12类二级结论高效解题

结论1　奇函数的最值性质

已知函数$f(x)$是定义在区间D上的奇函数，则对任意的$x\in D$，都有$f(x)+f(-x)=0$.

特别地，若奇函数$f(x)$在D上有最值，则$f(x)_{max}+f(x)_{min}=0$，且若$0\in D$，则$f(0)=0$.

【例1】 设函数$f(x)=\dfrac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$的最大值为$M$，最小值为$m$，则$M+m=$________.

解析　显然函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(x)=\dfrac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}=1+\dfrac{2x+\sin x}{x^2+1}$，

设$g(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x^2+1}$，则$g(-x)=-g(x)$，∴$g(x)$为奇函数，

由奇函数图象的对称性知$g(x)_{max}+g(x)_{min}=0$，

∴$M+m=[g(x)+1]_{max}+[g(x)+1]_{min}=2+g(x)_{max}+g(x)_{min}=2$.

答案　2

【训练1】 已知函数$f(x)=\ln(\sqrt{1+9x^2}-3x)+1$，则$f(\lg 2)+f\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)=($　　$)$

A.-1　　　　B.0　　　　C.1　　　　D.2

解析　令$g(x)=\ln(\sqrt{1+9x^2}-3x)$，$x\in\mathbf{R}$，则$g(-x)=\ln(\sqrt{1+9x^2}+3x)$，因为$g(x)+g(-x)=\ln(\sqrt{1+9x^2}-3x)+\ln(\sqrt{1+9x^2}+3x)=\ln(1+9x^2-9x^2)=\ln 1=0$，所以$g(x)$是定义在$\mathbf{R}$的奇函数.

又$\lg\dfrac{1}{2}=-\lg 2$，所以$g(\lg 2)+g\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)=0$，所以$f(\lg 2)+f\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)=g(\lg 2)+1+g\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)+1=2$.

答案　D

结论2　函数周期性问题

已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$，若对任意的$x\in\mathbf{R}$，总存在非零常数T，使得$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$是周期函数，T为其一个周期.

常见的与周期函数有关的结论如下：

(1)如果$f(x+a)=-f(x)(a\neq 0)$，那么$f(x)$是周期函数，其中的一个周期$T=2a$.

(2)如果$f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}(a\neq 0)$，那么$f(x)$是周期函数，其中的一个周期$T=2a$.

(3)如果$f(x+a)+f(x)=c(a\neq 0)$，那么$f(x)$是周期函数，其中的一个周期$T=2a$.

【例 2】(1)已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$满足 $f\left(x+\frac{3}{2}\right)=-f(x)$，且 $f(-2)=f(-1)=-1$，$f(0)=2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\,019)+f(2\,020)=(\quad)$

A.-2　　B.-1　　C.0　　D.1

(2)(多选题)(2020·济南模拟)函数 $f(x)$的定义域为 **R**，且 $f(x+1)$与 $f(x+2)$都为奇函数，则(　　)

A.$f(x)$为奇函数　　B.$f(x)$为周期函数

C.$f(x+3)$为奇函数　　D.$f(x+4)$为偶函数

解析　(1)因为 $f\left(x+\frac{3}{2}\right)=-f(x)$，所以 $f(x+3)=-f\left(x+\frac{3}{2}\right)=f(x)$，则 $f(x)$的周期 $T=3$.

则有 $f(1)=f(-2)=-1$，$f(2)=f(-1)=-1$，$f(3)=f(0)=2$，

所以 $f(1)+f(2)+f(3)=0$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\,019)+f(2\,020)$

$=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\,017)+f(2\,018)+f(2\,019)+f(2\,020)$

$=673\times[f(1)+f(2)+f(3)]+f(2\,020)=0+f(1)=-1$.

(2)法一　由 $f(x+1)$与 $f(x+2)$都为奇函数知，函数 $f(x)$的图象关于点(1，0)，(2，0)对称，所以 $f(-x)+f(2+x)=0$，$f(-x)+f(4+x)=0$，所以 $f(2+x)=f(4+x)$，即 $f(x)=f(2+x)$，$f(x)$是以 2 为周期的周期函数.又 $f(x+1)$与 $f(x+2)$都为奇函数，所以 $f(x)$，$f(x+3)$，$f(x+4)$均为奇函数.选 ABC.

