### 第8讲　恒成立问题与有解问题

母题　(2014·全国Ⅰ)设函数*f*(*x*)＝*a*ln *x*＋*x*2－*bx*(*a*≠1)，曲线*y*＝*f*(*x*)在点(1，*f*(1))处的切线斜率为0.

(1)求*b*；

(2)若存在*x*0≥1，使得*f*(*x*0)<，求*a*的取值范围．

2思路分析

❶存在*x*0≥1，使得*f*(*x*0)<

　　　↓

❷*f**x*min<

　　　↓

❸求*f**x*min

解　(1)*f*′(*x*)＝＋(1－*a*)*x*－*b*.

由题设知*f*′(1)＝0，解得*b*＝1.

(2)*f*(*x*)的定义域为(0，＋∞)，

由(1)知，*f*(*x*)＝*a*ln *x*＋*x*2－*x*，

*f*′(*x*)＝＋(1－*a*)*x*－1＝(*x*－1)．

①若*a*≤，则≤1，故当*x*∈(1，＋∞)时，*f*′(*x*)>0，*f*(*x*)在(1，＋∞)上单调递增．

所以，存在*x*0≥1，使得*f*(*x*0)<的充要条件为

*f*(1)<，即－1<，

解得－－1<*a*<－1.

②若<*a*<1，则>1，

故当*x*∈时，*f*′(*x*)<0，

当*x*∈时，*f*′(*x*)>0，*f*(*x*)在上单调递减，在上单调递增．

所以，存在*x*0≥1，使得*f*(*x*0)<的充要条件为*f*<.

而*f*＝*a*ln ＋＋>，

所以不符合题意．

③若*a*>1，则*f*(1)＝－1＝<.

综上，*a*的取值范围是(－－1，－1)∪(1，＋∞)．

[子题1]　已知函数*f*(*x*)＝ln *x*－*ax*，*g*(*x*)＝*x*2，*a*∈**R**.

(1)求函数*f*(*x*)的极值点；

(2)若*f*(*x*)≤*g*(*x*)恒成立，求*a*的取值范围．

解　(1)*f*(*x*)＝ln *x*－*ax*的定义域为(0，＋∞)，

*f*′(*x*)＝－*a*.

当*a*≤0时，*f*′(*x*)＝－*a*>0，

所以*f*(*x*)在(0，＋∞)上单调递增，无极值点；

当*a*>0时，由*f*′(*x*)＝－*a*>0，得0<*x*<，

由*f*′(*x*)＝－*a*<0，得*x*>，

所以*f*(*x*)在上单调递增，在上单调递减，所以函数*f*(*x*)有极大值点，无极小值点．

(2)由条件可得ln *x*－*x*2－*ax*≤0(*x*>0)恒成立，

则当*x*>0时，*a*≥－*x*恒成立，

令*h*(*x*)＝－*x*，*x*>0，则*h*′(*x*)＝，

令*k*(*x*)＝1－*x*2－ln *x*，*x*>0，

则当*x*>0时，*k*′(*x*)＝－2*x*－<0，

所以*k*(*x*)在(0，＋∞)上单调递减，

又*k*(1)＝0，所以在(0,1)上，*h*′(*x*)>0，在(1，＋∞)上，*h*′(*x*)<0，

所以*h*(*x*)在(0,1)上单调递增，在(1，＋∞)上单调递减．

所以*h*(*x*)max＝*h*(1)＝－1，所以*a*≥－1.

即*a*的取值范围为*a*≥－1.

[子题2]　(2020·北京市西城区师范大学附属实验中学模拟)已知*x*＝为函数*f*(*x*)＝*xa*ln *x*的极值点．

(1)求*a*的值；

(2)设函数*g*(*x*)＝，若对∀*x*1∈(0，＋∞)，∃*x*2∈**R**，使得*f*(*x*1)－*g*(*x*2)≥0，求*k*的取值范围．

解　(1)*f*′(*x*)＝*axa*－1ln *x*＋*xa*·＝*xa*－1(*a*ln *x*＋1)，

*f*′＝*a*－1＝0，解得*a*＝2，

当*a*＝2时，*f*′(*x*)＝*x*(2ln *x*＋1)，函数*f*(*x*)在上单调递减，在上单调递增，

所以*x*＝为函数*f*(*x*)＝*xa*ln *x*的极小值点，

因此*a*＝2.

(2)由(1)知*f*(*x*)min＝*f*＝－，函数*g*(*x*)的导函数*g*′(*x*)＝*k*(1－*x*)e－*x*.

①当*k*>0时，

当*x*<1时，*g*′(*x*)>0，*g*(*x*)在(－∞，1)上单调递增；当*x*>1时，*g*′(*x*)<0，*g*(*x*)在(1，＋∞)上单调递减，

对∀*x*1∈(0，＋∞)，∃*x*2＝－，使得*g*(*x*2)＝*g*＝<－1<－≤*f*(*x*1)，符合题意．

②当*k*＝0时，*g*(*x*)＝0，取*x*1＝，对∀*x*2∈**R**有*f*(*x*1)－*g*(*x*2)<0，不符合题意．

③当*k*<0时，

当*x*<1时，*g*′(*x*)<0，*g*(*x*)在(－∞，1)上单调递减；当*x*>1时，*g*′(*x*)>0，*g*(*x*)在(1，＋∞)上单调递增，

*g*(*x*)min＝*g*(1)＝，

若对∀*x*1∈(0，＋∞)，∃*x*2∈**R**，使得*f*(*x*1)－*g*(*x*2)≥0，只需*g*(*x*)min≤*f*(*x*)min，即≤－，解得*k*≤－.

