专题 3 对数切线放缩

秒杀秘籍：第一讲 由 $\ln x \le x-1$（也可以记为 $\ln ex \le x$，切点为（1,0））引起的放缩

最常见的就是 $\ln(x+1)\le x$，由 $\ln x\le x-1$ 向左平移一个单位来理解，或者将 $e^x\ge x+1$ 两边取对数而来.

①$\ln x\le\frac{x}{e}$．（用 $\frac{x}{e}$ 替换 x，切点横坐标是 $x=e$），表示过原点与 $f(x)=\ln x$ 的切线为 $y=\frac{x}{e}$.

②$\ln x\ge 1-\frac{1}{x}$．（用 $\frac{1}{x}$ 替换 x，切点横坐标 $x=1$），或者记为 $x\ln x\ge x-1$.

③$\ln x\le x^2-x$．（由 $\ln x\le x-1$ 及 $x-1\le x^2-x$ 切点横坐标是 $x=1$），或者记为 $\frac{\ln x}{x}\le x-1$.

④$\ln x\le\frac{1}{2}(x^2-1)$（由 $\ln x\le x-1\le\frac{1}{2}(x^2-1)$），即在点 $(1,0)$ 处三曲线相切.

在一些解答题的书写过程中，通常要用上"对数单身狗"模型，具体一些书写过程大家可以参照秒 1 的"对数单身狗，指数找基友"专题，这里不详述.

【例 1】（2019•江苏）在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 在曲线 $y=lnx$ 上，且该曲线在点 A 处的切线经过点 $(-e,-1)$，（e 为自然对数的底数），则点 A 的坐标是________.

【解析】设 $A(x_0,\ lnx_0)$，由 $y=lnx$，得 $y'=\frac{1}{x}$，$\therefore y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$，则该曲线在点 A 处的切线方程为 $y-lnx_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，$\because$ 切线经过点 $(-e,-1)$，$\therefore -1-lnx_0=-\frac{e}{x_0}-1$，即 $lnx_0=\frac{e}{x_0}$，则 $x_0=e$．$\therefore A$ 点坐标为 $(e,1)$．故答案为：$(e,1)$.

注意：此题可以想到过原点与 $f(x)=\ln x$ 的切线为 $y=\frac{x}{e}$，且过点 $(-e,\ -1)$，故切点为 $(e,1)$.

【例 2】（2018•雁江区月考）设函数 $f(x)=lnx-x+2$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性及零点个数.

（2）证明，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$x-1<xlnx$；

【解析】（1）函数 $f(x)=lnx-x+2$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，其导函数 $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，由 $f'(x)>0$，可得 $0<x<1$；由 $f'(x)<0$，可得 $x>1$．$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减．当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极大值为 $f(1)=1>0$，又 $f(\frac{1}{e^2})=-\frac{1}{e^2}<0$，$f(e^2)=4-e^2<0$，$\therefore f(x)$ 有两个零点；

（2）法一：证明：要证 $x-1<xlnx$，即证 $xlnx-x+1>0$，设 $g(x)=xlnx-x+1$，$x\in(1,+\infty)$，则 $g'(x)=lnx$，$\because x\in(1,+\infty)$，$\therefore lnx>0$ $\therefore g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，又 $g(1)=0$，$\therefore g(x)>0$，即 $xlnx-x+1>0$，$\therefore x-1<xlnx$.

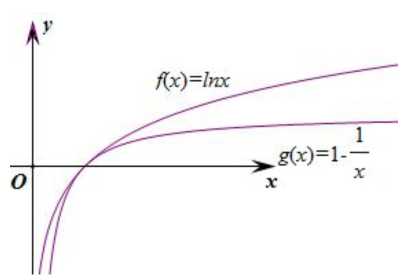
法二：（对数单身狗）要证 $x-1<xlnx$，即证 $1-\frac{1}{x}<lnx$，构造函数 $g(x)=lnx-1+\frac{1}{x}$，$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$ 显然 $\because x\in(1,+\infty)$，$\therefore g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，又 $g(1)=0$，$\therefore g(x)>0$，$\therefore x-1<xlnx$.