法二　由 $f(x+1)$与 $f(x+2)$都为奇函数知，函数 $f(x)$的图象关于点(1，0)，(2，0)对称，所以 $f(x)$的周期为 $2|2-1|=2$，所以 $f(x)$与 $f(x+2)$，$f(x+4)$的奇偶性相同，$f(x+1)$与 $f(x+3)$的奇偶性相同，所以 $f(x)$，$f(x+3)$，$f(x+4)$均为奇函数.故选 ABC.

答案　(1)B　(2)ABC

【训练 2】　奇函数 $f(x)$的定义域为 **R**.若 $f(x+2)$为偶函数，且 $f(1)=1$，则 $f(8)+f(9)=(\quad)$

A.-2　　B.-1　　C.0　　D.1

解析　由 $f(x+2)$是偶函数可得 $f(-x+2)=f(x+2)$，

$f(x)$是奇函数得 $f(-x+2)=-f(x-2)$，所以 $f(x+2)=-f(x-2)$，$f(x+4)=-f(x)$，$f(x+8)=f(x)$.

故 $f(x)$是以 8 为周期的周期函数，所以 $f(9)=f(8+1)=f(1)=1$.

又 $f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，所以 $f(8)=f(0)=0$，故 $f(8)+f(9)=1$.答案：D

结论 3　函数的对称性

已知函数 $f(x)$是定义在 **R** 上的函数.

(1)若 $f(a+x)=f(b-x)$恒成立，则 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$对称，特别地，若 $f(a+x)=f(a-x)$恒成立，则 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=a$ 对称.

(2)若函数 $y=f(x)$满足 $f(a+x)+f(a-x)=0$，即 $f(x)=-f(2a-x)$，则 $f(x)$的图象关于点$(a，0)$对称.

(3)若 $f(a+x)+f(a-x)=2b$ 恒成立，则 $y=f(x)$的图象关于点$(a，b)$对称.

【例 3】 (1)函数 $y=f(x)$对任意 $x\in$**R** 都有 $f(x+2)=f(-x)$成立，且函数 $y=f(x-1)$的图象关于点(1，0)对称，$f(1)=4$，则 $f(2\,016)+f(2\,017)+f(2\,018)$的值为________.

(2)(多选题)定义在 **R** 上的函数 $f(x)$满足 $f(x)=2-f(2-x)$， $f(x)$是偶函数，下列正确的是(　　)

A.$f(x)$的图象关于点(1，1)对称　　　　B.$f(x)$是周期为 4 的函数

C.若 $f(x)$满足对任意的 $x\in[0，1]$，都有$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_1-x_2}<0$，则 $f(x)$在$[-3，-2]$上单调递增

D.若 $f(x)$在[1，2]上的解析式为 $f(x)=\ln x+1$，则 $f(x)$在[2，3]上的解析式为 $f(x)=1-\ln(x-2)$

解析　(1)因为函数 $y=f(x-1)$的图象关于点(1，0)对称，所以 $f(x)$是 **R** 上的奇函数，

又 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，故 $f(x)$的周期为 4.

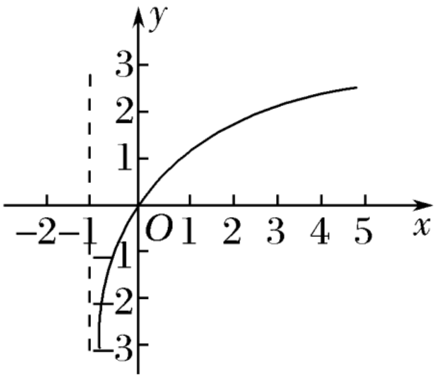
所以 $f(2\,017)=f(504\times4+1)=f(1)=4$，

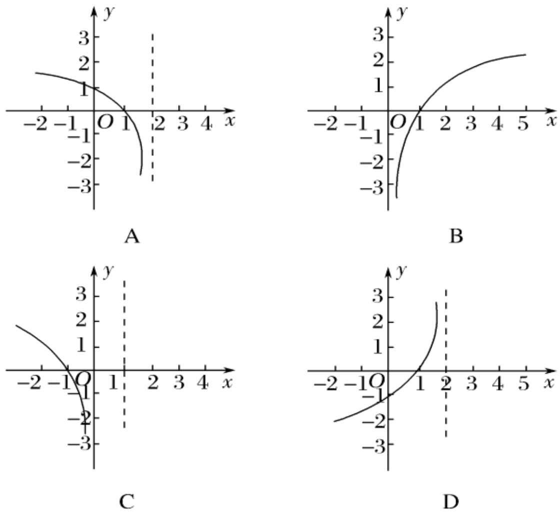
所以 $f(2\,016)+f(2\,018)=-f(2\,014)+f(2\,014+4)=-f(2\,014)+f(2\,014)=0$，

所以 $f(2\,016)+f(2\,017)+f(2\,018)=4$.

