专题 6　极点与极线探秘

第一讲 极点和极线的定义及极点与极线的作图

作为射线几何学的奠基人之一的法国数学家笛沙格（G．Desargues，1591-1661），他于 1639 年在《椭圆曲线论稿》中正式阐述了极点与极线的定义．

一 极点和极线的定义（代数定义）

已知圆锥曲线Γ：$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$，则称点 P（x_0,y_0）和直线 l：$Ax_0x+Cy_0y+D(x_0+x)+E(y_0+y)+F=0$ 是圆锥曲线Γ的一对极点和极线．

以上代数定义表面，在圆锥曲线方程中，以 x_0x 替换 x^2，以 $\frac{x_0+x}{2}$ 替换 x（另一变量 y 也是如此），即可得到点 $P(x_0,y_0)$ 的极线方程．

特别的：

（1）对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a\neq b)$，与点 $P(x_0,y_0)$ 对应的极线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$；当 $P(x_0,y_0)$ 为其焦点 $F(c,0)$ 时，极线 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ 变成 $x=\frac{a^2}{c}$，恰是椭圆的右准线．

（2）对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，与点 $P(x_0,y_0)$ 对应的极线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$；当 $P(x_0,y_0)$ 为其焦点 $F(c,0)$ 时，极线 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ 变成 $x=\frac{a^2}{c}$，恰是双曲线的右准线．

（3）对于抛物线 $y=2px^2$，与点 $P(x_0,y_0)$ 对应的极线方程为 $y_0y=p(x_0+x)$．当 $P(x_0,y_0)$ 为其焦点 $F(\frac{p}{2},0)$ 时，极线 $y_0y=p(x_0+x)$ 变为 $x=-\frac{p}{2}$，恰为抛物线的准线．

二 极点与极线的作图（几何意义）

如图 1，P 是不在圆锥曲线上的点，过点 P 引两条割线依次交圆锥曲线与四点 E，F，G，H，连接 EH，FG 交于点 N，连接 EG，FH 交于点 M，则直线 MN 为点 P 对应的极线．

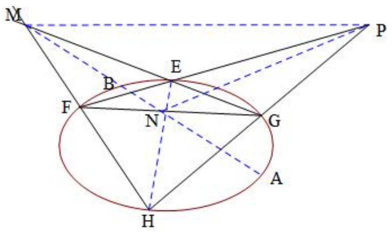


图 1

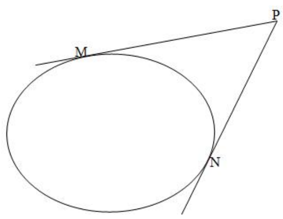


图 2

如图 2，同理可知 PM 为点 N 对应的极线，PN 是点 M 对应的极线．△ MNP 称为自极三点形．若连接 MN 交圆锥曲线与点 A，B，则 PA，PB 恰为圆锥曲线的两条切线．

第二讲 极点与极线的性质

定理 1 （1）当点 P 在圆锥曲线Γ上时，其极线时曲线Γ在点 P 点处的切线；

（2）当点 P 在Γ外时，其极线 l 时曲线Γ从点 P 所引两条切线的切点所确定的直线（即切点弦所在的直线）；

（3）当点 P 在 Γ 内时，其极线 l 时曲线 Γ 过点 P 的任一割线两端点处的切线交点的轨迹.

证明（1）假设同以上代数定义，对 Γ ：$Ax_0x+Cy_0y+2D(x_0+x)+2E(y_0+y)+F=0$ 的方程，两边对 x 求导得 $2Ax+2cyy'+2D+2Ey'=0$，解得 $y'=-\dfrac{Ax+D}{Cx+E}$，于是曲线 Γ 在 P 点处的切线斜率 $k=-\dfrac{Ax+D}{Cy+E}$，故切线 l 的为 $y-y_0=-\dfrac{Ax_0+D}{Cy_0+E}(x-x_0)$，化简得，$Ax_0x+Cy_0y-Ax_0^2-Cy_0^2+Dx+Ey-Dx_0-Ey_0=0$，又点 $P(x_0,y_0)$ 在曲线 Γ 上，故有 $Ax_0^2+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F=0$，从中解出 $Ax_0^2+Cy_0^2$，然后代入前式可得曲线 Γ 在 P 点处的切线 l 的方程为 $Ax_0x+Cy_0y+D(x_0+x)+E(y_0+y)+F=0$.

