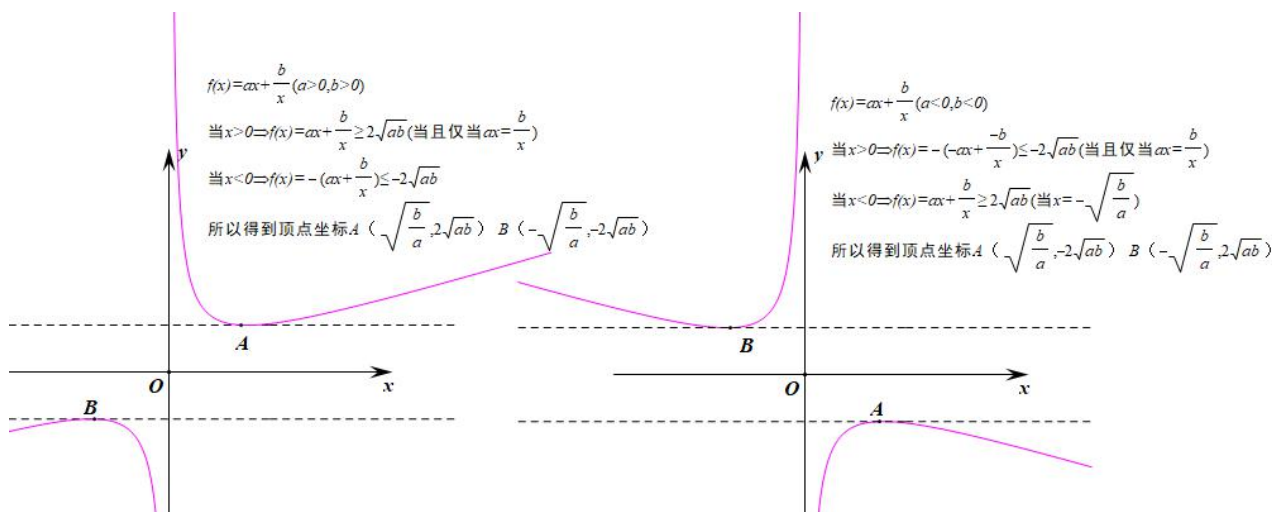




### 专题3 对勾函数解决恒成立和实根分布问题



对勾函数是一种类似于反比例函数的一般函数，形如  $f(x) = ax + \frac{x}{b}$

当  $a, b$  同号时， $f(x) = ax + \frac{x}{b}$  的图象是由直线  $y = ax$  与双曲线  $y = \frac{x}{b}$  构成，形状酷似双勾。故称“对勾函数”，也称“耐克函数”。耐克函数的顶点： $(\sqrt{\frac{b}{a}}, 2\sqrt{ab})$  和  $(-\sqrt{\frac{b}{a}}, -2\sqrt{ab})$

**【例1】** 已知函数  $f(x) = x^2 - ax + 1 \geq 0$  对于一切  $x \in (0, \frac{1}{2}]$  成立，求  $a$  的取值范围。

**【解析】** 根据题意得  $x^2 + 1 \geq ax$  在  $x \in (0, \frac{1}{2}]$  上恒成立，即： $x + \frac{1}{x} \geq a$  在  $x \in (0, \frac{1}{2}]$  上恒成立，设  $g(x) = x + \frac{1}{x}$ ，则  $g(x) \geq 2$  当  $x = 1$  时， $g(x) = 2$ ，但  $x \in (0, \frac{1}{2}]$  所以  $g(x)_{\min} = g(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$ ， $a \leq \frac{5}{2}$ 。

**【例2】** 方程  $x^2 - ax + 4 = 0$  在区间  $[0, 1]$  内有解，求  $a$  的取值范围。

**【解析】** 根据题意得： $x = 0$  时，无解； $x^2 + 4 = ax$  在  $x \in (0, 1]$  内有解，即： $x + \frac{4}{x} = a$  在  $x \in (0, 1]$  上的取值范围，设  $g(x) = x + \frac{4}{x}$ ，则  $g(x) \geq 5$  当  $x = 1$  时， $g(x) = 5$ ，故  $a \geq 5$

### 达标训练

1. 若对于  $-5 \leq x \leq 1$ ，不等式  $x^2 + ax + 6 - a > 0$  恒成立，求实数  $a$  的取值范围。



2. 已知不等式  $x^2 - (a+1)x + a < 0$ .

- (1) 若不等式在  $(1, 3)$  上有解, 求实数  $a$  的取值范围;
- (2) 若不等式在  $(1, 3)$  上恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

3. 已知函数  $f(x) = 3x^2 + 2(k-1)x + k + 5$  ( $k \in R$ ).

- (1) 对任意  $k \in (-1, 1)$ , 不等式  $f(x) < 0$  恒成立, 求  $x$  的取值范围;
- (2) 若函数在区间  $(0, 2)$  内有零点, 求  $k$  的取值范围.

4. 已知  $a$  是实数, 函数  $f(x) = 2ax^2 + 2x - 3 - a$ . 如果函数  $y = f(x)$  在区间  $[-1, 1]$  上有零点, 求  $a$  的取值范围.