(2)根据题意，$f(x)$的图象关于点(1，1)对称，A 正确；又 $f(x)$的图象关于 y 轴对称，所以 $f(x)=f(-x)$，则 $2-f(2-x)=f(-x)$，$f(x)=2-f(x+2)$，从而 $f(x+2)=2-f(x+4)$，所以 $f(x)=f(x+4)$，B 正确；由$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_1-x_2}<0$ 可知 $f(x)$在[0，1]上单调递增，又 $f(x)$的图象关于点(1，1)对称，所以 $f(x)$在[1，2]上单调递增，因为 $f(x)$的周期为 4，所以 $f(x)$在$[-3，-2]$上单调递增，C 正确；又 $f(x)=f(-x)$，$x\in[-2，-1]$时，$-x\in[1，2]$，所以 $f(x)=f(-x)=\ln(-x)+1$，$x\in[-2，-1]$，$f(x)$周期为 4，$f(x)=f(x-4)$，$x\in[2，3]$时，$x-4\in[-2，-1]$，所以 $f(x)=f(x-4)=\ln(4-x)+1$，$x\in[2，3]$，D 错误.综上，正确的是 ABC.　　　　答案　(1)4　(2)ABC

【训练 3】 (1)若函数 $y=f(x)$的图象如左图所示，则函数 $y=f(1-x)$的图象大致为(　　)





(2)若偶函数 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称，且 $f(3)=3$，则 $f(-1)=$________.

解析　(1)作出 $y=f(x)$的图象关于 y 轴对称的图象，得到 $y=f(-x)$的图象，

将 $y=f(-x)$的图象向右平移 1 个单位，得 $y=f[-(x-1)]=f(1-x)$的图象.因此图象 A 满足.

(2) $f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称，所以 $f(x)=f(4-x)$，$f(-x)=f(4+x)$，又 $f(-x)=f(x)$，

所以 $f(x)=f(x+4)$，则 $f(-1)=f(3)=3$.

答案　(1)A　(2)3

结论 4　两个经典不等式

(1)对数形式：$x\geqslant 1+\ln x(x>0)$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立.

(2)指数形式：$e^x\geqslant x+1(x\in\mathbf{R})$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立.

进一步可得到一组不等式链：$e^x>x+1>x>1+\ln x(x>0$，且 $x\neq 1)$.

【例 4】 已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.

(1)若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的值；

(2)证明：对于任意正整数 n，$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<e$.

(1)解　$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，①若 $a\leqslant 0$，因为$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+a\ln 2<0$，所以不满足题意.

②若 $a>0$，由 $f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$知，当 $x\in(0，a)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(a，+\infty)$时，$f'(x)>0$；

$f(x)$在$(0，a)$上单调递减，在$(a，+\infty)$上单调递增，故 $x=a$ 是 $f(x)$在$(0，+\infty)$的唯一最小值点.

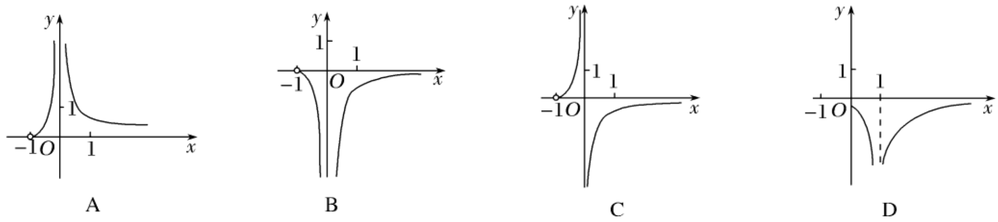
因为 $f(1)=0$，所以当且仅当 $a=1$ 时，$f(x)\geqslant 0$，故 $a=1$.

(2)证明　由(1)知当 $x\in(1,\ +\infty)$时，$x-1-\ln x>0$.　令 $x=1+\frac{1}{2^n}$，得 $\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2^n}$.

从而 $\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1$.

故$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\mathrm{e}$.

