## 第1讲　等差数列与等比数列

[**考情分析**]　1.等差、等比数列基本量和性质的考查是高考热点，经常以小题形式出现.2.数列求和及数列的综合问题是高考考查的重点．

考点一　等差数列、等比数列的基本运算

核心提炼

等差数列、等比数列的基本公式(*n*∈**N**\*)

(1)等差数列的通项公式：*an*＝*a*1＋(*n*－1)*d*；

(2)等比数列的通项公式：*an*＝*a*1·*qn*－1.

(3)等差数列的求和公式：*Sn*＝＝*na*1＋*d*；

(4)等比数列的求和公式：*Sn*＝

例1　(1)《周髀算经》中有一个问题：从冬至日起，小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种这十二个节气的日影长依次成等差数列，若冬至、立春、春分的日影长的和为37.5尺，芒种的日影长为4.5尺，则冬至的日影长为(　　)

A．15.5尺 B．12.5尺 C．10.5尺 D．9.5尺

答案　A

解析　从冬至起，十二个节气的日影长依次记为*a*1，*a*2，*a*3，…，*a*12，由题意，有*a*1＋*a*4＋*a*7＝37.5，根据等差数列的性质，得*a*4＝12.5，而*a*12＝4.5，设公差为*d*，则解得所以冬至的日影长为15.5尺．

(2)已知点(*n*，*an*)在函数*f*(*x*)＝2*x*－1的图象上(*n*∈**N**\*)．数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*，设*bn*＝，数列{*bn*}的前*n*项和为*Tn*.则*Tn*的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　－30

解析　∵点(*n*，*an*)在函数*f*(*x*)＝2*x*－1的图象上，

∴*an*＝2*n*－1(*n*∈**N**\*)，

∴{*an*}是首项为*a*1＝1，公比*q*＝2的等比数列，

∴*Sn*＝＝2*n*－1，

则*bn*＝＝2*n*－12(*n*∈**N**\*)，

∴{*bn*}是首项为－10，公差为2的等差数列，

∴*Tn*＝－10*n*＋×2＝*n*2－11*n*＝2－.

又*n*∈**N**\*，

∴*Tn*的最小值为*T*5＝*T*6＝2－＝－30.

规律方法　等差数列、等比数列问题的求解策略

(1)抓住基本量，首项*a*1、公差*d*或公比*q*.

(2)熟悉一些结构特征，如前*n*项和为*Sn*＝*an*2＋*bn*(*a*，*b*是常数)的形式的数列为等差数列，通项公式为*an*＝*p*·*qn*－1(*p*，*q*≠0)的形式的数列为等比数列．

(3)由于等比数列的通项公式、前*n*项和公式中变量*n*在指数位置，所以常用两式相除(即比值的方式)进行相关计算．

跟踪演练1　(1)(2020·全国Ⅱ)数列{*an*}中，*a*1＝2，*am*＋*n*＝*aman*，若*ak*＋1＋*ak*＋2＋…＋*ak*＋10＝215－25，则*k*等于(　　)

A．2 B．3 C．4 D．5

答案　C

解析　∵*a*1＝2，*am*＋*n*＝*aman*，

令*m*＝1，则*an*＋1＝*a*1*an*＝2*an*，

∴{*an*}是以*a*1＝2为首项，2为公比的等比数列，

∴*an*＝2×2*n*－1＝2*n*.

又∵*ak*＋1＋*ak*＋2＋…＋*ak*＋10＝215－25，

∴＝215－25，

即2*k*＋1(210－1)＝25(210－1)，

∴2*k*＋1＝25，∴*k*＋1＝5，∴*k*＝4.

(2)(多选)(2020·威海模拟)等差数列{*an*}的前*n*项和记为*Sn*，若*a*1>0，*S*10＝*S*20，则(　　)

A．*d*<0

B．*a*16<0

C．*Sn*≤*S*15

D．当且仅当*n*≥32时，*Sn*<0

答案　ABC

解析　设等差数列{*an*}的公差为*d*，由*S*10＝*S*20，得10*a*1＋*d*＝20*a*1＋*d*，化简得*a*1＝－*d*.因为*a*1>0，所以*d*<0，故A正确；因为*a*16＝*a*1＋15*d*＝－*d*＋15*d*＝*d*，又*d*<0，所以*a*16<0，故B正确；因为*a*15＝*a*1＋14*d*＝－*d*＋14*d*＝－*d*>0，*a*16<0，所以*S*15最大，即*Sn*≤*S*15，故C正确；*Sn*＝*na*1＋*d*＝*d*，若*Sn*<0，又*d*<0，则*n*>30，故当且仅当*n*≥31时，*Sn*<0，故D错误．

考点二　等差数列、等比数列的性质

核心提炼

1．通项性质：若*m*＋*n*＝*p*＋*q*＝2*k*(*m*，*n*，*p*，*q*，*k*∈**N**\*)，则对于等差数列，有*am*＋*an*＝*ap*＋*aq*＝2*ak*，对于等比数列有*aman*＝*apaq*＝*a*.

2．前*n*项和的性质：

(1)对于等差数列有*Sm*，*S*2*m*－*Sm*，*S*3*m*－*S*2*m*，…成等差数列；对于等比数列有*Sm*，*S*2*m*－*Sm*，*S*3*m*－*S*2*m*，…成等比数列(*q*＝－1且*m*为偶数情况除外)．

(2)对于等差数列，有*S*2*n*－1＝(2*n*－1)*an*.