根据代数定义，此方程恰为点 $P(x_0,y_0)$ 的极线方程.

（2）设过点 P 所作的两条切线的切点分别为 M（x_1，y_1），$N(x_2，y_2)$，如图 2，则由（1）知，在点 M，N 处的切线方程分别为 $Ax_1x+Cy_1y+D(x_1+x)+E(y_1+y)+F=0$ 和 $Ax_2x+Cy_2y+D(x_2+x)+E(y_2+y)+F=0$，又点 P 在切线上，所以有

$Ax_0x_1+Cy_0y_1+D(x_0+x_1)+E(y_0+y_1)+F=0$，$Ax_0x_2+Cy_0y_2+D(x_0+x_2)+E(y_0+y_2)+F=0$，

观察这两个式子，可发现点 M（x_1，y_1），$N(x_2，y_2)$ 都在直线 $Ax_0x+Cy_0y+D(x_0+x)+E(y_0+y)+F=0$ 上，又两点确定一条直线，故切点弦 MN 所在的直线方程为 $Ax_0x+Cy_0y+D(x_0+x)+E(y_0+y)+F=0$. 根据代数定义，此方程恰为点 P 对应的极线方程.

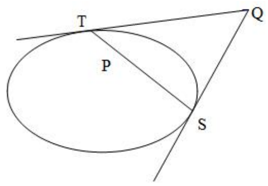


图 3

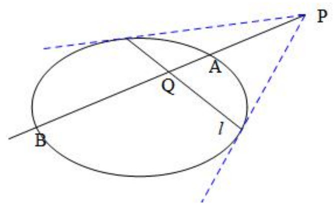


图 4

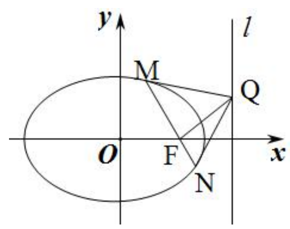


图 5

（3）设曲线 Γ 经过 $P(x_0,y_0)$ 点的弦的两端分别为 S（x_1，y_1），$T(x_2，y_2)$,如图 3，则由（1）知，曲线在这两处的切线方程 $Ax_1x+Cy_1y+D(x_1+x)+E(y_1+y)+F=0$，$Ax_2x+Cy_2y+D(x_2+x)+E(y_2+y)+F=0$，

设两切线的交点为 $Q(m，n)$，则有 $Ax_1m+Cy_1n+D(x_1+m)+E(y_1+n)+F=0$，

$$Ax_2m+Cy_2n+D(x_2+m)+E(y_2+n)+F=0，$$

观察这两个式子，可发现点 S（x_1，y_1），$T(x_2，y_2)$ 都在直线 $Axm+Cyn+D(x+m)+E(y+n)+F=0$ 上，又两点确定一条直线，故直线 ST 的方程为 $Ax_1m+Cy_1n+D(x_1+m)+E(y_1+n)+F=0$.

又直线 ST 过点 $P(x_0,y_0)$，所以 $Ax_0m+Cy_0n+D(x_0+m)+E(y_0+n)+F=0$ 这意味着点 $Q(m，n)$ 在直线 $Ax_0m+Cy_0n+D(x_0+m)+E(y_0+n)+F=0$.

所以，两切线的交点的轨迹方程式 $Ax_0x+Cy_0y+D(x_0+x)+E(y_0+y)+F=0$.

根据上述几何定义个性质可知，当曲线为圆或椭圆时，若极点在曲线外，则极线与曲线相交有两个共同点；若极点在曲线内，则极线与曲线相离没有公共点；若极线与曲线相交，则极点在曲线外；若极线与曲线相离，则极点在曲线内.

若过极线 l 上一点 Q 可作 Γ 的两条切线，M，N 为切点，则直线 MN 必过极点 P.

定理 2（配极原则）点 P 关于圆锥曲线 Γ 的极线 p 过点 $Q\Leftrightarrow$ 点 Q 关于 Γ 的极线 q 经过点 P；

直线 p 关于 Γ 的极点 P 在直线 q 上 $\Leftrightarrow$ 直线 q 关于 Γ 的极点 Q 在直线 p .