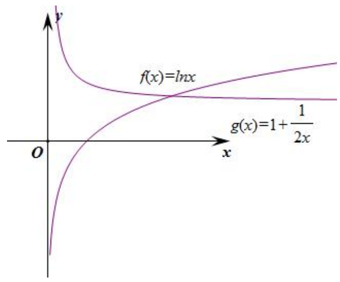
【例 3】（2019•深圳二模）已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{x}+lnx-1$ 有且仅有一个零点，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$(-\infty,0]\cup\{1\}$　　B．$[0,1]$　　C．$(-\infty,0]\cup\{2\}$　　D．$[0,2]$

【解析】法一：$\because$ 函数 $f(x)=\dfrac{a}{x}+lnx-1$，$\therefore f'(x)=-\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-a}{x^2}$，$x>0$，当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{x-a}{x^2}>0$ 恒成立，$f(x)$ 是增函数，$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，$f(1)=a-1<0$，函数 $f(x)=\dfrac{a}{x}+lnx-1$ 有且仅有一个零点；当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得：$x>a$，令 $f'(x)<0$，解得：$x<a$，故 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 递减，在 $(a,+\infty)$ 递增，故只需 $f(x)_{min}=f(a)=lna=0$，解得：$a=1$，综上：实数 a 的取值范围为 $(-\infty,\ 0]\cup\{1\}$．故选：A．

法二：$a>0$ 时 $\dfrac{a}{x}$ 属于凹函数，根据 $\ln x\le x-1$，将 $\dfrac{1}{x}$ 替换 x 得，$\ln x\ge 1-\dfrac{1}{x}$，切点为 $(1,0)$，故 $a=1$ 时，有仅有一个零点，$a>1$ 或者 $0<a<1$ 均没有相切情况；当 $a\le 0$，$\dfrac{a}{x}$ 属于凸函数，与 $\ln x$ 一定会有交点，如图所示，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,\ 0]\cup\{1\}$．故选 A．





【例 4】（2019•湖北期中）已知函数 $f(x)=alnx+x^2-(a+2)x$ 恰有两个零点，则实数的取值范围是（　　）

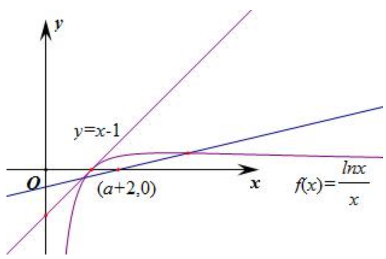
A．$(-1,0)$　　B．$(-1,+\infty)$　　C．$(-2,0)$　　D．$(-2,-1)$

【解析】法一：由 $alnx+x^2-(a+2)x=0$ 得 $a=\dfrac{x^2-2x}{x-lnx}$，令 $g(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-lnx}$，则 $g'(x)=\dfrac{(x-1)(x+2-2lnx)}{(x-lnx)^2}$，

$g(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-lnx}$，在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，所以 $g(x)_{min}=g(1)=-1$，又当 $x\in(0,1)$ 时，$x^2-2x<0$，

$g(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-lnx}<0$，所以实数的取值范围是 $(-1,0)$．故选 A．

法二：由于 $\dfrac{\ln x}{x}\le x-1$，切点为（1,0），根据题意 $\dfrac{lnx}{x}=-\dfrac{x-(a+2)}{a}$ 有两交点，如图，直线的零点一定满足 $a+2>1$，且直线必为单调递增，故 $-1<a<0$ 时一定有两交点，当 $a\ge 0$ 时，直线和曲线仅有一个交点，故选 A．



【例 5】（2019•湖南模拟）已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}+2klnx-kx$，若 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的唯一极值点，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,\dfrac{e^2}{4}]$　　B．$(-\infty,\dfrac{e}{2}]$　　C．$(0,2]$　　D．$[2,+\infty)$

【解析】法一$\because$函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，$\therefore f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}+\dfrac{2k}{x}-k=\dfrac{(e^x-kx^2)(x-2)}{x^3}$，

