专题 1　直线方程

第一讲 直线的四种形式

知识归纳：

一、直线的倾斜角与斜率

1．确定直线的几何要素是：直线上两不同的点或直线上一点和直线的方向两个相对独立的条件．

注意：表示直线方向的有：直线的倾斜角（斜率）．

2．直线的倾斜角：当直线 l 与 x 轴相交时，我们取 x 轴作为基准，x 轴正向与直线 l 向上方向之间所成的角 α 叫做直线 l 的倾斜角．

注意：①从用运动变化的观点来看，直线的倾斜角是由 x 轴绕交点按逆时针方向转到与直线重合时所成的角．

②规定：直线与 x 轴平行或重合时，直线的倾斜角为 0°．

③直线倾斜角 α 的取值范围是：$0^\circ<\alpha<180^\circ$．

④在同一直角坐标系下，任何一条直线都有倾斜角且唯一，倾斜程度相同的直线，其倾斜角相等，倾斜程度不同的直线，其倾斜角不相等．

3．直线的斜率：倾斜角不是 90° 的直线，它的倾斜角 α 的正切值叫做这条直线的斜率，即 $k=\tan\alpha\,(\alpha\neq 90^\circ)$．它从另一个方面反映了直线的倾斜程度．

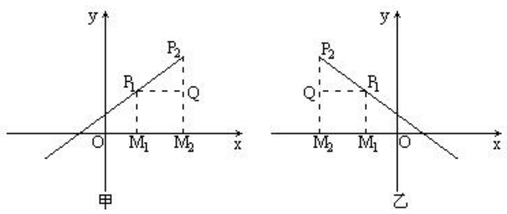
注意：一条直线必有一个确定的倾斜角，但不一定有斜率，当 $\alpha=0^\circ$ 时，$k=0$；当 $0^\circ<\alpha<90^\circ$ 时，$k>0$；当 $\alpha=90^\circ$ 时，k 不存在，当 $90^\circ<\alpha<180^\circ$ 时，$k<0$．即：斜率的取值范围为 $k\in R$．

【例 1】给出下列命题：①若直线倾斜角为 α，则直线斜率为 $\tan\alpha$；②若直线倾斜角斜率为 $\tan\alpha$，则直线的倾斜角为 α；③直线的倾斜角越大，它的斜率越大；④直线的斜率越大，其倾斜角越大；⑤直线的倾斜角的正切值叫做直线的斜率．其中正确命题的序号为_________．

【解析】①错误，当 $\alpha=90^\circ$ 时，$\tan 90^\circ$ 不存在；②正确；③④错误，当 $90^\circ<\alpha<180^\circ$ 时，$k<0$，k 随着倾斜角的增大而增大，但比倾斜角 $0^\circ<\alpha<90^\circ$ 小；⑤不正确，$\alpha=90^\circ$ 时，倾斜角没有正切值．

【例 2】已知直线的倾斜角为 α，且 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，求直线的斜率 k．

【解析】$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{4}{3}\left(0^\circ<\alpha<90^\circ\right)\\[2mm]\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}\left(90^\circ<\alpha<180^\circ\right)\end{cases}$



4．直线斜率的坐标公式

经过两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)\,(x_1\neq x_2)$ 的直线的斜率公式：$k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$．

注意：①斜率公式与两点的顺序无关，即 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$

②特别地：当 $y_1=y_2,x_1\neq x_2$ 时，$k=0$；此时直线平行于 x 轴或与 x 轴重合；当 $y_1\neq y_2,x_1=x_2$ 时，k 不存在，此时直线的倾斜角为 90°，直线与 y 轴平行或重合．

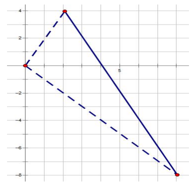
【例 3】已知点 $P(2,1)$，$Q(m,-3)$，求直线 PQ 的斜率并判断倾斜角的范围．

【解析】当 $m=2$ 时，斜率不存在，$\alpha=90^\circ$；当 $m\neq 2$ 时，$k=\dfrac{-3-1}{m-2}=\dfrac{-4}{m-2}$，当 $m>2$ 时，$90^\circ<\alpha<180^\circ$；当 $m<2$ 时，$0^\circ<\alpha<90^\circ$．

【例 4】（三点共线问题）已知 $A(-3,-5)$，$B(1,3)$，$C(5,11)$ 三点，证明这三点在同一条直线上

【证明】$k_{AB}=\dfrac{3-(-5)}{1-(-3)}=2$，$k_{AC}=\dfrac{11-(-5)}{5-(-3)}=2$，$\therefore k_{AB}=k_{AC}$，则 A，B，C 三点共线.