由此可知，共线点的极线必共点；共点线的极点必共线.

定理 3 如图 4，设点 P 关于圆锥曲线 Γ 的极线为 l，过点 P 任作一割线交 Γ 于 A，B 两点，交 l 于点 Q，则 $\frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QB}$ ①. 反之，若①式成立，则称点 P，Q 调和分割线段 AB，或称点 P 与点 Q 关于 Γ 调和共轭.

点 P 关于圆锥曲线 Γ 的调和共轭点的轨迹是一条直线，这条直线就是点 P 的极线.

定理 2 和定理 3 的证明，在高等解析几何教材中都能找到，在此均省略.

定理 4:如图 5，设圆锥曲线 Γ 的一个焦点为 F，与 F 相应的准线为 l.

（1）若过点 F 的直线与圆锥曲线 Γ 相交于 M,N 两点，则 Γ 在 M,N 两点处的切线的交点 Q 在准线 l 上，且 $FQ\perp MN$；

（2）若过准线 l 上一点 Q 作圆锥曲线 Γ 的两条切线，切点分别为 M,N，则直线 MN 过焦点 F，且 $FQ\perp MN$；

（3）若过焦点 F 的直线与圆锥曲线 Γ 相交于 M,N 两点，过 F 作 $FQ\perp MN$ 交准线 l 于 Q，则连线 QM,QN 是圆锥曲线 Γ 的两条切线.

注意：极点与极线一般在小题中直接用很爽，但是在大题中，由于不在中学的课本范围内，基本上都无法直接使用，那么解答题中我们只给出思路，很多书写过程还是参考之后提到的切线部分的阿基米德三角形写法，曲线系写法或者定比点差写法.

考点 1 求切线和切点弦方程问题

【例 1】（2013•山东）过点 $(3,1)$ 作圆 $(x^2-1)^2+y^2=1$ 的两条切线，切点分别为 A、B 则直线 AB 的方程为（　　）

A．$2x+y-3=0$　　B．$2x-y-3=0$　　C．$4x-y-3=0$　　D．$4x+y-3=0$

【解析】切点弦 AB 所在的直线就是点 $(3,1)$ 对应的极线，其方程为 $(3-1)(x-1)+1\times y=1$，化简即得 $2x+y-3=0$．故选 A.

【例 2】（2019•武汉模拟）过椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 内一点 $M(3,2)$，做直线 AB 与椭圆交于点 A，B，作直线 CD 与椭圆交于点 C，D，过 A，B 分别作椭圆的切线交于点 P，过 C，D 分别作椭圆的切线交于点 Q，求 PQ 所在的直线方程.

【解析】本题实质就是求椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 内一点 $M(3,2)$ 对应的极线方程，结果为 $\frac{3x}{25}+\frac{2y}{9}=1$.

考点 2 讨论直线与圆锥曲线的位置关系

【例 3】（2010•湖北）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的两个焦点 F_1，F_2，点 $P(x_0,y_0)$ 满足 $0<\frac{x_0^2}{2}+y_0^2<1$，则 $|PF_1|+|PF_2|$ 的取值范围为________，直线 $\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$ 与椭圆 C 的公共点个数是________.

【解析】由 $0<\frac{x_0^2}{2}+y_0^2<1$ 知点 P 在椭圆内且不是中心，由椭圆定义得 $|F_1F_2|\le|PF_1|+|PF_2|<2a$，即 $2\le|PF_1|+|PF_2|<2\sqrt{2}$．由题意知，点 $P(x_0,y_0)$ 和直线 $\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$ 恰好是椭圆的一对极点和极线，因为点 P 在椭圆内，所以极线与椭圆相离，故极线与椭圆公共点的个数为零.