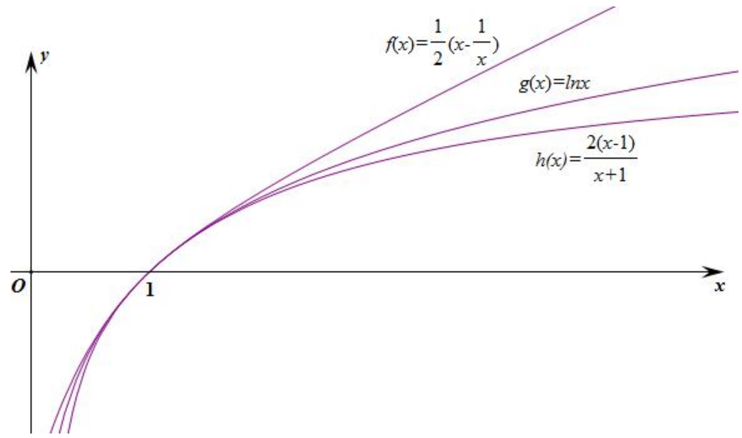
$\because x=2$ 是函数 $f(x)$ 的唯一一个极值点，$\therefore x=2$ 是导函数 $f'(x)=0$ 的唯一根，$\therefore e^x-kx^2=0$ 在 $(0,+\infty)$ 无变号零点，即 $k=\dfrac{e^x}{x^2}$ 在 $x>0$ 上无变号零点，令 $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$，因为 $g'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$，所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $x>2$ 上单调递增所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(2)=\dfrac{e^2}{4}$，所以必须 $k<\dfrac{e^2}{4}$，故选 A．

法二（同构式切线放缩法）：$f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}+2klnx-kx=\dfrac{e^x}{x^2}-kln\dfrac{e^x}{x^2}$，令 $\dfrac{e^x}{x^2}=t$，$f(t)=t-klnt$，$f'(t)=1-\dfrac{k}{t}=\dfrac{t-k}{t}$，显然 $e^x\ge ex\Rightarrow e^{\frac{x}{2}}\ge\dfrac{ex}{2}\Rightarrow e^x\ge\dfrac{e^2}{4}x^2$，当仅当 $x=2$ 时等号成立，故 $t>\dfrac{e^2}{4}$ 时，$f'(t)=0$ 无解，所以必须 $k\le\dfrac{e^2}{4}$，故选 A．

注意：关于复合函数极值点和单调性，就是内函数取得极值时，外函数同时取得极值，则此函数是取得唯一极值的；由于内函数的值域是外函数的定义域，如果只有一个极值，那么在内函数的值域范围内，外函数的导函数在此定义域区间内一定无零点，否则会出现多个极值.

秒杀秘籍：第二讲　由 ln$x$ 在零点两侧出现的不同放缩方向引起的问题

⑤$\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{x})<\ln x<\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，$x\in(0，1)$；$\dfrac{2(x-1)}{x+1}\le\ln x\le\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{x})$，$x\in[1,+\infty)$．



证明：构造函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{x})$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2x^2}=-\dfrac{(x-1)^2}{2x^2}\le 0$，而 $f(1)=0$，故当 $0<x<1$ 时，$\ln x>\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{x})$；当 $x\ge 1$ 时 $\ln x\le\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{x})$．

构造函数 $g(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\ge 0$，而 $f(1)=0$，故当 $0<x<1$ 时，$\ln x<\dfrac{2(x-1)}{x+1}$；当 $x\ge 1$ 时，$\ln x\ge\dfrac{2(x-1)}{x+1}$（证明对数平均不等式的常用模型）．

把上式中的 x 换成 $x+1$，得：

⑥$\frac{1}{2}\frac{x(x+2)}{x+1}=\frac{1}{2}\left(x+1-\frac{1}{x+1}\right)\le \ln(x+1)\le \frac{2x}{x+2}$，$x\in(-1,0]$；$\frac{2x}{x+2}\le \ln(x+1)\le \frac{1}{2}\cdot\frac{x(x+2)}{x+1}$，$x\in[0,+\infty)$.

