## 第10讲　导数中函数的构造问题

导数问题中已知某个含*f*′(*x*)的不等式，往往可以转化为函数的单调性，我们可以根据不等式的形式构造适当的函数求解问题．

例1　(1)*f*(*x*)是定义在**R**上的偶函数，当*x*<0时，*f*(*x*)＋*xf*′(*x*)<0，且*f*(－4)＝0，则不等式*xf*(*x*)>0的解集为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　(－∞，－4)∪(0,4)

解析　构造*F*(*x*)＝*xf*(*x*)，则*F*′(*x*)＝*f*(*x*)＋*xf*′(*x*)，当*x*<0时，*f*(*x*)＋*xf*′(*x*)<0，可以推出当*x*<0时，*F*′(*x*)<0，*F*(*x*)在(－∞，0)上单调递减，∵*f*(*x*)为偶函数，∴*F*(*x*)＝*xf*(*x*)为奇函数，∴*F*(*x*)在(0，＋∞)上也单调递减．根据*f*(－4)＝0可得*F*(－4)＝0，根据函数的单调性、奇偶性可得函数图象(图略)，根据图象可知*xf*(*x*)>0的解集为(－∞，－4)∪(0,4)．

(2)已知偶函数*f*(*x*)(*x*≠0)的导函数为*f*′(*x*)，且满足*f*(－1)＝0，当*x*>0时，2*f*(*x*)>*xf*′(*x*)，则使得*f*(*x*)>0成立的*x*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　(－1,0)∪(0,1)

解析　构造*F*(*x*)＝，则*F*′(*x*)＝，当*x*>0时，*xf*′(*x*)－2*f*(*x*)<0，可以推出当*x*>0时，*F*′(*x*)<0，*F*(*x*)在(0，＋∞)上单调递减，∵*f*(*x*)为偶函数，∴*F*(*x*)＝为偶函数，

∴*F*(*x*)在(－∞，0)上单调递增．根据*f*(－1)＝0可得*F*(－1)＝0，根据函数的单调性、奇偶性可得函数图象(图略)，根据图象可知*f*(*x*)>0的解集为(－1,0)∪(0,1)．

例2　(1)定义在**R**上的函数*f*(*x*)满足*f*′(*x*)>*f*(*x*)恒成立，若*x*1<*x*2，则*f*(*x*2)与*f*(*x*1)的大小关系为(　　)

A．*f*(*x*2)>*f*(*x*1)

B．*f*(*x*2)< *f*(*x*1)

C．*f*(*x*2)＝*f*(*x*1)

D．*f*(*x*2)与*f*(*x*1)的大小关系不确定

答案　A

解析　设*g*(*x*)＝，

则*g*′(*x*)＝＝.

由题意得*g*′(*x*)>0，所以*g*(*x*)在**R**上单调递增，

当*x*1<*x*2时，*g*(*x*1)<*g*(*x*2)，即 <，

所以*f*(*x*2)> *f*(*x*1)．

(2)已知定义在上的函数*f*(*x*)，*f*′(*x*)是它的导函数，且恒有*f*(*x*)<*f*′(*x*)tan *x*成立，则(　　)

A.*f*>*f* B．*f*(1)<2*f*sin 1

C.*f*>*f* D.*f*<*f*

答案　D

解析　构造函数*g*(*x*)＝，

则*g*′(*x*)＝，

由已知可得，当*x*∈时，*g*′(*x*)>0，*g*(*x*)为增函数，

∴*g*<*g*，即<，

∴*f*<*f*.

 (1)构造函数*xf*(*x*)，：当条件中含“＋”时优先考虑*xf*(*x*)；当条件中含“－”时优先考虑.