【例 4】（2009•安徽）已知点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$x_0=a\cos\beta$，$y_0=b\sin\beta$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，直线 l_2 与直线 $l_1:\dfrac{x_0x}{a_2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ 垂直，O 为坐标原点，直线 OP 的倾斜角为 α，直线 l_2 的倾斜角为 γ．证明：点 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与直线 l_1 的唯一交点．

【方法】显然点 $P(x_0,y_0)$ 与直线 l_1 是椭圆的一对极点极线，易知点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆上所以直线 l_1 与椭圆相切与点 P，即点 P 是椭圆 $l_1:\dfrac{x_0x}{a_2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ 与直线 l_1 唯一交点．

考点 3 探究最值问题

【例 5】（2018•云南月考）已知椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，过直线 $l:x=4$ 上任意一点 Q，作椭圆 C 的两条切线，切点分别为 A，B，则原点到直线 AB 距离的最大值为____________．

【解析】由题设，切点弦 AB 是点 Q 对应的极线，设点 Q 的坐标为 $(4,y_0)$，则可知直线 AB 的方程为 $\dfrac{4x}{4}+\dfrac{y_0y}{3}=1$，即 $x+\dfrac{y_0y}{3}=1$，显然直线 AB 过焦点 $(1,0)$，所以原点到直线 AB 的距离的最大值为 1．

【例 6】（2017•清华领军计划第 27 题）已知椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，P 为其右准线上一点，过点 P 向椭圆作切线，切点分别为 A，B，椭圆的左焦点 F．则（　　）

A．$|AB|$ 的最小值为 1　　　　B．$|AB|$ 的最小值为 $\sqrt{3}$

C．$\triangle FAB$ 的周长为定值　　　　D．$\triangle FAB$ 的面积为定值

【解析】首先，注意到点 P 为其右准线上一点，则点 P 对应的极线（即切线 PA,PB）经过右焦点，且点弦 $|AB|$ 的最小值为通经 $\dfrac{2b^2}{a^2}=1$．设椭圆的右焦点为 F'，根据椭圆定义，可知 $\triangle FAB$ 的周长为 $|AF|+|AF'|+|BF|+|BF'|=4a=8$ 为定值．故选 A，C．

考点 4 证明直线过定点

【例 7】（2018•河南预赛）在直线 $x=3$ 上任取一点 P，过点 P 向圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 作两条切线，切点分别为 A，B，则直线 AB 经过一个定点，该定点的坐标为____________．

【解析】设点 P 的坐标为 $(3,t)$，因为点 P 对应的极线为直线 AB，其方程为 $3x+(t-2)(y-2)=4$，整理得 $(y-2)\ t+(3x-2y)=0$，令 $y+2=0,3x-2y=0$，可见直线 AB 过定点 $(\dfrac{4}{3},2)$．

【例 8】（2017•广东预赛）设直线 $l:y=x+b$ 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 不相交．过直线 l 上点 P 作椭圆 C 的切线 PM,PN，切点分别 M，N，连接 MN．当点 P 在直线 l 上运动时，证明：直线 MN 恒过定点 Q．

【解析】设点 $P(x_0,y_0)$，则点 P 对应的极线为直线 MN，其方程为 $\dfrac{x_0x}{25}+\dfrac{y_0y}{9}=1$①．当点 P 在直线 l 上运动时，可理解为 x_0 取遍一切实数，相应的 y_0 为 $y_0=x_0+b$．代入①式消去 y_0 的 $\dfrac{x_0x}{25}+\dfrac{(x_0+b)y}{9}-1=0$．②

②式对一切 $x_0\in R$ 恒成立，变形可得 $x_0\left(\dfrac{x}{25}+\dfrac{y}{9}\right)+\left(\dfrac{b}{9}y-1\right)=0$，对一切 $x_0\in R$ 恒成立．$\therefore\begin{cases}\dfrac{x}{25}+\dfrac{y}{9}=0\\ \dfrac{b}{9}y-1=0\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}x=-\dfrac{25}{b}\\ y=\dfrac{9}{b}\end{cases}$

【例 9】（2018•十校联考）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 4，离心率为 $\dfrac{1}{2}$，点 P 是椭圆上异于顶点的任意一点，过点 P 做椭圆的切线 l，交 y 轴于点 A，直线 l' 过点 P 且垂直于 l，交 y 轴于点 B．

（1）求椭圆的方程；

（2）试判断以 AB 为直径的圆能否过定点？若能，求出定点坐标；若不能，请说明理由．

【解析】（1）因为 $2a=4$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，所以 $a=2,c=1,b=\sqrt{3}$，所以椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．

