## 第6讲　导数的简单应用

[**考情分析**]　1.导数的计算和几何意义是高考命题的热点，多以选择题、填空题形式考查，难度较小.2.应用导数研究函数的单调性、极值、最值多在选择题、填空题靠后的位置考查，难度中等偏上，属综合性问题．

考点一　导数的几何意义与计算

核心提炼



1．导数的运算法则

(1)[*f*(*x*)±*g*(*x*)]′＝*f*′(*x*)±*g*′(*x*)．

(2)[*f*(*x*)·*g*(*x*)]′＝*f*′(*x*)*g*(*x*)＋*f*(*x*)*g*′(*x*)．

(3)′＝(*g*(*x*)≠0)．

2．导数的几何意义

(1)函数在某点的导数即曲线在该点处的切线的斜率．

(2)曲线在某点的切线与曲线过某点的切线不同．

(3)切点既在切线上，又在曲线上．

例1　(1)已知函数*f*(*x*)的导函数为*f*′(*x*)，且满足关系式*f*(*x*)＝*x*2＋3*xf*′(2)－ln *x*，则*f*′(2)的值为(　　)

A. B．－ C. D．－

答案　B

解析　∵*f*(*x*)＝*x*2＋3*xf*′(2)－ln *x*，

∴*f*′(*x*)＝2*x*＋3*f*′(2)－，

令*x*＝2，得*f*′(2)＝4＋3*f*′(2)－，

解得*f*′(2)＝－.

(2)(2019·江苏)在平面直角坐标系*xOy*中，点*A*在曲线*y*＝ln *x*上，且该曲线在点*A*处的切线经过点(－e，－1)(e为自然对数的底数)，则点*A*的坐标是\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　(e,1)

解析　设*A*(*x*0，ln *x*0)，又*y*′＝，

则曲线*y*＝ln *x*在点*A*处的切线方程为

*y*－ln *x*0＝(*x*－*x*0)，

将(－e，－1)代入得，－1－ln *x*0＝(－e－*x*0)，

化简得ln *x*0＝，解得*x*0＝e，

则点*A*的坐标是(e,1)．

易错提醒　求曲线的切线方程要注意“过点*P*的切线”与“在点*P*处的切线”的差异，过点*P*的切线中，点*P*不一定是切点，点*P*也不一定在已知曲线上，而在点*P*处的切线，必以点*P*为切点．

跟踪演练1　(1)直线2*x*－*y*＋1＝0与曲线*y*＝*a*e*x*＋*x*相切，则*a*等于(　　)

A．e B．2e C．1 D．2

答案　C

解析　设切点为(*n*，*a*e*n*＋*n*)，因为*y*′＝*a*e*x*＋1，

所以切线的斜率为*a*e*n*＋1，

切线方程为*y*－(*a*e*n*＋*n*)＝(*a*e*n*＋1)(*x*－*n*)，

即*y*＝(*a*e*n*＋1)*x*＋*a*e*n*(1－*n*)，

依题意切线方程为*y*＝2*x*＋1，

故解得*a*＝1，*n*＝0.

(2)若函数*y*＝*f*(*x*)的图象上存在两点，使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直，则称*y*＝*f*(*x*)具有*T*性质．下列函数中具有*T*性质的是(　　)

A．*y*＝sin *x* B．*y*＝ln *x*

C．*y*＝e*x* D．*y*＝*x*3

答案　A

解析　对函数*y*＝sin *x*求导，得*y*′＝cos *x*，当*x*＝0时，该点处切线*l*1的斜率*k*1＝1，当*x*＝π时，该点处切线*l*2的斜率*k*2＝－1，所以*k*1·*k*2＝－1，所以*l*1⊥*l*2；对函数*y*＝ln *x*求导，得*y*′＝恒大于0，斜率之积不可能为－1；对函数*y*＝e*x*求导，得*y*′＝e*x*恒大于0，斜率之积不可能为－1；对函数*y*＝*x*3求导，得*y*′＝3*x*2恒大于等于0，斜率之积不可能为－1.

