## 第12讲　隐零点问题

在求解导数问题时，我们一般对函数的零点设而不求，通过一种整体代换和过渡，再结合题目条件最终解决问题，我们称这类问题为“隐零点问题”．

例　已知函数*f*(*x*)＝*x*e*x*－*a*(*x*＋ln *x*)．

(1)讨论*f*(*x*)极值点的个数；

(2)若*x*0是*f*(*x*)的一个极小值点，且*f*(*x*0)>0，证明：*f*(*x*0)>2(*x*0－*x*)．

(1)解　*f*′(*x*)＝(*x*＋1)e*x*－*a*

＝(*x*＋1)＝，*x*∈(0，＋∞)．

①当*a*≤0时，*f*′(*x*)>0，*f*(*x*)在(0，＋∞)上为增函数，不存在极值点；

②当*a*>0时，令*h*(*x*)＝*x*e*x*－*a*，

*h*′(*x*)＝(*x*＋1)e*x*>0.

显然函数*h*(*x*)在(0，＋∞)上是增函数，

又因为当*x*→0时，*h*(*x*)→－*a*<0，*h*(*a*)＝*a*(e*a*－1)>0，

必存在*x*0>0，使*h*(*x*0)＝0.

当*x*∈(0，*x*0)时，*h*(*x*)<0，*f*′(*x*)<0，*f*(*x*)为减函数；

当*x*∈(*x*0，＋∞)时，*h*(*x*)>0，*f*′(*x*)>0，*f*(*x*)为增函数．

所以，*x*＝*x*0是*f*(*x*)的极小值点．

综上，当*a*≤0时，*f*(*x*)无极值点，当*a*>0时，*f*(*x*)有一个极值点．

(2)证明　由(1)得，*f*′(*x*0)＝0，即**＝*a*，

*f*(*x*0)＝**－*a*(*x*0＋ln *x*0)＝**(1－*x*0－ln *x*0)，

因为*f*(*x*0)>0，所以1－*x*0－ln *x*0>0，

令*g*(*x*)＝1－*x*－ln *x*，*g*′(*x*)＝－1－<0，

*g*(*x*)在(0，＋∞)上是减函数，且*g*(1)＝0，

由*g*(*x*)>*g*(1)得*x*<1，所以*x*0∈(0,1)，

设*φ*(*x*)＝ln *x*－*x*＋1，*x*∈(0,1)，

*φ*′(*x*)＝－1＝，

当*x*∈(0,1)时，*φ*′(*x*)>0，所以*φ*(*x*)为增函数，

*φ*(*x*)<*φ*(1)＝0，即*φ*(*x*)<0，

即ln *x*<*x*－1，所以－ln *x*>1－*x*，

所以ln(*x*＋1)<*x*，所以e*x*>*x*＋1>0.

因为*x*0∈(0,1)，所以**>*x*0＋1>0,1－*x*0－ln *x*0>1－*x*0＋1－*x*0>0，

相乘得**(1－*x*0－ln *x*0)>(*x*0＋1)(2－2*x*0)，

所以*f*(*x*0)＝**(1－*x*0－ln *x*0)>2*x*0(*x*0＋1)(1－*x*0)＝2*x*0(1－*x*)＝2(*x*0－*x*)．

结论成立．

零点问题求解三步曲

(1)用零点存在性定理判定导函数零点的存在性，列出零点方程*f*′(*x*0)＝0，并结合*f*(*x*)的单调性得到零点的取值范围．

(2)以零点为分界点，说明导函数*f*′(*x*)的正负，进而得到*f*(*x*)的最值表达式．

(3)将零点方程适当变形，整体代入最值式子进行化简证明，有时(1)中的零点范围还可以适当缩小．

已知函数*f*(*x*)＝－ln *x*－*x*2＋*x*，*g*(*x*)＝(*x*－2)e*x*－*x*2＋*m*(其中e为自然对数的底数)．当*x*∈(0,1]时，*f*(*x*)>*g*(*x*)恒成立，求正整数*m*的最大值．

解　当*x*∈(0,1]时，*f*(*x*)>*g*(*x*)，

即*m*<(－*x*＋2)e*x*－ln *x*＋*x*.

令*h*(*x*)＝(－*x*＋2)e*x*－ln *x*＋*x*，*x*∈(0,1]，

所以*h*′(*x*)＝(1－*x*)，

当0<*x*≤1时，1－*x*≥0，

设*u*(*x*)＝e*x*－，则*u*′(*x*)＝e*x*＋>0，

所以*u*(*x*)在(0,1]上单调递增．

因为*u*(*x*)在区间(0,1]上的图象是一条不间断的曲线，

且*u*＝－2<0，*u*(1)＝e－1>0，

所以存在*x*0∈，使得*u*(*x*0)＝0，

即**＝，所以ln *x*0＝－*x*0.

当*x*∈(0，*x*0)时，*u*(*x*)<0，*h*′(*x*)<0；

当*x*∈(*x*0,1)时，*u*(*x*)>0，*h*′(*x*)>0.

所以函数*h*(*x*)在(0，*x*0]上单调递减，在[*x*0,1)上单调递增，

所以*h*(*x*)min＝*h*(*x*0)＝(－*x*0＋2)**－ln *x*0＋*x*0

＝(－*x*0＋2)·＋2*x*0＝－1＋＋2*x*0.

因为*y*＝－1＋＋2*x*在*x*∈(0,1)上单调递减，

又*x*0∈，所以*h*(*x*0)＝－1＋＋2*x*0∈(3,4)，

所以当*m*≤3时，不等式*m*<(－*x*＋2)e*x*－ln *x*＋*x*对任意的*x*∈(0,1]恒成立，

所以正整数*m*的最大值是3.