【例 6】（2019•沈阳模拟）设函数 $f(x)=p(x-\frac{1}{x})-2lnx$， $g(x)=\frac{2e}{x}$(p 是实数， e 为自然对数的底数）

（1）若 $f(x)$ 在其定义域内为单调函数，求 p 的取值范围；

（2）若在$[1$， $e]$上至少存在一点 x_0，使得 $f(x_0)>g(x_0)$成立，求 p 的取值范围.

【解析】(1) $f'(x)=\frac{px^2-2x+p}{x^2}$，要使“$f(x)$ 为单调增函数”，转化为“$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立”，即 $p\geqslant\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2}{x+\frac{1}{x}}$恒成立，又 $\frac{2}{x+\frac{1}{x}}\leqslant 1$，所以当 $p\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为单调增函数．同理，要使“$f(x)$ 为单调减函数”，转化为“$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，再转化为“$p\leqslant\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2}{x+\frac{1}{x}}$ 恒成立”，又 $\frac{2}{x+\frac{1}{x}}>0$，所以当 $p\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为单调减函数．综上所述，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为单调函数，p 的取值范围为 $p\geqslant 1$ 或 $p\leqslant 0$

（2）因 $g(x)=\frac{2e}{x}$ 在$[1$， $e]$上为减函数，所以 $g(x)\in[2$， $2e]$

①当 $p\leqslant 0$ 时，由（1）知 $f(x)$ 在$[1$， $e]$上递减$\Rightarrow f(x)_{max}=f(1)=0<2$，不合题意

②当 $p\geqslant 1$ 时，由（1）知 $f(x)$ 在$[1$， $e]$上递增，$f(1)<2$，又 $g(x)$ 在$[1$， $e]$上为减函数，

故只需 $f(x)_{max}>g(x)_{min}$，$x\in[1$， $e]$，即：f （e） $=p(e-\frac{1}{e})-2lne>2\Rightarrow p>\frac{4e}{e^2-1}$.

③当 $0<p<1$ 时，因 $x-\frac{1}{x}\geqslant 0$，$x\in[1$， $e]$，所以 $f(x)=p(x-\frac{1}{x})-2lnx\leqslant(x-\frac{1}{x})-2lnx\leqslant e-\frac{1}{e}-2lne<2$ 不合题意，综上，p 的取值范围为 $(\frac{4e}{e^2-1}$， $+\infty)$.

【例 7】(2018•定州市期末)已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+alnx(a\in R)$ 在其定义域上不单调，则 a 的取值范围是____.

【解析】（1） $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$，令 $g(x)=x^2-ax+1$，$\triangle=a^2-4$，$\triangle>0$ 可得 $a>2$ 或 $a<-2$，①当 $a<-2$ 时，对称轴 $x=\frac{a}{2}<-1$，$g(0)=1>0$，则当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)<0$，则有 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，不合题意；②当 $a>2$ 时，$g(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{a}{2}>1$，$g(0)=1>0$，则 $g(x)$ 有两个不等的实根 x_1，x_2，且 $0<x_1<1$，$x_2>1$，$x_1x_2=1$，当 $x\in(0,x_1)$，$x\in(x_2$， $+\infty)$，$f'(x)<0$，

当 $x\in(x_1$， $x_2)$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$，$(x_2$， $+\infty)$ 递减，在 $(x_1$， $x_2)$ 递增．则有 a 的取值范围是 $(2,+\infty)$；

故答案为：$(2,+\infty)$.