考点二　利用导数研究函数的单调性

核心提炼



利用导数研究函数单调性的关键

(1)在利用导数讨论函数的单调区间时，首先要确定函数的定义域．

(2)单调区间的划分要注意对导数等于零的点的确认．

(3)已知函数单调性求参数范围，要注意导数等于零的情况．

例2　已知*f*(*x*)＝*a*(*x*－ln *x*)＋，*a*∈**R**.讨论*f*(*x*)的单调性．

解　*f*(*x*)的定义域为(0，＋∞)，

*f*′(*x*)＝*a*－－＋＝.

若*a*≤0，当*x*∈(0,1)时，*f*′(*x*)>0，*f*(*x*)单调递增，

*x*∈(1，＋∞)时，*f*′(*x*)<0，*f*(*x*)单调递减，

若*a*>0，*f*′(*x*)＝.

(1)当0<*a*<2时，>1，

当*x*∈(0,1)或*x*∈时，*f*′(*x*)>0，*f*(*x*)单调递增，

当*x*∈时，*f*′(*x*)<0，*f*(*x*)单调递减．

(2)当*a*＝2时，＝1，在*x*∈(0，＋∞)内，*f*′(*x*)≥0，*f*(*x*)单调递增．

(3)当*a*>2时，0<<1，

当*x*∈或*x*∈(1，＋∞)时，*f*′(*x*)>0，*f*(*x*)单调递增，当*x*∈时，*f*′(*x*)<0，*f*(*x*)单调递减．

综上所述，当*a*≤0时，*f*(*x*)在(0,1)内单调递增，在(1，＋∞)内单调递减；

当0<*a*<2时，*f*(*x*)在(0,1)内单调递增，在内单调递减，在内单调递增；

当*a*＝2时，*f*(*x*)在(0，＋∞)内单调递增；

当*a*>2时，*f*(*x*)在内单调递增，在内单调递减，在(1，＋∞)内单调递增．

易错提醒　(1)在求单调区间时“定义域优先”．

(2)弄清参数对*f*′(*x*)符号的影响，分类讨论要不重不漏．

跟踪演练2　(1)已知定义在**R**上的函数*f*(*x*)的导函数为*f*′(*x*)，对任意*x*∈(0，π)，有*f*′(*x*)sin *x*>*f*(*x*)cos *x*，且*f*(*x*)＋*f*(－*x*)＝0，设*a*＝2*f*，*b*＝*f*，*c*＝－*f*，则(　　)

A．*a*<*b*<*c* B．*b*<*c*<*a*

C．*a*<*c*<*b* D．*c*<*b*<*a*

答案　A

解析　构造函数*g*(*x*)＝，*x*≠*k*π，*k*∈**Z**，

*g*′(*x*)＝>0，

所以函数*g*(*x*)在区间(0，π)上是增函数，

因为*f*(*x*)＋*f*(－*x*)＝0，

即*f*(*x*)＝－*f*(－*x*)，*g*(－*x*)＝＝，

所以函数*g*(*x*)是偶函数，

所以*g*<*g*<*g*＝*g*，

代入解析式得到2*f*<*f*<－*f*，

故*a*<*b*<*c*.

(2)已知*f*(*x*)＝(*x*2＋2*ax*)ln *x*－*x*2－2*ax*在(0，＋∞)上是增函数，则实数*a*的取值范围是(　　)

A．{1} B．{－1} C．(0,1] D．[－1,0)

答案　B

解析　*f*(*x*)＝(*x*2＋2*ax*)ln *x*－*x*2－2*ax*，

*f*′(*x*)＝2(*x*＋*a*)ln *x*，

∵*f*(*x*)在(0，＋∞)上是增函数，

∴*f*′(*x*)≥0在(0，＋∞)上恒成立，

当*x*＝1时，*f*′(*x*)＝0满足题意；

当*x*>1时，ln *x*>0，要使*f*′(*x*)≥0恒成立，

则*x*＋*a*≥0恒成立．

∵*x*＋*a*>1＋*a*，∴1＋*a*≥0，解得*a*≥－1；

当0<*x*<1时，ln *x*<0，要使*f*′(*x*)≥0恒成立，

则*x*＋*a*≤0恒成立，

∵*x*＋*a*<1＋*a*，∴1＋*a*≤0，解得*a*≤－1.

