专题 1　函数的切线问题

秒杀秘籍：第一讲 切线的几何意义

1．导数的几何意义:

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x))$ 处的切线的斜率.

注:（$k=f'(x)=\tan\alpha$）

切线方程 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ 的计算:

2．在点 $A(x_0,y_0)$ 处的切线方程：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ 抓住关键：$\begin{cases}y_0=f(x_0)\\k=f'(x_0)\end{cases}$

3. 过点 $A(x_1,y_1)$ 的切线方程：设切点为 $P(x_0,y_0)$，则斜率 $k=f'(x_0)$，过切点的切线方程为：$\because$ 过点 $A(x_1,y_1)$，$\therefore$ $y_1-y_0=f'(x_0)(x_1-x_0)$ 然后解出 x_0 的值.（x_0 有几个值，就有几条切线，三次函数多解）

4．定理：令 $\begin{cases}f(x)=e^x\\g(x)=\ln x\end{cases}$ 过原点的切线斜率为 $\begin{cases}e\\\dfrac{1}{e}\end{cases}$；

$\begin{cases}h(x)=e^{ax}\\t(x)=\ln\frac{x}{a}\end{cases}$ 过原点的切线斜率为 $\begin{cases}ae\\\dfrac{1}{ae}\end{cases}$

类推：$\begin{cases}f(x),h(x)\text{过}(m,0)\\g(x),t(x)\text{过}(0,m)\end{cases}$ 的切线斜率分别为 $\begin{cases}e^{m+1}\\\dfrac{1}{e^{m+1}}\end{cases}$（根据平移记忆）和 $\begin{cases}ae^{am+1}\\\dfrac{1}{ae^{m+1}}\end{cases}$（不要求记忆）

考点 1　切线及斜率问题

【例 1】曲线 $y=xe^{x-1}$ 在点 $(1，1)$ 处切线的斜率等于（　　）

A．$2e$　　B．e　　C．2　　D．1

【解析】$f'(x)=x\cdot\left(e^{x-1}\right)'+x'e^x=(x+1)e^{x-1}$，$k=f'(1)=2e^0=2$，选 C．

【例 2】设点 P 是曲线 $y=x^3-\sqrt{3}x+\dfrac{3}{5}$ 上的任意一点，点 P 处切线的倾斜角为 α，则角 α 的范围是（　　）

A．$\left[0，\dfrac{2\pi}{3}\right]$　　B．$\left[0，\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left[\dfrac{2\pi}{3}，\pi\right)$

C．$\left(\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{2\pi}{3}\right]$　　D．$\left[\dfrac{\pi}{3}，\dfrac{2\pi}{3}\right]$

【解析】$f'(x)=3x^2-\sqrt{3}=\tan\alpha,\because 3x^2-\sqrt{3}\geq-\sqrt{3}\ \therefore\tan\alpha\geq-\sqrt{3}\ \therefore\dfrac{2\pi}{3}\leq\alpha<\pi$（$\alpha$ 为第二象限角）或 $\alpha\in\left[0，\dfrac{\pi}{2}\right]$（$\alpha$ 为第一象限角）.

【例 3】已知函数 $f(x)$ 是偶函数，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{x-1}{e^x}$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,\ f(-1))$ 处的切线方程为________.

【解析】$\because f'(x)=\dfrac{2-x}{e^x},\therefore f'(1)=\dfrac{1}{e},\because f(1)=0,\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{1}{e}(x-1)$，又 $f(x)$ 是偶函数，$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程与曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程故意 y 轴对称，为 $y=-\dfrac{1}{e}(x+1)$，故答案为 $y=-\dfrac{1}{e}(x+1)$.

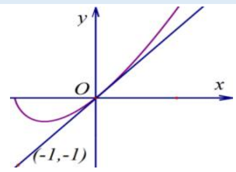
【例 4】设 P 是函数 $y=\sqrt{x}(x+1)$ 图象上异于原点的动点，且该图象在点 P 处的切线的倾斜角为 θ，则 θ 的取值范围是________.

【解析】由题意知 $y'=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\therefore\tan\theta=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\geq 2\sqrt{\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\sqrt{3}\quad\because\theta\in[0,\pi)\therefore\theta\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

【例 5】若 P 是函数 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)$ 图象上的动点，点 $A(-1,-1)$，则直线 AP 斜率的取值范围为（　　）

A．$[1,+\infty)$　　B．$[0,1]$　　C．$(e^{-1},e]$　　D．$(-\infty,e^{-1}]$

【解析】由题意可得：$f'(x)=\ln(x+1)+1$，结合函数的定义域可知，函数在区间 $\left(-1,-1+\dfrac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(-1+\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，且 $f\left(-1+\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}>-1$，绘制函数图象如图所示，当直线与函数图象相切时直线的斜率取得最小值，设切点坐标为 $(x_0,(x_0+1)\ln(x_0+1))$，该点的斜率为 $k=\ln(x_0+1)+1$，切线方程为：$y-(x_0+1)\ln(x_0+1)=[\ln(x_0+1)+1](x-x_0)$，切线过点 $(-1,-1)$，则：$-1-(x_0+1)\ln(x_0+1)=[\ln(x_0+1)+1](-1-x_0)$，解得：$x_0=0$，切线的斜率 $k=\ln(x_0+1)+1=1$，综上可得：则直线 AP 斜率的取值范围为 $[1,+\infty)$.



【例 6】已知函数 $f(x)=mx^3+nx^2$ 的图象在点 $(-1,2)$ 处的切线恰好与直线 $3x+y=0$ 平行，若 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上单调递减，则实数 t 的取值范围是________.