【例 5】（最值问题）已知实数 x，y，满足 $2x+y=8$，当 $2\le x\le 8$ 时，求 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值和最小值.



【解析】当 $x=2$ 时，$y=4$，$\dfrac{y}{x}=2$；当 $x=8$ 时，$y=-8$，$\dfrac{y}{x}=-1$，如图，$-1\le k\le 2$.

二．直线的方程

1．定义：一般地，以一个方程的解为坐标的点都是某条直线上的点，反过来，这条直线上点的坐标都是这个方程的解，这个方程就叫做这条直线的方程，这条直线叫做这个方程的直线.

2．直线方程的几种形式

（1）点斜式：

问题：若直线 l 经过点 $P_0(x_0,y_0)$，且斜率为 k，求直线 l 的方程.

解析：设点 $P(x,y)$ 是直线 l 上不同于点 P_0 的任意一点，根据经过两点的直线的斜率公式，得 $k=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$，可化为 $y-y_0=k(x-x_0)$，即为过点 P_0．斜率为 k 的直线 l 的方程.

方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 是由直线上一点及其斜率确定的，把这个方程叫做直线的点斜式的方程，简称点斜式.

注意：

①$k=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$ 与 $y-y_0=k(x-x_0)$ 是不同的，前者表示直线上缺少一个点 $x\ne x_0$，后者才是整条直线.

②当直线 l 的倾斜角为 0° 时，$\tan 0^\circ=0$，即 $k=0$，这时直线 l 的方程为 $y=y_0$.

③当直线的倾斜角为 90° 时，直线 l 斜率不存在，这时直线 l 与 y 轴平行或重合，它的方程不能用点斜式表示，它的方程是 $x=x_0$．即：局限性是不能表示垂直于 x 轴的直线.

④经过点 $P_0(x_0,y_0)$的直线有无数条，可分为两类情况：

i．斜率为 k 的直线，方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$

ii．斜率不存在的直线，方程为 $x-x_0=0$ 或写为 $x=x_0$.

【例 6】根据条件写出下列各题中的直线的方程：①经过点 $P_1(-2,3)$，倾斜角 $\alpha=45^\circ$；②经过点 $P_1(1,2)$ 且斜率为 2；③经过点 $(4,2)$，且与 x 轴平行；④经过点 $(-2,-3)$，且与 x 轴垂直.

【解析】① $y-3=x-(-2)$，即 $x-y+5=0$；② $y-2=2(x-1)$，即 $2x-y=0$；③ $y=2$；④ $x=-2$.

（2）斜截式：

问题：已知直线 l 的斜率是 k，与 y 轴的交点是 $P(0,b)$，代入直线方程的点斜式，得直线 l 的方程 $y-b=k(x-0)$，也就是 $y=kx+b$，我们称 b 是直线 l 在 y 轴上的截距.

这个方程是由直线 l 的斜率 k 和它在 y 轴上的截距确定的，所以叫做直线的斜截式方程，简称斜截式.

注意：① $b\in R$；②局限性：不表示垂直于 x 轴的直线；③斜截式方程和一次函数的解析式相同，都是 $y=kx+b$，但有区别：当斜率不为 0 时，$y=kx+b$ 是一次函数，当 $k=0$ 时，$y=b$ 不是一次函数；一次函数 $y=kx+b$ $(k=0)$ 必是一条直线的斜截式方程.

【例 7】求倾斜角是直线 $y=-\sqrt{3}x+1$ 的倾斜角的 $\frac{1}{4}$，且在 y 轴上的截距为-5 的直线的方程.

【解析】$y=-\sqrt{3}x+1 \Rightarrow \alpha=120°$，$\frac{\alpha}{4}=30° \Rightarrow k=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故直线方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-5$.

（3）两点式：

问题：已知直线 l 经过两点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$，求直线 l 的方程.

【解析】因为直线 l 经过两点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$，所以它的斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，代入点斜式，得 $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$，当 $y_2\neq y_1$ 时，方程可以写成 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

这个方程是由直线上两点确定的，所以叫做直线的两点式方程，简称两点式.