综上所述，*a*＝－1.

考点三　利用导数研究函数的极值、最值

核心提炼



1．由导函数的图象判断函数*y*＝*f*(*x*)的极值，要抓住两点

(1)由*y*＝*f*′(*x*)的图象与*x*轴的交点，可得函数*y*＝*f*(*x*)的可能极值点；

(2)由*y*＝*f*′(*x*)的图象可以看出*y*＝*f*′(*x*)的函数值的正负，从而可得到函数*y*＝*f*(*x*)的单调性，可得极值点．

2．求函数*f*(*x*)在[*a*，*b*]上的最大值和最小值的步骤

(1)求函数在(*a*，*b*)内的极值．

(2)求函数在区间端点处的函数值*f*(*a*)，*f*(*b*)．

(3)将函数*f*(*x*)的各极值与*f*(*a*)，*f*(*b*)比较，其中最大的一个为最大值，最小的一个为最小值．

例3　(1)若函数*f*(*x*)＝e*x*－(*m*＋1)ln *x*＋2(*m*＋1)*x*－1恰有两个极值点，则实数*m*的取值范围为(　　)

A．(－e2，－e) B.

C. D．(－∞，－e－1)

答案　D

解析　由题可得*f*′(*x*)＝e*x*－＋2(*m*＋1)，*x*>0，

因为函数*f*(*x*)＝e*x*－(*m*＋1)ln *x*＋2(*m*＋1)*x*－1恰有两个极值点，所以函数*f*′(*x*)＝e*x*－＋2(*m*＋1)(*x*>0)有两个不同的变号零点．

令e*x*－＋2(*m*＋1)＝0，

等价转化成＝*m*＋1(*x*>0)有两个不同的实数根，

记*h*(*x*)＝，

所以*h*′(*x*)＝

＝－，

当*x*∈时，*h*′(*x*)>0，

此时函数*h*(*x*)在此区间上单调递增，

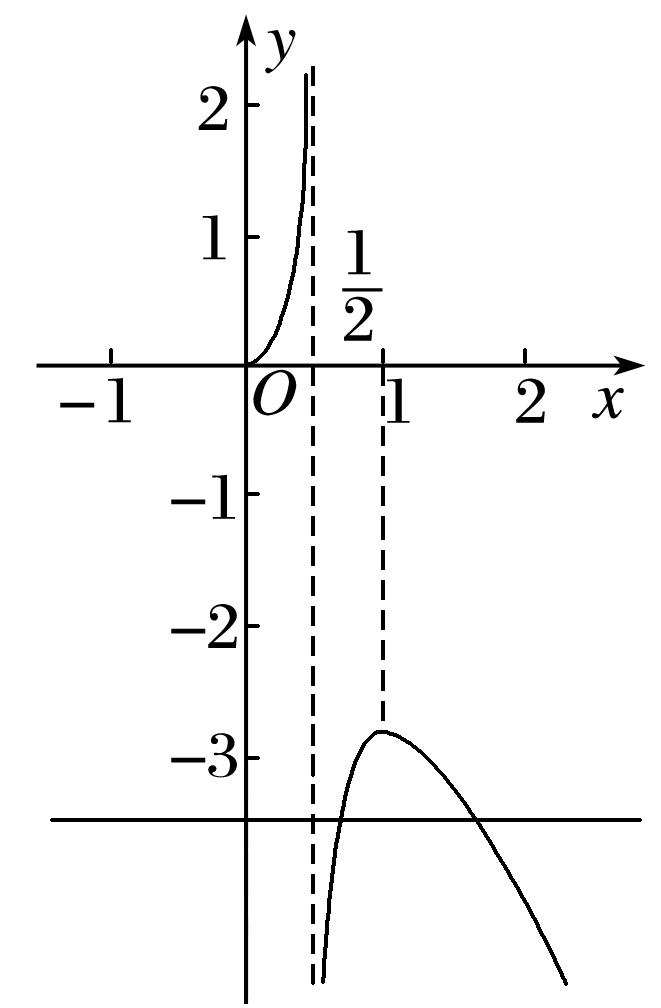
当*x*∈时，*h*′(*x*)>0，

此时函数*h*(*x*)在此区间上单调递增，

当*x*∈(1，＋∞)时，*h*′(*x*)<0，

此时函数*h*(*x*)在此区间上单调递减，

作出*h*(*x*)＝的简图如图，



要使得＝*m*＋1有两个不同的实数根，

则*h*(1)>*m*＋1，即－e>*m*＋1，

整理得*m*<－1－e.

