



专题 7 抛物线切线与阿基米德三角形



秒杀秘籍：第一讲 抛物线切线方程及性质

设在抛物线 $x^2 = 2py$ 上任意一点 $A(x_0, y_0)$ 的切线方程为： $xx_0 = p(y + y_0)$

证明： \because 点 $A(x_0, y_0)$ 在抛物线上 $\therefore x_0^2 = 2py_0$ ；又 $\because x^2 = 2py \therefore y = \frac{x^2}{2p}$ 求导得 $k = y' = \frac{2x}{2p} = \frac{x}{p}$ ；

\therefore 在点 $A(x_0, y_0)$ 的切线方程为： $y - y_0 = \frac{x_0}{p}(x - x_0)$ 即 $py - py_0 = xx_0 - x_0^2 \Rightarrow xx_0 = p(y + y_0)$

同理，在抛物线 $y^2 = 2px$ 上任意一点 $A(x_0, y_0)$ 的切线方程为： $yy_0 = p(x + x_0)$

证明： \because 点 $A(x_0, y_0)$ 在抛物线上 $\therefore y_0^2 = 2px_0$ ；又 $\because y^2 = 2px \therefore x = \frac{y^2}{2p}$ 对 y 求导得 $k = x' = \frac{2y}{2p} = \frac{y}{p}$ ；

\therefore 在点 $A(x_0, y_0)$ 的切线方程为： $x - x_0 = \frac{y_0}{p}(y - y_0)$ 即 $px - px_0 = yy_0 - y_0^2 \Rightarrow yy_0 = p(x + x_0)$

定理：在抛物线 $x^2 = 2py$ 上任意一点 $A(x_0, y_0)$ 的切线与 x 轴的交点为 B ，则 $FB \perp AB$ 。（图左）

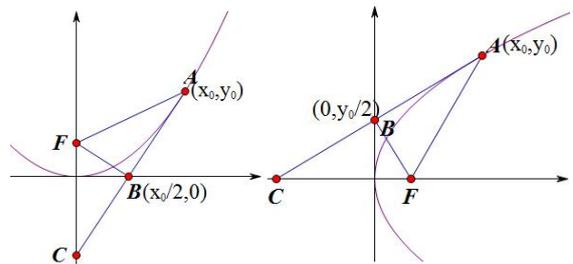
在抛物线 $y^2 = 2px$ 上任意一点 $A(x_0, y_0)$ 的切线与 y 轴的交点为 B ，则 $FB \perp AB$ 。（图右）

证明：将 $y = 0$ 代入点 A 处的切线方程 $xx_0 = p(y + y_0)$

得： $xx_0 = py_0 \Rightarrow x = \frac{py_0}{x_0} = \frac{x_0}{2}$ ；

故 B 为 AC 中点，又 $|FC| = \frac{p}{2} + y_0 = |AF|$ ，故 $\triangle AFC$ 为等腰三角形，故 $FB \perp AB$ 。

同理可证，在图右中 $\triangle AFC$ 为等腰三角形， $FB \perp AB$



【例 1】 点 $M(2, 1)$ 是抛物线 $x^2 = 2py$ 上的点，则以点 M 为切点的抛物线的切线方程为_____。

【解析】 将点 $M(2, 1)$ 代入抛物线得： $p = 2$ ，故以点 M 为切点的切线方程为 $2x = 2(y + 1)$ ，即 $x - y - 1 = 0$

【例 2】 过点 $A(0, 2)$ 且和抛物线 $C: y^2 = 6x$ 相切的直线 l 方程为_____。

【解析】 设直线与抛物线切于点 $P(x_0, y_0)$ ，故有 $yy_0 = 3(x + x_0)$ 代入点 $A(0, 2)$ 得： $2y_0 = 3x_0$ ，与抛物线方程联立得： $\left(\frac{3}{2}x_0\right)^2 = 6x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{8}{3} \text{ 或 } \\ y_0 = 4 \end{cases} \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ 。故切线方程为 $3x - 4y + 8 = 0$ 或 $x = 0$ 。

【例 3】 直线 l 经过点 $(0, 2)$ 且与抛物线 $y^2 = 8x$ 只有一个公共点，满足这样条件的直线 l 有_____条。

【解析】 设直线与抛物线切于点 $P(x_0, y_0)$ ，故有 $yy_0 = 4(x + x_0)$ 代入点 $(0, 2)$ 得： $y_0 = 2x_0$ ，与抛物线方程联立得： $(2x_0)^2 = 8x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 4 \end{cases}$ ，故存在两条切线，还有一条直线 $y = 2$ 与抛物线只有一个公共点，故答案为 3 条。