【例 8】（2018•益阳期末）已知函数 $f(x)=lnx$．

（1）当 $x>1$ 时，比较 $f(x)$ 与 $\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ 的大小；

（2）若 $g(x)=af(x)+x^3-ax(a\in R)$ 有两个极值点 x_1，x_2，求证：$\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}>3\sqrt{a}-\dfrac{2a}{3}$．

【解析】（1）令 $h(x)=f(x)-\dfrac{2(x-1)}{x+1}=lnx-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，$h'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，故 $h(x)$ 在 $x>1$ 时是增函数，$h(x)>h(1)=0$，即 $lnx>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$；

（2）$g(x)=alnx+x^3-ax$，$g'(x)=\dfrac{3x^3-ax+a}{x}$，则 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个零点 x_1，x_2，令 $p(x)=3x^3-ax+a$，即 $p(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个零点 x_1，x_2，$p'(x)=9x^2-a$，当 $a\leqslant 0$ 时，$p'(x)>0$，$p(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，不可能有 2 个零点，故 $a>0$，此时 $p(x_1)=p(x_2)=0$，即 $3x_1^3-ax_1+a=3x_2^3-ax_2+a$，

整理得 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\dfrac{a}{3}$，而 $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}=a\bullet\dfrac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}+(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)-a=a\bullet\dfrac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}-\dfrac{2a}{3}$，

故要证 $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}>3\sqrt{a}-\dfrac{2a}{3}$，只需证明 $\dfrac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}>\dfrac{3}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}}$，不妨设 $x_1>x_2$，只需证明 $ln\dfrac{x_1}{x_2}>\sqrt{\dfrac{3(x_1-x_2)^2}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}}$，令 $\dfrac{x_1}{x_2}=t(t>1)$，原不等式转化为 $lnt>\sqrt{\dfrac{3(t-1)^2}{t^2+t+1}}$，由（1）得当 $t>1$ 时，$lnt>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，

故只需证明 $\dfrac{2(t-1)}{t+1}>\sqrt{\dfrac{3(t-1)^2}{t^2+t+1}}$，化为 $4(t^2+t+1)>3(t+1)^2\Leftrightarrow(t-1)^2>0$，故原不等式得证．

秒杀秘籍：第三讲　常见的指对跨阶不等式的应用

⑦ $e^x-\ln(x+1)\geq 1$（取等条件 $x=0$）；

证明：构造函数 $f(x)=e^x-x-1$，$e^x-x-1+x-\ln(x+1)=f(x)+f(\ln(x+1))\geq 0$，**当仅当** $x=0$ **时等号成立；**

⑧ $e^x-\ln x\geq(e-1)x+1$（取等条件 $x=1$）

证明：构造函数 $f(x)=e^x-x-1$，**故** $e^x-ex+x-1-\ln x=ef(x-1)+f(\ln x)\geq 0$，**当仅当** $x=1$ **时等号成立；**

⑨ $(e^x-1)\ln(x+1)\geq x^2(x\geq 0)$．

【证明】指对跨阶不等式，根据“放对再放指，不行找基友”的原理，由于 $x=0$ 时，两边均为零，故可以考虑对数在 $x=0$ 处的切线放缩，不等号方向必须一致，由于 $x\geq 1$ 时，$\ln x\geq\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，故 $x\geq 0$ 时，$\ln(x+1)\geq\dfrac{2x}{x+2}$，故只需证 $(e^x-1)\dfrac{2}{x+2}\geq x(x\geq 0)$，即证 $e^x\geq\dfrac{x^2+2x}{2}+1(x\geq 0)$，构造 $h(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{2e^x}$，易

得 $h'(x)=\dfrac{-x^2}{2e^x}$，故 $h(x)_{\max}=h(0)=1$，故 $(e^x-1)\ln(x+1)\ge x^2(x\ge 0)$ 成立.

或者证 $e^x\ge\dfrac{1}{2}x^2+x+1$ 和 $\ln(x+1)\ge\dfrac{2x}{x+2}$，一步秒杀，但是需要的数感高，所以建议用沿着零点放缩对数.

【例 9】（2019•鄂州期中）已知函数 $f(x)=\dfrac{lnx}{x-1}$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：$f(x)>\dfrac{x+1}{e^x}$（其中 e 是自然对数的底数，$e=2.71828\ldots$）.