（2）设点 $p(x_0,y_0)(x_0\neq 0,y_0\neq 0)$，则直线 l 的方程为 $\dfrac{x_0x}{4}+\dfrac{y_0y}{3}=1$，所以点 A 的坐标为 $(0,\dfrac{3}{y_0})$．

又直线 l' 的方程为 $y-y_0=\dfrac{4y_0}{3x_0}(x-x_0)$，令 $x=0$，得点 B 坐标为 $(0,-\dfrac{y_0}{3})$，所以以 AB 为直径的圆的方程为 $x\cdot x+(y-\dfrac{3}{y_0})\cdot(y+\dfrac{y_0}{3})=0$，整理得 $x^2+y^2+(\dfrac{y_0}{3}-\dfrac{3}{y_0})\cdot(y+\dfrac{y_0}{3})=0$，令 $y=0$，得 $x=\pm 1$，所以以 AB 为直径的圆恒过定点 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$．

考点 5 证明动点在定直线上

【例 10】（2015•一模）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与 y 轴的交点为 A，B（点 A 位于点 B 的上方），F 为左焦点，原点 O 到直线 FA 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}b$．

（1）求椭圆 C 的离心率；

（2）设 $b=2$，直线 $y=kx+4$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M，N，求证：直线 BM 与直线 AN 的交点 G 在定直线上．

【解析】（1）由题意设 F 的坐标为 $(-c,0)$，依题意有 $bc=\dfrac{\sqrt{2}}{2}ab$，$\therefore$ 椭圆 C 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

（2）若 $b=2$，由（1）得 $a=2\sqrt{2}$，$\therefore$ 椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$．设直线 MN（即直线 $y=kx+4$）与直线 AB（y 轴）的交点为 $S(0,4)$，直线 AM 与直线 BN 的交点为 R，则 G，R，S 构成椭圆 C 的自极三点形，点 G 一定在点 $S(0,4)$ 对应的极线 GR 上，其方程为 $\dfrac{0\times x}{8}+\dfrac{4\times y}{4}=1$，即 $y=1$，就是说直线 BM 与直线 AN 的交点 G 在定直线上．

【例 11】（2018•太原模拟）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，右焦点为 $F_2(1,0)$，点 $B(1,\dfrac{3}{2})$ 在椭圆 C 上．

（1）求椭圆方程；

（2）若直线 $l:y=k(x-4)(k\neq 0)$ 与椭圆 C 交于 M ， N 两点，已知直线 A_1M 与 A_2N 相交于点 G ，证明：点 G 在定直线上，并求出定直线的方程.

【解析】(1) $F_2(1,0)$, $\therefore c=1$, 由题目已知条件知 $\begin{cases} a^2=1+b^2 \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{\frac{9}{4}}{b^2}=1 \end{cases}$, $\therefore a=2,b=\sqrt{3}$, $\therefore$ 椭圆的方程为: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$;

（2）法一：由椭圆对称性知 G 在 $x=x_0$ 上，假设直线 l 过椭圆上顶点，则 $M(0,\sqrt{3})$,

$\therefore k=-\dfrac{\sqrt{3}}{4},N(\dfrac{8}{5},\dfrac{3\sqrt{3}}{5})$ ， $l_{A_1M}:y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x+2),l_{A_2N}:y=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}(x-2)$ ， $\therefore G(1,\dfrac{3\sqrt{3}}{2})$ ，所以 G 在定直线 $x=1$ 上.

当 M 不在椭圆顶点时，设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$, $\begin{cases} y=k(x-4) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ ，整理得 $(3+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$,

所以 $x_1+x_2=\dfrac{32k^2}{3+4k^2}$ ， $x_1\cdot x_2=\dfrac{64k^2-12}{3+4k^2}$ ， $l_{A_1M}:y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2),l_{A_2N}:y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$,

当 $x=1$ 时， $\dfrac{3y_1}{x_1+2}=\dfrac{-y_2}{x_2-2}$ ，得 $2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8=0$ ，所以 $2\dfrac{64k^2-12}{3+4k^2}-5\dfrac{32k^2}{3+4k^2}+\dfrac{8(3+4k^2)}{3+4k^2}=0$ ，显然成立，所以 G 在定直线 $x=1$ 上.