达标训练 1

- 在曲线 $y = x^2$ 上切线的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的点的坐标为_____.
- 过抛物线 $C: x^2 = 2y$ 的焦点 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A, B 两点, 若抛物线 C 在点 B 处的切线斜率为 1, 则线段 $|AF| =$ ()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 抛物线 $y = x^2$ 在点 $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 处的切线的倾斜角是 ()
 A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°
- 设曲线 $y = ax^2$ 在点 $(1, a)$ 处的切线与直线 $2x - y - 6 = 0$ 平行, 则 $a =$ ()
 A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. -1
- 函数 $y = \frac{x^2}{4}$ 在点 $P(2, 1)$ 处的切线方程为_____.
- 抛物线 $x^2 = 4y$ 的准线 l 与 y 轴交于点 P , 若直线 l 绕点 P 以每秒 $\frac{\pi}{12}$ 弧度的角速度按逆时针方向旋转 t 秒钟后, 恰与抛物线第一次相切, 则 $t =$ _____.
- 过点 $(2, -1)$ 引直线与抛物线 $y = x^2$ 只有一个公共点, 这样的直线共有_____条.
- 过点 $P(3, 4)$ 作抛物线 $x^2 = 2y$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 则直线 AB 的斜率为_____.
- (2014·辽宁) 已知点 $A(-2, 3)$ 在抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的准线上, 过点 A 的直线与 C 在第一象限相切于点 B , 记 C 的焦点为 F , 则直线 BF 的斜率为 ()
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$
- 已知点 A 为抛物线 $C: x^2 = 4y$ 上的动点 (不含原点), 过点 A 的切线交 x 轴于点 B , 设抛物线 C 的焦点为 F , 则 $\triangle ABF$ ()
 A. 一定是直角 B. 一定是锐角 C. 一定是钝角 D. 上述三种情况都可能
- 抛物线 $x^2 = \frac{1}{2}y$ 在第一象限内图象上一点 $(a_i, 2a_i^2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标记为 a_{i+1} , 其中 $i \in \mathbb{N}^*$, 若 $a_2 = 32$, 则 $a_2 + a_4 + a_6$ 等于 ()
 A. 64 B. 42 C. 32 D. 21
- 抛物线 $C_1: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的右焦点的连线交 C_1 于第一象限内的点 M . 若 C_1 在点 M 处的切线平行于 C_2 的一条渐近线, 则 $p =$ ()
 A. $\frac{\sqrt{3}}{16}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{8}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$



(如图), 即 $y_0 = 2$, 且 AB 过抛物线的焦点; 设 AB 方程为 $x = ky + 3$, 代入抛物线方程得: $y^2 - 12ky - 36 = 0$, $y_1 + y_2 = 12k \Rightarrow y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = 6k = 2 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$, 故直线 AB 的斜率为 3.

【例 5】 已知抛物线 $P: x^2 = 2py (p > 0)$.

(1) 若抛物线上点 $M(m, 2)$ 到焦点 F 的距离为 3, 求抛物线 P 的方程;

(2) 设抛物线 P 的准线与 y 轴的交点为 E , 过 E 作抛物线 P 的切线, 求此切线方程;

【解析】 (1) $|MF| = y_M + \frac{p}{2} = 2 + \frac{p}{2} = 3 \Rightarrow p = 2$, 故抛物线的方程为 $x^2 = 4y$;

(2) E 点坐标为 $(0, -1)$, 设抛物线的切点为 $Q(x_0, y_0)$, 求导得 $y' = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$, 故切线方程为 $y - y_0 = \frac{x_0}{2}(x - x_0)$

将点 E 代入切线方程得: $-1 - y_0 = \frac{x_0}{2}(0 - x_0) \Rightarrow x_0^2 = 2 + 2y_0 \Rightarrow 2 + 2y_0 = 4y_0 \Rightarrow y_0 = 1$, 故 $x_0 = \pm 2$, 由此可得切线方程为 $x - y - 1 = 0$ 或 $x + y + 1 = 0$.

达标训练 2

1. 过抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 准线上任一点作抛物线的两条切线, 若切点分别为 M 、 N , 则直线 MN 过定点 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(1, 0)$ C. $(0, -1)$ D. $(-1, 0)$

2. 已知 A 、 B 为抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 上两点, 直线 AB 过焦点 F , A 、 B 在准线上的射影分别为 C 、 D , 则① $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$; ②存在实数 λ 使得 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AO}$ (点 O 为坐标原点); ③若线段 AB 的中点 P 在准线上的射影为 T , 有 $\overrightarrow{FT} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$; ④抛物线在 A 点的切线和在 B 点切线一定相交, 并且相互垂直. 其中说法正确的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 若过抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的准线上一动点 P 作此抛物线的两条切线, 切点分别为 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$; 点 O 为坐标原点. 则以下命题 (1) 直线 AB 过定点; (2) $\angle AOB$ 为钝角; (3) $\angle APB$ 可取 60° ; (4) 若 $\triangle ABO$ 的面积为 $\frac{5}{2}$, 则点 P 坐标为 $(\frac{3}{2}, -1)$ 或 $(-\frac{3}{2}, -1)$. 其中正确的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , F 关于原点的对称点为 P . 过 F 作 x 轴的垂线交抛物线于 M 、 N 两点. 有下列四个命题: ① $\triangle PMN$ 必为直角三角形; ② $\triangle PMN$ 不一定为直角三角形; ③直线 PM 必与抛物线相切; ④直线 PM 不一定与抛物线相切. 其中正确的命题是_____.

5. F 为抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 过点 F 的直线与该抛物线交于 A 、 B 两点, l_1 、 l_2 分别是该抛物线在 A 、 B 两点处的切线, l_1 、 l_2 相交于点 C , 设 $|AF| = a$, $|BF| = b$, 则 $|CF| =$ ()

- A. $\sqrt{a+b}$ B. $\frac{a+b}{2}$ C. $\sqrt{a^2+b^2}$ D. \sqrt{ab}



6. 已知过抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A 、 B 两个不同的点，过 A 、 B 分别作抛物线的切线，且二者相交于点 C ，则 $\triangle ABC$ 的面积的最小值为_____.
7. 已知直线 $y = kx + 1$ 与抛物线 $x^2 = 4y$ 相交于 A 、 B 两点，且该抛物线过 A 、 B 两点的切线交于 C ，点 C 的轨迹记为 E ， M 、 N 是 E 上不同的两点，直线 AM 、 BN 都与 y 轴平行，则 $\overline{FM} \cdot \overline{FN} =$ _____.
8. 过 $P(-3, 2)$ 做抛物线 $y^2 = 12x$ 切线交抛物线于 A 、 B 两点，求直线 AB 斜率.
9. 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F ，过焦点 F 且不平行于 x 轴的动直线 l 交抛物线于 A 、 B 两点，抛物线在 A 、 B 两点处的切线交于点 M .
- (1) 求证: A 、 M 、 B 三点的横坐标成等差数列;
- (2) 设直线 MF 交该抛物线于 C 、 D 两点，求四边形 $ACBD$ 面积的最小值.
10. 过抛物线 $x^2 = 4y$ 上不同两点 A 、 B 分别作抛物线的切线相交于 P 点， $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 0$.
- (1) 求点 P 的轨迹方程;
- (2) 已知点 $F(0, 1)$ ，是否存在实数 λ 使得 $\overline{FA} \cdot \overline{FB} + \lambda(\overline{FP})^2 = 0$? 若存在，求出 λ 的值，若不存在，请说明理由.



