专题 5　圆系与曲线系

秒杀秘籍：第一讲　圆系和曲线中的四点共圆

圆系：具有某种共同属性的圆的集合.

几种常见的圆系方程：

（1）同心圆系：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，x_0, y_0 为常数，r 为参数.

（2）过两已知圆 $C_1: f_1(x,y)=x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 和 C_2：$f_2(x,y)=x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的交点的圆系方程为：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0\ (\lambda\neq-1)$

若 $\lambda=-1$ 时，变为 $(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0$，则表示过两圆的交点的直线.

其中两圆相交时，此直线表示为公共弦所在直线，当两圆相切时，此直线为两圆的公切线，当两圆相离时，此直线表示与两圆连心线垂直的直线.

（3）过直线与圆交点的圆系方程：设直线 $l: Ax+By+C=0$ 与圆 $C: x^2+y^2+D\ x+E\ \ y+F\ \ =0$ 相交，则过直线 l 与圆 C 交点的圆系方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$.

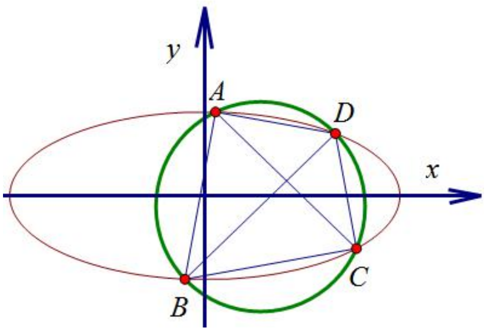
曲线系：两相交直线与圆锥曲线相交构成的共同属性的集合.

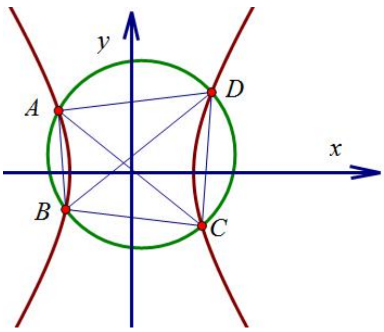
两条直线所组成的二次曲线方程：$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$.

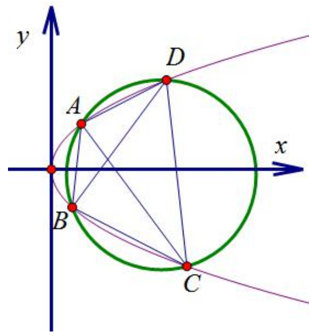
圆锥曲线上的四点共圆问题：设圆锥曲线方程为 $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，则存在四点共圆的情况必为

$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F+\lambda(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0$，由于没有 xy 的项，必有 $a_1b_2+a_2b_1=0$.

定理：圆锥曲线的内接四边形 $ABCD$ 出现四点共圆时，一定有任何一组对边对应所在的直线倾斜角互补. 其方程可以写成 $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F+\lambda(ax+by+c_1)(ax-by+c_2)=0$，此时 $A+\lambda a^2=C-\lambda b^2$，方程表示一个圆.







证明四点共圆的套路：1．设出曲线系方程，解出 λ；　2．根据 $4R^2=D^2+E^2-4F>0$ 证明四点一定共圆.

【例 1】求过圆：$x^2+y^2-2x+2y+1=0$ 与圆：$x^2+y^2+4x-2y-4=0$ 的交点，圆心在直线：$x-2y-5=0$ 的圆的方程.

【解析】设所求圆的方程为：$x^2+y^2-2x+2y+1+\lambda(x^2+y^2+4x-2y-4)=0(\lambda\neq-1)$. 整理得 $(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+(4\lambda-2)x+2(1-\lambda)y+1-4\lambda=0$，所以所求圆的圆心为 $(\frac{1-2\lambda}{1+\lambda},\frac{\lambda-1}{1+\lambda})$，由已知所求圆的

圆心在直线：$x-2y+5=0$ 上，所以 $\frac{1-2\lambda}{1+\lambda}-2\times\frac{\lambda-1}{1+\lambda}+5=0$，解得，$\lambda=-8$，代入圆系方程整理得，所求圆的方程为 $x^2+y^2+\frac{34}{7}x-\frac{18}{7}y-\frac{33}{7}=0$.

【例 2】已知圆 $C:x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 与直线 $x-y+m=0$ 相交于 A,B 两点，O 为坐标原点，若 $OA\perp OB$，求实数 m 的值.