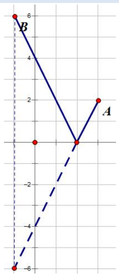
注意：①方程 $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ 与方程 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ 比较，后者比前者表示直线的范围更小了，前者不能表示斜率不存在的直线，后者除此外，还不能表示斜率为 0 的直线；局限性：不能表示垂直于坐标轴的直线.

②两点式方程与这两个点的顺序无关.

【例 8】已知点 $A(-5,0)$，$B(3,-3)$，求直线 AB 的方程.

【解析】$\frac{y-0}{-3-0}=\frac{x+5}{3+5} \Rightarrow 3x+8y+15=0$.

【例 9】一条光线从点 $A(3,2)$ 出发，经 x 轴反射，通过点 $B(-1,6)$，求入射光线和反射光线所在直线的方程.



【解析】如图，入射光线经过 $A(3,2)$，$B(-1,6)$ 关于 x 轴对称点 $B'(-1,-6)$，则入射光线方程为 $\frac{y-2}{-6-2}=\frac{x-3}{-1-3} \Rightarrow 2x-y-4=0$，反射直线方程为：$\frac{y+2}{6+2}=\frac{x-3}{-1-3} \Rightarrow 2x+y-4=0$.

（4）截距式：

问题：已知直线 l 与 x 轴的交点为 $A(a,0)$，与 y 轴的交点为 $B(0,b)$，其中 $a\neq 0,b\neq 0$，求直线 l 的方程.

【解析】因为直线 l 经过 $A(a,0)$ 和 $B(0,b)$ 两点，将这两点的坐标代入两点式，得 $\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}$，即为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. 如果直线与 x 轴的交点为 $(a,0)$，则称 a 为直线在 x 轴上的截距.

以上直线方程是由直线在 x 轴和 y 轴上的截距确定的，所以叫做直线的截距式方程，简称截距式

注意：方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 中 $a\neq 0,b\neq 0$，所以它不能表示与坐标轴平行（重合）的直线，还不能表示过原点的直线.

【例 10】过两点 $A(-1,1)$，$B(3,9)$ 的直线在 x 轴上的截距为__________.

【解析】设直线的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，将 A,B 代入方程得：$\begin{cases}\frac{-1}{a}+\frac{1}{b}=1\\ \frac{3}{a}+\frac{9}{b}=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\frac{3}{4}\\ b=-3\end{cases}$，故 x 轴上的截距为 $\frac{3}{4}$.

（5）一般式方程：

以上几种形式的直线方程都是二元一次方程，即平面上任何一条直线都可以用一个关于 x，y 的二元一次方

程表示；而关于 x,y 的二元一次方程，它都表示一条直线．因此我们把 x,y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$（其中 A，B 不同时为 0）叫做直线的一般式方程，简称一般式．

注意：①直线的一般式方程能表示所有直线的方程，这是其他形式的方程所不具备的．

②直线的一般式方程成立的条件是 A,B 不同时为 0．

③虽然直线的一般式有三个系数，但是只需两个独立的条件即可求直线的方程．

若 $A\neq0$，则方程可化为 $x+\dfrac{B}{A}y+\dfrac{C}{A}=0$；

若 $B\neq0$，则方程可化为 $\dfrac{A}{B}x+y+\dfrac{C}{B}=0$，即 $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$．

若 $A=0$，$B\neq0$ 时，方程化为 $y=-\dfrac{C}{B}$，它表示与 x 轴平行或重合的直线．

若 $A\neq0$，$B=0$ 时，方程化为 $x=-\dfrac{C}{A}$，它表示一条与 y 轴平行或重合的直线．

若 $ABC\neq0$ 时，则方程可化为 $\dfrac{x}{-\frac{C}{A}}+\dfrac{y}{-\frac{C}{B}}=1$，因此只需要两个条件即可．

④直线方程的其他形式都可以转化为一般式，因此在解题时若没有特殊说明，应把最后结果互为直线的一般式．

【例 11】设直线 l 的方程为 $(m^2-2m-3)x+(2m^2+m-1)y=2m-6$，根据下列条件分别确定 m 的值．

（1）l 在 x 轴上的截距为-3；　　（2）l 的斜率是 -1．

【解析】（1）当 $y=0$ 时，$(m^2-2m-3)(-3)=2m-6\Rightarrow m=3$ 或 $m=-\dfrac{5}{3}$；

（2）$-\dfrac{2m^2+m-1}{m^2-2m-3}=1\Rightarrow(3m-4)(m+1)=0\Rightarrow m=\dfrac{4}{3}$ 或 $m=-1$．