11. 抛物线的顶点在原点，焦点在射线 $x - y + 1 = 0 (x \geq 0)$ 上，

(1) 求抛物线的标准方程；

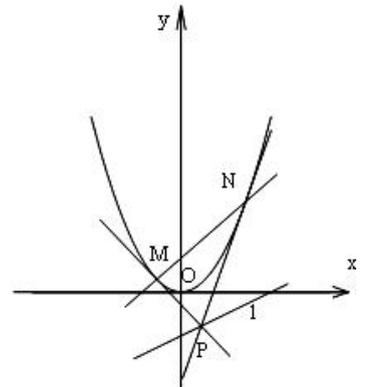
(2) 过 (1) 中抛物线的焦点 F 作动弦 AB ，过 A 、 B 两点分别作抛物线的切线，设其交点为 M ，求点 M 的轨迹方程.

12. 已知抛物线 $C: y = x^2$ ，直线 $l: x - 2y - 2 = 0$ ，点 P 是直线 l 上任意一点，过点 P 作抛物线 C 的切线

PM 、 PN ，切点分别为 M 、 N ，直线 PM 、 PN 斜率分别 k_1 、 k_2 ，如图所示.

(1) 若 $P(4, 1)$ ，求证： $k_1 + k_2 = 16$ ；

(2) 若 MN 过抛物线的焦点，求点 P 的坐标.



13. 设直线 $y = x + 2$ 与抛物线 $y = ax^2 (a > 0)$ 相交于 A 、 B 两点， M 是线段 AB 的中点，过点 M 作 x 轴的垂线交抛物线于点 N .

(1) 证明：抛物线在 N 点处的切线与 AB 平行；

(2) 是否存在实数 a ，使得 $NA \perp NB$ ？若存在，求出 a 的值；若不存在，请说明理由.



秒杀秘籍：第三讲 阿基米德三角形的极点极线性质

定理 1: 设过点 P 与抛物线对称轴平行的直线交抛物线于 M , 交切点弦于点 Q , 则 Q 点平分切点弦 AB . (无论点 P 在曲线的什么位置, 上述结论均成立). 且 M 处的切线平行于抛物线的切点弦. (图 1.3)

定理 2: 直线 $l: y = kx + m$ 上一动点 Q 引抛物线两切线 QA, QB , 则过两切点的直线 AB 必过定点 G (图 2.4) 可以理解为极点和极线相互牵连;

如图 1, 点 $P(x_0, y_0)$ 为抛物线 $x^2 = 2py$ 外任意一点, 过点 P 作抛物线两条切线分别切于 A, B 两点, AB 的中点为 Q , 直线 PQ 交抛物线于点 M

求证: (1) $x_0 = x_G, y_0 = -m$ (m 为直线 AB 在轴上的截距); 且直线 AB 方程为 $xx_0 = p(y + y_0)$;

(2) 设点 M 处的切线 l , 求证 $AB \parallel l$.

【证明】 (1) \because 点 $A(x_1, y_1) B(x_2, y_2)$ 在抛物线上 $\therefore x_1^2 = 2py_1; x_2^2 = 2py_2$ 求导得 $y' = \frac{2x}{2p} = \frac{x}{p}$; (求导)

在点 $A(x_1, y_1) B(x_2, y_2)$ 的切线方程为:
$$\begin{cases} y - y_1 = \frac{x_1}{p}(x - x_1) \\ y - y_2 = \frac{x_2}{p}(x - x_2) \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} xx_1 = p(y + y_1) & \text{①} \\ xx_2 = p(y + y_2) & \text{②} \end{cases} \quad \text{(写切线方程)}$$

② - ① 得: $x(x_2 - x_1) = p(y_2 - y_1)$, 即 $x(x_2 - x_1) = p\left(\frac{x_2^2}{2p} - \frac{x_1^2}{2p}\right) \Rightarrow x = \frac{x_2 + x_1}{2} \therefore x_0 = \frac{x_2 + x_1}{2} = x_Q$ (作差)

将点 $Q\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, y_0\right)$ 代入切线方程得: $\frac{x_2 + x_1}{2}x_1 = p(y_0 + y_1) \Rightarrow x_1x_2 = 2py_0$ (代入)

令 AB 方程为 $y = kx + m$, 代入 $x^2 = 2py$ 得: $x^2 - 2pkx - 2pm = 0 \therefore x_1x_2 = -2pm = 2py_0$ 所以直线 AB 过定点 $(0, -y_0)$; 故 AB 方程为 $y = \frac{x_0}{p}x + (-y_0) \Rightarrow xx_0 = p(y + y_0)$ (联立)

(2) $x^2 - 2pkx - 2pm = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{x_2 + x_1}{2} = pk \Rightarrow k = \frac{x_0}{p}$, M 点坐标为 $\left(x_0, \frac{x_0^2}{2p}\right)$, 以 M 点为切点的切线斜

率为 $y' = \frac{2x_0}{2p} = \frac{x_0}{p}$, 故 $AB \parallel l$.