【分析】充分挖掘本题的几何关系 $OA\perp OB$，不难得出 O 在以 AB 为直径的圆上．而 A,B 刚好为直线与圆的交点，选取过直线与圆交点的圆系方程，可极大地简化运算过程.

【解析】过直线 $l:x-y+m=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 的交点的圆系方程为：

$x^2+y^2-2x+4y-4+\lambda(x-y+m)=0$，即 $x^2+y^2+(-2+\lambda)x+(4-\lambda)y-4+\lambda m=0$①

依题意，O 在以 AB 为直径的圆上，则圆心 $(-\frac{-2+\lambda}{2},-\frac{4-\lambda}{2})$ 显然在直线 $x-y+m=0$ 上，则 $-\frac{-2+\lambda}{2}+\frac{4-\lambda}{2}+m=0$，解之可得 $\lambda=m+3$ 又 $O(0,0)$ 满足方程①，则 $m\lambda=4$，故 $m=1,-4$.

【例 3】已知抛物线 $y^2=2px$．过焦点 F 任作两条互相垂直的直线与抛物线分别交于 A,C 和 B,D，问四点是否共圆？若共圆，求出圆的方程，若不共圆，说明理由.

【解析】设过焦点的两条弦 $AC:x=ky+\frac{p}{2}$；$BD:x=-\frac{1}{k}y+\frac{p}{2}$，则由 AC 和 BD 构成的二次曲线方程为 $\left(x-ky-\frac{p}{2}\right)\left(kx+y-\frac{p}{2}\right)=0$，若 A、B、C、D 四点共圆，则 $y^2-2px+\lambda\left(x-ky-\frac{p}{2}\right)\left(kx+y-\frac{p}{2}\right)=0$，即 $y^2\left(1-\lambda k^2\right)+\lambda k^2x^2+\lambda\left(1-k^2\right)xy+x\left(-2p-\frac{p\lambda}{2}-\frac{pk\lambda}{2}\right)+y\left(\frac{pk\lambda}{2}-\frac{p\lambda}{2}\right)=0$，由于 xy 的系数为零，故 $k^2=1$；取 $k=1$ 得，$\lambda=\frac{1}{2}$；故存在 A、B、C、D 四点共圆，圆的方程为 $\left(x-\frac{5p}{2}\right)^2+y^2=6p^2$.

【例 4】设椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，过点 $P(1,1)$ 且倾斜角互补的两直线分别与椭圆交于 A,C 和 B,D，证明四点共圆.

【解析】(1) 证明：设 $AC:y-1=k(x-1)$；$BD:y-1=-k(x-1)$，则由 AC 和 BD 构成的二次曲线方程为 $(kx-y+1-k)(kx+y-1-k)=0$，若 A、B、C、D 四点共圆，则 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}-1+\lambda(kx-y+1-k)(kx+y-1-k)=0$，即 $x^2\left(\frac{1}{3}+\lambda k^2\right)+y^2\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)-2\lambda k^2x+2\lambda y+\lambda\left(k^2-1\right)-1=0$，故 $\frac{1}{3}+\lambda k^2=\frac{1}{2}-\lambda$；即 $\lambda=\frac{1}{6\left(1+k^2\right)}$ 时，A、B、C、D 四点共圆，圆的方程为 $x^2+y^2-\frac{2k^2}{3k^2+2}x+\frac{2}{3k^2+2}y-\frac{5k^2+7}{3k^2+2}=0$.

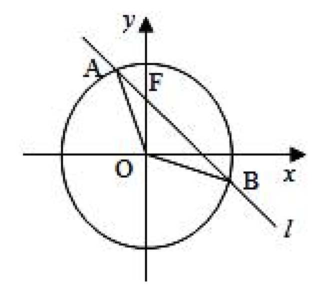
$4R^2=\left(\frac{2k^2}{3k^2+2}\right)^2+\left(\frac{2}{3k^2+2}\right)^2+\frac{20k^2+28}{3k^2+2}>0$ 恒成立，故 A,C 和 B,D 四点共圆.

【例 5】(2011•全国卷) 已知 O 为坐标原点，F 为椭圆 $C:x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 在 y 轴正半轴上的焦点，过 F 且斜率为 $-\sqrt{2}$ 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，点 P 满足 $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OP}=\vec{0}$.

