## 第7讲　导数的综合应用

[**考情分析**]　1.导数逐渐成为解决问题必不可少的工具，利用导数研究函数的单调性与极值(最值)是高考的常见题型，而导数与函数、不等式、方程、数列等的交汇命题是高考的热点和难点.2.多以解答题压轴形式出现，难度较大．

### 母题突破1　导数与不等式的证明

母题　(2017·全国Ⅲ)已知函数*f*(*x*)＝ln *x*＋*ax*2＋(2*a*＋1)*x*.

(1)讨论*f*(*x*)的单调性；

(2)当*a*<0时，证明*f*(*x*)≤－－2.

2思路分析

❶*f**x*≤－－2

　　　↓

❷*f**x*max≤－－2

　　　↓

❸*f**x*max＋＋2≤0

↓

❹构造函数证明

(1)解　*f*(*x*)的定义域为(0，＋∞)，

*f*′(*x*)＝＋2*ax*＋2*a*＋1＝.

若*a*≥0，则当*x*∈(0，＋∞)时，*f*′(*x*)>0，

故*f*(*x*)在(0，＋∞)上单调递增．

若*a*<0，则当*x*∈时，*f*′(*x*)>0；

当*x*∈时，*f*′(*x*)<0.

故*f*(*x*)在上单调递增，在上单调递减．

(2)证明　由(1)知，当*a*<0时，*f*(*x*)在*x*＝－处取得最大值，最大值为*f*＝ln－1－，

所以*f*(*x*)≤－－2等价于ln－1－≤－－2，

即ln＋＋1≤0.

设*g*(*x*)＝ln *x*－*x*＋1，则*g*′(*x*)＝－1.

当*x*∈(0,1)时，*g*′(*x*)>0；

当*x*∈(1，＋∞)时，*g*′(*x*)<0.

所以*g*(*x*)在(0,1)上单调递增，在(1，＋∞)上单调递减．

故当*x*＝1时，*g*(*x*)取得最大值，最大值为*g*(1)＝0.

所以当*x*>0时，*g*(*x*)≤0.

从而当*a*<0时，ln＋＋1≤0，

即*f*(*x*)≤－－2.

[子题1]　设函数*f*(*x*)＝ln *x*－*x*＋1.证明：当*x*∈(1，＋∞)时，1<<*x*.

证明　*f*′(*x*)＝－1＝，*x*>0，

当*x*>1时，*f*′(*x*)<0，*f*(*x*)单调递减，

当0<*x*<1时，*f*′(*x*)>0，*f*(*x*)单调递增，

∴*f*(*x*)＝ln *x*－*x*＋1≤*f*(1)＝0，∴ln *x*≤*x*－1，

∴当*x*>1时，ln *x*<*x*－1，①

且ln <－1，②

由①得，1<，由②得，－ln *x*<，

∴ln *x*>，∴*x*>，

综上所述，当*x*>1时，1<<*x*.

[子题2]　已知函数*f*(*x*)＝e*x*－*x*2.求证：当*x*>0时，≥ln *x*＋1.

证明　设*g*(*x*)＝*f*(*x*)－(e－2)*x*－1＝e*x*－*x*2－(e－2)*x*－1(*x*>0)，

则*g*′(*x*)＝e*x*－2*x*－(e－2)，

设*m*(*x*)＝e*x*－2*x*－(e－2)(*x*>0)，

则*m*′(*x*)＝e*x*－2，

易得*g*′(*x*)在(0，ln 2)上单调递减，在(ln 2，＋∞)上单调递增，

又*g*′(0)＝3－e>0，*g*′(1)＝0，

由0<ln 2<1，则*g*′(ln 2)<0，

所以存在*x*0∈(0，ln 2)，使得*g*′(*x*0)＝0，

所以当*x*∈(0，*x*0)∪(1，＋∞)时，*g*′(*x*)>0；

当*x*∈(*x*0，1)时，*g*′(*x*)<0.

故*g*(*x*)在(0，*x*0)上单调递增，在(*x*0，1)上单调递减，在(1，＋∞)上单调递增，

又*g*(0)＝*g*(1)＝0，所以*g*(*x*)＝e*x*－*x*2－(e－2)*x*－1≥0，

故当*x*>0时，≥*x*.