注意: 抛物线的切线解题模式为: 导 \rightarrow 差 \rightarrow 代 \rightarrow 联, 即求导写切线方程, 切线方程进行作差, 将求出来的点坐标代入切线方程, 联立直线与抛物线得到直线过定点.

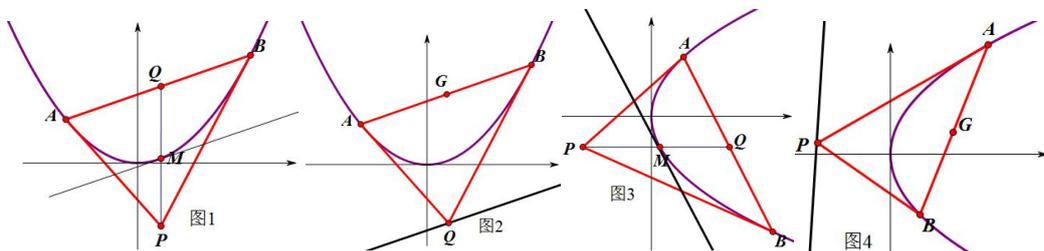
如图 2, 点 $Q(x_0, y_0)$ 为直线 $l: y = kx + m$ 上一动点, 过点 Q 引抛物线 $x^2 = 2py$ 两条切线 QA, QB , 则过两切点的直线 AB 必过定点 $G(pk, -m)$.

【证明】 由定理 1 结论可知 $AB: xx_0 = p(y + y_0)$, 又 Q 在直线 l 上, 故 $y_0 = kx_0 + m$, 将两式联立得:

$$\begin{cases} xx_0 = p(y + y_0) \Rightarrow x_0 = \frac{p(y + y_0)}{x} \Rightarrow y_0 = k \frac{p(y + y_0)}{x} + m \Rightarrow y_0(x - kp) - (kpy + mx) = 0, \text{ 由于 } y_0 \text{ 为任意数,} \\ y_0 = kx_0 + m \end{cases}$$



故 $\begin{cases} x - kp = 0 \\ kpy + Cx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = kp \\ y = -m \end{cases}$ (图4也可以推导, $l: x = ky + m$ 过直线 AB 定点 $G(-m, kp)$)



【例6】 过点 $P(3, 4)$ 作抛物线 $x^2 = 2y$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 则直线 AB 的斜率为_____.

【解析】 根据定理1的公式得, AB 直线方程为: $3x = y + 4$, 故斜率为3.

【例7】 在平面直角坐标系 xOy 中, 动点 P 到定点 $F(0, \frac{1}{4})$ 的距离比点 P 到 x 轴的距离大 $\frac{1}{4}$, 设动点 P 的轨迹为曲线 C , 直线 $l: y = kx + 1$ 交曲线 C 于 A, B 两点, M 是线段 AB 的中点, 过点 M 作 x 轴的垂线交曲线 C 于点 N .

- (1) 求曲线 C 的方程;
- (2) 证明: 曲线 C 在点 N 处的切线与 AB 平行;
- (3) 若曲线 C 上存在关于直线 l 对称的两点, 求 k 的取值范围.

【解析】 (1) $\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2} - |y| = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = y$

(2) 此问明显是定理1的结论, 话不多说直接上套路:

\because 点 $A(x_1, y_1) B(x_2, y_2)$ 在抛物线上 $\therefore x_1^2 = y_1; x_2^2 = y_2$ 求导得 $y' = 2x$; 在点 $A(x_1, y_1) B(x_2, y_2)$ 的切线方程

为: $\begin{cases} y - y_1 = 2x_1(x - x_1) \\ y - y_2 = 2x_2(x - x_2) \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 2xx_1 = y + y_1 & \text{①} \\ 2xx_2 = y + y_2 & \text{②} \end{cases}$, ② - ① 得: $2x(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$, 即 $2x = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}$

$\therefore x = \frac{x_2 + x_1}{2} \therefore x_M = \frac{x_2 + x_1}{2} = x_N$ 令 AB 方程为 $y = kx + 1$, 代入 $x^2 = y$ 得: $x^2 - kx - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{k}{2}$

$\Rightarrow k = 2x_N$, N 点坐标为 (x_N, x_N^2) , 以 N 点为切点的切线斜率为 $y' = 2x_N$, 故 $AB \parallel N$ 的切线;

(3) 若存在两点 PQ 关于直线 $l: y = kx + 1$ 对称, 则 $k_{PQ} = -\frac{1}{k}$, 令 PQ 中点 $E(x_0, y_0)$, 令 PQ 方程为

$y = -\frac{1}{k}x + m$, 由于 E 在直线 $l: y = kx + 1$ 上, 固有 $y_0 = kx_0 + 1$, 根据(2)结论可知 $-\frac{1}{k} = 2x_0$, 即

$y_0 = k \frac{1}{-2k} + 1 = \frac{1}{2}$, 故 $\frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{k}\right)\left(-\frac{1}{2k}\right) + m \Rightarrow m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k^2}$, 将直线 $PQ: y = -\frac{1}{k}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k^2}\right)$ 与抛物线

$x^2 = y$ 联立得: $x^2 + \frac{1}{k}x - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k^2}\right) = 0 \quad \Delta > 0 \Rightarrow \frac{1}{k^2} < 2 \Rightarrow k < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

【例8】 过 x 轴上的动点 $A(a, 0)$ 引抛物线 $y = x^2 + 1$ 的两切线 AP, AQ , P, Q 为切点.

- (1) 求 PQ 的方程;
- (2) 求证直线 PQ 过定点.