（1）证明：点 P 在 C 上；

（2）设点 P 关于点 O 的对称点为 Q，证明：A、P、B、Q 四点在同一圆上．

【证明】（1）法一：设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 椭圆 $C:x^2+\frac{y^2}{2}=1$①，则直线 AB 的方程为：$y=-\sqrt{2}x+1$②



联立方程可得 $4x^2-2\sqrt{2}x-1=0$，

则 $x_1+x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_1x_2=-\frac{1}{4}$ 则 $y_1+y_2=-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2=1$ 设 $P(p_1,\ p_2)$，

则有：$\overrightarrow{OA}=(x_1,\ y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,\ y_2)$，$\overrightarrow{OP}=(p_1,\ p_2)$；

$\therefore \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)=(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1)$；

$\overrightarrow{OP}=(p_1,\ p_2)=-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -1)$

$\therefore P$ 的坐标为 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -1)$ 代入①方程成立，所以点 P 在 C 上．

法二：点差法如下设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，AB 中点 $M(x_0,y_0)$，则 $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OP}=2\vec{OM}+\vec{OP}=0$

$$\begin{cases} x_1^2+\frac{y_1^2}{2}=1①;\ x_2^2+\frac{y_2^2}{2}=1② \\ \frac{x_1+x_2}{2}=x_0③;\frac{y_1+y_2}{2}=y_0④ \\ -\sqrt{2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}⑤ \end{cases}$$ ①－②，代入③④⑤ $\Rightarrow \frac{y_0}{x_0}=\sqrt{2}$，又 $y_0=-\sqrt{2}x_0+1$，$\therefore \begin{cases} x_0=\frac{\sqrt{2}}{4} \\ y_0=\frac{1}{2} \end{cases}$

$\therefore \overrightarrow{OP}=\ -\frac{\sqrt{2}}{2},-1$ ，代入椭圆方程成立，所以点 P 在 C 上．

（2）设点 P 关于点 O 的对称点为 Q，证明：A、P、B、Q 四点在同一圆上．设线段 AB 的中点坐标为 $M:(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2})$，即 $M:(\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{1}{2})$，$\because P$ 关于点 O 的对称点为 Q，PQ 的直线方程为 $\sqrt{2}x-y=0$：

过 A、P、B、Q 的曲线系方程为 $\left(\sqrt{2}x+y-1\right)\left(\sqrt{2}x-y\right)+\lambda\ \ x^2+\frac{y^2}{2}-1\ \ =0$，

$\therefore (\lambda+2)x^2+\ \frac{\lambda}{2}-1\ \ y^2-\sqrt{2}x+y-\lambda=0$，令 $\lambda+2=\frac{\lambda}{2}-1$，得 $\lambda=-6$，故圆方程为 $4x^2+4y^2+\sqrt{2}x-y-6=0$，$D^2+E^2-4F=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-1\right)^2-4\times\left(-6\right)>0$，$\therefore A$、$P$、$B$、$Q$ 四点在同一圆上．

【例 6】（2016•四川文）已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点与短轴的两个端点是正三角形的三个顶点，点 $P(\sqrt{3},\frac{1}{2})$ 在椭圆 E 上．

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）设不过原点 O 且斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l 与椭圆 E 交于不同的两点 A、B，线段 AB 的中点为 M，直线 OM 与椭圆 E 交于 C、D，证明：$|MA|\cdot|MB|=|MC|\cdot|MD|$．

【解析】(1) 由题意可得 $\begin{cases} a=2b \\ a^2=b^2+c^2 \\ \dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}=1 \end{cases}$，解得 $a^2=4$，$b^2=1$，$\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$；

(2) 证明：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则有 $\begin{cases} \dfrac{x_1^{\ 2}}{4}+y_1^{\ 2}=1①;\dfrac{x_2^{\ 2}}{4}+y_2^{\ 2}=1② \\ \dfrac{x_1+x_2}{2}=x_0③;\dfrac{y_1+y_2}{2}=y_0④ \\ \dfrac{1}{2}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}⑤ \end{cases}$；①－②，代入③④⑤ $\Rightarrow \dfrac{y_0}{x_0}=-\dfrac{1}{2}$

