专题 4　直线系和圆系方程

定义：如果两条曲线方程是 $f_1(x,y)=0$ 和 $f_2(x,y)=0$，它们的交点是 $P(x_0,y_0)$，方程 $f_1(x,y)+\lambda f_2(x,y)=0$ 的曲线也经过点 P（λ 是任意常数）．由此结论可得出：经过两曲线 $f_1(x,y)=0$ 和 $f_2(x,y)=0$ 交点的曲线系方程为：$f_1(x,y)+\lambda f_2(x,y)=0$．利用此结论可得出相关曲线系方程．

第一讲　直线系

概念：具有某种共同属性的一类直线的集合，称为直线系．它的方程称直线系方程．

几种常见的直线系方程：

（1）过已知点 $P(x_0,y_0)$ 的直线系方程 $y-y_0=k(x-x_0)$（k 为参数）．

（2）斜率为 k 的直线系方程 $y=kx+b$（b 是参数）．

（3）与已知直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线系方程 $Ax+By+\lambda=0$（λ 为参数）．

（4）与已知直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线系方程 $Bx-Ay+\lambda=0$（λ 为参数）．

（5）过直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线系方程：
$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$（$\lambda$ 为参数）．

【例 1】已知直线 $l_1:x+y+2=0$ 与 $l_2:2x-3y-3=0$，求经过的交点且与已知直线 $3x+y-1=0$ 平行的直线 L 的方程．

【解析】设直线 L 的方程为 $2x-3y-3+\lambda(x+y+2)=0$．$\therefore(\lambda+2)x+(\lambda-3)+2\lambda-3=0$．$\because L$ 与直线 $3x+y-1=0$ 平行，$\therefore\dfrac{\lambda+2}{3}=\dfrac{\lambda-3}{1}\neq\dfrac{2\lambda-3}{-1}$．解得：$\lambda=\dfrac{11}{2}$．所以直线 L 的方程为：$15x+5y+16=0$．

【例 2】求证：m 为任意实数时，直线 $(m-1)x+(2m-1)y=m-5$ 恒过一定点 P，并求 P 点坐标．

【分析】不论 m 为何实数时，直线恒过定点，因此，这个定点就一定是直线系中任意两直线的交点．

【解析】由原方程得 $m(x+2y-1)-(x+y-5)=0$，即 $\begin{cases}x+2y-1=0\\x+y-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=9\\y=-4\end{cases}$，$\therefore$ 直线过定点 $P(9,-4)$．

【例 3】求过直线：$x+2y+1=0$ 与直线：$2x-y+1=0$ 的交点且在两坐标轴上截距相等的直线方程．

【解析】设所求直线方程为：$x+2y+1+\lambda(2x-y+1)=0$，当直线过原点时，则 $1+\lambda=0$，则 $\lambda=-1$，此时所求直线方程为：$x-2y=0$；当所求直线不过原点时，令 $x=0$，解得 $y=\dfrac{\lambda+1}{\lambda-2}$，令 $y=0$，解得 $x=-\dfrac{\lambda+1}{2\lambda+1}$，由题意得，$\dfrac{\lambda+1}{\lambda-2}=-\dfrac{\lambda+1}{2\lambda+1}$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，此时，所求直线方程为：$5x+5y+4=0$．综上所述，所求直线方程为：$x-2y=0$ 或 $5x+5y+4=0$．

第二讲　圆系

概念：具有某种共同属性的圆的集合，称为圆系．

几种常见的圆系方程：

（1）同心圆系：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，x_0、y_0 为常数，r 为参数．

（2）过两已知圆 $C_1:f_1(x,y)=x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$．和 $C_2:f_2(x,y)=x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的交点的圆系方程为：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0(\lambda\neq-1)$

若 $\lambda=-1$ 时，变为 $(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0$，则表示过两圆的交点的直线.

其中两圆相交时，此直线表示为公共弦所在直线，当两圆相切时，此直线为两圆的公切线，当两圆相离时，此直线表示与两圆连心线垂直的直线.

（3）过直线与圆交点的圆系方程：设直线 $L:Ax+By+C=0$ 与圆 $C:x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 相交，则过直线 L 与圆 C 交点的圆系方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$.