【训练 4】 (1)已知函数 $f(x)=\frac{1}{\ln(x+1)-x}$，则 $y=f(x)$的图象大致为(　　)



解析　由$\begin{cases}x+1>0,\\ \ln(x+1)-x\neq0,\end{cases}$ 得$\{x|x>-1$，且 $x\neq0\}$，所以排除选项 D.

当 $x>0$ 时，由经典不等式 $x>1+\ln x(x>0)$，以 $x+1$ 代替 x，得 $x>\ln(x+1)(x>-1$，且 $x\neq0)$，

所以 $\ln(x+1)-x<0(x>-1$，且 $x\neq0)$，排除 A，C，易知 B 正确.　　　　答案　B

(2)已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$x\in\mathbf{R}$.证明：曲线 $y=f(x)$与曲线 $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$ 有唯一公共点.

证明　令 $g(x)=f(x)-\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$，$x\in\mathbf{R}$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，

由经典不等式 $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$ 恒成立可知，$g'(x)\geqslant0$ 恒成立，所以 $g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，且 $g(0)=0$.

所以函数 $g(x)$有唯一零点，即两曲线有唯一公共点.

结论 5　三点共线的充要条件

设平面上三点 O，A，B 不共线，则平面上任意一点 P 与 A，B 共线的充要条件是存在实数 λ 与 μ，使得$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，且 $\lambda+\mu=1$.特别地，当 P 为线段 AB 的中点时，$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

【例 5】 在△ABC 中，$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FC}$，连接 BF，CE，且 BF 与 CE 交于点 M，$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AF}$，则 $x-y$ 等于(　　)

A.$-\frac{1}{12}$　　B.$\frac{1}{12}$　　C.$-\frac{1}{6}$　　D.$\frac{1}{6}$

解析　因为$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$，所以$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$所以$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AF}$.

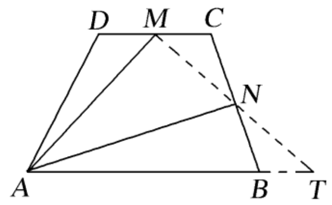
由 B，M，F 三点共线得$\frac{2}{3}x+y=1$.①

因为$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FC}$，所以$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AE}+\frac{3}{4}y\overrightarrow{AC}$.

由 C，M，E 三点共线得 $x+\frac{3}{4}y=1$.②

联立①②解得$\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\ y=\frac{2}{3},\end{cases}$ 所以 $x-y=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$.　　　答案　C

【训练 5】 在梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB\parallel CD$，$AB=2CD$，M，N 分别为 CD，BC 的中点.若$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{AN}$，则 $\lambda+\mu=$________.



解析　如图，连接 MN 并延长交 AB 的延长线于 T.

由已知 $AB=\frac{4}{5}AT$，∴$\frac{4}{5}\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{AN}$，∴$\overrightarrow{AT}=\frac{5}{4}\lambda\overrightarrow{AM}+\frac{5}{4}\mu\overrightarrow{AN}$，

∵T，M，N 三点共线，∴$\frac{5}{4}\lambda+\frac{5}{4}\mu=1$，∴$\lambda+\mu=\frac{4}{5}$.　　　答案　$\frac{4}{5}$

结论 6　三角形“四心”向量形式的充要条件

设 O 为△ABC 所在平面上一点，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，则

(1)O 为△ABC 的外心⇔$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=\frac{a}{2\sin A}$.

(2)O 为△ABC 的重心⇔$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$.

(3)O 为△ABC 的垂心⇔$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$.

(4)O 为△ABC 的内心⇔$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$.

【例 6】 P 是△ABC 所在平面内一点，若$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$，则 P 是△ABC 的(　　)

A.外心　　B.内心　　C.重心　　D.垂心

解析　由$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$，可得$\overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})=0$，即$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，∴$\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{CA}$，同理可证$\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{BC}$.∴$P$ 是△ABC 的垂心.　　　答案　D

【训练 6】 O 是平面上一定点，A，B，C 是平面上不共线的三个点，动点 P 满足$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}+\lambda\overrightarrow{AP}$，$\lambda\in\mathbf{R}$，则 P 点的轨迹一定经过△ABC 的(　　)

A.外心　　B.内心　　C.重心　　D.垂心

解析　设 BC 的中点为 M，则$\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=\overrightarrow{OM}$，则有$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\lambda\overrightarrow{AP}$，即$\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{AP}$.

