专题 5　基本不等式与柯西不等式

秒杀秘籍：第一讲　基本不等式常用模型

模型一：$mx+\frac{n}{x}\ge 2\sqrt{mn}(m>0,n>0)$，当且仅当 $x=\sqrt{\frac{n}{m}}$ 时等号成立.

模型二：$mx+\frac{n}{x-a}=m(x-a)+\frac{n}{x-a}+ma\ge 2\sqrt{mn}+ma(m>0,n>0)$，当且仅当 $x-a=\sqrt{\frac{n}{m}}$ 时等号成立.

模型三：$\frac{x}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{ax+b+\frac{c}{x}}\le\frac{1}{2\sqrt{ac}+b}(a>0,c>0)$，当且仅当 $x=\sqrt{\frac{c}{a}}$ 时等号成立.

模型四：$x(n-mx)=\frac{mx(n-mx)}{m}\le\frac{1}{m}\cdot(\frac{mx+n-mx}{2})^2=\frac{n^2}{4m}(m>0,n>0,0<x<\frac{n}{m})$，当且仅当 $x=\frac{n}{2m}$ 时等号成立.

【例 5】若函数 $f(x)=x+\frac{1}{x-2}(x>2)$ 在 $x=a$ 处有最小值，则 $a=$（　　）

A. $1+\sqrt{2}$　　B. $1+\sqrt{3}$　　C. 3　　D. 4

【解析】$f(x)=x+\frac{1}{x-2}=x-2+\frac{1}{x-2}+2\ge 2+2=4$ 当且仅当 $x-2=\frac{1}{x-2}\Rightarrow x=3$ 时等号成立．故选 C．

【例 6】若对任意 $x>0$，$\frac{x}{x^2+3x+1}\le a$ 恒成立, 则 a 的取值范围是__________.

【解析】$\frac{x}{x^2+3x+1}=\frac{1}{x+3+\frac{1}{x}}\le\frac{1}{2+3}\le a$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，故 $a\ge\frac{1}{5}$．

【例 7】若 $-4<x<1$, 则 $y=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$ 有（　　）

A. 最大值 -1　　B. 最小值 -1　　C. 最大值 1　　D. 最小值 1

【解析】$\frac{x^2-2x+2}{2x-2}=\frac{(x-1)^2+1}{2(x-1)}=\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2(x-1)}\le-2\sqrt{\frac{1}{4}}=-1(x<1)$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，故选 A．

【例 8】设 $a>b>0$, 则 $a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值是__________.

【解析】$a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}=a^2-ab+ab+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}\ge 2\sqrt{a(a-b)\cdot\frac{1}{a(a-b)}}+2\sqrt{ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$．

秒杀秘籍：第二讲　柯西不等式的应用

柯西不等式二元式：设 a，b，c，$d\in R^+$，有 $(a+b)(c+d)\ge(\sqrt{ac}+\sqrt{bd})^2$ 当且仅当 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ 时等号成立.

模型一：$(a+b)(\frac{m}{a}+\frac{n}{b})\ge(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2$ 其中 $a,b\in R^+$，例如 $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\ge(\sqrt{a\frac{1}{a}}+\sqrt{b\frac{1}{b}})^2=4$；

模型二：$\frac{a}{x}+\frac{b}{1-x}=[(x)+(1-x)](\frac{a}{x}+\frac{b}{1-x})\ge(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

模型三：一高一低和式配凑类型

已知 x^2+y^2 的值，求 $x+y$ 的取值范围，或者已知 $x+y$ 的值，求 $2x^2+3y^2$ 的最值或者求 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 的最值

即 $(x^2+y^2)(m^2+n^2)\ge(mx+ny)^2$，其中 m，$n\in R^+$

例 $(a^2+b^2)(1+1)\ge(a+b)^2$ 或者写成 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\ge\dfrac{a+b}{2}$

模型四：同次积式配凑类型

已知 xy 的值，求 $(x+m)(y+n)(m,n\in R^*)$ 的最值，利用 $(x+m)(y+n)\ge(\sqrt{xy}+\sqrt{mn})^2$ 求最值.