【解析】由题意知 $f(x)=mx^3+nx^2$，$\therefore f'(x)=3mx^2+2nx$. 由题意得 $\begin{cases}f(-1)=-m+n=2\\f'(-1)=3m-2n=-3\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=1\\n=3\end{cases}$，$\because f(x)=x^3+3x^2$，$\therefore f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$，

由 $f'(x)=3x(x+2)<0$，得 $-2<x<0$，所以函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-2,0)$.

由题意得 $[t,t+1]\subseteq[-2,0]$，$\therefore\begin{cases}t\geq-2\\t+1\leq0\end{cases}$，解得 $-2\leq t\leq-1$.

考点 2 切线条数问题

【例 7】过点 $A(m,m)$ 与曲线 $f(x)=x\ln x$ 相切的直线有且只有两条，则 m 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty，e)$　　B．$(e，+\infty)$　　C．$\left(0，\dfrac{1}{e}\right)$　　D．$(1，+\infty)$

【解析】设切点为(x_0,y_0)，$f'(x)=\ln x+1$，所以切线方程为：$y-x_0\ln x_0=(\ln x_0+1)(x-x_0)$，代入$A(m,m)$，得$m-x_0\ln x_0=(\ln x_0+1)(m-x_0)$，即这个关于$x_0$的方程有两个解．化简方程为$x_0=m\ln x_0$，即$\frac{1}{m}=\frac{\ln x_0}{x_0}$，令$g(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，$g(x)$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，$g(e)=\frac{1}{e}$，$x\to+\infty$，$g(x)\to0$，$g(1)=0$，所以$0<\frac{1}{m}<\frac{1}{e}$，所以$m>e$．故选$B$．

【例 8】已知曲线$y=e^{x+a}$与$y=x^2$恰好存在两条公切线，则实数a的取值范围是（　　）

A．$[2\ln2-2，+\infty)$　　B．$(2\ln2，+\infty)$　　C．$(-\infty，2\ln2-2]$　　D．$(-\infty，2\ln2-2)$

【解析】$y=x^2$的导数$y'=2x$，$y=e^{x+a}$的导数为$y'=e^{x+a}$，设与曲线$y=e^{x+a}$相切的切点为$(m，n)$，$y=x^2$相切的切点为$(s，t)$，则有公共切线斜率为$2s=e^{m+a}=\frac{t-n}{s-m}$，又$t=s^2$，$n=e^{m+a}$，即有$2s=\frac{s^2-2s}{s-m}$，即为$s-m=\frac{s}{2}-1$，即有$m=\frac{s+2}{2}(s>0)$，则有$e^{m+a}=2s$，即为$a=\ln2s-\frac{s+2}{2}(s>0)$，恰好存在两条公切线，即$s$有两解，令$f(x)=\ln2x-\frac{x+2}{2}(x>0)$，则$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$，当$x>0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$递减，当$0<x<2$时，$f'(x)>0$，$f(x)$递增，即有$x=2$处$f(x)$取得极大值，也为最大值，且为$2\ln2-2$，由恰好存在两条公切线可得$y=a$与$y=f(x)$有两个交点，结合函数的图象与单调性可得$a$的范围是$a<2\ln2-2$，故选$D$．

【例 9】过点$A(m，n)$与曲线$f(x)=x\ln x$相切的直线有且只有两条，则实数m的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,e)$　　B．$(e,+\infty)$　　C．$(0,\frac{1}{e})$　　D．$(1,+\infty)$

【解析】设切点为$(x_0，y_0)$，$f'(x)=\ln x+1$，所以切线方程为：$y-x_0\ln x_0=(\ln x_0+1)(x-x_0)$，代入$A(m，n)$，得$m-x_0\ln x_0=(\ln x_0+1)(m-x_0)$，即这个关于$x_0$的方程有两个解．化简方程为$m\ln x_0=x_0$，即$\frac{1}{m}=\frac{\ln x_0}{x_0}$，令$g(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，$g(x)$在$(0，e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，$g(e)=\frac{1}{e}$，$x\to+\infty$，$g(x)\to0$，$g(1)=0$，所以$0<\frac{1}{m}<\frac{1}{e}$，所以$m>e$．

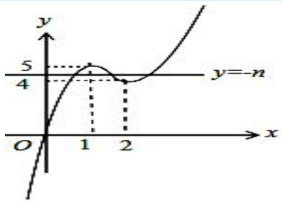
【例 10】设函数$f(x)=x^3-3x^2$，若过点$(2，n)$可作三条直线与曲线$y=f(x)$相切，则实数n的取值范围是（　　）

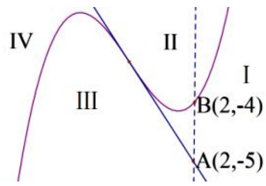
A．$(-5,-4)$　　B．$(-5,0)$　　C．$(-4,0)$　　D．$(-5,-3]$

【解析】法一：$f(x)=x^3-3x^2$，则$f'(x)=3x^2-6x$，设切点为$(x_0,x_0^3-3x_0^2)$，则$f'(x_0)=3x_0^2-6x_0$．∴过切点处的切线方程为$y-x_0^3+3x_0^2=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)$，把点$(2,n)$代入得：$n-x_0^3+3x_0^2=(3x_0^2-6x_0)(2-x_0)$．整理得：$2x_0^3-9x_0^2+12x_0+n=0$．若过点$(2,n)$可作三条直线与曲线

$y=f(x)$ 相切，则方程 $2x_0^3-9x_0^2+12x_0+n=0$ 有三个不同根（左图）令 $g(x)=2x^3-9x^2+12x$，则 $g'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$，$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(1,2)$ 时，$g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,1)$ 和 $(2,+\infty)$；单调减区间为 $(1,2)$．$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$g(x)$ 有极大值为 $g(1)=5$；当 $x=2$ 时，$g(x)$ 有极小值为 $g(2)=4$．由 $4<-n<5$，得 $-5<n<-4$．$\therefore$ 实数 n 的取值范围是 $(-5,-4)$．故选 A．