∴P 的轨迹一定通过△ABC 的重心.　　　答案　C

结论 7　与等差数列相关的结论

已知等差数列$\{a_n\}$，公差为 d，前 n 项和为 S_n.

(1)若 S_m，S_{2m}，S_{3m} 分别为等差数列$\{a_n\}$的前 m 项、前 $2m$ 项、前 $3m$ 项的和，则 S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$ 成等差数列.

(2)若等差数列$\{a_n\}$的项数为偶数 $2m$，公差为 d，所有奇数项之和为 $S_{奇}$，偶数项之和为 $S_{偶}$，则所有项之和 $S_{2m}=m(a_m+a_{m+1})$，$S_{偶}-S_{奇}=md$，$\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=\dfrac{a_{m+1}}{a_m}$.

(3)若等差数列$\{a_n\}$的项数为奇数 $2m-1$，所有奇数项之和为 $S_{奇}$，所有偶数项之和为 $S_{偶}$，则所有项之和 $S_{2m-1}=(2m-1)a_m$，$S_{奇}-S_{偶}=a_m$，$\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{m}{m-1}$.

【例 7】 (1)设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_{m-1}=-2$，$S_m=0$，$S_{m+1}=3$，则 $m=$(　　)

A.3　　　　B.4　　　　C.5　　　　D.6

(2)等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $a_{m-1}+a_{m+1}-a_m^2=0$，$S_{2m-1}=38$，则 $m=$________.

解析　(1)∵数列$\{a_n\}$为等差数列，且前 n 项和为 S_n，∴数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$也为等差数列.

∴$\dfrac{S_{m-1}}{m-1}+\dfrac{S_{m+1}}{m+1}=\dfrac{2S_m}{m}$，即$\dfrac{-2}{m-1}+\dfrac{3}{m+1}=0$，解得 $m=5$.

经检验，$m=5$ 符合题意.

(2)由 $a_{m-1}+a_{m+1}-a_m^2=0$ 得 $2a_m-a_m^2=0$，解得 $a_m=0$ 或 2.

又 $S_{2m-1}=\dfrac{(2m-1)(a_1+a_{2m-1})}{2}=(2m-1)a_m=38$，显然可得 $a_m\neq0$，所以 $a_m=2$.

代入上式可得 $2m-1=19$，解得 $m=10$.

答案　(1)C　(2)10

【训练 7】 (1)等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_{10}=20$，$S_{20}=50$，则 $S_{30}=$________.

(2)一个等差数列的前 12 项和为 354，前 12 项中偶数项的和与奇数项的和的比为 32∶27，则数列的公差 $d=$________.

解析　(1)$(S_{20}-S_{10})-S_{10}=(S_{30}-S_{20})-(S_{20}-S_{10})$，$S_{30}=3S_{20}-3S_{10}=3\times50-3\times20=90$.

(2)设等差数列的前 12 项中奇数项和为 $S_{奇}$，偶数项的和为 $S_{偶}$，等差数列的公差为 d.

由已知条件，得$\begin{cases}S_{奇}+S_{偶}=354,\\S_{偶}∶S_{奇}=32∶27,\end{cases}$解得$\begin{cases}S_{偶}=192,\\S_{奇}=162.\end{cases}$又 $S_{偶}-S_{奇}=6d$，所以 $d=\dfrac{192-162}{6}=5$.

答案　(1)90　(2)5

结论 8　与等比数列相关的结论

已知等比数列$\{a_n\}$，公比为 q，前 n 项和为 S_n.

(1)数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$也为等比数列，其公比为$\frac{1}{q}$.

(2)公比 $q\neq-1$ 或 $q=-1$ 且 n 为奇数时，S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，…成等比数列($n\in\mathbf{N}^*$).

(3)若等比数列项数为 $2n(n\in\mathbf{N}^*)$，公比为 q，奇数项之和为 $S_{奇}$，偶数项之和为 $S_{偶}$，$S_{偶}=qS_{奇}$.

(4)已知等比数列$\{a_n\}$，公比为 q，前 n 项和为 S_n.则 $S_{m+n}=S_m+q^mS_n(m，n\in\mathbf{N}^*)$.

