专题 3　对称问题

秒杀秘籍：第一讲　对称问题原理

1．点关于点成中心对称的对称中心恰是这两点为端点的线段的中点，因此中心对称的问题是线段中点坐标公式的应用问题．

设 $P(x_0\,,y_0)$，对称中心为 $A(a\,,b)$，则 P 关于 A 的对称点为 $P'(2a-x_0\,,2b-y_0)$．

2．点关于直线成轴对称问题

由轴对称定义知，对称轴即为两对称点连线的“垂直平分线”。利用“垂直”“平分”这两个条件建立方程组，就可求出对顶点的坐标。一般情形如下：设点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 $y=kx+b$ 的对称点为 $P'(x',y')$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{y'-y_0}{x'-x_0}\cdot k=-1\\ \dfrac{y'+y_0}{2}=k\cdot\dfrac{x_0+x'}{2}+b\end{cases}$$，可求出 x'、y'．

特殊地，点 $P(x_0\,,y_0)$ 关于直线 $x=a$ 的对称点为 $P'(2a-x_0\,,y_0)$；点 $P(x_0\,,y_0)$ 关于直线 $y=b$ 的对称点为 $P(x_0\,,2b-y_0)$．

3．曲线关于点、曲线关于直线的中心或轴对称问题：一般是转化为点的中心对称或轴对称（这里既可选特殊点，也可选任意点实施转化）．

一般结论如下：

（1）曲线 $f(x\,,y)=0$ 关于已知点 $A(a\,,b)$ 的对称曲线的方程是 $f(2a-x\,,2b-y)=0$．

（2）曲线 $f(x\,,y)=0$ 关于直线 $y=kx+b$ 的对称曲线的求法：

设曲线 $f(x\,,y)=0$ 上任意一点为 $P(x_0\,,y_0)$，P 点关于直线 $y=kx+b$ 的对称点为 $P'(x\,,y)$，则由（2）知，P 与 P' 的坐标满足 $\begin{cases}\dfrac{y'-y_0}{x'-x_0}\cdot k=-1\\ \dfrac{y'+y_0}{2}=k\cdot\dfrac{x_0+x'}{2}+b\end{cases}$，从中解出 x_0、y_0，代入已知曲线 $f(x\,,y)=0$，应有 $f(x\,,y)=0$ 利用坐标代换法就可求出曲线 $f(x\,,y)=0$ 关于直线 $y=kx+b$ 的对称曲线方程.

4．两点关于点对称、两点关于直线对称的常见结论：

（1）点 $(x\,,y)$ 关于 x 轴的对称点为 $(x\,,-y)$．

（2）点 $(x\,,y)$ 关于 y 轴的对称点为 $(-x\,,y)$．

（3）点 $(x\,,y)$ 关于原点的对称点为 $(-x\,,-y)$．

（4）点 $(x\,,y)$ 关于直线 $x-y=0$ 的对称点为 $(y\,,x)$．

（5）点 $(x\,,y)$ 关于直线 $x+y=0$ 的对称点为 $(-y\,,-x)$．

（6）点 $(x\,,y)$ 关于直线 $x-y+c=0$ 的对称点为 $(y-c\,,x+c)$．

（7）点 $(x\,,y)$ 关于直线 $x+y+c=0$ 的对称点为 $(-c-y\,,-c-x)$．

【例 1】求直线 $a:2x+y-4=0$ 关于直线 $l:3x+4y-1=0$ 对称的直线 b 的方程.

【解析】设直线 b 上的动点 $P(x\,,y)$，直线 a 上的点 $Q(x_0\,,y_0)$，且 P、Q 两点关于直线 l：$3x+4y-1=0$ 对称，

则有 $\begin{cases} 3\dfrac{x+x_0}{2}+4\dfrac{y+y_0}{2}-1=0 \\ \dfrac{y-y_0}{x-x_0}=\dfrac{4}{3} \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x_0=\dfrac{7x-24y+6}{25} \\ y_0=\dfrac{-24x-7y+8}{25} \end{cases}$，代入方程 $2x_0+y_0-4=0$ 得，$2x+11y+16=0$．