(2)构造函数：条件中含“*xf*′(*x*)－*nf*(*x*)”的形式；

构造函数*xf*(*nx*)：条件中含“*nxf*′(*nx*)＋*f*(*nx*)”的形式．

(3)构造函数：条件中含“*f*′(*x*)－*f*(*x*)”的形式．

(4)构造函数：条件中含“*f*′(*x*)sin *x*－*f*(*x*)cos *x*”的形式．

1．(2020·广东韶关调研)已知*f*(*x*)为**R**上的可导函数，且∀*x*∈**R**，均有*f*(*x*)>*f*′(*x*)，则以下判断正确的是(　　)

A．*f*(2 021)>e2 021*f*(0)

B．*f*(2 021)<e2 021*f*(0)

C．*f*(2 021)＝e2 021*f*(0)

D．*f*(2 021)与e2 021*f*(0)的大小关系无法确定

答案　B

解析　令函数*g*(*x*)＝，则*g*′(*x*)＝.

∵*f*(*x*)>*f*′(*x*)，∴*g*′(*x*)<0，

即函数*g*(*x*)在**R**上单调递减，

∴*g*(2 021)<*g*(0)，∴<，

∴*f*(2 021)<e2 021*f*(0)．故选B.

2．已知*f*(*x*)是定义在**R**上的减函数，其导函数*f*′(*x*)满足＋*x*<1，则下列结论正确的是(　　)

A．对于任意*x*∈**R**，*f*(*x*)<0

B．对于任意*x*∈**R**，*f*(*x*)>0

C．当且仅当*x*∈(－∞，1)时，*f*(*x*)<0

D．当且仅当*x*∈(1，＋∞)时，*f*(*x*)>0

答案　B

解析　因为函数*f*(*x*)是定义在**R**上的减函数，所以*f*′(*x*)<0.因为＋*x*<1，所以*f*(*x*)＋*xf*′(*x*)>*f*′(*x*)，

所以*f*(*x*)＋(*x*－1)*f*′(*x*)>0，构造函数*g*(*x*)＝(*x*－1)·*f*(*x*)，则*g*′(*x*)＝*f*(*x*)＋(*x*－1)*f*′(*x*)>0，所以函数*g*(*x*)在**R**上单调递增，又*g*(1)＝(1－1)*f*(1)＝0，所以当*x*<1时，*g*(*x*)<0，所以*f*(*x*)>0；当*x*>1时，*g*(*x*)>0，所以*f*(*x*)>0.因为*f*(*x*)是定义在**R**上的减函数，所以*f*(1)>0.综上，对于任意*x*∈**R**，*f*(*x*)>0，故选B.

3．设*f*(*x*)是定义在**R**上的偶函数，且*f*(1)＝0，当*x*<0时，有*xf*′(*x*)－*f*(*x*)>0恒成立，则不等式*f*(*x*)>0的解集为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　(－∞，－1)∪(1，＋∞)

解析　构造*F*(*x*)＝，则*F*′(*x*)＝，当*x*<0时，*xf*′(*x*)－*f*(*x*)>0，可以推出当*x*<0时，*F*′(*x*)>0，*F*(*x*)在(－∞，0)上单调递增，∵*f*(*x*)为偶函数，∴*F*(*x*)为奇函数，∴*F*(*x*)在(0，＋∞)上也单调递增，根据*f*(1)＝0可得*F*(1)＝0.根据函数图象(图略)可知*f*(*x*)>0的解集为

(－∞，－1)∪(1，＋∞)．

4．设函数*f*(*x*)是定义在(－∞，0)上的可导函数，其导函数为*f*′(*x*)，且有2*f*(*x*)＋*xf*′(*x*)>*x*2，则不等式(*x*＋2 020)2*f*(*x*＋2 020)－4*f*(－2)>0的解集为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　(－∞，－2 022)

解析　由2*f*(*x*)＋*xf*′(*x*)>*x*2，*x*<0，得2*xf*(*x*)＋*x*2·*f*′(*x*)<*x*3，即[*x*2*f*(*x*)]′<*x*3<0，令*F*(*x*)＝*x*2*f*(*x*)，则当*x*<0时，*F*′(*x*)<0，即*F*(*x*)在(－∞，0)上是减函数．因为*F*(*x*＋2 020)＝(2 020＋*x*)2*f*(*x*＋

2 020)，*F*(－2)＝4*f*(－2)，所以*F*(2 020＋*x*)－*F*(－2)>0，

即*F*(2 020＋*x*)>*F*(－2)．

又*F*(*x*)在(－∞，0)上是减函数，所以2 020＋*x*<－2，即*x*<－2 022.