【例 4】求过圆：$x^2+y^2-2x+2y+1=0$ 与圆：$x^2+y^2+4x-2y-4=0$ 的交点，圆心在直线：$x-2y-5=0$ 圆的方程.

【解析】设所求圆的方程为：$x^2+y^2-2x+2y+\lambda(x^2+y^2+4x-2y-4)=0(\lambda\neq-1)$．整理得 $(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+(4\lambda-2)x+2(1-\lambda)y+1-4\lambda=0$，所以所求圆的圆心为 $(\frac{1-2\lambda}{1+\lambda},\frac{\lambda-1}{1+\lambda})$，由已知所求圆的圆心在直线：$x-2y+5=0$ 上，所以 $\frac{1-2\lambda}{1+\lambda}-2\times\frac{\lambda-1}{1+\lambda}+5=0$，解得，$\lambda=-8$，代入圆系方程整理得，所求圆的方程为 $x^2+y^2+\frac{35}{7}x-\frac{18}{7}y+\frac{33}{7}=0$.

【例 5】求经过两条曲线 $x^2+y^2+3x-y=0$① 和 $3x^2+3y^2+2x+y=0$② 交点的直线方程.

【解析】先化②为圆的一般式方程：$x^2+y^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=0$③ 由①—③得：$(3-\frac{2}{3})x+(-1-\frac{1}{3})y=0$

即 $7x-4y=0$．此为所求直线方程.

【例 6】求过直线 $2x+y+4=0$ 和圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 的交点，且过原点的圆方程.

【解析】根据（3），设所求圆的方程为：$x^2+y^2+2x-4y+1+\lambda(2x+y+4)=0$.

即 $x^2+y^2+2(1+\lambda)x+(\lambda-4)y+(1+4\lambda)=0$，因为过原点，所以 $1+4\lambda=0$，得 $\lambda=-\frac{1}{4}$.

故所求圆的方程为：$x^2+y^2+\frac{3}{2}x-\frac{17}{4}y=0$.

【例 7】已知圆 O：$x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 和圆外一点 $A(3,4)$，过点 A 作圆的切线，切点分别为 C、D，求过切点 C、D 的直线方程.

【分析】本题是求过切点的直线方程，由切线性质知，切点在以线段 AO 为直径的圆上，故直线 CD 是以线段 AO 为直径的圆与圆 O 的公共弦所在的直线方程，故可用过两圆交点的曲线系方程求此直线方程.

【解析】由切线性质知，切点 C、D 在以线段 AO 为直径的圆上，由题知，$O(1,-2)$，

$\therefore|AO|=\sqrt{(3-1)^2+(4+2)^2}=2\sqrt{10}$，线段 AO 的中点为 $(2,1)$，$\therefore$ 以线段 AO 为直径的圆的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=10$，即 $x^2+y^2-4x-2y-5=0$，圆 O 的方程与以 AO 为直径的圆的方程相减整理得：$x+3y+3=0$，$\therefore$ 直线 CD 的方程为 $x+3y+3=0$.

【例 8】求过点 $P(-1,4)$ 圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 的切线的方程.

【解析】设所求直线的方程为 $A(x+1)+B(y-4)=0$（其中 A,B 不全为零），则整理有 $Ax+By+A-4B=0$，$\because$ 直线 l 与圆相切，$\therefore$ 圆心 $C(2,3)$ 到直线 l 的距离等于半径 1，故 $\frac{|2A+3B+A-4B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=1$，整理，得 $A(4A-3B)=0$，即 $A=0$（这时 $B\neq0$），或 $A=\frac{3}{4}B\neq0$．故所求直线 l 的方程为 $y=4$ 或 $3x+4y-13=0$.

【例 9】平面上有两个圆，它们的方程分别是 $x^2+y^2=16$ 和 $x^2+y^2-6x+8y+24=0$，求这两个圆的内公切线方程.

【解析】 $\because x^2+y^2-6x+8y+24=0\Rightarrow(x-3)^2+(y+4)^2=1$，

$\therefore$ 这两圆是外切，$\therefore(x^2+y^2-6x+8y+24)-(x^2+y^2-16)=0\Rightarrow3x-4y-20=0$，$\therefore$ 所求的两圆内公切线的方程为：$3x-4y-20=0$.