【例 9】$x,y\in R^+$，且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}=1$，则 $(x+y)_{\min}=$__________.

【解析】$(x+y)(\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y})\ge(\sqrt{1}+\sqrt{9})^2=16$，又 $\because\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}=1$，$\therefore x+y\ge16$.

【例 10】已知 $0<a<1$，则 $(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{1-a})_{\min}=$_________.

【解析】$\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{1-a}=[(a)+(1-a)](\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{1-a})\ge(\sqrt{1}+\sqrt{4})^2=9$，故 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{1-a}\ge9$.

【例 11】$a,b\in R,a^2+2b^2=6$，则 $a+b$ 的最小值是________.

【解析】$(a^2+2b^2)(1+\dfrac{1}{2})\ge(a+b)^2\Rightarrow(a+b)^2\le9\Rightarrow-3\le a+b\le3$，故最小值为−3.

【例 12】设函数 $f(x)=3\sqrt{x-1}+4\sqrt{2-x}$，则当 $x=$_________时，$f(x)$ 的最大值是__________.

【解析】$[(x-1)+(2-x)](3^2+4^2)\ge(3\sqrt{x-1}+4\sqrt{2-x})^2\Rightarrow3\sqrt{x-1}+4\sqrt{2-x}\le5$，当且仅当 $\dfrac{x-1}{3^2}=\dfrac{2-x}{4^2}$ 时等号成立，此时 $x=\dfrac{34}{25}$.

【例 13】已知 $x>-1,y>-1$，且 $(x+1)(y+1)=4$，则 xy 的最大值是__________.

【解析】$(x+1)(y+1)\ge(\sqrt{xy}+1)^2\Rightarrow\sqrt{xy}\le1$，故 xy 的最大值是 1.

【例 14】已知 $m>0$，$n>0$，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}=1$，则 $(m+1)(n+4)$ 的最小值为（　　）

A．49　　B．7　　C．36　　D．6

【解析】$\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}=1\Rightarrow\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}\ge2\sqrt{\dfrac{4}{mn}}\Rightarrow mn\ge16,(m+1)(m+4)\ge(\sqrt{mn}+\sqrt{4})^2=(4+2)^2=36$，故选 C

【例 15】已知实数 x,y 满足 $x>y>0$，且 $x+y=2$，则 $\dfrac{2}{x+3y}+\dfrac{1}{x-y}$ 的最小值为__________.

【解析】$\because[(x+3y)+(x-y)](\dfrac{2}{x+3y}+\dfrac{1}{x-y})\ge(\sqrt{2}+1)^2\ \therefore\dfrac{2}{x+3y}+\dfrac{1}{x-y}\ge\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4}$.

秒杀秘籍：第三讲　等式转化为不等式模型

若出现 $m(a+b)+nab=c$，　其中 a、b、m、n、$c\in R^*$

因为 $a+b\ge2\sqrt{ab}\Rightarrow ab\le\dfrac{(a+b)^2}{4}$，可以转化为 $2m\sqrt{ab}+nab\le c$ 或 $m(a+b)+n\dfrac{(a+b)^2}{4}\ge c$，

从而求出 $a+b$ 及 ab 的取值范围．若出现求 $ma+nb$ 取值范围，先将式子 $m(a+b)+nab=c$ 因式分解成为 $(a+x)(b+y)=z$ 形式，再用基本不等式求出 $ma+nb$ 最值．