则 OM 所在直线方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x$，设 AB 所在直线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+m$，A、B、C、D 四点和椭圆的曲线系方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2-1\ \ +\lambda\ \ \dfrac{1}{2}x-y-m\ \ \ \dfrac{1}{2}x+y\ \ =0$，一定有 $x^2\ \ \dfrac{1+\lambda}{4}\ \ +y^2(1-\lambda)-\dfrac{m\lambda}{2}x-m\lambda y-1=0$，由于无 xy 项，则当 $\dfrac{1+\lambda}{4}=1-\lambda$ 时，即 $\lambda=\dfrac{3}{5}$ 时，圆方程为 $x^2+y^2-\dfrac{3m}{4}x-\dfrac{3m}{2}y-\dfrac{5}{2}=0$，

$4R^2=\ \dfrac{3m}{4}\ ^2+\ \dfrac{3m}{2}\ ^2+4\times\dfrac{5}{2}>0$，故 A、B、C、D 四点共圆恒成立，$\therefore |MA|\cdot|MB|=|MC|\cdot|MD|$.

秒杀秘籍：第二讲　曲线系及其应用

方程形如 $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ 的曲线，叫做二次曲线，它包括圆、椭圆、双曲线、抛物线以及退化的二次曲线——两条直线.

有必要解释一下什么叫做两条直线，注意如下方程：$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0$.

显然，在它上面的点，要么满足 $A_1x+B_1y+C_1=0$，要么满足 $A_2x+B_2y+C_2=0$，故点的集合是两条直线．而这个方程展开后，是一个二次式，因此是退化的二次曲线.

设这条二次曲线的方程分别为 $S_1=0$，$S_2=0$，其中 S_1，S_2 均为二次式，有 $\lambda S_1+\mu S_2=0$ 表示所有经过这两个曲线交点的二次曲线，即曲线系.

同样，如果能确定你需要的曲线不是 $S_1=0$ 或 $S_2=0$ 本身，我们可以只设一个参数.

当我们已知曲线 $H=0$，要求某些未知数值的时候，我们利用方程：$\lambda S_1+\mu S_2=H$，两边对比系数即可.

同样，如果 H 不为 S_1 或 S_2 本身，通过除以 λ 或者 μ，可知上式的两个待定系数可以放在任两个方程前面，应选择方便计算的.

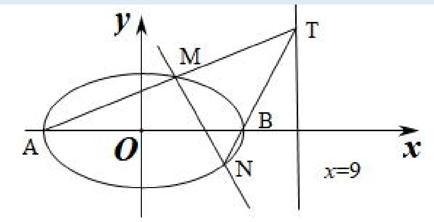
【例 7】(2010•江苏) 椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左右顶点为 A，B 右焦点为 F．设过点 $T(9,m)$ 的直线 TA，TB 分别与椭圆交于 $M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，其中 $m>0$，$y_1>0$，$y_2<0$．求证：直线 MN 必过 x 轴上一个定点.

【分析】注意到，二次曲线（两条直线）TA,TB 与二次曲线 AB,MN 有四个交点 A，B，M，N，而椭圆正好过着四个点！而这些曲线中，只有 MN 我们不知道．于是利用曲线系，MN 与 x 轴的交点可求．

【解析】设 $MN:x=ky+n$，故我们只需要求出 n．

已知 TA：$y=\dfrac{m}{12}(x+3)$，TB：$y=\dfrac{m}{6}(x-3)$，AB：$y=0$，MN：$x=ky+n$，因为椭圆过二次曲线 TA,TB 与二次曲线 AB,MN 的四个交点 A，B，M，N，有

$$\left[y-\frac{m}{12}(x+3)\right]\left[y-\frac{m}{6}(x-3)\right]+\mu y(x-ky-n)=\lambda\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}-1\right)$$



对比两边 xy 项系数，得 $-\dfrac{m}{6}-\dfrac{m}{12}+\mu=0$，对比两边 y 项系数，得 $-\dfrac{m}{4}+\dfrac{m}{2}-\mu n=0$，联立以上两式，解得 $n=1$，故直线 MN 恒过（1，0）.

总结：设 $MN:x=ky+n$，是因为 MN 能竖着但不能横着.

利用二次曲线系求解某个未知数的基本步骤：

1. 找到四个点，他们为两个二次曲线的交点.
2. 找出另一个过这个四个点的二次曲线，构造等式.
3. 两边对某些项的系数，找出未知数.

需要说明的是，对比系数时，要通过感觉和尝试选出有用的等式．千万不要将式子展开，那样会很繁，只需要单独算出某些待定项的系数就可以了.