【解析】（1）定义域是 $(0，1)\cup(1，+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1-\frac{1}{x}-lnx}{(x-1)^2}$，令 $u(x)=1-\dfrac{1}{x}-lnx$，则 $u'(x)=\dfrac{1-x}{x^2}$，

所以 $u(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 递减，故 $x\in(0，1)\cup(1，+\infty)$ 时，$u(x)<u$（1）$=0$，也即 $f'(x)<0$，

因此 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；在 $(1,+\infty)$ 上也单调递减；

（2）法一：即证明 $\dfrac{lnx}{x-1}>\dfrac{x+1}{e^x}$，$x\in(0，1)\cup(1，+\infty)$，

①先证明 $x\in(1,+\infty)$ 时的情况：此时问题等价于 $lnx-\dfrac{x^2-1}{e^x}>0$，令 $g(x)=lnx-\dfrac{x^2-1}{e^x}$，$g'(x)=\dfrac{e^x+x^3-2x^2-x}{xe^x}$

令 $h(x)=e^x+x^3-2x^2-x$，则 $h'(x)=e^x+3x^2-4x-1$，$h''(x)=e^x+6x-4>0$，$(x>1)$，

故 $h'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增，故 $h'(x)>h'$（1）$=e-2>0$，故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增，于是 $h(x)>h$（1）$=e-2>0$，

故 $g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增，因此 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)>g$（1）$=0$，即 $lnx-\dfrac{x^2-1}{e^x}>0$

②下面证明 $x\in(0,1)$ 时的情况：令 $m(x)=e^x-x-1$，$g'(x)=e^x-1>0$，故 $m(x)$ 在 $[0，1)$ 递增，于是 $x\in(0,1)$ 时，

$m(x)>m(0)=0$，故 $\dfrac{x+1}{e^x}<1$，令 $n(x)=lnx-x+1$，$n'(x)=\dfrac{1-x}{x}>0$，故 $n(x)$ 在 $(0，1]$ 递增，故 $x\in(0,1)$ 时，

$n(x)<n$（1）$=0$，即 $lnx-x+1<0$，即 $\dfrac{lnx}{x-1}>1>\dfrac{x+1}{e^x}$，证毕.

法二：构造 $g(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\ge 0$，而 $f(1)=0$，故当 $0<x<1$ 时，

$\ln x<\dfrac{2(x-1)}{x+1}$；当 $x\ge 1$ 时，$\ln x\ge\dfrac{2(x-1)}{x+1}$

①先证明 $x\in(1,+\infty)$ 时的情况：此时问题等价于要证：$lnx-\dfrac{x^2-1}{e^x}\ge\dfrac{2(x-1)}{x+1}-\dfrac{x^2-1}{e^x}>0$，故只需证 $\dfrac{2}{x+1}>\dfrac{x+1}{e^x}$

故只需证 $1>\dfrac{(x+1)^2}{2e^x}$，构造 $h(x)=\dfrac{(x+1)^2}{2e^x}$，$h'(x)=\dfrac{-x^2+1}{2e^x}$，显然 $h(x)_{\max}=h(1)=\dfrac{2}{e}<1$

②下面证明 $x\in(0,1)$ 时的情况：此时问题等价于 $lnx-\dfrac{x^2-1}{e^x}<\dfrac{2(x-1)}{x+1}-\dfrac{x^2-1}{e^x}<0$，故只需证 $\dfrac{2}{x+1}>\dfrac{x+1}{e^x}$

故只需证 $1>\dfrac{(x+1)^2}{2e^x}$，显然 $h(x)_{\max}=h(1)=\dfrac{2}{e}<1$，证毕.

总结：零点两侧出现不同放缩的情况是证明指对不等式的最大利器！

【例 10】（2019•黄山一模）已知函数 $f(x)=e^{x}-ln(x+m)+m$.

（1）设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m 的值；

（2）在（1）的条件下，$f(x)-k\geqslant 0$ 在定义域内恒成立，求 k 的取值范围；

（3）当 $m\leqslant 2$ 时，证明：$f(x)>m$.

【解析】（1）$\because f'(x)=e^{x}-\dfrac{1}{x+m}$，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$\therefore f'(0)=1-\dfrac{1}{m}=0$，解得：$m=1$.