(2)已知函数*f*(*x*)＝*ax*＋e*x*－(1＋ln *a*)*x*(*a*>0，*a*≠1)，对任意*x*1，*x*2∈[0,1]，不等式|*f*(*x*1)－*f*(*x*2)|≤

*a*ln *a*＋e－4恒成立，则*a*的取值范围为(　　)

A. B．[2，e]

C．[e，＋∞) D．(e，＋∞)

答案　C

解析　依题意，得*a*ln *a*＋e－4≥0, ①

因为*f*′(*x*)＝*ax*ln *a*＋e*x*－1－ln *a*＝(*ax*－1)ln *a*＋e*x*－1，

当*a*>1时，对任意的*x*∈[0,1]，*ax*－1≥0，ln *a*>0，e*x*－1≥0，恒有*f*′(*x*)≥0；当0<*a*<1时，对任意*x*∈[0,1]，*ax*－1≤0，ln *a*<0，e*x*－1≥0，恒有*f*′(*x*)≥0，

所以*f*(*x*)在[0,1]上是增函数，则对任意的*x*1，*x*2∈[0,1]，不等式|*f*(*x*1)－*f*(*x*2)|≤*a*ln *a*＋e－4恒成立，只需*f*(*x*)max－*f*(*x*)min≤*a*ln *a*＋e－4，

因为*f*(*x*)max＝*f*(1)＝*a*＋e－1－ln *a*，

*f*(*x*)min＝*f*(0)＝1＋1＝2，

所以*a*＋e－1－ln *a*－2≤*a*ln *a*＋e－4，

即*a*－ln *a*＋1－*a*ln *a*≤0，

即(1＋*a*)(1－ln *a*)≤0，所以ln *a*≥1，

从而有*a*≥e，而当*a*≥e时，①式显然成立．故选C.

易错提醒　利用导数研究函数的极值、最值应注意的问题：

(1)不能忽略函数*f*(*x*)的定义域．

(2)*f*′(*x*0)＝0是可导函数在*x*＝*x*0处取得极值的必要不充分条件．

(3)函数的极小值不一定比极大值小．

(4)函数在区间(*a*，*b*)上有唯一极值点，则这个极值点也是最大(小)值点，此结论在导数的实际应用中经常用到．

跟踪演练3　(1)若*x*＝是函数*f*(*x*)＝ln *x*－*kx*的极值点，则函数*f*(*x*)＝ln *x*－*kx*有(　　)

A．极小值－2 B．极大值－2

C．极小值－1 D．极大值－1

答案　B

解析　由题意得*f*′(*x*)＝－*k*，

∴*f*′＝e－*k*＝0，∴*k*＝e.

由*f*′(*x*)＝－e＝0，得*x*＝，

当*x*∈时，*f*′(*x*)>0，函数*f*(*x*)单调递增；

当*x*∈时，*f*′(*x*)<0，函数*f*(*x*)单调递减，

所以函数*f*(*x*)的极大值为*f*＝ln －e×＝－2.

(2)已知点*M*在圆*C*：*x*2＋*y*2－4*y*＋3＝0上，点*N*在曲线*y*＝1＋ln *x*上，则线段*MN*的长度的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　－1

解析　由题可得*C*(0,2)，圆*C*的半径*r*＝1.

设*N*(*t*,1＋ln *t*)(*t*>0)，

令*f*(*t*)＝|*CN*|2，则*f*(*t*)＝*t*2＋(1－ln *t*)2(*t*>0)，

所以*f*′(*t*)＝2*t*＋2(1－ln *t*)＝.