又由母题可得ln *x*≤*x*－1，即*x*≥ln *x*＋1，

故≥ln *x*＋1.

规律方法　利用导数证明不等式*f*(*x*)>*g*(*x*)的基本方法

(1)若*f*(*x*)与*g*(*x*)的最值易求出，可直接转化为证明*f*(*x*)min>*g*(*x*)max.

(2)若*f*(*x*)与*g*(*x*)的最值不易求出，可构造函数*h*(*x*)＝*f*(*x*)－*g*(*x*)，然后根据函数*h*(*x*)的单调性或最值，证明*h*(*x*)>0.

(3)通过题目中已有的或常用的不等式进行证明．

(4)利用赋值法证明与正整数有关的不等式.

跟踪演练

1．(2018·全国Ⅰ)已知函数*f*(*x*)＝*a*e*x*－ln *x*－1.

(1)设*x*＝2是*f*(*x*)的极值点，求*a*，并求*f*(*x*)的单调区间；

(2)证明：当*a*≥时，*f*(*x*)≥0.

(1)解　*f*(*x*)的定义域为(0，＋∞)，*f*′(*x*)＝*a*e*x*－.

由题设知，*f*′(2)＝0，所以*a*＝.

从而*f*(*x*)＝e*x*－ln *x*－1，*f*′(*x*)＝e*x*－.

当0<*x*<2时，*f*′(*x*)<0；当*x*>2时，*f*′(*x*)>0.

所以*f*(*x*)的单调递增区间为(2，＋∞)，单调递减区间为(0,2)．

(2)证明　当*a*≥时，*f*(*x*)≥－ln *x*－1.

方法一　设*g*(*x*)＝－ln *x*－1(*x*∈(0，＋∞))，

则*g*′(*x*)＝－.

当0<*x*<1时，*g*′(*x*)<0；当*x*>1时，*g*′(*x*)>0.

所以*x*＝1是*g*(*x*)的最小值点．

故当*x*>0时，*g*(*x*)≥*g*(1)＝0.

因此，当*a*≥时，*f*(*x*)≥0.

方法二　易证e*x*≥*x*＋1，①

ln *x*≤*x*－1，②

∴*f*(*x*)≥－ln *x*－1＝e*x*－1－ln *x*－1≥*x*－ln *x*－1≥0，

即证*f*(*x*)≥0.

2．(2020·株州模拟)已知*f*(*x*)＝ln *x*＋.

(1)若函数*g*(*x*)＝*xf*(*x*)，讨论*g*(*x*)的单调性与极值；

(2)证明：*f*(*x*)>.

(1)解　由题意，得*g*(*x*)＝*x*·*f*(*x*)＝*x*ln *x*＋(*x*>0)，

则*g*′(*x*)＝ln *x*＋1.

当*x*∈时，*g*′(*x*)<0，所以*g*(*x*)单调递减；当*x*∈时，*g*′(*x*)>0，所以*g*(*x*)单调递增，

所以*g*(*x*)的单调递减区间为，单调递增区间为，

*g*(*x*)的极小值为*g*＝，无极大值．

(2)证明　要证ln *x*＋>(*x*>0)成立，

只需证*x*ln *x*＋>(*x*>0)成立，

令*h*(*x*)＝，则*h*′(*x*)＝，

当*x*∈(0,1)时，*h*′(*x*)>0，*h*(*x*)单调递增，当*x*∈(1，＋∞)时，*h*′(*x*)<0，*h*(*x*)单调递减，

所以*h*(*x*)的极大值为*h*(1)，即*h*(*x*)≤*h*(1)＝，

由(1)知，*x*∈(0，＋∞)时，*g*(*x*)≥*g*＝，

且*g*(*x*)的最小值点与*h*(*x*)的最大值点不同，所以*x*ln *x*＋>，即ln *x*＋>，所以*f*(*x*)>.

### 专题强化练

1．(2020·沈阳模拟)已知函数*f*(*x*)＝*x*2－(*a*－2)*x*－*a*ln *x*，*a*>0.

(1)求函数*y*＝*f*(*x*)的单调区间；

(2)当*a*＝1时，证明：对任意的*x*>0，*f*(*x*)＋e*x*>*x*2＋*x*＋2.