三．直线的位置关系（同一平面上的直线）

1．平行与垂直

（1）两条直线平行的判定

①当两条直线的斜率存在时，均可化成它的斜截式方程，所以以斜截式为例来研究直线平行的判定

设两条直线分别为 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$

若 $l_1//l_2$，则 l_1,l_2 的倾斜角相等，即由 $\alpha_1=\alpha_2$，可得 $\tan\alpha_1=\tan\alpha_2$，即 $k_1=k_2$，此时 $b_1\neq b_2$；反之也成立．

所以有 $l_1//l_2\Leftrightarrow k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$

②当两条直线的斜率都不存在时，二者的倾斜角均为 90°，若不重合，则它们也是平行直线

注意：当不考虑斜率，即给出直线的一般式时，有如下结论：

设两条直线分别为 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$　可得 $l_1//l_2\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$（其中分母不为 0）或 $l_1//l_2\Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1=0$ 且 $B_1C_2-B_2C_1\neq0$ 或 $A_1C_2-A_2C_1\neq0$

（2）两条直线垂直的判定

①当两条直线的斜率存在且不为 0 时，均可化成它的斜截式方程，即 $l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$

②两条直线中，一条斜率不存在，同时另一条斜率等于零，则两条直线垂直．

由①②得，两条直线垂直的判定就可叙述为：一般地，$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$ 或一条斜率不存在，同时

另一条斜率等于零.

注意：当不考虑斜率，即给出直线的一般式时，有如下结论：

设两条直线分别为l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ 可得$l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_2B_1=0$

秒杀秘籍：过直线交点的直线系方程

经过两直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 交点的直线系方程为 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$，其中$\lambda$是待定系数.

【例 12】已知点$A(2,2)$和直线l ：$3x+4y-20=0$，求过点A和直线l平行的直线.

【解析】令直线方程为：$3x+4y+C=0$，将点$A(2,2)$代入直线方程得：$3\times2+4\times2+C=0\Rightarrow C=-14$.

秒杀秘籍：第二讲 平行与垂直的直线方程求法

设直线$l:A_1x+B_1y+C_1=0$，则与l平行的直线方程为$A_1x+B_1y+C_2=0(C_2\in R)$；与$l$垂直的直线方程为$B_1x-A_1y+C_2=0(C_2\in R)$.

【例 13】求与直线$3x+4y+1=0$垂直且过点（1,2）的直线方程.

【解析】设要求的直线方程为$4x-3y+C=0$，代入点（1,2）得：$4\times1-3\times2+C=0\Rightarrow C=2$.

【例 14】已知两直线l_1：$x+my+6=0$，l_2：$(m-2)x+3y+2m=0$，当m为何值时，直线l_1与l_2：①平行 ②重合 ③垂直

【解析】①$\dfrac{1}{m-2}=\dfrac{m}{3}\neq\dfrac{6}{2m}\Rightarrow m=-1$；②$\dfrac{1}{m-2}=\dfrac{m}{3}=\dfrac{6}{2m}\Rightarrow m=3$；③$(m-2)+3m=0\Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

【例 15】求证：不论m为取什么实数，直线$(2m^2-1)x+(m^2-1)y=m^2-5$总过某一定点.

【解析】由于m的任意性，故$(2x+y)m^2-(x+y)=m^2-5\Rightarrow\begin{cases}2x+y=1\\x+y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-4\\y=9\end{cases}$，故直线过定点$(-4,9)$.

【例 16】已知直线$ax-y+2a+1=0$，（1）若$x\in(-1,1)$时，$y>0$恒成立，求a的取值范围；（2）若$a\in(-\dfrac{1}{6},1)$时，恒有$y>0$，求x的取值范围.

【解析】（1）$y=ax+2a+1>0$对$x\in(-1,1)$恒成立，则$\begin{cases}a\cdot(-1)+2a+1\geq0\\a\cdot(1)+2a+1\geq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\geq-1\\a\geq-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow a\geq-\dfrac{1}{3}$

（2）$y=a(x+2)+1>0$对$a\in(-\dfrac{1}{6},1)$恒成立，则$\begin{cases}\left(-\dfrac{1}{6}\right)\cdot(x-2)+1\geq0\\(1)\cdot(x-2)+1\geq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq8\\x\geq1\end{cases}\Rightarrow1\leq x\leq8$.