令*φ*(*t*)＝*t*2＋ln *t*－1(*t*>0)，

易知函数*φ*(*t*)在(0，＋∞)上单调递增，且*φ*(1)＝0，

所以当0<*t*<1时，*f*′(*t*)<0；当*t*>1时，*f*′(*t*)>0，

所以*f*(*t*)在(0,1)上单调递减，在(1，＋∞)上单调递增，

所以*f*(*t*)min＝*f*(1)＝2.

因为|*MN*|≥|*CN*|－1＝－1，

所以线段*MN*的长度的最小值为－1.

## 专题强化练

一、单项选择题

1．(2020·全国Ⅰ)函数*f*(*x*)＝*x*4－2*x*3的图象在点(1，*f*(1))处的切线方程为(　　)

A．*y*＝－2*x*－1 B．*y*＝－2*x*＋1

C．*y*＝2*x*－3 D．*y*＝2*x*＋1

答案　B

解析　*f*(1)＝1－2＝－1，切点坐标为(1，－1)，

*f*′(*x*)＝4*x*3－6*x*2，

所以切线的斜率为*k*＝*f*′(1)＝4×13－6×12＝－2，

切线方程为*y*＋1＝－2(*x*－1)，即*y*＝－2*x*＋1.

2．若函数*f*(*x*)＝*x*2＋*ax*＋在上是增函数，则*a*的取值范围是(　　)

A．[－1,0] B．[－1，＋∞)

C．[0,3] D．[3，＋∞)

答案　D

解析　由条件知*f*′(*x*)＝2*x*＋*a*－≥0在上恒成立，即*a*≥－2*x*在上恒成立，∵函数*y*＝－2*x*在上为减函数，∴*y*<－2×＝3.∴*a*≥3.

3．已知函数*f*(*x*)满足*f*(*x*)＝*f*′(1)·e*x*－1－*f*(0)*x*＋*x*2，则*f*(*x*)的单调递增区间为(　　)

A．(－∞，0) B．(－∞，1)

C．(1，＋∞) D．(0，＋∞)

答案　D

解析　由题意得*f*′(*x*)＝*f*′(1)e*x*－1－*f*(0)＋*x*，

令*x*＝1，则*f*′(1)＝*f*′(1)－*f*(0)＋1，∴*f*(0)＝1，

令*x*＝0，则*f*(0)＝*f*′(1)e－1，∴*f*′(1)＝e，

∴*f*(*x*)＝e*x*－*x*＋*x*2，∴*f*′(*x*)＝e*x*－1＋*x*，

令*g*(*x*)＝e*x*－1＋*x*，则*g*′(*x*)＝e*x*＋1>0.

∴*g*(*x*)为增函数，

又*g*(0)＝0，∴当*x*>0时，*g*(*x*)>0，即*f*′(*x*)>0，

即*f*(*x*)在(0，＋∞)上单调递增．

4．设函数*f*(*x*)定义在区间(0，＋∞)上，*f*′(*x*)是函数*f*(*x*)的导函数，*f*(*x*)＋*x*ln *xf*′(*x*)>0，则不等式>0的解集是(　　)

A. B．(1，＋∞)

C. D．(0,1)

答案　B

解析　构造新函数*g*(*x*)＝ln *xf*(*x*)，

则*g*(1)＝0，*g*′(*x*)＝*f*(*x*)＋ln *xf*′(*x*)．

因为*f*(*x*)＋*x*ln *xf*′(*x*)>0，又*x*>0，

所以*f*(*x*)＋ln *xf*′(*x*)>0，

所以*g*′(*x*)>0，所以函数*g*(*x*)＝ln *xf*(*x*)在(0，＋∞)上单调递增．

而>0可化为ln *xf*(*x*)>0，

等价于*g*(*x*)>*g*(1)，解得*x*>1，

所以不等式>0的解集是(1，＋∞)．

5．若对∀*x*1，*x*2∈(*m*，＋∞)，且*x*1<*x*2，都有<1，则*m*的最小值是(　　)

注：(e为自然对数的底数，即e＝2.718 28…)

A. B．e C．1 D.

答案　C

解析　由题意，当0≤*m*<*x*1<*x*2时，

由<1，

等价于*x*1ln *x*2－*x*2ln *x*1<*x*2－*x*1，

即*x*1ln *x*2＋*x*1<*x*2ln *x*1＋*x*2，

故*x*1(ln *x*2＋1)<*x*2(ln *x*1＋1)，

故<，

令*f*(*x*)＝，则*f*(*x*2)<*f*(*x*1)，

又∵*x*2>*x*1>*m*≥0，

故*f*(*x*)在(*m*，＋∞)上单调递减，

又由*f*′(*x*)＝，令*f*′(*x*)<0，解得*x*>1，

故*f*(*x*)在(1，＋∞)上单调递减，故*m*≥1.

