专题 9　平移坐标系构造齐次式

秒杀秘籍：第一讲　圆锥曲线斜率和与积的问题——平移构造齐次式进阶篇

在秒杀压轴题系列 1 中，我们讲解了有关过圆锥曲线上的一个定点 P 作两条直线与圆锥曲线交于 A、B，在直线 PA 和 PB 斜率之和或者斜率之积为定值的情况下，直线 AB 过定点或者 AB 定斜率的问题，秒 1 中给出平移构造齐次式的秒杀方法．那么有些同学提出疑问，如果定点 P 不在圆锥曲线上时，我们该如何秒杀？

秒杀秘籍：已知点 $P(x_0,y_0)$ 是平面内一个定点，椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上有两动点 A、B

（1）若直线 $k_{PA}+k_{PB}=\lambda$，则直线 AB 过定点．

（2）若直线 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\lambda$，则直线 AB 过定点．

证明：将椭圆 C 按向量 $\overrightarrow{PO}(-x_0,-y_0)$ 方向平移，得椭圆 C'：$\frac{(x+x_0)^2}{a^2}+\frac{(y+y_0)^2}{b^2}=1$，展开得：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2x_0}{a^2}x+\frac{2y_0}{b^2}y+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1=0.$$

平面内的定点 $P(x_0,y_0)$ 和椭圆 C 上的动点 A、B 分别对应椭圆 C'上的定点 O 和动点 A'、B'，设直线 $A'B'$ 的方程为 $mx+ny=1$，代入展开式得 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\left(\frac{2x_0}{a^2}x+\frac{2y_0}{b^2}y\right)(mx+ny)+\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)(mx+ny)^2=0$（构造齐次式），当 $x\neq 0$ 时，两边同时除以 x^2 整理得，

$$\left(\frac{n^2x_0^2}{a^2}+\frac{(ny_0+1)^2}{b^2}-n^2\right)\frac{y^2}{x^2}+\left(\frac{2mnx_0^2+2x_0n}{a^2}+\frac{2mny_0^2+2y_0m}{b^2}-2mn\right)\frac{y}{x}+\left(\frac{(mx_0+1)^2}{a^2}+\frac{m^2y_0^2}{b^2}-m^2\right)=0,$$

因为点 A'、B'的坐标满足这个方程，所以 $k_{OA'}$ 和 $k_{OB'}$ 是关于 $\frac{y}{x}$ 的方程的两根．

（1）若 $k_{PA}+k_{PB}=\lambda$，由平移性质知 $k_{OA'}+k_{OB'}=\lambda$，所以

$k_{OA'}+k_{OB'}=-\dfrac{\frac{2mnx_0^2+2x_0n}{a^2}+\frac{2mny_0^2+2y_0m}{b^2}-2mn}{\frac{n^2x_0^2}{a^2}+\frac{(ny_0+1)^2}{b^2}-n^2}=\lambda$，整理可得到 m 和 n 的关系，从而可知直线 $A'B'$ 过定点，由平移性质可得直线 AB 过定点．

（2）若 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\lambda$，由平移性质知 $k_{OA'}\cdot k_{OB'}=\lambda$，所以 $k_{OA'}\cdot k_{OB'}=\dfrac{\frac{(mx_0+1)^2}{a^2}+\frac{m^2y_0^2}{b^2}-m^2}{\frac{n^2x_0^2}{a^2}+\frac{(ny_0+1)^2}{b^2}-n^2}=\lambda$，整理可得到 m 和 n 的关系，从而可知直线 $A'B'$过定点，由平移性质可得直线 AB 过定点．

【例 1】（2018•新课标I）设椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，点 M 的坐标为 $(2,0)$.

（1）当 l 与 x 轴垂直时，求直线 AM 的方程；

（2）设 O 为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$.

【答案】（1）略.