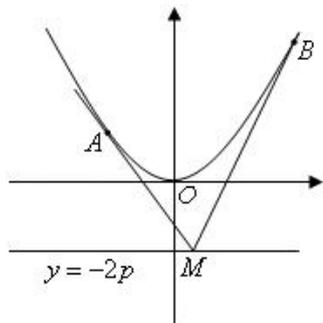


【解析】(1) 将坐标系向上移一个单位, 得过的动点 $A'(a, -1)$ 引抛物线 $y = x^2$ 两切线 $A'P', A'Q'$, 切点为 P', Q' , 根据定理 1, 可得: $A'P', A'Q'$ 方程为 $\frac{1}{2}(y + y_1) = xx_1, \frac{1}{2}(y + y_2) = xx_2$, 易知 $P'Q'$ 方程为 $ax = \frac{1}{2}(y - 1)$; 再将坐标系向下平移一个单位, 得 PQ 的方程为 $y = 2ax + 2$;

(2) 定点 $(0, 2)$ (具体步骤导差代联, 参考定理 1 证明)

达标训练 3

- 过点 $M(1, 2\sqrt{2})$ 作直线交抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 于 A, B 且 M 为 A, B 中点, 过 A, B 分别作抛物线切线, 两切线交于点 N , 若 N 在直线 $y = -2p$ 上, 则 $P =$ _____.
- 过点 $P(-2, 1)$ 引抛物线 $y^2 = 4x$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , F 是抛物线的焦点, 则直线 PF 与直线 AB 的斜率之和为 _____.
- 已知抛物线 $C: y = 2x^2$, 直线 $y = kx + 2$ 交抛物线 C 于 A, B 两点, M 是线段 AB 的中点, 过 M 作 x 轴的垂线交 C 于点 N . 证明: 抛物线 C 在点 N 处的切线与 AB 平行.
- 如图, 设抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$, M 为直线 $y = -2p$ 上任意一点, 过 M 引抛物线的切线, 切点分别为 A, B . 求证: A, M, B 三点的横坐标成等差数列.





5. 过 x 轴上动点 $A(a, 0)$, 引抛物线 $y = x^2 + 3$ 的两条切线 AP 、 AQ , 切点分别为 P 、 Q .
- (1) 若 $a = -1$, 求直线 PQ 的方程;
 - (2) 探究直线 PQ 是否经过定点, 若有, 请求出定点的坐标; 否则, 请说明理由.
6. (深圳一模) 在四边形 $ABCD$ 中, 已知 $A(0, 0)$, $D(0, 4)$, 点 B 在 x 轴上, $BC \parallel AD$, 且对角线 $AC \perp BD$.
- (1) 求点 C 的轨迹 T 的方程;
 - (2) 若点 P 是直线 $y = 2x - 5$ 上任意一点, 过点 P 作点 C 的轨迹 T 的两切线 PA 、 PB , A 、 B 为切点, M 为 AB 的中点. 求证: $PM \parallel y$ 轴或 PM 与 y 轴重合;
 - (3) 在 (2) 的条件下, 直线 AB 是否恒过一定点? 若是, 请求出这个定点的坐标; 若不是, 请说明理由.
7. 已知抛物线 $C: y = 2x^2$, 直线 $y = kx + 2$ 交 C 于 A 、 B 两点, M 是线段 AB 的中点, 过 M 作 x 轴的垂线交 C 于点 N .
- (1) 写出抛物线的焦点坐标及准线方程;
 - (2) 证明: 抛物线 C 在点 N 处的切线与直线 AB 平行;
 - (3) 是否存在实数 k 使 $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 0$, 若存在, 求 k 的值; 若不存在, 说明理由.



8. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上的点 M 到直线 $l: y = x + 1$ 的最小距离为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 点 N 在直线 l 上, 过点 N 作直线与抛物线相切, 切点分别为 A, B .

- (1) 求抛物线方程;
- (2) 当原点 O 到直线 AB 的距离最大时, 求三角形 OAB 的面积.

9. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 和直线 $l: y = x + 4$.

- (1) 求抛物线 C 上一点到直线 l 的最短距离;
- (2) 设 M 为 l 上任意一点, 过 M 作两条不平行于 x 轴的直线. 若这两条直线与抛物线 C 都只有一个公共点, 这两个公共点分别记为 A, B , 证明: 直线 AB 过定点.

10. 过点 $A(-\sqrt{6}, 0)$ 和抛物线 $x^2 = 2py$ 焦点 F 的直线与抛物线相交于点 B , 且 $\overline{AF} = 2\overline{FB}$.

- (1) 求抛物线的方程;
- (2) M, N 为抛物线上两点, O 为原点, $\overline{OM} \cdot \overline{ON} = -1$, 过 M, N 分别作抛物线的两条切线, 相交于 P 点, 求 $\triangle PMN$ 面积的最小值.



11. 已知直线 l 的方程是 $y = x - 1$ 和抛物线 $C: x^2 = y$, 自 l 上任意一点 P 作抛物线的两条切线, 设切点分别为 A, B ;

- (1) 求证: 直线 AB 恒过定点.
- (2) 求 $\triangle PAB$ 面积的最小值.

12. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且过点 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 抛物线 $C_2: x^2 = -2py (p > 0)$

的焦点坐标为 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

- (1) 求椭圆 C_1 和抛物线 C_2 的方程;
- (2) 若点 M 是直线 $l: 2x - y + 3 = 0$ 上的动点, 过点 M 作抛物线 C_2 的两条切线, 切点分别为 A, B , 直线 AB 交椭圆 C_1 于 P, Q 两点.
 - (i) 求证直线 AB 过定点, 并求出该定点坐标;
 - (ii) 当 $\triangle OPQ$ 的面积取最大值时, 求直线 AB 的方程.