另外，将两个直线方程相乘，变成二次曲线，是一个很重要的技巧.

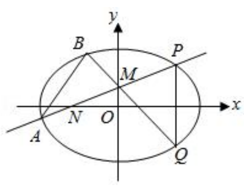
【例 8】（2016•山东）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 4，焦距为 $2\sqrt{2}$．

（1）求椭圆 C 的方程;

（2）过动点 $M(0，m)(m>0)$ 的直线交 x 轴与点 N，交 C 于点 A，$P(P$ 在第一象限），且 M 是线段 PN 的中点．过点 P 作 x 轴的垂线交 C 于另一点 Q，延长 QM 交 C 于点 B．

①设直线 PM，QM 的斜率分别为 k_1，k_2，证明 $\dfrac{k_2}{k_1}$ 为定值;

②求直线 AB 的斜率的最小值.



【解析】（1）设椭圆的半焦距为 c．由题意知 $2a=4,2c=2\sqrt{2}$，

所以 $a=2,b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$．所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$．

（2）证明：①设 $P(x_0，y_0)(x_0>0，y_0>0)$，由 $M(0,m)$，可得 $P(x_0,2m)$，$Q(x_0,-2m)$．所以直线 PM 的斜率 $k_1=\dfrac{2m-m}{x_0}=\dfrac{m}{x_0}$，直线 QM 的斜率 $k_2=\dfrac{-2m-m}{x_0}=-\dfrac{3m}{x_0}$，

此时 $\dfrac{k_2}{k_1}=-3$．所以 $\dfrac{k_2}{k_1}$ 为定值 -3．

②设 $AB: y=kx+n$，故我们只需要求出 k 的关系式；

已知 PA：$y=k_1x+m$，QB：$y=-3k_1x+m$，PQ：$x-x_0=0$，因为椭圆过二次曲线 $PA\cdot QB$ 与二次曲线 $AB\cdot PQ$ 的四个交点 A，B，P，Q，有

$(x-x_0)(kx-y+n)+\mu(y-k_1x-m)(y+3k_1x-m)=\lambda\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-1\right)$，对比两边 xy 项系数，得 $-1+2k_1\mu=0$ ①，

对比两边 x^2 项系数，得 $k-3k_1{}^2\mu=\frac{\lambda}{4}$ ②，对比两边 y^2 项系数，得 $\mu=\frac{\lambda}{2}$ ③，

综合①②③得 $k=\frac{3k_1}{2}+\frac{1}{4k_1}\geq\frac{\sqrt{6}}{2}$，当仅当 $k_1=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时等号成立．

达标训练

1．已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$，AB 为过抛物线焦点 F 的弦，AB 的中垂线交抛物线 E 于点 M、N．若 A、M、B、N 四点共圆，求直线 AB 的方程．

2．（2002•广东）设 A、B 是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 上的两点，点 $N(1,2)$ 是线段 AB 的中点．

（1）求直线 AB 的方程

（2）如果线段 AB 的垂直平分线与双曲线相交于 C、D 两点，那么 A、B、C、D 四点是否共圆？为什么？

3.（2005•湖北）设 A 、B 是椭圆 $3x^2+y^2=\lambda$ 上的两点，点 $N(1\ ,3)$ 是线段 AB 的中点，线段 AB 的垂直平分线与椭圆相交于 C 、D 两点.

（1）确定 λ 的取值范围，并求直线 AB 的方程；

（2）试判断是否存在这样的 λ，使得 A 、B 、C 、D 四点在同一个圆上？并说明理由.

4.（2015•乌鲁木齐模拟）已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，点 A 、B 分别为椭圆的右顶点和上顶点，且 $|AB|=\sqrt{7}$.

（1）试求椭圆的方程；

（2）斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的直线 l 与椭圆交于 P 、Q 两点，点 P 在第一象限，求证 A 、P 、B 、Q 四点共圆.

5. （2019•大理期中）已知椭圆 E 中心在坐标原点,焦点在坐标轴上,且经过 $A(-2,0),B(2,0),C\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 三点.

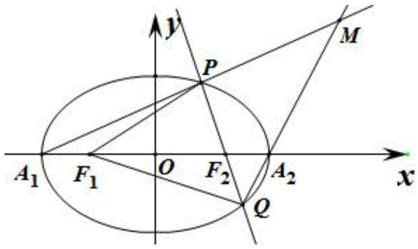
（1）求椭圆 E 的方程;

（2）在直线 $x=4$ 上任取一点 $T(4\,,m)(m\neq 0)$,连接 TA,TB，分别与椭圆 E 交于 M 、N 两点,判断直线 MN 是否过定点？若是,求出该定点;若不是,请说明理由.