也可以考虑用柯西不等式解出答案，先进行因式分解 $(a+x)(b+y)=z$，再用柯西不等式分析．

【例 16】设 $a>0,b>0,a+b+ab=24$，则（　　）

A．$a+b$ 有最大值 8　　B．$a+b$ 有最小值 8　　C．ab 有最大值 8　　D．ab 有最小值 8

【解析】法一：$a+b+ab=24\Rightarrow 2\sqrt{ab}+ab\le 24\Rightarrow(\sqrt{ab})^2+2\sqrt{ab}-24\le 0\Rightarrow -6\le\sqrt{ab}\le 4$

$a+b+ab=24\Rightarrow a+b+\dfrac{(a+b)^2}{4}\ge 24\Rightarrow(a+b)^2+4(a+b)-96\ge 0\Rightarrow a+b\ge 8$

或 $a+b\le -12$，又 $a+b>0$，故选 B．

法二：$a+b+ab=24\Rightarrow(a+1)(b+1)=25\Rightarrow(a+1)(b+1)\ge(\sqrt{ab}+1)^2\Rightarrow\sqrt{ab}\le 4$

$(a+1)(b+1)=25\Rightarrow(a+1)(b+1)\ge 2\sqrt{(a+1)(b+1)}\Rightarrow a+b+2\ge 10\Rightarrow a+b+2\ge 10\Rightarrow a+b\ge 8$

【例 17】设 $a>0,b>0,a+b+1=ab$, 求设 $3a+2b$ 最小值．

【解析】$a+b+1=ab\Rightarrow(a-1)(b-1)=2$

$3a+2b=3(a-1)+2(b-1)+5\ge 2\sqrt{6(a-1)(b-1)}+5=4\sqrt{3}+5$

达标训练

一、选择题

1．（2012•浙江）若正数 x,y 满足 $x+3y=5xy$，则 $3x+4y$ 的最小值是（　　）

A．$\dfrac{24}{5}$　　B．$\dfrac{28}{5}$　　C．5　　D．6

2．（2006•陕西）设 x,y 为正数，则 $(x+y)(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y})$ 的最小值为（　　）

A．6　　B．9　　C．12　　D．15

3．（2005•福建）设 $a,b\in R$，$a^2+2b^2=6$，则 $a+b$ 的最小值是（　　）

A．$-2\sqrt{2}$　　B．$-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$　　C．-3　　D．$-\dfrac{7}{2}$

4．（2000•新课程）若 $a>b>1$，$P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$，$Q=\dfrac{1}{2}(\lg a+\lg b)$，$R=\lg\dfrac{a+b}{2}$，则（　　）

A．$R<P<Q$　　B．$P<Q<R$　　C．$Q<P<R$　　D．$P<R<Q$

5．（2017•山东）若 $a>b>0$，且 $ab=1$，则下列不等式成立的是（　　）

A．$a+\dfrac{1}{b}<\dfrac{b}{2^a}<\log_2(a+b)$　　B．$\dfrac{b}{2^a}<\log_2(a+b)<a+\dfrac{1}{b}$

C．$a+\dfrac{1}{b}<\log_2(a+b)<\dfrac{b}{2^a}$　　D．$\dfrac{b}{2^a}<\log_2(a+b)<a+\dfrac{1}{b}$

6．（2015•湖南）若实数 a,b 满足 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=\sqrt{ab}$，则 ab 的最小值为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$2\sqrt{2}$　　D．4

7. （2015•陕西）设 $f(x)=\ln x$，$0<a<b$，若 $p=f(\sqrt{ab})$，$q=f(\frac{a+b}{2})$，$r=\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$，则下列关系式中正确的是（　　）

A. $q=r<p$　　B. $p=r<q$　　C. $q=r>p$　　D. $p=r>q$

8. （2014•重庆）若 $\log_4(3a+4b)=\log_2\sqrt{ab}$，则 $a+b$ 的最小值是（　　）

A. $6+2\sqrt{3}$　　B. $7+2\sqrt{3}$　　C. $6+4\sqrt{3}$　　D. $7+4\sqrt{3}$

9. （2013•山东）设正实数 x,y,z 满足 $x^2-3xy+4y^2-z=0$．则当 $\frac{xy}{2}$ 取得最大值时，$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}$ 的最大值为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. $\frac{9}{4}$　　D. 3