法二：曲线系法，设 $l_{A_1M}:x=k_1y-2$， l_{A_2N}： $x=k_2y+2$， $l_{MN}:y=k(x-4)$ ， $l_{MN}:y=0$

以 A_1MA_2N 四点曲线系方程为 $[(x-k_1y+2)][(x-k_2y-2)]+uy[y-kx+4k]=\lambda(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}-1)$

xy 的系数为 0， $-k_1-k_2-ku=0$；y 的系数为 0， $2k_1-2k_2+4ku=0$；

$l_{A_1M}:x=k_1y-2$， l_{A_2N}： $x=k_2y+2$ 相加可以得到，$2x=k_1y+k_2y$ ，相减可以得到 $k_1y-k_2y-4=0$

联立可得 $x=1$，即点 Q 在定直线 $x=1$ 上.

注　由于直线 $l:y=k(x-4)(k\neq 0)$ 经过顶点 $P(4,0)$ ，设直线 A_1N 与 A_2M 相交于点 H ，则直线 GH 在点 $P(4,0)$ 所对应的极线上，点 $P(4,0)$ 对应的极线方程 $\dfrac{4x}{4}+\dfrac{0\times y}{3}=1$，即 $x=1$ 所一点 G 在顶点 $x=1$ 上.

达标训练

1.（2018•兰州月考）过点 $P(-3,4)$ 作圆 $x^2+y^2=4$ 的两条切线，切点分别为 A,B，则 AB 所在直线的方程为（　　）

A．$3x+4y-7=0$　　B．$3x-4y+4=0$　　C．$3x-4y+25=0$　　D．$3x-4y=0$

2.（2018•蚌埠二模）已知 $A(4,3)$，F 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点，过点 A 的直线与椭圆在 x 轴上方相切与于点 B，则直线 BF 的斜率为（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{2}{3}$　　C．1　　D．$-\frac{4}{3}$

3.（2014•辽宁）已知点 $A(-2,3)$ 在抛物线 C：$y^2=2px$ 的准线上，过点 A 的直线与 C 在第一象限相切与点 B，记 C 得焦点 F，则直线 BF 的斜率为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{4}{3}$

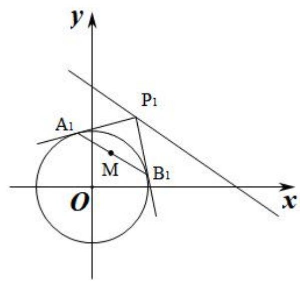
4.（2014•内蒙古自治区预赛）若过点 $P(1,3)$ 作圆 $x^2+y^2=9$ 的切线，则两点所在直线方程为__________.

5.（2018•深圳期末）对于抛物线 $C:y_2=4x$，我们称满足 $y_0^2<4x_0$ 的点 (x_0,y_0) 在抛物线的内部，则直线 $l:y_0y=2(x+x_0)$ 与抛物线 C（　　）

A．恰有 1 个公共点　　B．恰有 2 个公共点

C．可能有 1 个公共也可能有 2 个公共点　　D．没有公共点

6.（2018•甘肃预赛）已知点 P 为 $x+2y=4$ 上一动点．过点 P 作椭圆 $x^2+4y^2=4$ 的两条切线，切点分别 A、B，当点 P 运动时，直线 AB 过定点，该定点的坐标是____________.



7.（2011•希望杯）从直线 $l:\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$ 上的任意一点 P 作圆 O：$x^2+y^2=8$ 的两条切线，切点为 A、B，则弦 AB 长度的最小值为____________.

8.（2017•广西预赛）已知抛物线 $C:y=\frac{1}{2}x^2$ 与直线 $l:y=kx-1$ 没有公共点．设点 P 为直线 l 上的动点，过点 P 作抛物线 C 的两条切线，A，B 为切点．证明：直线 AB 恒过定点 Q.