6．（2019•岳麓月考）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别是$F_1$、$F_2$，左右顶点分别是$A_1$、$A_2$，离心率是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，过$F_2$的直线与椭圆交于两点$P$、$Q$（不是左、右顶点），且$\triangle F_1PQ$的周长是$4\sqrt{2}$，直线$A_1P$与$A_2Q$交于点$M$．

（1）求椭圆的方程；

（2）①求证直线A_1P与A_2Q的交点M在一条定直线l上；②N是定直线l上的一点，且PN平行于x轴，证明：$\frac{|PF_2|}{|PN|}$是定值．

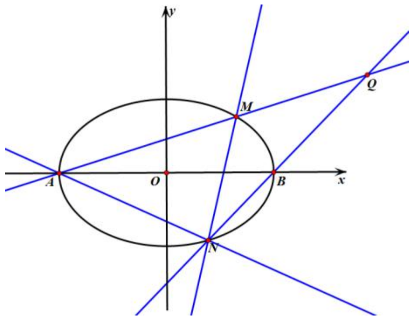


7．（2018•太原模拟）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别为$A_1$，$A_2$，右焦点为$F_2(1,0)$，点$B(1,\frac{3}{2})$在椭圆$C$上．

（1）求椭圆方程；

（2）若直线$l:y=k(x-4)(k\neq 0)$与椭圆C交于M，N两点，已知直线A_1M与A_2N相交于点G，证明：点G在定直线上，并求出定直线的方程．

8．（2017•徐汇模拟）如图，A,B 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 长轴的两个端点，M,N 是椭圆上与 A,B 均不重合的相异两点，设直线 AM,BN,AN 的斜率分别是 k_1,k_2,k_3．



（1）求 $k_2\cdot k_3$ 的值；

（2）若直线 MN 过点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，求证：$k_1\cdot k_3=-\dfrac{1}{6}$；

（3）设直线 MN 与 x 轴的交点为 $(t,0)$（t 为常数且 $t\neq 0$），试探究直线 AM 与直线 BN 的交点 Q 是否落在某条定直线上？若是，请求出该定直线的方程；若不是，请说明理由．

9．已知 O 为坐标原点，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距等于其长半轴长，M，N 为椭圆 C 的上下顶点，且 $|MN|=2\sqrt{3}$．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 $P(0,1)$ 作直线 l 交椭圆 C 于异于 M，N 的 A，B 两点，直线 AM、BN 交于点 T，求证：点 T 的纵坐标为定值 3．

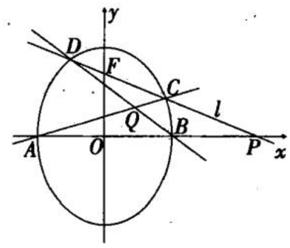
10．在平面直角坐标系 xoy 中，已知椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左右顶点为 A，B，右焦点为 F，设过点 $T(t,m)$ 的直线 TA，TB 与椭圆分别交于点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，其中 $m>0,y_1>0,y_2<0$

（1）设动点 P 满足 $PF^2-PB^2=4$，求点 P 的轨迹．

（2）若 $x_1=2,x_2=\frac{1}{3}$，求点 T 的坐标．

（3）设 $t=9$，求证：直线 MN 必过 x 轴上的一定点（其坐标与 m 无关）．

11．（2011•四川）如图，椭圆有两顶点 $A(-1,0)$、$B(1,0)$，过其焦点 $F(0,1)$ 的直线 l 与椭圆交于 C,D 两点，并与 x 轴交于点 P．直线 AC 与直线 BD 交于点 Q．当点 P 异于 A,B 两点时，求证：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 为定值．



12．（2011•四川）如图，过点 $C(0,1)$ 的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，椭圆与 x 轴交于两点 $A(a,0)$，$B(-a,0)$，过点 C 的直线 l 于椭圆交于另一点 D，并与 x 轴交于 P，直线 AC 与直线 BD 交于点 Q．

（1）当直线 l 过椭圆右焦点时，求线段 CD 的长；

（2）当点 P 异于点 B 时，求证：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 为定值．