## 第13讲 极值点偏移问题

对于函数*y*＝*f*(*x*)在区间(*a*，*b*)内只有一个极值点*x*0，方程*f*(*x*)＝0的解为*x*1，*x*2且*a*<*x*1<*x*2<*b*，若≠*x*0.则称函数*y*＝*f*(*x*)在区间(*a*，*b*)上极值点偏移．

例　已知函数*f*(*x*)＝*x*e－*x*.

(1)求函数*f*(*x*)的单调区间和极值；

(2)若*x*1≠*x*2且*f*(*x*1)＝*f*(*x*2)，求证：*x*1＋*x*2>2.

(1)解　*f*′(*x*)＝e－*x*(1－*x*)，

令*f*′(*x*)>0得*x*<1；令*f*′(*x*)<0得*x*>1，

∴函数*f*(*x*)在(－∞，1)上单调递增，在(1，＋∞)上单调递减，

∴*f*(*x*)有极大值*f*(1)＝，*f*(*x*)无极小值．

(2)证明　方法一　(对称化构造法)

构造辅助函数*F*(*x*)＝*f*(*x*)－*f*(2－*x*)，*x*>1，

则*F*′(*x*)＝*f*′(*x*)＋*f*′(2－*x*)＝e－*x*(1－*x*)＋e*x*－2(*x*－1)

＝(*x*－1)(e*x*－2－e－*x*)，

∵当*x*>1时，*x*－1>0，e*x*－2－e－*x*>0，∴*F*′(*x*)>0，

∴*F*(*x*)在(1，＋∞)上为增函数，∴*F*(*x*)>*F*(1)＝0，

故当*x*>1时，*f*(*x*)>*f*(2－*x*)，(\*)

由*f*(*x*1)＝*f*(*x*2)，*x*1≠*x*2，可设*x*1<1<*x*2，

将*x*2代入(\*)式可得*f*(*x*2)>*f*(2－*x*2)，

又*f*(*x*1)＝*f*(*x*2)，

∴*f*(*x*1)>*f*(2－*x*2)．

又*x*1<1,2－*x*2<1，而*f*(*x*)在(－∞，1)上单调递增，

∴*x*1>2－*x*2，

∴*x*1＋*x*2>2.

方法二　(比值代换法)

设0<*x*1<1<*x*2，*f*(*x*1)＝*f*(*x*2)即**

取对数得ln *x*1－*x*1＝ln *x*2－*x*2.

令*t*＝>1，则*x*2＝*tx*1，代入上式得ln *x*1－*x*1＝ln *t*＋ln *x*1－*tx*1，得*x*1＝，*x*2＝.

∴*x*1＋*x*2＝>2⇔ln *t*－>0，

设*g*(*t*)＝ln *t*－(*t*>1)，

∴*g*′(*t*)＝－＝>0，

∴当*t*>1时，*g*(*t*)为增函数，

∴*g*(*t*)>*g*(1)＝0，

∴ln *t*－>0，

故*x*1＋*x*2>2.

极值点偏移问题的解法

(1)(对称化构造法)构造辅助函数：对结论*x*1＋*x*2>2*x*0型，构造函数*F*(*x*)＝*f*(*x*)－*f*(2*x*0－*x*)；对结论*x*1*x*2>*x*型，构造函数*F*(*x*)＝*f*(*x*)－*f*，通过研究*F*(*x*)的单调性获得不等式．

(2)(比值代换法)通过代数变形将所证的双变量不等式通过代换*t*＝化为单变量的函数不等式，利用函数单调性证明．

已知函数*f*(*x*)＝*x*ln *x*的图象与直线*y*＝*m*交于不同的两点*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)．求证：*x*1*x*2<.

证明　*f*′(*x*)＝ln *x*＋1，

由*f*′(*x*)>0得*x*>，由*f*′(*x*)<0得0<*x*<，

∴函数*f*(*x*)在上单调递减，在上单调递增．

可设0<*x*1<<*x*2.

方法一　构造函数*F*(*x*)＝*f*(*x*)－*f*，则

*F*′(*x*)＝*f*′(*x*)＋*f*′＝1＋ln *x*＋·＝(1＋ln *x*)·，

当0<*x*<时，1＋ln *x*<0,1－<0，则*F*′(*x*)>0，得*F*(*x*)在上是增函数，∴*F*(*x*)<*F*＝0，

∴*f*(*x*)<*f*，

将*x*1代入上式得*f*(*x*1)<*f*，

又*f*(*x*1)＝*f*(*x*2)，∴*f*(*x*2)<*f*，

又*x*2>，>，且*f*(*x*)在上单调递增，

∴*x*2<，∴*x*1*x*2<.

方法二　*f*(*x*1)＝*f*(*x*2)即*x*1ln *x*1＝*x*2ln *x*2，

令*t*＝>1，则*x*2＝*tx*1，

代入上式得*x*1ln *x*1＝*tx*1(ln *t*＋ln *x*1)，得ln *x*1＝.

∴*x*1*x*2<⇔ln *x*1＋ln *x*2<－2⇔2ln *x*1＋ln *t*<－2⇔＋ln *t*<－2⇔ln *t*－>0.

设*g*(*t*)＝ln *t*－(*t*>1)，

则*g*′(*t*)＝>0.

∴当*t*>1时，*g*(*t*)为增函数，*g*(*t*)>*g*(1)＝0，

∴ln *t*－>0.故*x*1*x*2<.