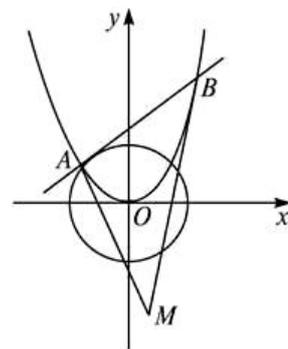


13. 已知 A, B 是抛物线 $W: y = x^2$ 上的两个点, 点 A 的坐标为 $(1, 1)$, 直线 AB 的斜率为 $k (k > 0)$. 设抛物线 W 的焦点在直线 AB 的下方.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 设 C 为 W 上一点, 且 $AB \perp AC$, 过 B, C 两点分别作 W 的切线, 记两切线的交点为 D . 判断四边形 $ABDC$ 是否为梯形, 并说明理由.

14. 如图所示, 已知抛物线 $y = x^2$ 的动弦 AB 所在直线与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 分别过点 A, B 的抛物线的两条切线相交于点 M , 求点 M 的轨迹方程.





秒杀秘籍：第四讲 阿基米德三角形的面积问题

在阿基米德三角形 PAB 中，根据之前所叙述的观点可知：点 P 的坐标为 $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1x_2}{2p})$ ；底边 AB 所在的直

线方程为 $(x_1+x_2)x - 2py - x_1x_2 = 0$ ；那么一定有 $\triangle PAB$ 的面积 $S_{\triangle PAB} = \frac{|x_1-x_2|^3}{8p}$ 。

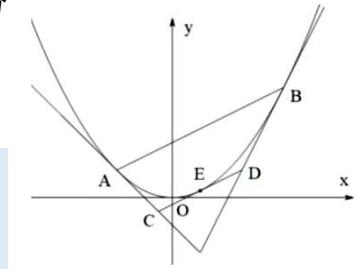
【证明】 点 P 到直线 AB 的距离为 $d = \frac{|(x_1+x_2) \cdot \frac{x_1+x_2}{2} - 2p \cdot \frac{x_1x_2}{2p} - x_1x_2|}{\sqrt{(x_1+x_2)^2 + 4p^2}} = \frac{(x_1-x_2)^2}{2\sqrt{(x_1+x_2)^2 + 4p^2}}$ ，

$$|AB| = \sqrt{1 + (\frac{x_1+x_2}{2p})^2} \cdot |x_1-x_2| = \frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2 + 4p^2}}{2p} \cdot |x_1-x_2|,$$

$$\text{故得 } \triangle PAB \text{ 的面积 } S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2 + 4p^2}}{2p} \cdot |x_1-x_2| \cdot \frac{(x_1-x_2)^2}{2\sqrt{(x_1+x_2)^2 + 4p^2}} = \frac{|x_1-x_2|^3}{8p}.$$

推论 1：如图，若 E 为抛物线弧 AB 上的动点，点 E 处的切线与 PA, PB 分

别交于点 C, D ，则有 $\frac{|AC|}{|CP|} = \frac{|CE|}{|ED|} = \frac{|PD|}{|DB|}$ 。



证明：由定理 1.1 知点 P, C, D 的横坐标分别为

$$x_P = \frac{x_1+x_2}{2}, x_C = \frac{x_1+x_E}{2}, x_D = \frac{x_2+x_E}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{|AC|}{|CP|} = \frac{|x_C - x_1|}{|x_P - x_C|} = \frac{|\frac{x_1+x_E}{2} - x_1|}{|\frac{x_1+x_2}{2} - \frac{x_1+x_E}{2}|} = \frac{|x_E - x_1|}{|x_2 - x_E|}, \frac{|CE|}{|ED|} = \frac{|x_E - x_C|}{|x_D - x_E|} = \frac{|x_E - \frac{x_1+x_E}{2}|}{|\frac{x_2+x_E}{2} - x_E|} = \frac{|x_E - x_1|}{|x_2 - x_E|}, \text{ 所以 } \frac{|AC|}{|CP|} = \frac{|CE|}{|ED|},$$

$$\text{同理 } \frac{|PD|}{|DB|} = \frac{|CE|}{|ED|}, \text{ 故得 } \frac{|AC|}{|CP|} = \frac{|CE|}{|ED|} = \frac{|PD|}{|DB|}.$$

推论 2 若 E 为抛物线 AB 上的动点，抛物线在点 E 处的切线与阿基米德 $\triangle PAB$ 的边 PA, PB 分别交于点 C, D ，

则有 $\frac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle PCD}} = 2$ 。

证明：设 $\frac{|AC|}{|CP|} = \frac{|CE|}{|ED|} = \frac{|PD|}{|DB|} = \lambda$ ，记作 $S_{\triangle PCE} = S$ ，则 $\frac{S_{\triangle ACE}}{S} = \frac{|AC|}{|CP|} = \lambda$ ，即 $S_{\triangle CAE} = \lambda S$ ，同理

$$S_{\triangle PED} = \frac{S}{\lambda}, S_{\triangle DEB} = \frac{S}{\lambda^2}. \text{ 因为 } \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PCD}} = \frac{|PA| \cdot |PB|}{|PC| \cdot |PD|} = \frac{\lambda+1}{1} \cdot \frac{1+\lambda}{\lambda} = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}, \text{ 于是}$$

$$S_{\triangle PAB} = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda} (S + \frac{S}{\lambda}) = \frac{(\lambda+1)^3}{\lambda^2} S$$

$$\text{所以 } S_{\triangle EAB} = S_{\triangle PAB} - S_{\triangle PCD} - S_{\triangle CAE} - S_{\triangle DBE} = \frac{(\lambda+1)^3}{\lambda^2} S - (S + \frac{S}{\lambda}) - \lambda S - \frac{S}{\lambda^2} = \frac{2(\lambda+1)}{\lambda} S$$



$$S_{\triangle PCD} = S + \frac{S}{\lambda} = \frac{\lambda+1}{\lambda} S \text{ 所以 } \frac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle PCD}} = 2.$$

【例 9】 (2019·新课标III) 已知曲线 $C: y = \frac{x^2}{2}$, D 为直线 $y = -\frac{1}{2}$ 上的动点, 过 D 作 C 的两条切线, 切点分别为 A, B .