综上所述，*k*∈∪(0，＋∞)．

规律方法　(1)由不等式恒成立求参数的取值范围问题的策略

①求最值法，将恒成立问题转化为利用导数求函数的最值问题．

②分离参数法，将参数分离出来，进而转化为*a*>*f*(*x*)max或*a*<*f*(*x*)min的形式，通过导数的应用求出*f*(*x*)的最值，即得参数的范围．

(2)不等式有解问题可类比恒成立问题进行转化，要理解清楚两类问题的差别．

跟踪演练

1．(2020·全国Ⅱ改编)已知函数*f*(*x*)＝2ln *x*＋1.若*f*(*x*)≤2*x*＋*c*，求*c*的取值范围．

解　设*h*(*x*)＝*f*(*x*)－2*x*－*c*，

则*h*(*x*)＝2ln *x*－2*x*＋1－*c*，

其定义域为(0，＋∞)，*h*′(*x*)＝－2.

当0<*x*<1时，*h*′(*x*)>0；当*x*>1时，*h*′(*x*)<0.

所以*h*(*x*)在区间(0,1)上单调递增，在区间(1，＋∞)上单调递减．

从而当*x*＝1时，*h*(*x*)取得最大值，最大值为*h*(1)＝－1－*c*.

故当－1－*c*≤0，即*c*≥－1时，*f*(*x*)≤2*x*＋*c*.

所以*c*的取值范围为[－1，＋∞)．

2．已知函数*f*(*x*)＝(1－*x*)e*x*－1.

(1)求*f*(*x*)的极值；

(2)设*g*(*x*)＝(*x*－*t*)2＋2，存在*x*1∈(－∞，＋∞)，*x*2∈(0，＋∞)，使方程*f*(*x*1)＝*g*(*x*2)成立，求实数*m*的最小值．

解　(1)*f*′(*x*)＝－*x*e*x*，

当*x*∈(0，＋∞)时，*f*′(*x*)<0，当*x*∈(－∞，0)时，*f*′(*x*)>0，

∴当*x*＝0时，*f*(*x*)有极大值*f*(0)＝e0－1＝0，*f*(*x*)没有极小值．

(2)由(1)知*f*(*x*)≤0，

又因为*g*(*x*)＝(*x*－*t*)2＋2≥0，

所以要使方程*f*(*x*1)＝*g*(*x*2)有解，必然存在*x*2∈(0，＋∞)，使*g*(*x*2)＝0，所以*x*＝*t*，ln *x*＝，

等价于方程ln *x*＝有解，

即方程*m*＝*x*ln *x*在(0，＋∞)上有解，

记*h*(*x*)＝*x*ln *x*，*x*∈(0，＋∞)，则*h*′(*x*)＝ln *x*＋1，

令*h*′(*x*)＝0，得*x*＝，

所以当*x*∈时，*h*′(*x*)<0，*h*(*x*)单调递减，当*x*∈时，*h*′(*x*)>0，*h*(*x*)单调递增，

所以当*x*＝时，*h*(*x*)min＝－，

所以实数*m*的最小值为－.

### 专题强化练

1．(2020·新高考全国Ⅰ改编)已知函数*f*(*x*)＝*a*e*x*－1－ln *x*＋ln *a*．若*f*(*x*)≥1，求*a*的取值范围．

解　*f*(*x*)的定义域为(0，＋∞)，*f*′(*x*)＝*a*e*x*－1－.

当0<*a*<1时，*f*(1)＝*a*＋ln *a*<1.

当*a*＝1时，*f*(*x*)＝e*x*－1－ln *x*，*f*′(*x*)＝e*x*－1－.

当*x*∈(0,1)时，*f*′(*x*)<0；

当*x*∈(1，＋∞)时，*f*′(*x*)>0.

所以当*x*＝1时，*f*(*x*)取得最小值，最小值为*f*(1)＝1，

从而*f*(*x*)≥1.

当*a*>1时，*f*(*x*)＝*a*e*x*－1－ln *x*＋ln *a*≥e*x*－1－ln *x*≥1.

综上，*a*的取值范围是[1，＋∞)．

2．设函数*f*(*x*)＝*ax*2－*x*ln *x*－(2*a*－1)*x*＋*a*－1(*a*∈**R**)．若对任意的*x*∈[1，＋∞)，*f*(*x*)≥0恒成立，求实数*a*的取值范围．

解　*f*′(*x*)＝2*ax*－1－ln *x*－(2*a*－1)＝2*a*(*x*－1)－ln *x*(*x*>0)，

易知当*x*∈(0，＋∞)时，ln *x*≤*x*－1，

则*f*′(*x*)≥2*a*(*x*－1)－(*x*－1)＝(2*a*－1)(*x*－1)．

当2*a*－1≥0，即*a*≥时，由*x*∈[1，＋∞)得*f*′(*x*)≥0恒成立，

*f*(*x*)在[1，＋∞)上单调递增，*f*(*x*)≥*f*(1)＝0，符合题意；

当*a*≤0时，由*x*∈[1，＋∞)得*f*′(*x*)≤0恒成立，*f*(*x*)在[1，＋∞)上单调递减，

*f*(*x*)≤*f*(1)＝0，显然不符合题意，*a*≤0舍去；

当0<*a*<时，由ln *x*≤*x*－1，

得ln ≤－1，即ln *x*≥1－，

则*f*′(*x*)≤2*a*(*x*－1)－＝(2*ax*－1)，

∵0<*a*<，∴>1.

当*x*∈时，*f*′(*x*)≤0恒成立，

∴*f*(*x*)在上单调递减，

∴当*x*∈时，*f*(*x*)≤*f*(1)＝0，

显然不符合题意，0<*a*<舍去．

综上可得，*a*∈.