10. （2011•陕西）设 $0<a<b$，则下列不等式中正确的是（　　）

A. $a<b<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$　　B. $a<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b$

C. $a<\sqrt{ab}<b<\frac{a+b}{2}$　　D. $\sqrt{ab}<a<\frac{a+b}{2}<b$

11. （2011•上海）若 $a,b\in R$，且 $ab>0$，则下列不等式中，恒成立的是（　　）

A. $a^2+b^2>2ab$　　B. $a+b\geq 2\sqrt{ab}$　　C. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{2}{\sqrt{ab}}$　　D. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$

12. （2011•重庆）若函 $f(x)=x+\frac{1}{x-2}\ (x>2)$，在 $x=a$ 处取最小值，则 $a=$（　　）

A. $1+\sqrt{2}$　　B. $1+\sqrt{3}$　　C. 3　　D. 4

13. （2010•重庆）已知 $x>0,y>0,x+2y+2xy=8$ 则 $x+2y$ 的最小值是（　　）

A. 3　　B. 4　　C. $\frac{9}{2}$　　D. $\frac{11}{2}$

二、填空题

14. （2013•湖北）设 $x,y,z\in R$，且满足：$x^2+y^2+z^2=1$，$x+2y+3z=\sqrt{14}$ 则 $x+y+z=$__________.

15. （2018•江苏）在△ ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a,b,c, $\angle ABC=120°$，$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D，且 $BD=1$，则 $4a+c$ 的最小值为_________.

16. （2010•重庆）已知 $t>0$，则函数 $y=\frac{t^2-4t+1}{t}$ 的最小值为_________.

17. （2010•山东）若对任意 $x>0$，$\frac{x}{x^2+3x+1}\leq a$ 恒成立，则 a 的取值范围是_________.

18. （2010•浙江）若正实数 x,y 满足 $2x+y+6=xy$，则 xy 的最小值是_________.

19. （2017•山东）若直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0,b>0)$ 过点 $(1,2)$，则 $2a+b$ 的最小值为_________.

20. （2017•天津）若 $a,b\in R$，$ab>0$，则 $\frac{a^4+4b^4+1}{\mathrm{ab}}$ 的最小值为_________.

21. （2014•陕西）设 $a,b,m,n\in R$，且 $a^2+b^2=5$，$ma+nb=5$，则 $\sqrt{m^2+n^2}$ 的最小值为_________.

22. （2014•辽宁）对于 $c>0$，当非零实数 a,b 满足 $4a^2-2ab+4b^2-c=0$ 且使 $|2a+b|$ 最大时，$\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}$ 的最小值为________.

23. （2014•浙江）已知实数 a,b,c ,满足 $a+b+c=0,a^2+b^2+c^2=1$，则 a 的最大值是________.

24. （2013•天津）设 $a+b=2$，$b>0$，则 $\frac{1}{2|a|}+\frac{|a|}{b}$ 的最小值是________.

25. （2013•上海）设常数 $a>0$，若 $9x+\frac{a^2}{x}\geq a+1$ 对一切正实数 x 成立，则 a 的取值范围为________.

26. （2011•湖南）设 $x,y\in R$，且 $xy\neq 0$，则 $\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(\frac{1}{x^2}+4y^2\right)$ 的最小值为________.

27. （2011•浙江）设 x,y 为实数，若 $4x^2+y^2+xy=1$，则 $2x+y$ 的最大值是________.

三、解答题

28. （2013•新课标II）设 a,b,c 均为正数，且 $a+b+c=1$，证明：

（1）$ab+bc+ca\leq\frac{1}{3}$；

（2）$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq 1$.

29. （2018•江苏）若 x，y，z 为实数，且 $x+2y+2z=6$，求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值.