法二：$f(x)=x^3-3x^2$ 关于点 $(1,-2)$ 中心对称，$f'(x)=3x^2-6x\Rightarrow f'(1)=-3$，在对称中心的切线方程为 $y=-3x+1, x=2$时，$y=-5$，$f(2)=-4$，故当点 $(2,n)$ 位于区域Ⅰ，有三条切线时，$-5<n<-4$．（如右图）





考点 3 零点、交点、极值点问题

【例 11】若函数 $f(x)=ae^x-x-2a$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right)$　　B．$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$　　C．$(-\infty,0)$　　D．$(0,+\infty)$

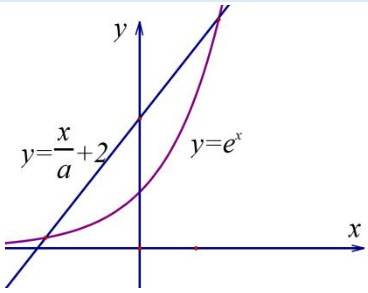
【解析】法一：$\because f(x)=ae^x-x-2a$，$\therefore f'(x)=ae^x-1$．

①当 $a\le 0$ 时，$f'(x)\le 0$ 恒成立，故函数 $f(x)$ 在 R 上单调，不可能有两个零点；

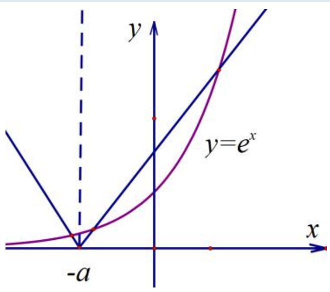
②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln\dfrac{1}{a}$，函数在 $\left(-\infty,\ln\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln\dfrac{1}{a},+\infty\right)$,上单调递增，所以 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)=1-\ln\dfrac{1}{a}-2a=1+\ln a-2a$，令 $g(a)=1+\ln a-2a, a>0$，则 $g'(a)=\dfrac{1}{a}-2=\dfrac{1-2a}{a}$，

$\therefore$ 当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，$g'(a)>0, g(a)$ 单调递增；当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，$g'(a)<0$，$g(a)$ 单调递减．$\therefore g(a)_{\max}=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln a<0$，$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)=1+\ln a-2a<0$，$\therefore$ 函数 $f(x)=ae^x-x-2a$ 有两个零点．综上实数 a 的取值范围是 $(0,+\infty)$．

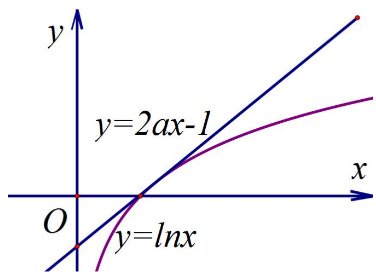
法二：$f(x)=ae^x-x-2a=0\Rightarrow e^x=\dfrac{x}{a}+2$，即 $y=e^x$ 与 $y=\dfrac{2}{a}x+2$ 交点问题，由图可知，$a>0$ 时，一定有两个交点，$a<0$ 时，有仅有一个交点；故选 D．



例题 10



例题 11



例题 12

【例 12】关于 x 的方程 $2|x+a|=e^x$ 有 3 个不同的实数解，则实数 a 的取值范围为__________.

【解析】如图，临界情况为 $y=2(x+a)$ 与 $y=e^x$ 相切的情况，$y'=e^x=2$，则 $x=\ln2$，所以切点坐标为 $(\ln2,2)$，则此时 $a=1-\ln2$，所以只要 $y=2|x+a|$ 图象向左移动，都会产生 3 个交点，所以 $a>1-\ln2$，即 $(1-\ln2,+\infty)$.

【例 13】已知函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$ 有两个极值点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,0)$　　B. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　C. $(0,1)$　　D. $(0,+\infty)$

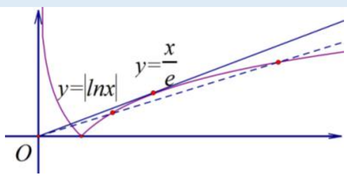
【解析】函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$，则 $f'(x)=\ln x-ax+x\left(\frac{1}{x}-a\right)=\ln x-2ax+1$，

令 $f'(x)=\ln x-2ax+1=0$ 得 $\ln x=2ax-1$，函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$ 有两个极值点，等价于 $f'(x)=\ln x-2ax+1$ 有两个零点，等价于函数 $y=\ln x$ 与 $y=2ax-1$ 的图象有两个交点，在同一坐标系中作出它们的图象（如图），当 $a=\frac{1}{2}$ 时，直线 $y=2ax-1$ 与 $y=\ln x$ 的图象相切，由图可知，当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$y=\ln x$ 与 $y=2ax-1$ 的图象有两个交点，则实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，故选 B.

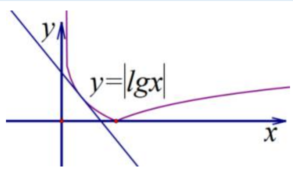
【例 14】设 $f(x)=|\ln x|$，若函数 $g(x)=f(x)-ax$ 在区间 $(0,e^2)$ 上有三个零点，则实数 a 的取值范围（　　）

A. $\left(0,\frac{1}{e}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e}\right)$　　C. $\left(\frac{2}{e^2},\frac{2}{e}\right)$　　D. $\left(\frac{2}{e^2},\frac{1}{e}\right)$