【例 10】已知圆 $x^2+y^2+x-6y+m=0$ 与直线 $x+2y-3=0$ 相交于 P，Q 两点，O 为坐标原点，若 $OP\perp OQ$，求实数 m 的值.

【分析】充分挖掘本题的几何关系 $OP\perp OQ$，不难得出 O 在以 PQ 为直径的圆上．而 P，Q 刚好为直线与圆的交点，选取过直线与圆交点的圆系方程，可极大地简化运算过程.

【解析】过直线 $x+2y-3=0$ 与圆 $x^2+y^2+x-6y+m=0$ 的交点的圆系方程为：

$x^2+y^2+x-6y+m+\lambda(x+2y-3)=0$，即 $x^2+y^2+(1+\lambda)x+2(\lambda-3)y+m-3\lambda=0$①

依题意，O 在以 PQ 为直径的圆上，则圆心 $(-\frac{1+\lambda}{2},3-\lambda)$ 显然在直线 $x+2y-3=0$ 上，则 $-\frac{1+\lambda}{2}+2(3-\lambda)-3=0$，解之可得 $\lambda=1$，又 $O(0,0)$ 满足方程①，则 $m-3\lambda=0$，故 $m=3$.

达标训练

1．求证：无论 m 取何实数时，直线 $(m-1)x-(m+3)y-(m-11)=0$ 恒过定点，并求出定点的坐标.

2．求过两直线 $x-2y+4=0$ 和 $x+y-2=0$ 的交点，且满足下列条件的直线 L 的方程.

（1）过点 $(2,1)$；（2）和直线 $3x-4y+5=0$ 垂直.

3．过点 $P(3,1)$ 作曲线 $C:x^2+y^2-2x=0$ 的两条切线，切点分别为 A，B，则直线 AB 的方程为（　　）

A．$2x+y-3=0$　　B．$2x-y-3=0$　　C．$4x-y-3=0$　　D．$4x+y-3=0$

4．对于任意实数 λ，曲线 $(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+(6-4\lambda)x-16-6\lambda=0$ 恒过定点__________.

5．求经过两圆 $x^2+y^2+3x-y-2=0$ 和 $3x^2+3y^2+2x+y+1=0$ 交点和坐标原点的圆的方程.

6. 求经过两圆 $x^2+y^2+6x-4=0$ 和 $x^2+y^2+6y-28=0$ 的交点,并且圆心在直线 $x-y-4=0$ 上的圆的方程.

7．求与圆 $x^2+y^2-4x-2y-20=0$ 切于 $A(-1,-3)$，且过 $B(2,0)$ 的圆的方程.

8．求过两圆 $x^2+y^2=5$ 和 $(x-1)^2+(y-1)^2=16$ 的交点且面积最小的圆的方程.

9．求经过直线 $l:2x+y+4=0$ 与圆 $C:x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 的交点且面积最小的圆的方程.

10．在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 过点 $(0,-1)$，$(3+\sqrt{2},0)$，$(3-\sqrt{2},0)$．

（1）求圆 C 的方程；

（2）是否存在实数 α，使得圆 C 与直线 $x+y+\alpha=0$ 交于 A，B 两点，且 $OA\perp OB$，若存在，求出 α 的值，若不存在，请说明理由．

11．已知圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=25$，直线 $l:(2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0(m\in R)$．

（1）证明：不论 m 取什么实数，直线 l 与圆恒交于两点；

（2）求直线被圆 C 截得的弦长最小时 l 的方程．

12．已知圆 $C:x^2+y^2+4x-2y+\alpha=0$，直线 $l:x-y-3=0$，点 O 为坐标原点．

（1）求过圆 C 的圆心且与直线 l 垂直的直线 m 的方程；

（2）若直线 l 与圆 C 相交于 M、N 两点，且 $OM\perp ON$，求实数 α 的值．

13．已知圆 C 的圆心为原点 O，且与直线 $x+y+4\sqrt{3}=0$ 相切．

（1）求圆 C 的方程；

（2）点 P 在直线 $x=8$ 上，过 P 点引圆 C 的两条切线 PA、PB，切点为 A、B，试问，直线 AB 是否过定点，若过定点，请求出；若不过定点，请说明理由．