五．两条直线的交点坐标

1．设两条直线分别为l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ 则l_1与l_2是否有交点，只需看方程组$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$是否有唯一解，若方程组有唯一解，则这两条直线相交，此解就是交点的坐标；若方程组无解，则两条直线无公共点，此时两条直线平行；若方程组有无穷多解，则两直线重合.

秒杀秘籍：第三讲 过直线交点的直线系方程

经过两直线$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$与$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$交点的直线系方程为

$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$，其中 λ 是待定系数.

【例 17】求经过两直线 $2x-3y-3=0$ 和 $x+y+2=0$ 的交点且与直线 $3x+y-1=0$ 平行的直线方程.

【解析】设直线方程为 $2x-3y-3+\lambda(x+y+2)=0$，直线平行于 $3x+y-1=0$，故 $\frac{2+\lambda}{3}=\frac{-3+\lambda}{1}\neq\frac{-3+2\lambda}{-1}\Rightarrow\lambda=\frac{11}{2}$，即 $15x+5y+16=0$.

2．对称问题

（1）点关于点的对称，点 $A(a,b)$ 关于 $P_0(x_0,y_0)$ 的对称点 $B(m,n)$，则由中点坐标公式 $m=2x_0-a,n=2y_0-b$，即 $B(2x_0-a,2y_0-b)$.

（2）点关于直线的对称，点 $A(x_0,y_0)$ 关于直线 $l:Ax+By+C=0$（A，B 不同时为 0）的对称点 $A'(x_1,y_1)$，则有 AA' 的中点在 l 上且直线 AA' 与已知直线 l 垂直.

（3）直线关于直线的对称，一般转化为点关于直线的对称解决（详见秘籍）.

秒杀秘籍：第四讲 关于直线对称的问题

定理 1：点 $A(x_0,y_0)$ 关于直线 $l:x=m$ 对称的点坐标为 $A'(2m-x_0,y_0)$.

点 $A(x_0,y_0)$ 关于直线 $l:y=n$ 对称的点坐标为 $A'(x_0,2n-y_0)$.

直线 $l_1:Ax+By+C=0$ 关于直线 $l:x=m$ 对称的直线方程为 $l_2:A(2m-x)+By+C=0$.

直线 $l_1:Ax+By+C=0$ 关于直线 $l:y=n$ 对称的直线方程为 $l_2:Ax+B(2n-y)+C=0$.

定理 2：点 $A(x_0,y_0)$ 关于直线 $l:x+y+C=0$ 对称的点坐标为 $A'(-C-y_0,-C-x_0)$.

点 $A(x_0,y_0)$ 关于直线 $l:x-y+C=0$ 对称的点坐标为 $A'(-C+y_0,C+x_0)$.

直线 $l_1:Ax+By+C'=0$ 关于直线 $l:x+y+C=0$ 对称的直线方程为 $l_2:A(-C-y)+B(-C-x)+C'=0$；

直线 $l_1:Ax+By+C'=0$ 关于直线 $l:x-y+C=0$ 对称的直线方程为 $l_2:A(-C+y)+B(C+x)+C'=0$；

关于定理 2，只需记住 $\begin{cases}x_0+y+C=0\\x+y_0+C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-C-x_0\\x=-C-y_0\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}x_0-y+C=0\\x-y_0+C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=C+x_0\\x=-C+y_0\end{cases}$

【例 18】已知直线 $l:x+y-1=0$，试求：①点 $P(4,5)$ 关于 l 的对称坐标；②直线 $l_1:y=2x+3$ 关于直线 l 的对称的直线方程.

【解析】①设点 $P(4,5)$ 关于 l 对称的点 $P'(x',y')$，则有 $\begin{cases}\frac{4+x'}{2}+\frac{5+y'}{2}-1=0\\\frac{y'-5}{x'-4}=1\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x'=1-5=-4\\y'=1-4=-3\end{cases}$，故 P 关于直线 l 对称的坐标为 $(-4,-3)$.

②在直线 $l_1:y=2x+3$ 上任取一点 $A(x_0,y_0)$，A 关于 l 对称的点 $A'(x',y')$，则有 $\begin{cases}\frac{x_0+x'}{2}+\frac{y_0+y'}{2}-1=0\\\frac{y'-y_0}{x'-x_0}=1\end{cases}$

解得：$\begin{cases}x_0=1-y'\\y_0=1-x'\end{cases}$，由于 $A(x_0,y_0)$ 在直线 l_1 上，故 $y_0=2x_0+3$，要求的直线为 $1-x'=2(1-y')+3$，化简得：$x'-2y'+4=0$，即 $x-2y+4=0$.