【例 2】求圆 $x^2+y^2+4x-12y+39=0$ 关于直线 $3x-4y-5=0$ 的对称圆方程．

【解析】圆方程可化为 $(x+2)^2+(y-6)^2=1$，圆心 $C(-2,6)$，半径为 1． 设对称圆圆心为 $C'(a,b)$，则 C' 与 C 关于直线 $3x-4y-5=0$ 对称，因此有 $\begin{cases} 3\cdot\dfrac{a-2}{2}-4\cdot\dfrac{b+6}{2}-5=0 \\ \dfrac{b-6}{a+2}\cdot\dfrac{3}{4}=-1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=\dfrac{32}{5} \\ b=-\dfrac{26}{5} \end{cases}$．

∴ 所求圆的方程为 $(x-\dfrac{32}{5})^2+(y+\dfrac{26}{5})^2=1$．

【例 3】自点 $A(-3,3)$ 发出的光线 l 射到 x 轴上，被 x 轴反射，其反射光线所在的直线与圆 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相切，求光线 l 所在的直线方程．

【解析】由已知可得圆 C：$(x-2)^2+(y-2)^2=1$ 关于 x 轴对称的圆 C' 的方程为 $(x-2)^2+(y+2)^2=1$，其圆心 C'（2，−2），易知 l 与圆 C' 相切． 设 $l: y-3=k(x+3)$，即 $kx-y+3k+3=0$．∴ $\dfrac{|5k+5|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，整理得 $12k^2+25k+12=0$， 解得 $k=-\dfrac{3}{4}$ 或 $k=-\dfrac{4}{3}$．所以，所求直线方程为 $y-3=-\dfrac{3}{4}(x+3)$ 或 $y-3=-\dfrac{4}{3}(x+3)$，即 $3x+4y-3=0$ 或 $4x+3y+3=0$．

【例 4】已知点 $M(3,5)$，在直线 $l: x-2y+2=0$ 和 y 轴上各找一点 P 和 Q，使△MPQ 的周长最小．

【剖析】如下图，作点 M 关于直线 l 的对称点 M_1，再作点 M 关于 y 轴的对称点 M_2，连结 MM_1、MM_2，连线 MM_1、MM_2 与 l 及 y 轴交于 P 与 Q 两点，由轴对称及平面几何知识，可知这样得到的△MPQ 的周长最小．

【解析】由点 M（3，5）及直线 l，可求得点 M 关于 l 的对称点 $M_1(5,1)$．同样容易求得点 M 关于 y 轴的对称点 $M_2(-3,5)$．据 M_1 及 M_2 两点可得到直线 M_1M_2 的方程为 $x+2y-7=0$．令 $x=0$，得到 M_1M_2 与 y 轴的交点 Q（$0,\dfrac{7}{2}$）． $\begin{cases} x+2y-7=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{9}{4} \end{cases}$ 故点 P（$\dfrac{5}{2},\dfrac{9}{4}$）、$Q$（$0,\dfrac{7}{2}$）即为所求．

秒杀秘籍：第二讲　对称的重要定理

曲线（或直线 ）$C: F(x,y)=0$ 关于直线 $l: f(x,y)=Ax+By+C=0$ 的对称曲线 C'（或直线 ）的方程为：

$$F[x-\frac{2A}{A^2+B^2}f(x,y),\ y-\frac{2B}{A^2+B^2}f(x,y)]=0．$$

证明：设 $M(x,y)$ 是曲线 C' 上的任意一点 $M(x,y)$，它关于 l 的对称点为 $M'(x',y')$，则 $M'\in C$

于是 $F(x',y')=0$　　　　①

∵ M 与 M' 关于直线 l 对称．

$\therefore\begin{cases}B(x-x')-A(y-y')=0\\ A\cdot\dfrac{x+x'}{2}+B\cdot\dfrac{y+y'}{2}+C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=x-\dfrac{2A}{A^2+B^2}f(x,y)\\ y'=y-\dfrac{2B}{A^2+B^2}f(x,y)\end{cases}$　　②

②代入①，得 $F[x-\dfrac{2A}{A^2+B^2}f(x,y)\ ,\ y-\dfrac{2B}{A^2+B^2}f(x,y)]=0$，此即为曲线 C' 的方程.

【例 5】试求直线 $l_1:x+y-1=0$ 关于直线 $l_2:3x-y-3=0$ 对称的直线 l 的方程.