经检验 $m=1$ 符合题意

（2）法一：由 (Ⅰ) 可知，函数 $f(x)=e^{x}-ln(x+1)+1$，其定义域为 $(-1,+\infty)$．$\because f'(x)=e^{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{e^{x}(x+1)-1}{x+1}$

设 $g(x)=e^{x}(x+1)-1$，则 $g'(x)=e^{x}(x+1)+e^{x}>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数，

又$\because g(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$；当 $-1<x<0$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上为减函数；在 $(0,+\infty)$ 上为增函数；因此，$f(x)$ 的最小值为 $f(0)=2$

$\because f(x)-k\geqslant 0$ 在定义域内恒成立，即 $k\leqslant f(x)_{min}=2$

法二：构造 $g(x)=e^{x}-x-1$，$f(x)-k=e^{x}-x-1+x-\ln(x+1)+2-k=g(x)+g(\ln(x+1))+2-k\geq 0$，当仅当 $x=0$ 时等号成立，$\therefore k\leq 2$；

（3）证明：要证 $f(x)=e^{x}-ln(x+m)+m>m$，即 $e^{x}-ln(x+m)>0$，设 $F(x)=e^{x}-ln(x+m)$，即证 $F(x)>0$，

当 $m\leqslant 2$，$x\in(-m,+\infty)$ 时，$ln(x+m)\leqslant ln(x+2)$，故只需证明当 $m=2$ 时，$F(x)>0$，

法一：当 $m=2$ 时，函数 $F'(x)=e^{x}-\dfrac{1}{x+2}$ 在 $(-2,+\infty)$ 上为增函数，且 $F'(-1)<0$，$F'(0)>0$，故 $F'(x)=0$ 在 $(-2,+\infty)$ 上有唯一实数根 x_0，且 $x_0\in(-1,0)$．当 $x\in(-2,x_0)$ 时，$F'(x)<0$，当 $x\in(x_0$，$+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，

从而当 $x=x_0$ 时，$F(x)$ 取得最小值．由 $F'(x_0)=0$，得 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0+2}$，$ln(x_0+2)=-x_0$，

故 $F(x)\geqslant F(x_0)=\dfrac{1}{x_0+2}+x_0=\dfrac{(x_0+1)^2}{x_0+2}>0$，综上，当 $m\leqslant 2$ 时，$F(x)>0$ 即 $f(x)>m$.

法二：$F(x)=e^{x}-ln(x+2)=e^{x}-x-1+x+2-1-ln(x+2)=g(x)+\mathrm{g}(\ln(x+2))\geq 0$，由于取等条件不一，故 $F(x)>0$

达标训练

1. （2019•深圳二模）若函数 $f(x)=x-\sqrt{x}-alnx$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上存在零点，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $(0,\frac{1}{2})$　　B. $(\frac{1}{2},\ e)$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $(\frac{1}{2},\ +\infty)$

2. （2018•洛阳期末）若函数 $f(x)=lnx-ax$ 有两个不同的零点，则实数 a 的取值范围是__________.

3. （2019•南京三模）已知数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-alnx+x-\frac{1}{2}$，对任意 $x\in[1,\ +\infty)$，当 $f(x)\geqslant mx$ 恒成立时实数 m 的最大值为 1，则实数 a 的取值范围是__________.

4. （2019•陕西一模）已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}+k(lnx-x)$，若 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的唯一极值点，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,\ e]$　　B. $(-\infty,e)$　　C. $(-e,+\infty)$　　D. $[-e,\ +\infty)$

5. （2019•临渭模拟）若函数 $f(x)=xlnx-ax^2$ 有两个极值点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(0,\frac{1}{2})$　　B. $(\frac{1}{2},1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,e)$

6. （2018•七星月考）已知 $f(x)=alnx+\frac{1}{2}x^2$，若方程 $f(x)=(a+1)x$ 恰有两个不同的解，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\frac{1}{2},0)$　　B. $(-1,0)$　　C. $(0,1)$　　D. $(1,+\infty)$

7. （2017•黄山期末）若函数 $f(x)=xlnx+1$ 的图象总在直线 $y=ax$ 的上方，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,1)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,0)$