【例 8】 (1)设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若$\frac{S_6}{S_3}=3$，则$\frac{S_9}{S_6}=$(　　)

A.2　　B.$\frac{7}{3}$　　C.$\frac{8}{3}$　　D.3

解析　由$\frac{S_6}{S_3}=3$，得 $S_6=3S_3$ 且 $q\neq-1$，因为 S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 也为等比数列，所以$(S_6-S_3)^2=S_3(S_9-S_6)$，则$(2S_3)^2=S_3(S_9-3S_3)$.化简得 $S_9=7S_3$，从而$\frac{S_9}{S_6}=\frac{7S_3}{3S_3}=\frac{7}{3}$.　　答案　B

(2)已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_3=\frac{7}{2}$，$S_6=\frac{63}{2}$.

①求数列$\{a_n\}$的通项公式；　　②求 $\log_2a_1+\log_2a_2+\log_2a_3+\cdots+\log_2a_{25}$ 的值.

解　①由 $S_3=\frac{7}{2}$，$S_6=\frac{63}{2}$，得 $S_6=S_3+q^3S_3=(1+q^3)S_3$，∴$q=2$.又 $S_3=a_1(1+q+q^2)$，得 $a_1=\frac{1}{2}$.

故通项公式 $a_n=\frac{1}{2}\times2^{n-1}=2^{n-2}$.

②由①及题意可得 $\log_2a_n=n-2$，

所以 $\log_2a_1+\log_2a_2+\log_2a_3+\cdots+\log_2a_{25}=-1+0+1+2+\cdots+23=\frac{25\times(-1+23)}{2}=275$.

【训练 8】 已知$\{a_n\}$是首项为 1 的等比数列，S_n 是$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $9S_3=S_6$，则数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前 5 项和为(　　)

A.$\frac{15}{8}$或 5　　B.$\frac{31}{16}$或 5　　C.$\frac{31}{16}$　　D.$\frac{15}{8}$

解析　设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，易知 $S_3\neq0$.　则 $S_6=S_3+S_3q^3=9S_3$，所以 $q^3=8$，$q=2$.

所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是首项为 1，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，其前 5 项和为$\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{16}$.

答案　C

结论 9　多面体的外接球和内切球

(1)长方体的体对角线长 d 与共点的三条棱长 a，b，c 之间的关系为 $d^2=a^2+b^2+c^2$；若长方体外接球的半径为 R，则有 $(2R)^2=a^2+b^2+c^2$.

(2)棱长为 a 的正四面体内切球半径 $r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$，外接球半径 $R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

【例 9】 已知一个平放的各棱长为 4 的三棱锥内有一个小球 O(重量忽略不计)，现从该三棱锥顶端向内注水，小球慢慢上浮，若注入的水的体积是该三棱锥体积的$\frac{7}{8}$时，小球与该三棱锥的各侧面均相切(与水面也相切)，则小球的表面积等于(　　)

A.$\frac{7\pi}{6}$　　B.$\frac{4\pi}{3}$　　C.$\frac{2\pi}{3}$　　D.$\frac{\pi}{2}$

解析　当注入水的体积是该三棱锥体积的$\frac{7}{8}$时，设水面上方的小三棱锥的棱长为 x(各棱长相等).

依题意，$\left(\frac{x}{4}\right)^3=\frac{1}{8}$，得 $x=2$，易得小三棱锥的高为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

设小球半径为 r，则$\frac{1}{3}S_{底面}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}=4\times\frac{1}{3}S_{底面}\cdot r$($S_{底面}$为小三棱锥的底面积)，得 $r=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

故小球的表面积 $S=4\pi r^2=\frac{2\pi}{3}$.　　答案　C

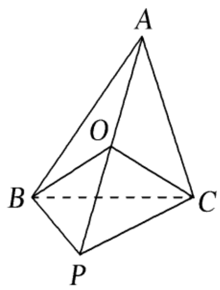
【训练 9】 (1)已知直三棱柱的底面是等腰直角三角形，直角边长是 1，且其外接球的表面积是 16π，则该三棱柱的侧棱长为(　　)

A.$\sqrt{14}$　　B.$2\sqrt{3}$　　C.$4\sqrt{6}$　　D.3

(2)已知球 O 的直径 $PA=2r$，B，C 是该球面上的两点，且 $BC=PB=PC=r$，三棱锥 $P-ABC$ 的体积为$\frac{32\sqrt{2}}{3}$，则球 O 的表面积为(　　)

A.64π　　B.32π　　C.16π　　D.8π

解析　(1)由于直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面 ABC 为等腰直角三角形.把直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成正四棱柱，则正四棱柱的体对角线是其外接球的直径，因为外接球的表面积是 16π，所以外接球半径为 2，因为直三棱柱的底面是等腰直角三角形，斜边长$\sqrt{2}$，所以该三棱柱的侧棱长为$\sqrt{16-2}=\sqrt{14}$.