(2)将椭圆按照 $\overrightarrow{MO}$ 方向平移得椭圆 C'，则 $M\to O$，$A\to A'$，$B\to B'$，$F\to F'$，椭圆 C'：$\frac{(x+2)^2}{2}+y^2=1$，

设直线 $l_{P'Q'}$：$mx+ny=1$，直线过 $(-1,0)$，即 $m=-1$，椭圆 C'：$x^2+4x+2y^2+2=0$，

即：$x^2+4x(mx+ny)+2y^2+2(mx+ny)^2=0$（齐次化），两边同除以 x^2，整理得，

$(2+2n^2)\frac{y^2}{x^2}+(4n+4mn)\frac{y}{x}+2m^2+4m+1=0$，又因为 $k_{MA}=k_{OA'}$，$k_{MB}=k_{OB'}$，所以

$k_{MA}+k_{MB}=k_{OA'}+k_{OB'}=-\frac{4n+4mn}{2+2n^2}=0$，所以 $\angle OMA=\angle OMB$.

【例 2】（2019•全国模拟）已知 O 为坐标原点，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆上两点 M、N（非椭圆顶点）满足 $\angle MON=90^\circ$，且 $\frac{1}{|OM|^2}+\frac{1}{|ON|^2}=\frac{3}{2}$.

（1）求椭圆的标准方程.

（2）不平行于 y 轴的直线与椭圆交于 P、Q 两点，F 为椭圆的右焦点，当 $k_{PF}+k_{QF}=0$ 时，直线 PQ 是否过定点？若过，求出此定点，若不过，请说明理由.

【答案】（1）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)将椭圆按 $\overrightarrow{FO}$ 平移得椭圆 C'，则 $F\to O$，$P\to P'$，$Q\to Q'$，椭圆 C'：$\frac{(x+1)^2}{2}+y^2=1$，设 $l_{P'Q'}:mx+ny=1$，

椭圆 C'：$\frac{x^2}{2}+y^2+x-\frac{1}{2}=0$，即 $\frac{x^2}{2}+y^2+x(mx+ny)-\frac{1}{2}(mx+ny)^2=0$，两边同除以 x^2，整理得，

$\left(1-\frac{n^2}{2}\right)\frac{y^2}{x^2}+(n-mn)\frac{y}{x}+\left(\frac{1}{2}+m-\frac{1}{2}m^2\right)=0$，又因为 $k_{PF}=k_{OP'}$，$k_{QF}=k_{OQ'}$，所以

$k_{PF}+k_{QF}=k_{OP'}+k_{OQ'}=-\frac{n-mn}{1-\frac{n^2}{2}}=0$，所以 $m=1$，即直线 $l_{P'Q'}$ 过定点 $(1,0)$，所以直线 PQ 过定点 $(2,0)$.

【例 3】（2018•新课标 I）设抛物线 C：$y^2=2x$，点 $A(2,0)$，$B(-2,0)$，过点 A 的直线 l 与 C 交于 M，N 两点.

（1）当 1 与 x 轴垂直时，求直线 BM 的方程.

（2）证明：$\angle ABM=\angle ABN$．

【答案】（1）略．

（2）将抛物线按 $\overrightarrow{BO}$ 方向平移得抛物线 C'，则 $A\to A'$， $B\to O$， $M\to M'$， $N\to N'$，抛物线 C' 的方程为 $y^2=2(x-2)$，设直线 $l_{M'N'}$ 的方程为 $mx+ny=1$，因为 $l_{M'N'}$ 过定点 $(4,0)$，即 $m=\dfrac{1}{4}$，抛物线 C'：$y^2=2x-4$，即 $y^2=2x(mx+ny)-4(mx+ny)^2$，两边同时除以 x^2，整理得 $(1+4n^2)\dfrac{y^2}{x^2}+(8mn-2n)\dfrac{y}{x}+2m^2=0$．所以 $k_{BM}+k_{BN}=k_{OM'}+k_{ON'}=-\dfrac{8mn-2n}{1+4n^2}=0$，即 $\angle ABM=\angle ABN$．

【例 4】(2018•宁德期末）已知抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$ 与椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 有相同的焦点 F，且两曲线相交于点 $(\dfrac{2}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$，过 F 作斜率为 $k(k\neq 0)$ 的动直线 l，交椭圆 C 于 M， N 两点．