第五讲 距离问题

六．两点间的距离，点到直线间的距离

（1）两点间的距离：已知 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 则 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

（2）点到直线的距离: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{A^2+B^2}$

注意：①若给出的方程不是一般式，则应先把方程化为一般式，再利用公式求距离；

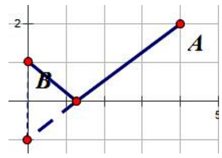
②点到直线的距离是点到直线上的点的最短距离；

③若点在直线上，则点到直线的距离为 0，但距离公式仍然成立，因为此时 $Ax_0+By_0+C=0$.

（3）两平行线间的距离：两条平行直线 $l_1:Ax+By+C_1=0$ 与 $l_2:Ax+By+C_2=0$ 的距离公式 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

注意：应用此公式时，要把两直线化为一般式，且 x，y 的系数分别相等．

【例 19】求函数 $y=\sqrt{x^2-8x+20}+\sqrt{x^2+1}$ 的最小值．



【解析】$y=\sqrt{(x-4)^2+4}+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{(x-4)^2+(0-2)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(0-1)^2}$ 表示 y 轴上的任意一点到点 $A(4,2)$ 和点 $B(0,1)$ 距离的和，如图，根据对称原理，可知 $y_{\min}=\sqrt{(4-0)^2+[2-(-1)]^2}=5$.

【例 20】求经过点 $A(-1,2)$ 与 $B(-\dfrac{5}{2},0)$ 的直线上一点 $C(5,n)$ 到直线 $x+y=1$ 的距离．

【解析】经过 AB 的直线方程为 $\dfrac{y-0}{2-0}=\dfrac{x+\frac{5}{2}}{-1+\frac{5}{2}}\Rightarrow 4x-3y+10=0$，故点 C 坐标为 $(5,10)$，C 到直线的距离为 $d=\dfrac{|5+10-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=7\sqrt{2}$.

【例 21】求经过点 $A(1,2)$ 且到原点的距离等于 1 的直线方程．

【解析】设直线方程为 $y-2=k(x-1)\Rightarrow kx-y+2-k=0$，原点到直线的距离为 1，即 $1=\dfrac{|0+0+2-k|}{\sqrt{k^2+1^2}}$，$k^2+1=4-4k+k^2\Rightarrow k=\dfrac{3}{4}$，故直线方程为 $3x-4y+5=0$；由于直线 $x=1$ 到原点距离也为 1，故存在这两条直线满足条件．（注意：距离问题一般有两条直线，如果求出答案只有一条，则另一条直线斜率不存在．）

【例 22】已知△ABC 中，点 $A(1,1)$，$B(m,\sqrt{m})$（$1<m<4$），$C(4,2)$，求 m 为何值时三角形面积最大．

【解析】由题意得：$|AC|=\sqrt{(4-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$，$AC$ 的直线方程为 $\dfrac{y-1}{2-1}=\dfrac{x-1}{4-1}\Rightarrow x-3y+2=0$，$B$ 到 AC 的距离 $d=\dfrac{|m-3\sqrt{m}+2|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}$，当 d 取得最大值时，△ABC 面积最大，令 $t=\sqrt{m}(t\in(1,2))$，

$f(t)=|t^2-3t+2|=\left|\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right|$，当 $t=\dfrac{3}{2}$，即 $m=\dfrac{9}{4}$ 时，d 取得最大值．

【例 23】求过点 $P(1,2)$ 且与 $A(2,3)$，$B(4,-5)$ 两点距离相等的直线方程．

【解析】设直线方程为 $y-2=k(x-1)\Rightarrow kx-y+2-k=0$，

$\dfrac{|2k-3+2-k|}{\sqrt{k^2+1^2}}=\dfrac{|4k+5+2-k|}{\sqrt{k^2+1^2}}\Rightarrow k=-4$ 或 $k=-\dfrac{3}{2}$，故直线方程为 $4x+y-6=0$ 或 $3x+2y-7=0$.