6．已知直线*l*既是曲线*C*1：*y*＝e*x*的切线，又是曲线*C*2：*y*＝e2*x*2的切线，则直线*l*在*x*轴上的截距为(　　)

A．2 B．1 C．e2 D．－e2

答案　B

解析　设直线*l*与曲线*C*1：*y*＝e*x*相切于点 ，与曲线*C*2：*y*＝e2*x*2相切于点，

由*y*＝e*x*，得 ，

由*y*＝e2*x*2，得 ，

∴直线*l*的方程为**

或*y*－e2*x*＝e2*x*2(*x*－*x*2)，

则解得*x*1＝*x*2＝2，

∴直线*l*的方程为*y*－e2＝e2(*x*－2)，

令*y*＝0，可得*x*＝1，

∴直线*l*在*x*轴上的截距为1.

二、多项选择题

7．(2020·唐山模拟)设函数*f*(*x*)＝，则下列说法正确的是(　　)

A．*f*(*x*)的定义域是(0，＋∞)

B．当*x*∈(0,1)时，*f*(*x*)的图象位于*x*轴下方

C．*f*(*x*)存在单调递增区间

D．*f*(*x*)有且仅有两个极值点

答案　BC

解析　由题意知，函数*f*(*x*)满足解得*x*>0且*x*≠1，所以*f*(*x*)的定义域为(0,1)∪(1，＋∞)，故A不正确；*f*(*x*)＝，当*x*∈(0,1)时，e*x*>0，ln *x*<0，所以*f*(*x*)<0，所以*f*(*x*)在(0,1)上的图象在*x*轴的下方，故B正确；因为*f*′(*x*)＝，设*g*(*x*)＝ln *x*－(*x*>0)，则*g*′(*x*)＝＋，所以当*x*>0时，*g*′(*x*)>0，函数*g*(*x*)单调递增，*g*(1)＝0－<0，*g*(e2)＝2－>0，所以*f*′(*x*)>0在定义域上有解，所以函数*f*(*x*)存在单调递增区间，故C正确；函数*y*＝*f*′(*x*)只有一个零点*x*0，且*x*0>1，当*x*∈(0,1)∪(1，*x*0)时，*f*′(*x*)<0，函数单调递减，当*x*∈(*x*0，＋∞)时，*f*′(*x*)>0，函数单调递增，所以函数*f*(*x*)只有一个极小值点，故D不正确．

8．已知*f*(*x*)＝e*x*－2*x*2有且仅有两个极值点，分别为*x*1，*x*2(*x*1<*x*2)，则下列不等式中正确的有(参考数据：ln 2≈0.693 1，ln 3≈1.098 6)(　　)

A．*x*1＋*x*2< B．*x*1＋*x*2>

C．*f*(*x*1)＋*f*(*x*2)<0 D．*f*(*x*1)＋*f*(*x*2)>0

答案　AD

解析　由题意得*f*′(*x*)＝e*x*－4*x*，

则*f*′＝*f*′＝

*f*′(2)＝e2－8<0.

由ln 3≈1.098 6，得>ln 3，所以*f*′>0，

从而<*x*1<，2<*x*2<，所以*x*1＋*x*2<.

因为*f*(0)＝1，所以易得*f*(*x*1)>1.

因为*f*′(2ln 3)＝9－8ln 3>0，所以*x*2<2ln 3.

因为*f*′(*x*2)＝0，所以*f*(*x*2)＝4*x*2－2*x*.

设*g*(*x*)＝4*x*－2*x*2，得*g*(*x*2)>*g*(2ln 3)>*g*(2.2)

＝－0.88>－1，

所以*f*(*x*1)＋*f*(*x*2)>0.