(1) 证明: 直线 AB 过定点;

(2) 若以 $E(0, \frac{5}{2})$ 为圆心的圆与直线 AB 相切, 且切点为线段 AB 的中点, 求四边形 $ADBE$ 的面积.

【解析】 (1) 证明: $y = \frac{x^2}{2}$ 的导数为 $y' = x$, 设切点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 即有 $y_1 = \frac{x_1^2}{2}, y_2 = \frac{x_2^2}{2}$,

切线 DA 的方程为 $y - y_1 = x_1(x - x_1)$, 即为 $y = x_1x - \frac{x_1^2}{2}$, 切线 DB 的方程为 $y = x_2x - \frac{x_2^2}{2}$,

联立两切线方程可得 $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, 可得 $y = \frac{1}{2}x_1x_2 = -\frac{1}{2}$, 即 $x_1x_2 = -1$,

直线 AB 的方程为 $y - \frac{x_1^2}{2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$, 即为 $y - \frac{x_1^2}{2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)(x - x_1)$,

可化为 $y = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)x + \frac{1}{2}$, 可得 AB 恒过定点 $(0, \frac{1}{2})$;

(2) 设直线 AB 的方程为 $y = kx + \frac{1}{2}$, 由 (1) 可得 $x_1 + x_2 = 2k, x_1x_2 = -1$, AB 中点 $H(k, k^2 + \frac{1}{2})$,

由 H 为切点可得 E 到直线 AB 的距离即为 $|EH|$, 可得 $\frac{|\frac{1}{2} - \frac{5}{2}|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{k^2 + (k^2 - 2)^2}$, 解得 $k = 0$ 或 $k = \pm 1$,

即有直线 AB 的方程为 $y = \frac{1}{2}$ 或 $y = \pm x + \frac{1}{2}$, 由 $y = \frac{1}{2}$ 可得 $|AB| = 2$, 四边形 $ADBE$ 的面积为

$S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 2 \times (1+2) = 3$; 由 $y = \pm x + \frac{1}{2}$, 可得 $|AB| = \sqrt{1+1} \cdot \sqrt{4+4} = 4\sqrt{2}$,

此时 $D(\pm 1, -\frac{1}{2})$ 到直线 AB 的距离为 $\frac{|1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$; $E(0, \frac{5}{2})$ 到直线 AB 的距离为 $\frac{|\frac{1}{2} - \frac{5}{2}|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

则四边形 $ADBE$ 的面积为 $S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times (\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 8$; 综上可得四边形 $ADBE$ 的面积为 3 或 8.

【例 10】 (2012·江西卷) 已知三点 $O(0, 0), A(-2, 1), B(2, 1)$, 曲线 C 上任意一点 $M(x, y)$ 满足

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = \overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + 2.$$

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 动点 $Q(x_0, y_0) (-2 < x_0 < 2)$ 在曲线 C 上, 曲线 C 在点 Q 处的切线为直线 l . 是否存在定点

$P(0, t) (t < 0)$, 使得 l 与 PA, PB 都相交, 交点分别为 D, E , 且 $\triangle QAB$ 与 $\triangle PDE$ 的面积之比是常数? 若存在, 求 t 的值. 若不存在, 说明理由.



【解析】(1) 由 $\overline{MA} = (-2-x, 1-y)$, $\overline{MB} = (2-x, 1-y)$ 可得 $\overline{MA} + \overline{MB} = (-2x, 2-2y)$,

$$\therefore |\overline{MA} + \overline{MB}| = \sqrt{4x^2 + (2-2y)^2}, \quad \overline{OM} \cdot (\overline{OA} + \overline{OB}) + 2 = (x, y) \cdot (0, 2) + 2 = 2y + 2.$$

由题意可得 $\sqrt{4x^2 + (2-2y)^2} = 2y + 2$, 化简可得 $x^2 = 4y$.

(2) 法一: 假设存在点 $P(0, t)(t < 0)$, 满足条件, 则直线 PA 的方程是 $y = \frac{t-1}{2}x + t$, 直线 PB 的方程是

$$y = \frac{1-t}{2}x + t$$

$\because -2 < x_0 < 2, \therefore -1 < \frac{x_0}{2} < 1$ ①当 $-1 < t < 0$ 时, $-1 < \frac{t-1}{2} < -\frac{1}{2}$, 存在 $x_0 \in (-2, 2)$, 使得 $\frac{x_0}{2} = \frac{t-1}{2} \therefore l // PA, \therefore$

当 $-1 < t < 0$ 时, 不符合题意; ②当 $t \leq -1$ 时, $\frac{t-1}{2} \leq -1 < \frac{x_0}{2}, \frac{1-t}{2} \geq 1 > \frac{x_0}{2},$