9．设椭圆方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，点$M(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，过$M$点的动直线与椭圆交于点$A$、$B$，点$A$、$B$处的切线交于点$N$．求证：点$N$的轨迹为一条定直线．

10．（2011•福建卷）已知直线$l:y=x+m$，$m\in R$．

（1）若以点$M(2,0)$为圆心的圆与直线l相切于点P，且点P在y轴上，求该圆的方程；

（2）若直线l关于x轴对称的直线为l'，问直线l'与抛物线$C:x^2=4y$是否相切？说明理由．

11．（2010•全国1卷）已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，过点$K(-1,0)$的直线l与C相交于A、B两点，点A关于x轴的对称点为D．证明：点F在直线BD上．

12．（2010•江苏）在平面直角坐标系xOy中，已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左、右顶点为$A$、$B$，右焦点为$F$．设过点$T(t,m)$的直线$TA$、$TB$与椭圆分别交于点$M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，其中$m>0$，$y_1>0$，$y_2<0$．

（1）设动点P满足$PF^2-PB^2=4$，求点P的轨迹；

（2）设$x_1=2$，$x_2=\frac{1}{3}$，求点T的坐标；

（3）设$t=9$，求证：直线MN必过x轴上的一定点（其坐标与m无关）．

13．（2018•咸阳模拟）已知 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，点 C 是动点，且直线 AC 和直线 BC 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$．

（1）求动点 C 的轨迹方程；

（2）设至直线 l 与（1）中轨迹相切于点 P，与直线 $x=4$ 相较于点 Q，判断以 PQ 为直径的圆是否过 x 轴上一定点．

14．凸四边形 $ABCD$ 的四个顶点都在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，其中 A,B 是椭圆的左右顶点，设直线 CD 与 x 轴交于 M，对角线 AC 与 BD 相交于点 N．若 O 为坐标原点，求证：$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=a^2$．

15．（2011•四川）椭圆有两顶点 $A(-1,0)$、$B(1,0)$，过其焦点 $F(0,1)$ 的直线 l 与椭圆交于 C、D 两点，并与 x 轴交于点 P．直线 AC 与直线 BD 交于点 Q．

（1）当 $|CD|=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 时，求直线 l 的方程；

（2）当点 P 异于 A、B 两点时，求证：$\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ}$ 为定值．

16.（2009•浙江）已知抛物线$C:x^2=2py(p>0)$上一点$A(m,4)$到其焦点的距离为$\frac{17}{4}$.

（1）求p与m的值；

（2）设抛物线C上一点p的横坐标为$t(t>0)$，过p的直线交C于另一点Q，交x轴于M点，过点Q作PQ的垂线交C于另一点N．若MN是C的切线，求t的最小值.

17.（2018•深圳二模）已知实数$P>0$,且过点$M(0,-P^2)$的直线l与曲线C：$x^2=2py$交于A,B两点.

（1）设O为坐标原点，直线OA,OB的斜率分别为k_1,k_2，若$k_1k_2=1$，求p的值；

（2）设直线MT_1,MT_2与曲线C分别相切于点T_1,T_2，点N为直线T_1,T_2与弦AB的交点，且$\overrightarrow{MA}=\lambda\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{MB}=\mu\overrightarrow{MN}$,证明：$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$为定值.

18.（2008•安徽）设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$M(\sqrt{2},1)$，且左焦点为$F_1(-\sqrt{2},0)$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）当过点$P(4,1)$的动直线l与椭圆C相交于两不同点A，B时，在线段AB上取点Q，满足$|\overrightarrow{AP}|\bullet|\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{AQ}|\bullet|\overrightarrow{PB}|$，证明：点$Q$总在某定直线上.

19．（2017•徐汇诊断）A,B 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 长轴的两个端点，M,N 是椭圆上与 A,B 均不重合的相异两点，设直线 AM,BN,AN 的斜率分别是 k_1,k_2,k_3．

（1）求 $k_2\cdot k_3$ 的值；

（2）若直线 MN 过点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，求证：$k_1\cdot k_3=-\dfrac{1}{6}$；

（3）设直线 MN 与 x 轴的交点为 $(t,0)$（t 为常数且 $t\neq0$），试探究直线 AM 与直线 BN 的交点 Q 是否落在某条定直线上？若是，请求出该定直线的方程；若不是，请说明理由．

20．（2014•华约自主招生）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与圆 $x^2+y^2=b^2$，过椭圆上一点 M 作圆的两条切线，切点分别为 P，Q，连结 PQ 分别与 x 轴，y 轴交于点 E，F，求 $\triangle EOF$ 面积的最小值．