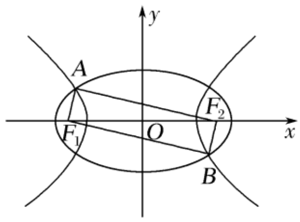
(2)如图，取 PA 的中点 O，则 O 为球心，连接 OB，OC，则几何体 $O-BCP$ 是棱长为 r 的正四面体，所以 $V_{O-BCP}=\frac{\sqrt{2}}{12}r^3$，于是 $V_{P-ABC}=2V_{O-BCP}=\frac{\sqrt{2}}{6}r^3$，令$\frac{\sqrt{2}}{6}r^3=\frac{32\sqrt{2}}{3}$，得 $r=4$.从而 $S_{球}=4\pi\times4^2=64\pi$.　　答案　(1)A　(2)A

结论 10　焦点三角形的面积公式

(1)在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$中，$F_1$，$F_2$分别为左、右焦点，$P$为椭圆上一点，则$\triangle PF_1F_2$的面积$S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\cdot\tan\frac{\theta}{2}$，其中$\theta=\angle F_1PF_2$.

(2)在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$中，$F_1$，$F_2$分别为左、右焦点，$P$为双曲线上一点，则$\triangle PF_1F_2$的面积$S\triangle PF_1F_2=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$，其中$\theta=\angle F_1PF_2$.

【例 10】 F_1，F_2是椭圆C_1：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$与双曲线C_2的公共焦点，A，B分别是C_1，C_2在第二、四象限的公共点.若四边形AF_1BF_2为矩形，则C_2的离心率是(　　)



A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{3}$　　C.$\frac{3}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{6}}{2}$

解析：设双曲线C_2的方程为$\frac{x^2}{a_2^2}-\frac{y^2}{b_2^2}=1$，则$a_2^2+b_2^2=c_2^2=c_1^2=4-1=3$.

又四边形AF_1BF_2为矩形，所以$\triangle AF_1F_2$的面积为$b_1^2\tan 45°=\frac{b_2^2}{\tan 45°}$，即$b_2^2=b_1^2=1$.

所以$a_2^2=c_2^2-b_2^2=3-1=2$.　故双曲线的离心率$e=\frac{c_2}{a_2}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

答案　D

【训练 10】 已知F_1，F_2是椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点，$P$为椭圆$C$上一点，且$\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$.若$\triangle PF_1F_2$的面积为9，则$b=$________.

解析　在焦点三角形PF_1F_2中，$\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$，所以$\angle F_1PF_2=90°$，

故$S\triangle PF_1F_2=b^2\tan\frac{\angle F_1PF_2}{2}=b^2\tan 45°=9$，则$b=3$.

答案　3

结论 11　圆锥曲线的切线问题

(1)过圆C：$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$上一点$P(x_0，y_0)$的切线方程$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2$.

(2)过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上一点$P(x_0，y_0)$的切线方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

(3)已知点$M(x_0，y_0)$，抛物线C：$y^2=2px(p\neq0)$和直线l：$y_0y=p(x+x_0)$.

①当点 M 在抛物线 C 上时，直线 l 与抛物线 C 相切，其中 M 为切点，l 为切线.

②当点 M 在抛物线 C 外时，直线 l 与抛物线 C 相交，其中两交点与点 M 的连线分别是抛物线的切线，即直线 l 为切点弦所在的直线.

【例 11】 已知抛物线 C：$x^2=4y$，直线 l：$x-y-2=0$，设 P 为直线 l 上的点，过点 P 作抛物线 C 的两条切线 PA，PB，其中 A，B 为切点，当点 $P(x_0，y_0)$为直线 l 上的定点时，求直线 AB 的方程.

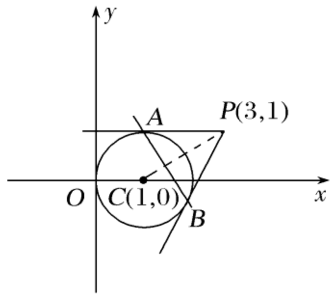
解 联立方程得$\begin{cases}x^2=4y,\\x-y-2=0,\end{cases}$消去 y，整理得 $x^2-4x+8=0$，$\Delta=(-4)^2-4\times8=-16<0$，故直线 l 与抛物线 C 相离.