8. （2018•厦门期末）当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$(ax-lnx)(ax-e^x)\leqslant 0$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,\ 1]$　　B. $[\frac{1}{e},e]$　　C. $[1,\ e]$　　D. $[e,\ +\infty)$

9.（2018•河南模拟）若函数 $f(x)=e^x-a\ln x+2ax-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有两个极值点，则 a 的取值范围为（　　）

A. $(-e^2,\ -e)$　　B. $(-\infty,\ -\frac{e}{2})$　　C. $(-\infty,\ -\frac{1}{2})$　　D. $(-\infty,\ -e)$

10. （2019•四平期末）函数 $f(x)=\frac{lnx}{x}-kx$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，则实数 k 的取值范围是_________.

11. （2019•福建月考）已知函数 $f(x)=ax^2-xlnx$ 在 $[\frac{1}{e},+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是__________.

12. （2018•如皋月考）已知函数 $f(x)=bx-\frac{b}{x}+2lnx$，若函数 $f(x)$ 在定义域上不是单调函数，则实数 b 的取值范围为__________.

13. （2019•榆林一模）已知不等式 $e^x-1\geqslant kx+lnx$，对于任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则 k 的最大值_________.

14. （2019•天津二模）设 $a\in R$，函数 $f(x)=lnx-ax$.

（1）若 $a=2$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(1,-2)$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 无零点，求 a 的取值范围；

（3）若 $f(x)$ 有两个相异零点 x_1、x_2，求证：$x_1+x_2>\dfrac{2}{a}$.

15. （2018•邯郸期末）设函数 $f(x)=a(x-1)-xlnx$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若对任意的 $x\geqslant 1$，恒有 $f(x)\leqslant 0$ 成立，求实数 a 的取值范围.

16. （2019•顺义二模）设函数 $f(x)=a\sqrt{x}-lnx,a\in R$.

（1）若点 $(1,1)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上，求在该点处曲线的切线方程；

（2）若 $f(x)\geqslant 2$ 恒成立，求 a 的取值范围.

17. （2019•荆门模拟）已知函数 $f(x)=\frac{e^{x}}{x}+a(x-lnx)(a\in R)$.

（1）当 $a=-e$ 时，求 $f(x)$ 的最小值；

（2）若 $f(x)$ 有两个零点，求参数 a 的取值范围.

18. （2019•济南模拟）已知函数 $f(x)=\frac{1+lnx}{x}$

（1）求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）若 $a\geqslant 1$，求证: $ae^{x}>(1+\frac{1}{x})(1+lnx)$.

19. （2019•成都模拟）已知函数 $f(x)=lnx+a(\frac{1}{x}-1)$， $a\in R$.

（1）若 $f(x)\geqslant 0$，求实数 a 取值的集合；

（2）证明： $e^{x}+\frac{1}{x}\geqslant 2-lnx+x^{2}+(e-2)x$.

20. （2018•沙坪坝期中）已知函数 $f(x)=\frac{lnx}{x-1}$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：$f(x)>\frac{x+1}{e^x}$（其中 e 是自然对数的底数，$e=2.71828$）.（参考例 9，不做详述.）

21. （2018•双流模拟）已知函数 $f(x)=alnx-e^x$；

（1）讨论 $f(x)$ 的极值点的个数；

（2）若 $a=2$，求证：$f(x)<0$.

22. （2019•辽阳一模）已知函数 $f(x)=xlnx$.

（1）若函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}-\frac{1}{x}$，求 $g(x)$ 的极值；

（2）证明：$f(x)+1<e^x-x^2$.（参考数据：$ln2\approx0.69$，$ln3\approx1.10$，$e^{\frac{3}{2}}\approx4.48$，$e^2\approx7.39$）

23. （2017•沈阳一模）已知函数 $f(x)=e^x-1-x-ax^2$.

（1）当 $a=0$ 时，求证：$f(x)\geqslant0$；

（2）当 $x\geqslant0$ 时，若不等式 $f(x)\geqslant0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（3）若 $x>0$，证明 $(e^x-1)ln(x+1)>x^2$.