【解析】令 $g(x)=f(x)-ax=0$，可得 $f(x)=ax$．在坐标系内画出函数 $f(x)=|\ln x|$ 的图象（如图 9 所示）．当 $x>1$ 时，$f(x)=\ln x$．由 $y=\ln x$ 得 $y'=\frac{1}{x}$．设过原点的直线 $y=ax$ 与函数 $y=\ln x$ 的图象切于点 $A(x_0,\ln x_0)$，则有 $\begin{cases} \ln x_0=ax_0 \\ a=\frac{1}{x_0} \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x_0=e \\ a=\frac{1}{e} \end{cases}$．所以当直线 $y=ax$ 与函数 $y=\ln x$ 的图象切时 $a=\frac{1}{e}$．又当直线 $y=ax$ 经过点 $B(e^2,2)$ 时，有 $2=a\cdot e^2$，解得 $a=\frac{2}{e^2}$．结合图象可得当直线 $y=ax$ 与函数 $f(x)=|\ln x|$ 的图象有 3 个交点时，实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{2}{e^2},\frac{1}{e}\right)$．即函数 $g(x)=f(x)-ax$ 在区间 $(0,e^2)$ 上有三个零点时，实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{2}{e^2},\frac{1}{e}\right)$．故选 D.



例题 13



例题 14

【例 15】对任意的 $x>0$，总有 $f(x)=a-x-|\lg x|\le 0$，则 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty, \lg e-\lg(\lg e)\right]$　　B．$(-\infty, 1]$　　C．$\left[1, \lg e-\lg(\lg e)\right]$　　D．$\left[\lg e-\lg(\lg e), +\infty\right]$

【解析】原问题即$|\lg x| \geq -x+a$在区间$(0,+\infty)$上恒成立，考查临界情况，即函数$g(x)=|\lg x|$与$h(x)=-x+a$相切时的情形，如图10，很明显切点横坐标位于区间$(0,1)$内，此时，$g(x)=-\lg x, g'(x)=\frac{1}{x\ln 10}$，由$g'(x)=-1$可得：$x=-\frac{1}{\ln 10}=-\lg e$，则切点坐标为：$\left(-\lg e,-\lg(\lg e)\right)$，切线方程为：$y+\lg(\lg e)=x+\lg e$，令$x=0$可得纵截距为：$\lg e-\lg(\lg e)$，结合如图所示的函数图象可得则$a$的取值范围是$\left(-\infty, \lg e-\lg(\lg e)\right]$．选$A$．

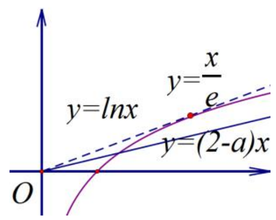
【例16】已知定义在$\left[\frac{1}{\pi},\pi\right]$上的函数$f(x)$，满足$f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$，且当$x\in[1,\pi]$时$f(x)=\ln x$，若函数$g(x)=f(x)-ax$在$\left[\frac{1}{\pi},\pi\right]$上有唯一的零点，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$\left(\frac{1}{e},\pi\ln\pi\right]$　　B．$\left(\frac{\ln\pi}{\pi},\pi\ln\pi\right]\cup\{0\}$　　C．$[0,\pi\ln\pi]$　　D．$\left(\frac{1}{e},\pi\ln\pi\right]\cup\{0\}$

【解析】由题意知$f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$，$x\in[1,\pi]$时，$f(x)=\ln x$，$\therefore x\in\left(-\frac{1}{\pi},1\right]$时，$\frac{1}{x}\in[1,\pi]$，$f\left(\frac{1}{x}\right)=\ln\frac{1}{x}=f(x)$，$f(x)=-\ln x$，$g(x)$零点，就是$y=f(x)$与$y=ax$的交点，画出两函数图象，如图，由图11知，$k_{OA}=\pi\ln\pi$过原点与$y=\ln x$相切的直线斜率为$\frac{1}{e}$，所有直线与曲线有一个交点的$a$的范围是$\left(\frac{1}{e},\pi\ln\pi\right]\cup\{0\}$，故选D．

【例17】若函数$f(x)=\ln x+ax$存在与直线$2x-y=0$平行的切线，则实数a的取值范围是________．

【解析】∵函数$f(x)=\ln x+ax$存在与直线$2x-y=0$平行的切线，即$y=(2-a)x$与$y=\ln x$切线平行，过原点且与$y=\ln x$相切的直线为$y=\frac{x}{e}$，如下图所示，显然$2-a>0,且2-a\neq\frac{1}{e}$，故实数$a$的取值范围是$\left(-\infty,\ 2-\frac{1}{e}\right)\cup\left(2-\frac{1}{e}\ ,2\right)$．

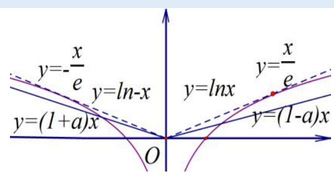


【例18】已知函数$f(x)$为偶函数，当$x<0$时，$f(x)=\ln(-x)-ax$．若直线$y=x$与曲线$y=f(x)$至少有两个交点，则实数a的取值范围是（　　）

A．$\left[-1-\frac{1}{e},1-\frac{1}{e}\right]$　　B．$\left(-1-\frac{1}{e},-1\right)\cup\left\{1-\frac{1}{e}\right\}$

C．$\left(1-\frac{1}{e},+\infty\right)$　　D．$\left(-1-\frac{1}{e},-1\right)\cup\left[1-\frac{1}{e},+\infty\right)$

【解析】函数$f(x)$为偶函数，故当$x>0$时，$f(x)=\ln x+ax=x$有交点，则$\ln x=(1-a)x$有解，故$1-a\leq\frac{1}{e}$；当$x<0$时，$f(x)=\ln(-x)-ax=x$，$y=(a+1)x$与$y=\ln(-x)$相切时，$a+1=-\frac{1}{e}$；如下图，$0>a+1>-\frac{1}{e},\therefore -1-\frac{1}{e}<a<-1$，故$a$的取值范围是



$\left(-1-\frac{1}{e},-1\right)\cup\left[1-\frac{1}{e},+\infty\right)$ ．故选 D.