【解析】由定理知，直线 $l_1:F(x,y)=x+y-1=0$ 关于直线 $l_2:f(x,y)=3x-y-3=0$ 的对称曲线 l 的方程为：

$F[x-\dfrac{2\times3}{3^2+1^2}f(x,y),y-\dfrac{2\times(-1)}{3^2+1^2}f(x,y)]=0\Rightarrow F[x-\dfrac{3}{5}(3x-y-3),y+\dfrac{1}{5}(3x-y-3)]=0$

$\Rightarrow F(-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y+\dfrac{9}{5},\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y-\dfrac{3}{5})=0\Rightarrow-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y+\dfrac{9}{5}+(\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y-\dfrac{3}{5})-1=0$

$\Rightarrow-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{7}{5}y+\dfrac{1}{5}=0,$

即 $x-7y-1=0$

所以直线 l 的方程是 $x-7y-1=0$.

【例 6】圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 关于直线 $l:x-2y-2=0$ 对称的圆的方程____________.

【解析】$F\left[x-\dfrac{2\times1}{1^2+2^2}f(x,y),y-\dfrac{2\times(-2)}{1^2+2^2}f(x,y)\right]=0$

$\Rightarrow F[x-\dfrac{2}{5}(x-2y-2),y+\dfrac{4}{5}(x-2y-2)]=0$

$\Rightarrow\left(\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y-\dfrac{1}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}x-\dfrac{3}{5}y-\dfrac{13}{5}\right)^2=1\Rightarrow\left(x-\dfrac{11}{5}\right)^2+\left(y+\dfrac{7}{5}\right)^2=1$

达标训练

1．已知点 $A(1,3)$、$B(5,2)$，在 x 轴上找一点 P，使得 $|PA|+|PB|$ 最小，则最小值为_________，P 点的坐标为_________.

2．已知点 $M(a,b)$ 与 N 关于 x 轴对称，点 P 与点 N 关于 y 轴对称，点 Q 与点 P 关于直线 $x+y=0$ 对称，则点 Q 的坐标为（　　）

A．(a,b)　　B．(b,a)　　C．$(-a,-b)$　　D．$(-b,-a)$

3．已知直线 $l_1:x+my+5=0$ 和直线 $l_2:x+ny+p=0$，则 l_1、l_2 关于 y 轴对称的充要条件是（　　）

A．$\dfrac{5}{m}=\dfrac{p}{n}$　　B．$p=-5$　　C．$m=-n$ 且 $p=-5$　　D．$\dfrac{1}{m}=-\dfrac{1}{n}$ 且 $p=-5$

4．点 $A(4,5)$ 关于直线 l 的对称点为 $B(-2,7)$，则 l 的方程为____________.

5．设直线 $x+4y-5=0$ 的倾斜角为 θ，则它关于直线 $y-3=0$ 对称的直线的倾斜角是____________.

6．已知圆 C 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 关于直线 $y=-x$ 对称，则圆 C 的方程为（　　）

A．$(x+1)^2+y^2=1$　　B．$x^2+y^2=1$　　C．$x^2+(y+1)^2=1$　　D．$x^2+(y-1)^2=1$

7．与直线 $x+2y-1=0$ 关于点 $(1,-1)$ 对称的直线方程为（　　）

A．$2x-y-5=0$　　B．$x+2y-3=0$　　C．$x+2y+3=0$　　D．$2x-y-1=0$

8．两直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 和 $x=1$ 关于直线 l 对称，直线 l 的方程是___________.

9．直线 $2x-y-4=0$ 上有一点 P，它与两定点 $A(4,-1)$、$B(3,4)$ 的距离之差最大，则 P 点的坐标是________.

10．已知△ABC 的一个顶点 $A(-1,-4)$，$\angle B$、$\angle C$ 的平分线所在直线的方程分别为 $l_1: y+1=0$，$l_2: x+y+1=0$，求边 BC 所在直线的方程

11．求函数 $y=\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-8x+41}$ 的最小值．

12．直线 $y=2x$ 是△ABC 中 $\angle C$ 的平分线所在的直线，若 A、B 坐标分别为 $A(-4,2)$、$B(3,1)$，求点 C 的坐标，并判断△ABC 的形状．

13．已知两点 $A(2,3)$、$B(4,1)$，直线 $l: x+2y-2=0$，在直线 l 上求一点 P．

（1）使 $|PA|+|PB|$ 最小；

（2）使 $|PA|-|PB|$ 最大．