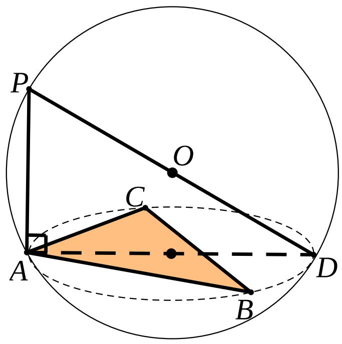
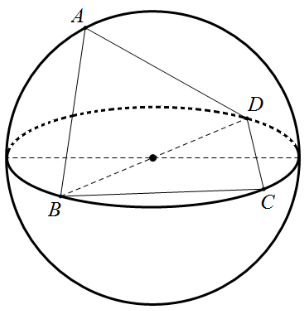
外接球常见模型

模型一：线面垂模型



如图，已知 $PA\perp$ 平面 ABC，利用正弦定理 $2r=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 计算出底面 ΔABC 外接圆直径 $2r$，如图中 $AD=2r$，则外接球直径 $2R=PD=\sqrt{PA^2+(2r)^2}$.

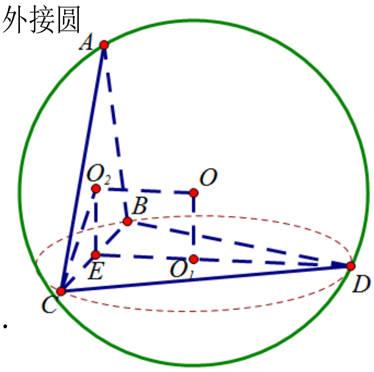
模型二：两个有公共斜边的直角三角形



如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，$\angle BAD=\angle BCD=90^\circ$，则这两个直角三角形的公共斜边 BD 就是该三棱锥外接球的直径，即 $2R=BD$.

模型三：面面垂模型

如图，平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，设△ABC 和△BCD 的外接圆半径为 r_1，r_2，公共边 $BC=l$，因为 OO_1EO_2 是矩形，

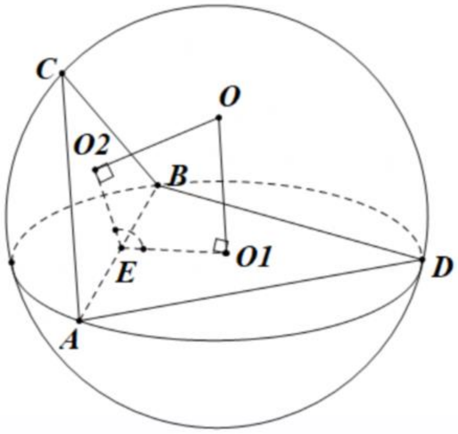


则 $OO_1=O_2E=\sqrt{O_2C^2-CE^2}=\sqrt{r_1^2-\dfrac{l^2}{4}}$，

所以外接球的半径 $R^2=OD^2=OO_1^2+O_1D^2=r_1^2+r_2^2-\dfrac{l^2}{4}$.

特别地，若两垂面中有一个是直角三角形，则斜边 BC 是小圆直径，即 $R_1=\dfrac{l}{2}$，此时外接球半径 $R=R_2$.

模型四：一般二面角模型



如图，二面角$C-AB-D$的平面角大小为α， ABD的外接圆圆心为O_1，ABC的外接圆圆心为O_2， E为公共弦AB中点，

则$\angle O_1EO_2=\alpha$， $O_1E=m$， $O_2E=n$，$AE=\dfrac{l}{2}$， $OA=R$，

由于O、O_1、E、O_2四点共圆，且$OE=2R'=\dfrac{O_1O_2}{\sin\alpha}$，

根据余弦定理$|O_1O_2|^2=m^2+n^2-2mn\cos\alpha$， $R^2=|OE|^2+|AE|^2=\dfrac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{l^2}{4}$.

所以含二面角的外接球终极公式：$R^2=\dfrac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{l^2}{4}$.

模型五：对棱相等模型

若一个三棱锥的对边分别相等，如下图中的三棱锥$A-BCD$中，三组对边$AB=CD$，$AC=BD$， $AD=BC$，则这个三棱锥的外接球直径就是它补全的长方体的体对角线长，即有外接球半径$r=\dfrac{\sqrt{长^2+宽^2+高^2}}{2}$.