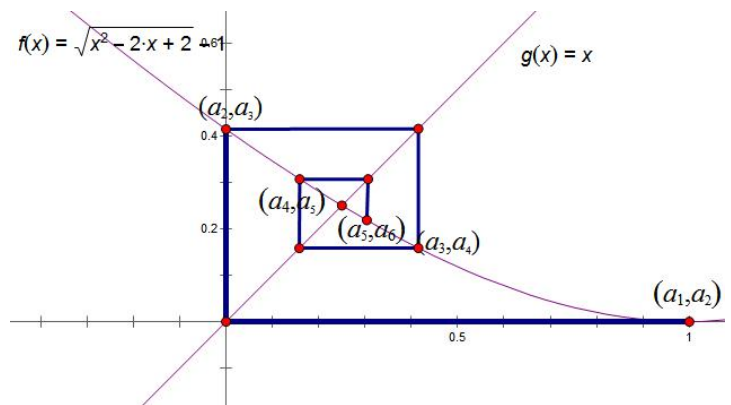
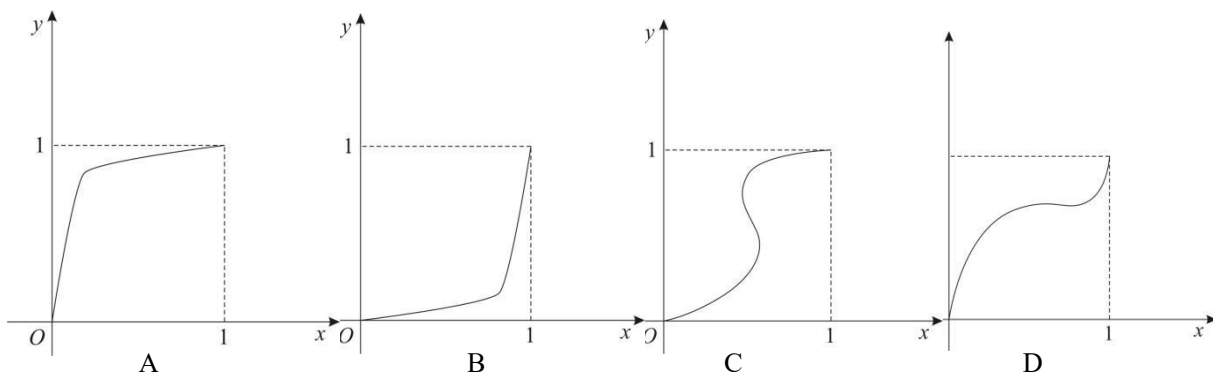


图 20



达标训练

1. 一给定函数 $y=f(x)$ 的图像如图所示, 并且对任意 $a_1 \in (0,1)$, 由关系式 $a_{n+1}=f(a_n)$ 得到的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} > a_n (n \in N^*)$, 则该函数的图像是 ()



2. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{ax+1} (a > 0)$, 当 $x > 0$ 时, 那么 $f_n(x)$ 与 $f_{n+1}(x)$ 的大小关系是 ()
- A. $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ B. $f_n(x) > f_{n+1}(x)$ C. $f_n(x) < f_{n+1}(x)$ D. 不能确定
3. 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n^2 - 2x_n + 4 (n \in N^*), x_1 = 3$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A (A > 0)$, 则 $A =$ _____.
4. 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n^2 + 2x_n (n \in N^*), x_1 = 1$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A (A > 0)$, 则 $A =$ _____.
5. 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \frac{ax_n+1}{x_n-3}$, 且无论 x_1 为何值, 数列 $\{x_n\}$ 只有两个值, 则实数 a 的值为 ()
- A. -3 B. -1 C. 3 D. 1
6. (2019·绍兴一模) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = f(a_n), n \in N^*$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且满足 $S_{100} < 100$, 则 $f(x)$ 不可能是 ()
- A. $f(x) = x^2$ B. $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2$ C. $f(x) = e^x - x - 1$ D. $f(x) = \ln x + x + 1$
7. (2018·杭州期末) 设 $f(x) = \frac{x^2}{2x-2}$, 记 $f_1(x) = f(x), f_{k+1}(x) = f(f_k(x)) (k=1, 2, 3, \dots)$, 则 ()
- A. 当 $x \geq 2$ 时, 不等式 $f_{2018}(x) \geq 2$ 恒成立 B. 当 $0 < x \leq 2$ 时, $f_{2018}(x)$ 单调递增
- C. 当 $0 < x \leq 2$ 时, $f_{2018}(x)$ 单调递减 D. 当 $x \leq 0$ 时, 不等式 $f_{2018}(x) > 0$ 有解
8. (2018·洮北期末) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{a_n - \sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n + 1} (n=1, 2, 3, \dots)$, 则 a_{2008} 等于 ()
- A. 0 B. $\sqrt{3}$ C. $-\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$
9. (2019·福州期中) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n} (n \in N^*)$, 则使 $a_1 + a_2 + \dots + a_k < 100$ 成立的最大正整数 k 的值为 ()
- A. 199 B. 200 C. 201 D. 202
10. (2019·福清期中) 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和, 若 $a_1 = \frac{1}{2}$, 且 $a_{n+1} = \frac{2}{2-a_n} (n \in N^*)$, 则 $6S_{100} =$ ()



