## 第11讲　洛必达法则

洛必达法则：设函数*f*(*x*)，*g*(*x*)满足：(1)*f*(*x*)＝*g*(*x*)＝0(或∞)；(2)在*U*(*a*)内，*f*′(*x*)和*g*′(*x*)都存在，且*g*′(*x*)≠0；(3) ＝*A*(*A*可为实数，*A*也可以是±∞)．则 ＝ ＝*A*(可连续使用)．

例　已知函数*f*(*x*)＝e*x*－1－*x*－*ax*2，当*x*≥0时，*f*(*x*)≥0恒成立，求实数*a*的取值范围．

解　当*x*＝0时，*f*(*x*)＝0，对任意实数*a*都有*f*(*x*)≥0；

当*x*>0时，由*f*(*x*)≥0得，*a*≤，

设*g*(*x*)＝，则*g*′(*x*)＝，

令*h*(*x*)＝*x*e*x*－2e*x*＋*x*＋2(*x*>0)，

则*h*′(*x*)＝*x*e*x*－e*x*＋1，

记*φ*(*x*)＝*h*′(*x*)，则*φ*′(*x*)＝*x*e*x*>0，

∴*h*′(*x*)在(0，＋∞)上为增函数，*h*′(*x*)>*h*′(0)＝0，

∴*h*(*x*)在(0，＋∞)上为增函数，*h*(*x*)>*h*(0)＝0，

∴*g*′(*x*)>0，*g*(*x*)在(0，＋∞)上为增函数．

由洛必达法则知 ＝ ＝ ＝，故*a*≤.

综上，实数*a*的取值范围是.

对函数不等式恒成立求参数取值范围时，大家常采用分类讨论、假设反证法，但很难对参数进行讨论．若采取参数与分离变量的方法，在求分离后函数的最值(值域)时会有些麻烦，如最值、极值在无意义点处，或趋于无穷．此时，利用洛必达法则．

已知函数*f*(*x*)＝＋，当*x*>0且*x*≠1时，*f*(*x*)>＋恒成立，求*k*的取值范围．

解　由题意，当*x*>0且*x*≠1时，*f*(*x*)>＋恒成立等价于*k*<＋1－＝＋1，

记*g*(*x*)＝＋1，

则*g*′(*x*)＝

＝；

又记*h*(*x*)＝ln *x*＋，

则*h*′(*x*)＝－＝>0，

所以，当*x*>0时，*h*′(*x*)≥0，*h*(*x*)在(0，＋∞)上单调递增，且*h*(1)＝0，

因此，当*x*∈(0,1)时，*h*(*x*)<0，当*x*∈(1，＋∞)时，*h*(*x*)>0；即当*x*∈(0,1)时，*g*′(*x*)<0，当*x*∈(1，＋∞)时，*g*′(*x*)>0；

所以*g*(*x*)在(0,1)上单调递减，在(1，＋∞)上单调递增．

由洛必达法则有

*g*(*x*)＝ ＋1＝ ＋1＝0，

即当*x*→1时，*g*(*x*)→0.

所以当*x*>0且*x*≠1时，*g*(*x*)>0，

所以*k*≤0.

故所求*k*的取值范围是(－∞，0]．