达标训练

1．过三点 $A(1,3)$，$B(4,2)$，$C(1,-7)$ 的圆交 y 轴于 M、N 两点，则 $|MN|=$（　　）

A．$2\sqrt{6}$　　B．8　　C．$4\sqrt{6}$　　D．10

2．（2018•广西）直线 $2x+y+m=0$ 和 $x+2y+n=0$ 的位置关系是（　　）

A．平行　　B．垂直　　C．相交但不垂直　　D．不能确定

3．（2019•哈尔滨模拟）已知直线 $3x+2y-3=0$ 与 $6x+my+7=0$ 互相平行，则它们之间的距离是（　　）

A．4　　B．$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　　C．$\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$　　D．$\dfrac{7\sqrt{13}}{26}$

4．（2018•武清模拟）直线 $3x+\sqrt{3}y-1=0$ 的倾斜角是（　　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{5\pi}{6}$

5．（2019•湖南模拟）若直线 $y=kx+2$ 的斜率为 2，则 $k=$（　　）

A．-2　　B．2　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

6．（2018•娄星模拟）直线 l 与直线 $x-\sqrt{3}y+1=0$ 垂直，则直线 l 的斜率为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$-\sqrt{3}$

7．（2018•海淀期末）已知点 $A(a,a)(a\neq 0)$，$B(1,0)$，O 为坐标原点．若点 C 在直线 OA 上，且 BC 与 OA 垂直，则点 C 的坐标是（　　）

A．$(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2})$　　B．$(\dfrac{a}{2},-\dfrac{a}{2})$　　C．$(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2})$　　D．$(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

8．（2018•北京模拟）已知过两点 $A(-1,1)$，$B(4,a)$ 的直线斜率为 1，那么 a 的值是（　　）

A．-6　　B．-4　　C．4　　D．6

9．（2018•湖北模拟）若直线 $l_1:2x+(m+1)y+4=0$ 与直线 $l_2:mx+3y-2=0$ 平行，则 m 的值为（　　）

A．-2　　B．-3　　C．2 和 -3　　D．-2 和 -3

10．（2019•九江二模）过点 $P(-2,2)$ 作直线 l，使直线 l 与两坐标轴在第二象限内围成的三角形面积为 8，这样的直线 l 一共有（　　）

A．3 条　　B．2 条　　C．1 条　　D．0 条

11．（2018•黄山一模）已知点 A 在直线 $x+2y-1=0$ 上，点 B 在直线 $x+2y+3=0$ 上，线段 AB 的中点为 $P(x_0,y_0)$，且满足 $y_0>x_0+2$，则 $\dfrac{y_0}{x_0}$ 的取值范围为（　　）

A．$(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{5})$　　B．$(-\infty,-\dfrac{1}{5}]$　　C．$(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{5}]$　　D．$(-\dfrac{1}{2},0)$

12．（2018•漳州模拟）过点 $M(-3,2)$，且与直线 $x+2y-9=0$ 平行的直线方程是（　　）

A．$2x-y+8=0$　　B．$x-2y+7=0$　　C．$x+2y+4=0$　　D．$x+2y-1=0$

13．已知直线 $l_1:(m-1)x+y+2=0$，$l_2:8x+(m+1)y+(m-1)=0$，且 $l_1//l_2$，则 $m=$（　　）

A．$\dfrac{7}{9}$　　B．± 3　　C．3　　D．-3

14．（2019•青岛模拟）直线 $l_1:(a-1)x+y-1=0$ 和 $l_2:3x+ay+2=0$ 垂直，则实数 a 的值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{3}{4}$

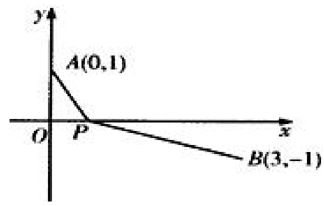
15．（2019•潍坊二模）已知两点 $M(-1,0)$，$N(1,0)$，若直线 $y=k(x-2)$ 上存在点 P，使得 $PM\perp PN$，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$[-\frac{1}{3},0)\cup(0,\frac{1}{3}]$　　B．$[-\frac{\sqrt{3}}{3},0)\cup(0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$　　C．$[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$　　D．$[-5,5]$

16．（2018•陕西模拟）数学家欧拉在1765年提出定理：三角形的外心、重心、垂心依次位于同一直线上，且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半，这条直线被后人称之为三角形的欧拉线．已知△ABC 的顶点 $A(2,0)$，$B(0,4)$，且 $AC=BC$，则△ABC 的欧拉线的方程为（　　）