【例 19】已知函数 $f(x)=|x-2017|+|x-2016|+\cdots+|x-1|+|x+1|+\cdots+|x+2016|+|x+2017|$，在不等式 $e^{2017x}\geq ax+1(x\in R)$ 恒成立的条件下等式 $f(2018-a)=f(2017-b)$ 恒成立，求 b 的取值集合（　　）

A．$\{b\,|\,2016\leq b\leq 2018\}$　　B．$\{2016,2018\}$　　C．$\{2018\}$　　D．$\{2017\}$

【解析】$\left(e^{2017x}\right)'=2017e^{2017x}$，函数 $y=e^{2017x},y=ax+1$ 均经过点 $(0,1)$，则直线 $y=ax+1$ 是函数 $y=e^{2017x}$ 的切线，据此可得：$a=2017$，等式即：$f(1)=f(2017-b)$，很明显函数 $f(x)$ 是偶函数，则：$|2017-b|=1$，解得：$b=2016$ 或 $b=2018$，结合绝对值和式的几何意义可得实数 b 的取值范围是：$\{b\,|\,2016\leq b\leq 2018\}$.

考点 4　参数范围问题

【例 20】已知函数 $f(x)=x+x\ln x$，若 $k\in Z$，且 $k(x-2)<f(x)$ 对任意的 $x>2$ 恒成立，则 k 的最大值为（　　）

（参考数据：$\ln 2=0.6931,\ln 3=1.0986$）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

【解析】设直线 $y=k(x-2)$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切时的切点为 $(m,f(m))$，此时 $\frac{f(m)-0}{m-2}=f'(m)$，即 $\frac{m+m\ln m}{m-2}=2+\ln m$，化简得 $m-4-2\ln m=0$，设 $g(m)=m-4-2\ln m=0$，因为 $g\left(e^2\right)=e^2-8<0$，$g\left(e^3\right)=e^3-10>0$，所以 $e^2<m<e^3$，所以切线斜率 $2+\ln m$ 的取值范围为 $(4,5)$，所以整数 k 的最大值为 4，故选 B.

【例 21】已知 a,b 为正实数，直线 $y=x-a$ 与曲线 $y=\ln(x+b)$ 相切，则 $\frac{a^2}{2+b}$ 的取值范围为_________.

【解析】由题意知 $y'=\frac{1}{x+b}=1$，$\therefore x=1-b$，切点为 $(1-b,0)$，代入 $y=x-a$，得 $a+b=1$，$\because$ a,b 为正实数，$\therefore a\in(0,1)$，则 $\frac{a^2}{2+b}=\frac{a^2}{3-a}$，令 $g(a)=\frac{a^2}{3-a}$，则 $g'(a)=\frac{a(6-a)}{(3-a)^2}>0$，则函数 $g(a)$ 为增函数，$\therefore\frac{a^2}{2+b}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

【例 22】若直线 $y=kx+b$ 为函数 $f(x)=\ln x$ 图象的一条切线，则 $k+b$ 的最小值为_________.

【解析】设切点 $P(x,\ln x_0)$，则 $k=f'(x_0)=\frac{1}{x_0}$，所以方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，即 $y=\frac{1}{x_0}x+\ln x_0-1$，所以 $k=\frac{1}{x_0},b=\ln x_0-1$，$g(x_0)=k+b=\frac{1}{x_0}+\ln x_0-1(x_0>0)$，可得 $g(x_0)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以当 $x_0=1$ 时，$k+b$ 取得最小值 0.

考点 5　距离问题和平行切线问题

【例 23】设点 P 在曲线 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上，点 Q 在曲线 $y=\ln(2x)$ 上，则 $|PQ|$ 最小值为（　　）

A．$1-\ln 2$　　B．$\sqrt{2}(1-\ln 2)$　　C．$1+\ln 2$　　D．$\sqrt{2}(1+\ln 2)$

【解析】两函数互为反函数，即图像关于 $y=x$ 对称，函数 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上的点 $\left(x，\frac{1}{2}e^x\right)$ 到直线 $y=x$ 的距离为 $\frac{\left|\frac{1}{2}e^x-x\right|}{\sqrt{2}}$，设函数 $g(x)=\frac{1}{2}e^x-x\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{2}e^x-1$，得 $g(x)_{\min}=1-\ln 2$，所以 $d_{\min}=\frac{1-\ln 2}{\sqrt{2}}$，由图像关于 $y=x$ 对称得：$|PQ|$ 的最小值为 $2d_{\min}=\sqrt{2}(1-\ln 2)$．

【例 24】直线 $y=m$ 分别与曲线 $y=2(x+1)$，与 $y=x+\ln x$ 交于点 A,B，则 $|AB|$ 的最小值为（　　）

A．$\frac{3\sqrt{2}}{4}$　　B．2　　C．3　　D．$\frac{3}{2}$

【解析】由题意可知，当过点 B 的切线与 $y=2(x+1)$ 平行时，$|AB|$ 取得最小值．为此对 $y=x+\ln x$ 进行求导得 $y'=1+\frac{1}{x}$，令 $y'=2$，解得 $x=1$，代入 $y=x+\ln x$，知 $y=1$，所以当 $|BC|$ 取到最小值时，$m=1$，所以 $A\left(-\frac{1}{2}，1\right)$，$B(1，1)$，易知 $|AB|=1-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$，故选 D．

【例 25】已知函数 $f(x)=-f'(0)e^x+2x$，点 P 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0，f(0))$ 处的切线 l 上的一点，点 Q 在曲线 $y=e^x$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值为__________．