- A. 425 B. 428 C. 436 D. 437

11. (2018·杨浦期中) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$ 且 $a_{n+1} = \frac{a_n + (2 - \sqrt{3})}{1 - (2 - \sqrt{3})a_n}$, 则 a_{2018} 为 ()

- A. $\frac{5\sqrt{3}-6}{3}$ B. $\frac{1+3\sqrt{2}}{5}$ C. 0 D. 1

12. (2016·泉州二模) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = t$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}$, 若 $\{a_n\}$ 为单调递减数列, 则实数 t 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -2)$ B. $(-2, 0)$ C. $(0, 2)$ D. $(2, +\infty)$

13. (2019·东城一模) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = a$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} (n \in N^*)$, 则下列关于 $\{a_n\}$ 的判断正确的是 ()

- A. $\forall a > 0, \exists n \geq 2$, 使得 $a_n < \sqrt{2}$ B. $\exists a > 0, \exists n \geq 2$, 使得 $a_n < a_{n+1}$
C. $\forall a > 0, \exists m \in N^*$, 总有 $a_m < a_n$ D. $\exists a > 0, \exists m \in N^*$, 总有 $a_{m+n} = a_n$

14. (2016·温州二模) 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且满足 $a_{n+1} = f(a_n)$, $a_1 \in (0, 1)$, 则 $f(x)$ 不可能是 ()

- A. $f(x) = \sqrt{x}$ B. $f(x) = 2^x - 1$ C. $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ D. $f(x) = \log_2(x+1)$

15. (2016·长宁三模) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n + \frac{2}{a_n} - 3$, 首项 $a_1 = a$, 若数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$ B. $(0, 1) \cup (2, +\infty)$ C. $(0, 1)$ D. $(2, +\infty)$

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ 且 $a_{n+1} = \frac{1+2a_n}{1+a_n} (n \in N^*)$. 求证: $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

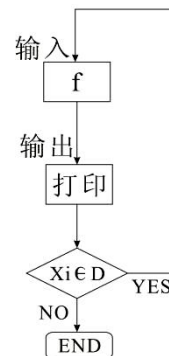
17. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = -\frac{1}{10}x_n^2 + 2x_n (n \in N^*), x_1 = 1$, 求证: $10 > x_{n+1} > x_n$.



18. 对任意函数 $f(x), x \in D$, 可按图示构造一个数列发生器, 其工作原理如下:

①输入数据 $x_0 \in D$, 经数列发生器输出 $x_1 = f(x_0)$;

②若 $x \notin D$, 则数列发生器结束工作; 若 $x_1 \in D$, 则将 x_1 反馈回输入端, 再输出 $x_2 = f(x_1)$, 并依此规律继续下去, 如图所示, 现定义 $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$;



(1) 若输入 $x_0 = \frac{49}{65}$, 则由数列发生器产生数列 $\{x_n\}$, 请写出 $\{x_n\}$ 的前三项;

(2) 若要数列发生器产生一个无穷的常数列, 试求输入的初始数据 x_0 的值;

(3) 若输入 x_0 时, 产生的无穷数列 $\{x_n\}$, 满足对任意正整数 n 均有 $x_n < x_{n+1}$, 求 x_0 的取值范围.

19. (2010·全国卷) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = c - \frac{1}{a_n}$. 求使得不等式 $a_n < a_{n+1} < 3$ 成立的 c 的取值范围.



20. (2007·广东) 已知函数 $f(x) = x^2 + x - 1$, α, β 是方程 $f(x) = 0$ 的两个根 ($\alpha > \beta$), $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导

数, 设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ ($n = 1, 2, \dots$).

(1) 求 α, β 的值;

(2) 证明: 对任意的正整数 n , 都有 $a_n > \alpha$;

(3) 记 $b_n = \ln \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$ ($n = 1, 2, \dots$), 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

21. (2009·陕西) 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 猜想数列 $\{x_{2n}\}$ 的单调性, 并证明你的结论;

(2) 证明: $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{6} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.