三、填空题

9．已知函数*f*(*x*)＝*x*2－*ax*＋3在(0,1)上为减函数，函数*g*(*x*)＝*x*2－*a*ln *x*在(1,2)上为增函数，则*a*的值等于\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　2

解析　∵函数*f*(*x*)＝*x*2－*ax*＋3在(0,1)上为减函数，

∴≥1，得*a*≥2.

又∵*g*′(*x*)＝2*x*－，

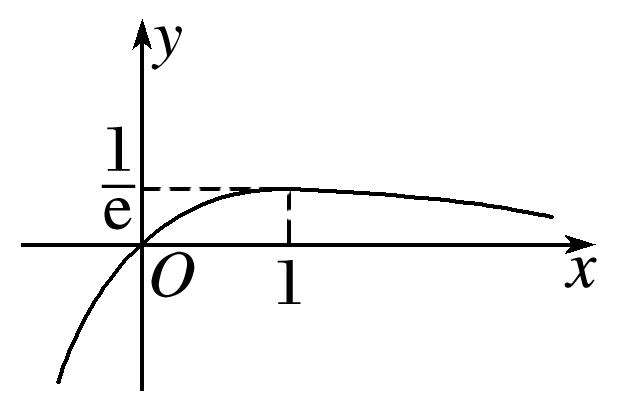
依题意得*g*′(*x*)≥0在(1,2)上恒成立，

∴2*x*2≥*a*在(1,2)上恒成立，∴*a*≤2.∴*a*＝2.

10．已知函数*f*(*x*)＝－*ax*有两个极值点，则实数*a*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案

解析　设*f*(*x*)的导数为*f*′(*x*)，因为函数*f*(*x*)＝－*ax*有两个极值点，所以方程*f*′(*x*)＝－－*a*＝0有两个不相等的实数根，令*g*(*x*)＝，则*g*(*x*)＝的图象与直线*y*＝－*a*有两个不同交点，又*g*′(*x*)＝，由*g*′(*x*)＝＝0得*x*＝1，所以当*x*<1时，*g*′(*x*)>0，即*g*(*x*)＝单调递增；当*x*>1时，*g*′(*x*)<0，即*g*(*x*)＝单调递减．所以*g*(*x*)max＝*g*(1)＝，又*g*(0)＝0，当*x*>0时，*g*(*x*)＝>0，所以作出函数*g*(*x*)的简图如图所示，



因为*g*(*x*)＝的图象与直线*y*＝－*a*有两个不同交点，所以0<－*a*<，即－<*a*<0.

11．(2020·北京市第171中学模拟)已知函数*f*(*x*)＝e2*x*－3，*g*(*x*)＝＋ln ，若*f*(*m*)＝*g*(*n*)成立，则*n*－*m*的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　＋ln 2

解析　设e2*m*－3＝＋ln ＝*k*(*k*>0)，

则*m*＝＋，

令*h*(*k*)＝*n*－*m*＝－－，

所以*h*′(*k*)＝－，*h*′(*k*)在(0，＋∞)上为增函数，

且*h*′＝0，

当*k*∈时，*h*′(*k*)<0，

当*k*∈时，*h*′(*k*)>0，

所以*h*(*k*)＝－－在上单调递减，在上单调递增，

所以*h*(*k*)min＝*h*＝＋ln 2，

即*n*－*m*的最小值为＋ln 2.

12．已知函数*f*(*x*)＝，*m*∈[1，e]，*x*∈[1,2]，*g*(*m*)＝*f*(*x*)max－*f*(*x*)min，则关于*m*的不等式*g*(*m*)≥的解集为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案

解析　由*f*(*x*)＝，

得*f*′(*x*)＝

＝＝－

＝－，

∵*m*∈[1，e]，*x*∈[1,2]，

∴*f*′(*x*)≥0，

∴函数*f*(*x*)在区间[1,2]上单调递增，

∴*f*(*x*)max＝*f*(2)＝，*f*(*x*)min＝*f*(1)＝，

∴*g*(*m*)＝*f*(*x*)max－*f*(*x*)min

＝－＝，

令≥，得*m*≥，

又*m*∈[1，e]，∴*m*∈.