【解析】由 $f'(x)=-f'(0)e^x+2$，令 $x=0$ 可得 $f'(0)=1$，所以 $f(x)=-e^x+2x$，所以切线的斜率 $k=f'(0)=1$，又 $f(0)=-1$，故切线方程为 $x-y-1=0$．由题意可知与直线 $x-y-1=0$ 平行且与曲线 $y=e^x$ 相切的切点到直线 $x-y-1=0$ 的距离即为所求．设切点为 $Q(t，e^t)$，则 $k_1=e^t=1$，故 $t=0$，即 $Q(0，1)$，该点到直线 $x-y-1=0$ 的距离为 $d=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$．

【例 26】函数 $f(x)=e^x+x^2+x+1$ 与 $g(x)$ 的图象关于直线 $2x-y-3=0$ 对称，P、Q 分别是函数 $f(x)$、$g(x)$ 图象上的动点，则 $|PQ|$ 的最小值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$2\sqrt{5}$

【解析】由题意得当 P 点处切线平行直线 $2x-y-3=0$，Q 为 P 关于直线 $2x-y-3=0$ 对称点时，$|PQ|$ 取最小值．$\because f'(x)=e^x+2x+1$，$\therefore f'(x)=e^x+2x+1\Rightarrow e^x+2x+1=2\Rightarrow P(0，2)$，$|PQ|$ 的最小值为 $2\times\frac{|0-2-3|}{\sqrt{1+4}}=2\sqrt{5}$，故选 D．

考点 6　两点间距离平方问题

【例 27】已知实数 a、b 满足 $2a^2-5\ln a-b=0$，$c\in R$，则 $(a-c)^2+(b+c)^2$ 的最小值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{9}{2}$

【解析】考查 $\sqrt{(a-c)^2+(b+c)^2}$ 的最小值：x 代换 a，y 代换 b，则 x，y 满足：$2x^2-5\ln x-y=0$，即 $y=2x^2-5\ln x(x>0)$，以 x 代换 c，可得点 $(x,-x)$，满足 $y+x=0$．因此求 $\sqrt{(a-c)^2+(b+c)^2}$ 的最小值即为求曲线 $y=2x^2-5\ln x(x>0)$ 上的点到直线 $y+x=0$ 的距离的最小值．

设直线 $y+x+m=0$ y+x+m=0 与曲线 $y=f(x)=2x^2-5\ln x(x>0)$ 相切于点 $P(x_0,y_0)$，

$f'(x)=4x-\frac{5}{x}$，则 $f'(x_0)=4x_0-\frac{5}{x_0}=-1$，解得 $x_0=1$，∴切点为 $P(1,2)$．∴点 P 到直线 $y+x=0$ 的距离 $d=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$，得：$(a-c)^2+(b+c)^2$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$．

【例 28】已知 $S=(x-a)^2+(\ln x-a)^2(a\in R)$，则 S 的最小值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

【解析】设 $A(x,\ln x)$，$B(a,a)$，则问题化为求平面上两动点 $A(x,\ln x)$，$B(a,a)$ 之间距离的平方的最小值的问题，也即求曲线 $f(x)=\ln x$ 上的点到直线 $y=x$ 的点的距离最小值问题．因 $f'(x)=\frac{1}{x}$，设切点 $P(t,\ln t)$，则切线的斜率 $k=\frac{1}{t}$，由题设当 $\frac{1}{t}=1$，即 $t=1$ 时，点 $P(1,0)$ 到直线 $y=x$ 的距离最近，其最小值为 $d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以所求 S 的最小值为 $S_{\min}=\frac{1}{2}$，故选 B．

达标训练

1. 直线 $y=m$ 分别与曲线 $y=2(x+1)$，与 $y=x+\ln x$ 交于点 A,B，则 $|AB|$ 的最小值为（　　）

A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$　　B. 2　　C. 3　　D. $\frac{3}{2}$

2. 已知函数 $f(x)=10\sin x+\frac{1}{6}x^3$ 在 $x=0$ 处的切线与直线 $nx-y=0$ 平行，则二项式 $(1+x+x^2)(1-x)^n$ 展开式中 x^4 的系数为（　　）

A. 120　　B. 135　　C. 140　　D. 100

3. 已知 $f(x)=(a-2)x+\frac{4x}{x+1}(x>0)$，若曲线 $f(x)$ 上存在不同两点 A,B，使得曲线 $f(x)$ 在点 A,B 处的切线垂直，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$　　B. $(-2,2)$　　C. $(-\sqrt{3},2)$　　D. $(-2,\sqrt{3})$

4. 已知 a、b、$c\in R$，且满足 $b^2+c^2=1$，如果存在两条互相垂直的直线与函数 $f(x)=ax+b\cos x+c\sin x$ 的图象都相切，则 $a+\sqrt{2}b+\sqrt{3}c$ 的取值范围是（　　）

A. $[-2,2]$　　B. $[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$　　C. $[-\sqrt{6},\sqrt{6}]$　　D. $[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$

5. 设函数 $f(x)=(x-a)^2+(2\ln x-2a)^2$，其中 $x>0$，　$a\in \mathrm{R}$，存在 x_0 使得 $f(x_0)\le\frac{4}{5}$ 成立，则实数 a 的值是（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

6. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的单调函数，满足 $f\left[f(x)-e^x\right]=1$，则 $f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为（　　）

A. $y=x+1$　　B. $y=x-1$　　C. $y=-x+1$　　D. $y=-x-1$

7. 已知 P_1,P_2 为曲线 $C:y=|\ln x|$（$x>0$ 且 $x\ne1$）上的两点，分别过 P_1,P_2 作曲线 C 的切线交 y 轴于 M,N 两点，若 $\overrightarrow{P_1M}\cdot\overrightarrow{P_2N}=0$，则 $|\overrightarrow{MN}|=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