(1)解　*f*(*x*)＝*x*2－(*a*－2)*x*－*a*ln *x*，*a*>0，定义域为(0，＋∞)，*f*′(*x*)＝2*x*－(*a*－2)－＝，

令*f*′(*x*)>0，得*x*>；令*f*′(*x*)<0，得0<*x*<.

∴函数*y*＝*f*(*x*)的单调递减区间为，单调递增区间为.

(2)证明　方法一　∵*a*＝1，∴*f*(*x*)＝*x*2＋*x*－ln *x*(*x*>0)，

即证e*x*－ln *x*－2>0恒成立，

令*g*(*x*)＝e*x*－ln *x*－2，*x*∈(0，＋∞)，

即证*g*(*x*)min>0恒成立，

*g*′(*x*)＝e*x*－，*g*′(*x*)为增函数，*g*′<0，*g*′(1)>0，

∴∃*x*0∈，使*g*′(*x*0)＝0成立，即－＝0，

则当0<*x*<*x*0时，*g*′(*x*)<0，当*x*>*x*0时，*g*′(*x*)>0，

∴*y*＝*g*(*x*)在(0，*x*0)上单调递减，在(*x*0，＋∞)上单调递增，

∴*g*(*x*)min＝*g*(*x*0)＝－ln *x*0－2，

又∵－＝0，即＝，

∴*g*(*x*0)＝－ln *x*0－2＝＋ln －2＝＋*x*0－2，

又∵*x*0∈，∴*x*0＋>2，

∴*g*(*x*0)>0，即对任意的*x*>0，*f*(*x*)＋e*x*>*x*2＋*x*＋2.

方法二　令*φ*(*x*)＝e*x*－*x*－1，

∴*φ*′(*x*)＝e*x*－1，

∴*φ*(*x*)在(－∞，0)上单调递减，在(0，＋∞)上单调递增，

∴*φ*(*x*)min＝*φ*(0)＝0，

∴e*x*≥*x*＋1，①

令*h*(*x*)＝ln *x*－*x*＋1(*x*>0)，

∴*h*′(*x*)＝－1＝，

∴*h*(*x*)在(0,1)上单调递增，在(1，＋∞)上单调递减，

∴*h*(*x*)max＝*h*(1)＝0，

∴ln *x*≤*x*－1，∴*x*＋1≥ln *x*＋2，②

要证*f*(*x*)＋e*x*>*x*2＋*x*＋2，

即证e*x*>ln *x*＋2，

由①②知e*x*≥*x*＋1≥ln *x*＋2，且两等号不能同时成立，

∴e*x*>ln *x*＋2，即证原不等式成立．

2．(2020·全国Ⅱ)已知函数*f*(*x*)＝sin2*x*sin 2*x*.

(1)讨论*f*(*x*)在区间(0，π)的单调性；

(2)证明：|*f*(*x*)|≤ ；

(3)设*n*∈**N**\*，证明：sin2*x*sin22*x*sin24*x*…sin22*nx*≤.

(1)解　*f*′(*x*)＝2sin *x*cos *x*sin 2*x*＋2sin2*x*cos 2*x*

＝2sin *x*sin 3*x*.

当*x*∈∪时，*f*′(*x*)>0；

当*x*∈时，*f*′(*x*)<0.

所以*f*(*x*)在区间，上单调递增，

在区间上单调递减．

(2)证明　因为*f*(0)＝*f*(π)＝0，

由(1)知，*f*(*x*)在区间[0，π]上的最大值为*f*＝，

最小值为*f*＝－.

而*f*(*x*)是周期为π的周期函数，

故|*f*(*x*)|≤.

(3)证明　由于

＝|sin3*x*sin32*x*…sin32*nx*|

＝|sin *x*||sin2*x*sin32*x*…sin32*n*－1*x*sin 2*nx*||sin22*nx*|

＝|sin *x*||*f*(*x*)*f*(2*x*)…*f*(2*n*－1*x*)||sin22*nx*|

≤|*f*(*x*)*f*(2*x*)…*f*(2*n*－1*x*)|，

所以sin2*x*sin22*x*sin24*x*…sin22*nx*≤＝.