A．$x+2y+3=0$　　B．$2x+y+3=0$　　C．$x-2y+3=0$　　D．$2x-y+3=0$

17．（2015•衡阳模拟）某同学在研究函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-6x+10}$ 的性质时，受到两点间距离公式的启发，将 $f(x)$ 变形为 $f(x)=\sqrt{(x-0)^2+(0-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(0+1)^2}$，则 $f(x)$ 表示 $|PA|+|PB|$（如右图），则 ① $f(x)$ 的图象是中心对称图形；② $f(x)$ 的图象是轴对称图形；③函数 $f(x)$ 的值域为 $[\sqrt{13},+\infty)$；④函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,3)$ 上单调递减；⑤方程 $f[f(x)]=1+\sqrt{10}$ 有两个解．上述关于函数 $f(x)$ 的描述正确的个数为（　　）



A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

18．（2018•顺义二模）设 m，$n\in R$，若直线 $l:mx+ny-1=0$ 与 x 轴相交于点 A，与 y 轴相交于点 B，且坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\sqrt{3}$，则△AOB 的面积 S 的最小值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．2　　C．3　　D．4

19．已知直线 $l_1:3x+4y-2=0$，$l_2:mx+2y+1+2m=0$，当 $l_1//l_2$ 时，两条直线的距离是（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．2　　D．$\frac{3}{5}$

20．点 $P(x,y)$ 是直线 $l:x+y+3=0$ 上的动点，点 $A(2,1)$，则 $|AP|$ 的最小值是（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$3\sqrt{2}$　　D．$4\sqrt{2}$

21．（2018•桂林期末）若三点 $A(2,3)$，$B(3,4)$，$C(a,b)$ 共线，则有（　　）

A．$a=3$，$b=-5$　　B．$a-b+1=0$　　C．$2a-b=3$　　D．$a-2b=0$

22．（2015•黑龙江期末）已知 a，b 满足 $a+2b=1$，则直线 $ax+3y+b=0$ 必过定点（　　）

A．$(-\frac{1}{6},\frac{1}{2})$　　B．$(\frac{1}{2},-\frac{1}{6})$　　C．$(\frac{1}{2},\frac{1}{6})$　　D．$(\frac{1}{6},-\frac{1}{2})$

23．已知直线方程为 $(2+m)x+(1-2m)y+4-3m=0$．这条直线恒过一定点，这个定点坐标为（　　）

A．$(-2m,-m-4)$　　B．$(5,1)$　　C．$(-1,-2)$　　D．$(2m,m+4)$

24．（2018•招远期末）直线 $y=3x+1$ 关于 y 轴对称的直线方程为（　　）

A．$y=-3x-1$　　B．$y=3x-1$　　C．$y=-x+1$　　D．$y=-3x+1$

25．（2018•湖北期末）与直线 $4x-3y+5=0$ 关于 x 轴对称的直线方程为（　　）

A．$4x+3y+5=0$　　B．$4x-3y+5=0$　　C．$4x+3y-5=0$　　D．$4x-3y-5=0$

26．（2018•尤溪期中）点 $M(4,m)$ 关于点 $N(n,-3)$ 的对称点为 $P(6,-9)$，则（　　）

A．$m=-3$，$n=10$　　B．$m=3$，$n=10$　　C．$m=-3$，$n=5$　　D．$m=3$，$n=5$

27．（2018•景县期中）已知点 A（7，−4），$B(-5,6)$，则线段 AB 垂直平分线方程是（　　）

A．$6x-5y-1=0$　　B．$5x+6y+1=0$　　C．$6x+5y-1=0$　　D．$5x-6y-1=0$

28．不论 m 如何变化，直线 $(m+2)x-(2m-1)y-(3m-4)=0$ 恒过定点（　　）

A．$(1,2)$　　B．$(-1,2)$　　C．$(2,1)$　　D．$(-2,-1)$

29．已知点 $A(1,-2)$，$B(5,6)$ 到直线 $l:ax+y+1=0$ 的距离相等，则实数 a 的值等于（　　）

A．-2 或 1　　B．1 或 2　　C．-2 或 -1　　D．-1 或 2

30．点 P 在直线 $l:x-y-1=0$ 上运动，$A(4,1)$，$B(2,0)$，则 $|PA|+|PB|$ 的最小值是（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$\sqrt{6}$　　C．3　　D．4

31．已知点 $A(-3,5)$，$B(0,3)$，试在直线 $y=x+1$ 上找一点 P，使 $|PA|+|PB|$ 最小，并求出最小值．

32．一条光线 $3x-y-12=0$，被直线:$l:x+y=1$ 反射，求反射光线的方程．

33．求直线 $2x-3y+1=0$ 关于直线 $y=x+1$ 对称的直线方程．