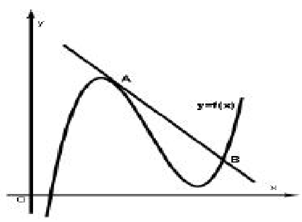
8. 如右图，直线 $y=ax+2$ 与曲线 $y=f(x)$ 交于 A、B 两点，其中 A 是切点，记 $h(x)=\frac{f(x)}{x}$,$g(x)=f(x)-ax$，则下列判断正确的是（　　）

A. $h(x)$ 只有一个极值点

B. $h(x)$ 有两个极值点，且极小值点小于极大值点

C. $g(x)$ 的极小值点小于极大值点，且极小值为 -2

D. $g(x)$ 的极小值点大于极大值点，且极大值为 2



9. 过点 $A(2,1)$ 作曲线 $f(x)=x^3-3x$ 的切线最多有（　　）

A. 3条　　B. 2条　　C. 1条　　D. 0条

10. 设函数 $f(x)=3x^2-4ax(a>0)$ 与 $g(x)=2a^2\ln x+b$ 有公共点，且在公共点处的切线方程相同，则实数 b 的最大值为（　　）

A. $\frac{1}{e^2}$　　B. $\frac{1}{2e^2}$　　C. $\frac{1}{3e^2}$　　D. $\frac{1}{4e^2}$

11. 已知定义在$\left[\frac{1}{\pi},\pi\right]$上的函数$f(x)$，满足$f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$，且当$x\in[1,\pi]$时$f(x)=\ln x$，若函数$g(x)=f(x)-ax$在$\left[\frac{1}{\pi},\pi\right]$上有唯一的零点，则实数$a$的取值范围是（　　）

A. $\left(\frac{1}{e},\pi\ln\pi\right]$　　B. $\left(\frac{\ln\pi}{\pi},\pi\ln\pi\right]\cup\{0\}$　　C. $[0,\pi\ln\pi]$　　D. $\left(\frac{1}{e},\pi\ln\pi\right]\cup\{0\}$

12. 已知$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ $(x_1>x_2)$是函数$f(x)=x^3-|x|$图像上的两个不同点．且在A,B两点处的切线互相平行，则$\frac{x_2}{x_1}$的取值范围是（　　）

A. $(-1,1)$　　B. $(-1,2)$　　C. (-2.0)　　D. $(-1,0)$

13. 设函数$f(x)=\frac{3}{2}x^2-2ax(a>0)$与$g(x)=a^2lnx+b$有公共点，且在公共点处的切线方程相同，则实数$b$的最大值为（　　）

A. $\frac{1}{2e^2}$　　B. $\frac{1}{2}e^2$　　C. $\frac{1}{e}$　　D. $-\frac{3}{2e^2}$

14. 设直线l_1,l_2分别是函数$f(x)=\begin{cases}-lnx,0<x<1\\ lnx,x>1\end{cases}$图象上点$P_1,P_2$处的切线，$l_1$与$l_2$垂直相交于点$P$，且$l_1,l_2$分别与$y$轴相交于点$A,B$，则$\Delta PAB$的面积的取值范围是（　　）

A. $(0,1)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $(0,2)$

15. 函数$f(x)=\ln x$在点$P(x_0,\ f(x_0))$处的切线l与函数$g(x)=e^x$的图象也相切，则满足条件的切点P的个数有（　　）

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

16. 已知函数$f(x)=x-e^{\frac{x}{a}}$ $(a>0)$，且$y=f(x)$的图象在$x=0$处的切线l与曲$y=e^x$相切，符合情况的切线（　　）

A. 有0条　　B. 有1条　　C. 有2条　　D. 有3条

17. 若曲线$f(x)=\frac{1}{a\ln(x+1)}(e-1<x<e^2-1)$和$g(x)=-x^3+x^2(x<0)$上分别存在点$A,B$，使得$\Delta AOB$是以原点$O$为直角顶点的直角三角形，且斜边$AB$的中点$y$轴上，则实数$a$的取值范围是（　　）

A. (e,e^2)　　B. $\left(e,\frac{e^2}{2}\right)$　　C. $(1,e^2)$　　D. $[1,e)$

18. 已知函数$f(x)=x\left(a-\frac{1}{e^x}\right)$，曲线$y=f(x)$上存在两个不同点，使得曲线在这两点处的切线都与$y$轴垂直，则实数$a$的取值范围是（　　）

A. $(-e^2,+\infty)$　　B. $(-e^2,0)$　　C. $\left(-\frac{1}{e^2},+\infty\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{e^2},0\right)$

19. 已知函数$f(x)$为偶函数，当$x<0$时，$f(x)=\ln(-x)-ax$．若直线$y=x$与曲线$y=f(x)$至少有两个交点，则实数a的取值范围是（　　）

A. $\left[-1-\frac{1}{e},1-\frac{1}{e}\right]$　　B. $\left(-1-\frac{1}{e},-1\right)\cup\left\{1-\frac{1}{e}\right\}$

C. $\left(1-\frac{1}{e},+\infty\right)$　　D. $\left(-1-\frac{1}{e},-1\right)\cup\left[1-\frac{1}{e},+\infty\right)$

20. 若曲线 $C_1: y=ax^2(a>0)$ 与曲线 $C_2: y=e^x$ 存在公共切线，则 a 的取值范围为（　　）

A. $\left(0,\frac{e^2}{8}\right]$　　B. $\left(0,\frac{e^2}{4}\right]$　　C. $\left[\frac{e^2}{8},+\infty\right)$　　D. $\left[\frac{e^2}{4},+\infty\right)$

21. 已知曲线 $y=x^2+1$ 在点 $P(x_0,x_0^2+1)$ 处的切线为 l，若 l 也与函数 $y=\ln x, x\in(0,1)$ 的图象相切，则 x_0 满足（　　）（其中 $e=2.71828\ldots$）