由结论知，P 在抛物线外，故切点弦 AB 所在的直线方程为 $x_0x=2(y+y_0)$，即 $y=\frac{1}{2}x_0x-y_0$.

【训练 11】 (1)过点(3，1)作圆$(x-1)^2+y^2=1$ 的两条切线，切点分别为 A，B，则直线 AB 的方程为(　　)

A.$2x+y-3=0$　　B.$2x-y-3=0$　　C.$4x-y-3=0$　　D.$4x+y-3=0$

(2)设椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，点 $P\left(1，\frac{3}{2}\right)$，则椭圆 C 在点 P 处的切线方程为________.



解析 (1)如图，圆心坐标为 $C(1，0)$，易知 $A(1，1)$.

又 $k_{AB}\cdot k_{PC}=-1$，且 $k_{PC}=\frac{1-0}{3-1}=\frac{1}{2}$，∴$k_{AB}=-2$.

故直线 AB 的方程为 $y-1=-2(x-1)$，即 $2x+y-3=0$.

(2)由于点 $P\left(1，\frac{3}{2}\right)$在椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上，故切线方程为$\frac{x}{4}+\frac{\frac{3}{2}y}{3}=1$，即 $x+2y-4=0$.

答案 (1)A (2)$x+2y-4=0$

结论 12 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$焦点的弦

设 AB 是过抛物线 $y^2=2px(p>0)$焦点 F 的弦，若 $A(x_A，y_A)$，$B(x_B，y_B)$，则

(1)$x_A\cdot x_B=\frac{p^2}{4}$.

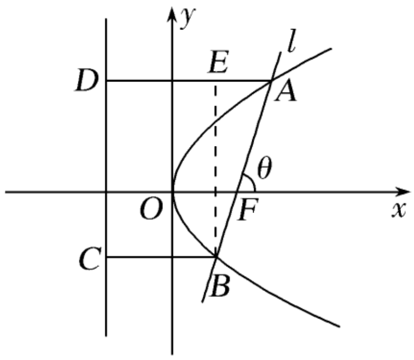
(2)$y_A\cdot y_B=-p^2$.

(3)$|AB|=x_A+x_B+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$($\alpha$ 是直线 AB 的倾斜角).

【例 12】过 $y^2=4x$ 焦点 F 的直线 l 与抛物线交于 A，B 两点，若$|AF|=2|BF|$，则$|AB|$等于(　　)

A.4　　B.$\frac{9}{2}$　　C.5　　D.6

解析　由对称性不妨设点 A 在 x 轴的上方，如图设 A，B 在准线上的射影分别为 D，C，作 $BE\perp AD$ 于 E，设$|BF|=m$，直线 l 的倾斜角为 θ，则$|AB|=3m$，



由抛物线的定义知$|AD|=|AF|=2m$，$|BC|=|BF|=m$，

所以 $\cos\theta=\frac{|AE|}{|AB|}=\frac{1}{3}$，$\therefore\sin^2\theta=\frac{8}{9}$.

又 $y^2=4x$，知 $2p=4$，故利用弦长公式$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{9}{2}$.

答案　B

【训练 12】设 F 为抛物线 C：$y^2=3x$ 的焦点，过 F 且倾斜角为 30°的直线交 C 于 A，B 两点，O 为坐标原点，则△OAB 的面积为(　　)

A.$\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B.$\frac{9\sqrt{3}}{8}$　　C.$\frac{63}{32}$　　D.$\frac{9}{4}$

解析　法一　由已知得焦点坐标为 $F\left(\frac{3}{4},0\right)$，因此直线 AB 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)$，即 $4x-4\sqrt{3}y-3=0$.与抛物线方程联立，化简得 $4y^2-12\sqrt{3}y-9=0$，故$|y_A-y_B|=\sqrt{(y_A+y_B)^2-4y_Ay_B}=6$.

因此 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OF||y_A-y_B|=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times6=\frac{9}{4}$.

法二　由 $2p=3$，及$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$，　　得$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}=\frac{3}{\sin^2 30°}=12$.

原点到直线 AB 的距离 $d=|OF|\cdot\sin 30°=\frac{3}{8}$，故 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times12\times\frac{3}{8}=\frac{9}{4}$.

答案　D