$\therefore l$ 与直线 PA, PB 一定相交, 分别联立方程组

$$\begin{cases} y = \frac{t-1}{2}x + t \\ y = \frac{x_0}{2}x - \frac{x_0^2}{4} \end{cases}, \begin{cases} y = \frac{1-t}{2}x + t \\ y = \frac{x_0}{2}x - \frac{x_0^2}{4} \end{cases}, \text{解得 } D, E \text{ 的横坐标分别是 } x_D = \frac{x_0^2 + 4t}{2(x_0 + 1 - t)}, x_E = \frac{x_0^2 + 4t}{2(x_0 + t - 1)}$$

$$\therefore x_E - x_D = (1-t) \frac{x_0^2 + 4t}{x_0^2 - (t-1)^2} \therefore |FP| = -\frac{x_0^2}{4} - t \therefore S_{\triangle PDE} = \frac{1}{2} |FP| |x_E - x_D| = \frac{t-1}{8} \times \frac{(x_0^2 + 4t)^2}{x_0^2 - (t-1)^2}$$

$$\therefore S_{\triangle QAB} = \frac{4 - x_0^2}{2} \therefore \frac{S_{\triangle QAB}}{S_{\triangle PDE}} = \frac{4}{1-t} \times \frac{x_0^4 - [4 + (t-1)^2]x_0^2 + 4(t-1)^2}{x_0^4 + 8tx_0^2 + 16t^2}$$

$$\therefore x_0 \in (-2, 2), \triangle QAB \text{ 与 } \triangle PDE \text{ 的面积之比是常数} \therefore \begin{cases} -4 - (t-1)^2 = 8t \\ 4(t-1)^2 = 16t^2 \end{cases}, \text{解得 } t = -1,$$

$\therefore \triangle QAB$ 与 $\triangle PDE$ 的面积之比是 2.

法二: 参考推论 2 的书写, 不再详述.

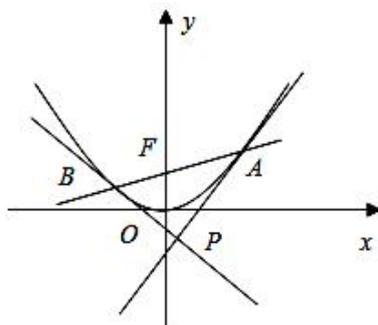


达标训练 4

1. (2019·黄山三模) 已知 P 是圆 $C:(x-2)^2+(y+2)^2=1$ 上一动点, 过点 P 作抛物线 $x^2=8y$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 则直线 AB 斜率的最大值为 ()
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{2}$
2. (2019·长沙月考) 过抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 上两点 A, B 分别作抛物线的切线, 若两切线垂直且交于点 $P(1,-2)$, 则直线 AB 的方程为 ()
- A. $y=\frac{1}{2}x+2$ B. $y=\frac{1}{4}x+3$ C. $y=\frac{1}{2}x+3$ D. $y=\frac{1}{4}x+2$
3. (2019·博望月考) 已知抛物线 $C:x^2=8y$, 过点 $M(x_0, y_0)$ 作直线 MA, MB 与抛物线 C 分别切于点 A, B , 且以 AB 为直径的圆过点 M , 则 y_0 的值为 ()
- A. -1 B. -2 C. -4 D. 不能确定
4. (2018·武汉模拟) 过点 $P(2, -1)$ 作抛物线 $x^2=4y$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 且 PA, PB 分别交 x 轴于 E, F 两点, O 为坐标原点, 则 $\triangle PEF$ 与 $\triangle OAB$ 的面积之比为 ()
- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$
5. (2019·杭州期中) 已知 $Q(1, 1)$ 是抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 上一点, 过抛物线焦点 F 作一条直线 l 与抛物线交于不同两点 A, B . 在点 A 处作抛物线的切线 l_1 , 在点 B 处作抛物线的切线 l_2 , 直线 l_1, l_2 交于 P 点.

(1) 求 p 的值及焦点 F 的坐标;

(2) 求证 $PA \perp PB$.





6. (2019·汕头二模) 已知抛物线 $D: x^2 = 4y$, 过 x 轴上一点 E (不同于原点) 的直线 l 与抛物线 D 交于两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 与 y 轴交于 C 点.

(1) 若 $\overrightarrow{EA} = \lambda_1 \overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{EB} = \lambda_2 \overrightarrow{EC}$, 求乘积 $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ 的值;

(2) 若 $E(4,0)$, 过 A , B 分别作抛物线 D 的切线, 两切线交于点 M , 证明: 点 M 在定直线上, 求出此定直线方程.

7. (2019·凯里模拟) 已知抛物线 $E: x^2 = 4y$.

(1) A 、 B 是抛物线 E 上不同于顶点 O 的两点, 若以 AB 为直径的圆经过抛物线的顶点, 试证明直线 AB 必过定点, 并求出该定点的坐标;

(2) 在 (1) 的条件下, 抛物线在 A 、 B 处的切线相交于点 D , 求 $\triangle ABD$ 面积的取值范围.



8. (2019·遂宁模拟) 已知直线 $l_1: x+y+1=0$ 与直线 $l_2: x+y+3=0$ 的距离为 a , 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 在 (1) 的条件下, 抛物线 $D: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 与点 $(-\frac{1}{8}, 2)$ 关于 y 轴上某点对称, 且抛物线 D 与椭圆 C 在第四象限交于点 Q , 过点 Q 作抛物线 D 的切线, 求该切线方程并求该直线与两坐标轴围成的三角形面积.

9. (2017·江西一模) 如图, 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$, 其焦点 F 到准线的距离为 2, 点 A, B 是抛物线 C 上的定点, 它们到焦点 F 的距离均为 2, 且点 A 位于第一象限.

(1) 求抛物线 C 的方程及点 A, B 的坐标.

(2) 若点 $Q(x_0, y_0)$ 是抛物线 C 上异于 A, B 的一动点, 分别以点 Q 为切点做抛物线 C 的三条切线 l_1, l_2, l_3 , 若 l_1 与 l_2 、 l_1 与 l_3 、 l_2 与 l_3 分别相交于点 D, E, H , 设 $\triangle QAB$, $\triangle DEH$ 的面积依次为 $S_{\triangle ABQ}$, $S_{\triangle DEH}$, 记 $\lambda = \frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle DEH}}$,

问: λ 是否为定值? 若是, 请求出该定值; 若不是, 请说明理由.