A. $1<x_0<\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}<x_0<\sqrt{e}$　　C. $\sqrt{e}<x_0<\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}<x_0<2$

22. 已知曲线 C_1： $y=x^2$ 与曲线 C_2： $y=\ln x(x>\frac{\sqrt{2}}{2})$，直线 l 是曲线 C_1 和曲线 C_2 的公切线，设直线 l 与曲线 C_1 切点为 P，则点 P 的横坐标 t 满足（　　）

A. $0<t<\frac{1}{2e}$　　B. $\frac{1}{2e}<t<\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}<t<\sqrt{2}$

23. 设函数 $f(x)=|\sin x|$ 的图象与直线 $y=kx(k>0)$ 有且仅有三个公共点，这三个公共点横坐标的最大值为 α，则 $\alpha=$（　　）

A. $-\cos\alpha$　　B. $\tan\alpha$　　C. $-\sin\alpha$　　D. $-\tan\alpha$

24. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 的可导函数， $f'(x)$ 为其导函数，当 $x>0$ 且 $x\neq1$ 时， $\frac{2f(x)+xf'(x)}{x-1}>0$，若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为 $-\frac{3}{4}$，则 $f(1)=$（　　）

A. 0　　B. 1　　C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{1}{5}$

25. 函数 $y=f(x)$ 图象上不同两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 处的切线的斜率分别是 k_A,k_B，规定 $\varphi(A,B)=\frac{|k_A-k_B|}{|AB|}$ 叫做曲线在点 A 与点 B 之间的“弯曲度”．设曲线 $y=e^x$ 上不同的两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，且 $x_1-x_2=1$，若 $t\cdot\varphi(A,B)<\sqrt{3}$ 恒成立，则实数 t 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,3]$　　B. $(-\infty,2]$　　C. $(-\infty,\sqrt{3}]$　　D. $[1,3]$

26. 过点 $M(2,-2p)$ 引抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的切线，切点分别为 A、B，若 $|AB|=4\sqrt{10}$，则 P 的值是（　　）

A. 1或2　　B. $\sqrt{2}$ 或2　　C. 1　　D. 2

27. 已知曲线 $f(x)=x^3+x^2+x+3$ 在 $x=-1$ 处的切线与抛物线 $y=2px^2$ 相切，则抛物线的准线方程为（　　）

A. $x=\frac{1}{16}$　　B. $x=1$　　C. $y=-1$　　D. $y=1$

28. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+a,x<0\\ -\frac{1}{x},x>0\end{cases}$ 的图象上存在不同的两点 A,B，使得曲线 $y=f(x)$ 在这两点处的切线重合，则实数 a 的取值范围是_________.

29. 若 $2f(x)+f(-x)=x^3+x+3$ 对 $x\in\mathrm{R}$ 恒成立，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为________.

30. 直线 $\overrightarrow{FB}=(x_2,y_2-1)$ 分别是函数 $f(x)=\sin x$，$x\in[0,\pi]$ 图象上点 P_1，P_2 处的切线， l_1，l_2 垂直相交于点 P，且 l_1，l_2 分别与 y 轴相交于点 A，B，则 ΔPAB 的面积为_________.

31. 已知函数 $f(x)=x^n-x^{n+1}\left(n\in N^*\right)$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线与 y 轴的交点的纵坐标为 b_n，则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为__________.

32. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x},g(x)=x^2$．若直线 l 与曲线 $f(x),g(x)$ 都相切，则直线 l 的斜率为_________.

33. 设 P 是函数 $y=\sqrt{x}(x+1)$ 图象上异于原点的动点，且该图象在点 P 处的切线的倾斜角为 θ，则 θ 的取值范围是__________.

34. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 与函数 $f(x)=2x^2+a^2\,(x>0)$ 和 $g(x)=2x^3+a^2\,(x>0)$ 均相切（其中 a 为常数），切点分别为 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$，则 x_1+x_2 的值为__________.

35. 过点 $(1,-1)$ 与曲线 $f(x)=x^3-2x$ 相切的直线方程是___________.

36. 若直线 $y=kx+b$ 为函数 $f(x)=\ln x$ 图象的一条切线，则 $k+b$ 的最小值为__________.

37. 若曲线 $y=\dfrac{n}{2}x+\ln x(n\in N^*)$ 在 $x=\dfrac{2}{n}$ 处的切线斜率为 a_n，则数列 $\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 $S_n=$_________.

38. 曲线 $y=a\sqrt{x}(a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 有公共点，且在公共点处的切线相同，则 a 的值为__________.

39. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且 $x>0$ 时， $f(x)=\dfrac{x-1}{e^x}$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,\ f(-1))$ 处的切线方程为_________.

40. 已知函数 $f(x)=x^3$．设曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_1,f(x_1))$ 处的切线与该曲线交于另一点 $Q(x_2,f(x_2))$，记 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导数，则 $\dfrac{f'(x_1)}{f'(x_2)}$ 的值为_________.

41. 若实数 a,b,c,d 满足 $\dfrac{2a^2-\ln a}{b}=\dfrac{3c-2}{d}=1$，则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 是最小值为__________.

42. 已知函数 $f(x)=(3\ln x-x^2-a-2)^2+(x-a)^2\,(a\in R)$，若关于 x 的不等式 $f(x)\le 8$ 有解，则实数 a 为____.

43. 已知函数 $f(x)=3\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+x,g(x)=3x+\dfrac{5}{2}$，$P$，$Q$ 分别 $f(x)$，$g(x)$ 为图象上任意一点， 则 $|PQ|$ 的最小值为__________.

44. 已知函数 $f(x)=x^2+(\ln 3x)^2-2a(x+3\ln 3x)+10a^2$ 若存在 x_0 使得 $f(x_0)\le\dfrac{1}{10}$ 有解，则实数 a 为________.