故不等式*g*(*m*)≥的解集为.

四、解答题

13．设函数*f*(*x*)＝*ax*3－2*x*2＋*x*＋*c*(*a*>0)．

(1)当*a*＝1，且函数*f*(*x*)的图象过点(0,1)时，求函数*f*(*x*)的极小值；

(2)若*f*(*x*)在(－∞，＋∞)上无极值点，求*a*的取值范围．

解　*f*′(*x*)＝3*ax*2－4*x*＋1.

(1)函数*f*(*x*)的图象过点(0,1)时，有*f*(0)＝*c*＝1.

当*a*＝1时，*f*(*x*)＝*x*3－2*x*2＋*x*＋1，

*f*′(*x*)＝3*x*2－4*x*＋1，

由*f*′(*x*)>0，解得*x*<或*x*>1；

由*f*′(*x*)<0，解得<*x*<1.

所以函数*f*(*x*)在和(1，＋∞)上单调递增，在上单调递减，

所以函数*f*(*x*)的极小值是*f*(1)＝13－2×12＋1＋1＝1.

(2)若*f*(*x*)在(－∞，＋∞)上无极值点，

则*f*(*x*)在(－∞，＋∞)上是单调函数，

即*f*′(*x*)＝3*ax*2－4*x*＋1≥0或*f*′(*x*)＝3*ax*2－4*x*＋1≤0恒成立．

由*a*>0，*f*′(*x*)≥0恒成立的充要条件是*Δ*＝(－4)2－4×3*a*×1≤0，即16－12*a*≤0，解得*a*≥.

显然，*f*′(*x*)≤0不恒成立，

综上，*a*的取值范围为.

14．已知函数*f*(*x*)＝ln *x*－*a*2*x*2＋*ax*(*a*∈**R**)．

(1)当*a*＝1时，求函数*f*(*x*)的单调区间；

(2)若函数*f*(*x*)在区间(1，＋∞)上是减函数，求实数*a*的取值范围．

解　(1)当*a*＝1时，*f*(*x*)＝ln *x*－*x*2＋*x*，

其定义域是(0，＋∞)，

∴*f*′(*x*)＝－2*x*＋1＝－.

令*f*′(*x*)＝0，即－＝－＝0，

解得*x*＝－或*x*＝1.

∵*x*>0，∴*x*＝1.

当0<*x*<1时，*f*′(*x*)>0；当*x*>1时，*f*′(*x*)<0.

∴函数*f*(*x*)在区间(0,1)上单调递增，在区间(1，＋∞)上单调递减，即单调递增区间为(0,1)，单调递减区间为(1，＋∞)．

(2)方法一　∵*f*(*x*)＝ln *x*－*a*2*x*2＋*ax*，

其定义域为(0，＋∞)，

∴*f*′(*x*)＝－2*a*2*x*＋*a*＝

＝.

①当*a*＝0时，*f*′(*x*)＝>0，

∴*f*(*x*)在区间(0，＋∞)上为增函数，不符合题意；

②当*a*>0时，*f*′(*x*)<0(*x*>0)等价于(2*ax*＋1)(*ax*－1)>0(*x*>0)，即*x*>.

此时*f*(*x*)的单调递减区间为.

依题意，得解得*a*≥1；

③当*a*<0时，*f*′(*x*)<0(*x*>0)等价于(2*ax*＋1)(*ax*－1)>0(*x*>0)，即*x*>－.

此时*f*(*x*)的单调递减区间为，

∴解得*a*≤－.

综上所述，实数*a*的取值范围是∪[1，＋∞)．

方法二　∵*f*(*x*)＝ln *x*－*a*2*x*2＋*ax*，*x*∈(0，＋∞)，

∴*f*′(*x*)＝.

由*f*(*x*)在(1，＋∞)上是减函数，可得*g*(*x*)＝－2*a*2*x*2＋*ax*＋1≤0在(1，＋∞)上恒成立．

①当*a*＝0时，1≤0，不符合题意；

②当*a*≠0时，可得即

∴∴*a*≥1或*a*≤－.

∴实数*a*的取值范围是∪[1，＋∞)．