（1）求抛物线 E 和椭圆 C 的方程；

（2）若 A 为椭圆 C 的左顶点，直线 AM， AN 的斜率分别为 k_1， k_2，求证：$\dfrac{k}{k_1}+\dfrac{k}{k_2}$ 为定值，并求出该定值．

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$， $y^2=4x$

（2）将椭圆按 $\overrightarrow{AO}$ 的方向平移，则 $A\to 0,M\to M',F\to F',N\to N'$，平移后椭圆方程为 $\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，即 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}+x=0$，设 $l_{M'N'}$ 方程为 $mx+ny=1$，将直线代入椭圆方程，得 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}+x(mx+ny)=0$，两边同除以 x^2，整理得 $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{y^2}{x^2}-n\cdot\dfrac{y}{x}+(\dfrac{1}{4}-m)=0$， $k_1+k_2=k_{OM'}+k_{ON'}=\dfrac{n}{\frac{1}{3}}=3n$，

$k_1\cdot k_2=k_{OM'}\cdot k_{ON'}=\dfrac{\frac{1}{4}-m}{\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}-3m$， $k=k_{M'N'}=-\dfrac{m}{n}$， $\because mx+ny=1$ 过点 $F'(3,0)$， $\therefore m=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore\dfrac{k}{k_1}+\dfrac{k}{k_2}=\dfrac{k(k_1+k_2)}{k_1k_2}=\dfrac{-\frac{m}{n}(3n)}{\frac{3}{4}-3m}=4$，即：$\dfrac{k}{k_1}+\dfrac{k}{k_2}$ 定值为 4．

【例 5】(2019•济南二模）已知 Q 为圆 $x^2+y^2=1$ 上一动点，Q 在 x 轴，y 轴上的射影分别为点 A，B，动点 P 满足 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AP}$，记动点 P 的轨迹为曲线 C．

（1）求曲线 C 的方程；

（2）过点 P$\left(0,-\dfrac{3}{5}\right)$ 的直线与曲线 C 交于 M，N 两点，判断以 MN 为直径的圆是否过定点？若是，求出定点的坐标，若不是，说明理由．

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

（2）当直线 l 斜率不存在时，以 MN 为直径的圆方程为 $x^2+y^2=1$；当直线 l 斜率为 0 时，由 $\begin{cases} y=-\frac{3}{5} \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，

得 $x=\pm\frac{8}{5}$，则此时圆的方程为 $x^2+\left(y+\frac{3}{5}\right)^2=\frac{64}{25}$，两圆的公共点为 $B(0,1)$，下证以 MN 为直径的圆过 $B(0,1)$．将椭圆按 $\overrightarrow{BO}$ 方向平移，此时 $M\to M'$，$N\to N'$，$P\left(0,-\frac{3}{5}\right)\to P'\left(0,-\frac{8}{5}\right)$，$k_{BM}=k_{OM'}$，$k_{BN}=k_{ON'}$

新椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+(y+1)^2=1$，即 $\frac{x^2}{4}+y^2+2y=0$，设直线 $M'N'$ 的方程为 $mx+ny=1$，所以 $\frac{x^2}{4}+y^2+2y(mx+ny)=0$，即 $(2n+1)\frac{y^2}{x^2}+2m\frac{y}{x}+\frac{1}{4}=0$，由 $M'N'$ 过点 $P'\left(0,-\frac{8}{5}\right)$，则 $n=-\frac{5}{8}$；所以

$k_{BM}\cdot k_{BN}=k_{OM'}\cdot k_{ON'}=\frac{\frac{1}{4}}{2n+1}=-1$，即 $BM\perp BN$，所以以 MN 为直径的圆过点 $B(1,0)$．

【例 6】（2019•长郡模拟）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$，且椭圆 C 过点 $(1,-\frac{3}{2})$．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）若直线 l 过椭圆 C 的左顶点 M，且与椭圆 C 的另一个交点为 N，直线 NF_2 与椭圆 C 的另一个交点为 P，若 $PF_1\perp MN$，求直线 l 的方程．

【解答】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）连 MP，设 $k_{MN}=k_1$，$k_{MP}=k_2$，$k_{PF_1}=k_3$，将椭圆按 $\overrightarrow{MO}$ 方向平移，得：$N\to N'$，$P\to P'$，则直线 $N'P'$ 过定点（3，0）．设 $l_{N'P'}$ 为 $mx+ny=1$，$\therefore m=\frac{1}{3}$．

平移后椭圆方程为 $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，即 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-x=0$

$\therefore\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-x(mx+ny)=0$，$\frac{1}{3}(\frac{y}{x})^2-n\frac{y}{x}+\left(\frac{1}{4}-m\right)=0$，$\therefore k_1k_2=\frac{\frac{1}{4}-m}{\frac{1}{3}}=-\frac{1}{4}$，又 $\because k_1k_3=-1$，$\therefore\frac{k_2}{k_3}=\frac{1}{4}$，

即 $\frac{\frac{y_P}{x_P+2}}{\frac{y_P}{x_P+1}}=\frac{1}{4}$，$\therefore x_P=-\frac{2}{3}$，$\therefore y_P=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$\therefore k_3=\frac{\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}}{-\frac{2}{3}+1}=\pm2\sqrt{6}$，$\therefore k_1=\pm\frac{\sqrt{6}}{12}$，$\therefore l:y=\pm\frac{\sqrt{6}}{12}(x+2)$．

达标训练

1．（2017•全国文）设 A，B 为曲线 $C: y=\dfrac{x^2}{4}$ 上两点，A 与 B 的横坐标之和为 4

（1）求直线 AB 的斜率

（2）设 M 为曲线 C 上一点，C 在 M 处的切线与直线 AB 平行，且 $AM \perp BM$，求直线 AB 的方程．

2．（2013•上海）已知椭圆 C 的两个焦点分别为 $F_1(-1,0)$、$F_2(1,0)$，短轴的两个端点分别为 B_1，B_2

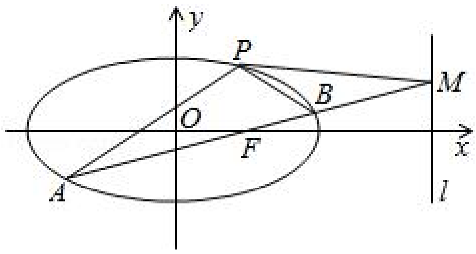
（1）若△ $F_1B_1B_2$ 为等边三角形，求椭圆 C 的方程；

（2）若椭圆 C 的短轴长为 2，过点 F_2 的直线 l 与椭圆 C 相交于 P，Q 两点，且 $\overrightarrow{F_1P} \perp \overrightarrow{F_1Q}$，求直线 l 的方程．

3.（2013•江西）如图，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $P(1,\dfrac{3}{2})$，离心率 $e=\dfrac{1}{2}$，直线 l 的方程为 $x=4$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）AB 是经过右焦点 F 的任一弦（不经过点 P），设直线 AB 与直线 l 相交于点 M，记 PA，PB，PM 的斜率分别为 k_1，k_2，k_3. 问：是否存在常数 λ，使得 $k_1+k_2=\lambda k_3$？若存在，求 λ 的值；若不存在，说明理由.



4.（2015•新课标I）在直角坐标系 xOy 中，曲线 $C:y=\dfrac{x^2}{4}$ 与直线 $l:y=kx+a(a>0)$ 交于 M，N 两点.

（1）当 $k=0$ 时，分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程.

（2）y 轴上是否存在点 P，使得当 k 变动时，总有 $\angle OPM=\angle OPN$？（说明理由）

5．（2018•眉山期末）已知抛物线的顶点为原点，关于 y 轴对称，且过点 $N(-1,\frac{1}{2})$．

（1）求抛物线的方程；

（2）已知 $C(0,-2)$，若直线 $y=kx+2$ 与抛物线交于 A，B 两点，记直线 CA，CB 的斜率分别为 k_1，k_2，求证：$k_1k_2+k^2$ 为定值．

6．（2017•济宁期末）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，其离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，短轴端点与焦点构成四边形的面积为 $2\sqrt{3}$．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若过点 $(-1,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A、B，O 为坐标原点，当 $k_{OA}\cdot k_{OB}=\frac{1}{4}$ 时，试求直线 l 的方程．