例2　(1)已知正项等差数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*(*n*∈**N**\*)，若*a*5＋*a*7－*a*＝0，则*S*11的值为(　　)

A．11 B．12 C．20 D．22

答案　D

解析　结合等差数列的性质，可得*a*5＋*a*7＝2*a*6＝*a*，

又该数列为正项数列，可得*a*6＝2，

所以由*S*2*n*＋1＝(2*n*＋1)*an*＋1，

可得*S*11＝*S*2×5＋1＝11*a*6＝22.

(2)已知函数*f*(*x*)＝(*x*∈**R**)，若等比数列{*an*}满足*a*1*a*2 020＝1，则*f*(*a*1)＋*f*(*a*2)＋*f*(*a*3)＋…＋*f*(*a*2 020)等于(　　)

A．2 020 B．1 010 C．2 D.

答案　A

解析　∵*a*1*a*2 020＝1，

∴*f*(*a*1)＋*f*(*a*2 020)＝＋

＝＋＝＋＝2，

∵{*an*}为等比数列，

则*a*1*a*2 020＝*a*2*a*2 019＝…＝*a*1 010*a*1 011＝1，

∴*f*(*a*2)＋*f*(*a*2 019)＝2，…，*f*(*a*1 010)＋*f*(*a*1 011)＝2，

即*f*(*a*1)＋*f*(*a*2)＋*f*(*a*3)＋…＋*f*(*a*2 020)＝2×1 010＝2 020.

规律方法　等差、等比数列的性质问题的求解策略

(1)抓关系，抓住项与项之间的关系及项的序号之间的关系，从这些特点入手，选择恰当的性质进行求解．

(2)用性质，数列是一种特殊的函数，具有函数的一些性质，如单调性、周期性等，可利用函数的性质解题．

跟踪演练2　(1)(2020·全国Ⅰ)设{*an*}是等比数列，且*a*1＋*a*2＋*a*3＝1，*a*2＋*a*3＋*a*4＝2，则*a*6＋*a*7＋*a*8等于(　　)

A．12 B．24 C．30 D．32

答案　D

解析　设等比数列{*an*}的公比为*q*，

则*q*＝＝＝2，

所以*a*6＋*a*7＋*a*8＝(*a*1＋*a*2＋*a*3)·*q*5＝1×25＝32.

(2)已知正项等比数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*，且*S*10＝10，*S*30＝130，则*S*40等于(　　)

A．－510 B．400

C．400或－510 D．30或40

答案　B

解析　∵正项等比数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*，

∴*S*10，*S*20－*S*10，*S*30－*S*20，*S*40－*S*30也成等比数列，

∴10×(130－*S*20)＝(*S*20－10)2，

解得*S*20＝40或*S*20＝－30(舍)，

故*S*40－*S*30＝270，∴*S*40＝400.

考点三　等差数列、等比数列的探索与证明

核心提炼



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 等差数列 | 等比数列 |
| 定义法 | *an*＋1－*an*＝*d* | ＝*q*(*q*≠0) |
| 通项法 | *an*＝*a*1＋(*n*－1)*d* | *an*＝*a*1·*qn*－1 |
| 中项法 | 2*an*＝*an*－1＋*an*＋1(*n*≥2) | *a*＝*an*－1*an*＋1(*n*≥2，*an*≠0) |
| 前*n*项和法 | *Sn*＝*an*2＋*bn*(*a*，*b*为常数) | *Sn*＝*kqn*－*k*(*k*≠0，*q*≠0,1) |

证明数列为等差(比)数列一般使用定义法．

例3　(2019·全国Ⅱ)已知数列{*an*}和{*bn*}满足*a*1＝1，*b*1＝0,4*an*＋1＝3*an*－*bn*＋4,4*bn*＋1＝3*bn*－*an*－4.

(1)证明：{*an*＋*bn*}是等比数列，{*an*－*bn*}是等差数列；

(2)求{*an*}和{*bn*}的通项公式．

(1)证明　由题设得4(*an*＋1＋*bn*＋1)＝2(*an*＋*bn*)，

即*an*＋1＋*bn*＋1＝(*an*＋*bn*)．

因为*a*1＋*b*1＝1，

所以{*an*＋*bn*}是首项为1，公比为的等比数列．

由题设得4(*an*＋1－*bn*＋1)＝4(*an*－*bn*)＋8，

即*an*＋1－*bn*＋1＝*an*－*bn*＋2.

又*a*1－*b*1＝1，

所以{*an*－*bn*}是首项为1，公差为2的等差数列．

(2)解　由(1)知，*an*＋*bn*＝，*an*－*bn*＝2*n*－1.

所以*an*＝[(*an*＋*bn*)＋(*an*－*bn*)]＝＋*n*－(*n*∈**N**\*)，

*bn*＝[(*an*＋*bn*)－(*an*－*bn*)]＝－*n*＋(*n*∈**N**\*)．

易错提醒　*a*＝*an*－1*an*＋1(*n*≥2，*n*∈**N**\*)是{*an*}为等比数列的必要不充分条件，也就是判断一个数列是等比数列时，要注意各项不为0.

跟踪演练3　已知数列{*an*}满足*a*1＝1，*nan*＋1＝2(*n*＋1)*an*.设*bn*＝.

(1)求*b*1，*b*2，*b*3；

(2)判断数列{*bn*}是不是等比数列，并说明理由；

(3)求{*an*}的通项公式．

解　(1)由条件可得*an*＋1＝*an*.

将*n*＝1代入得，*a*2＝4*a*1，而*a*1＝1，所以*a*2＝4.

将*n*＝2代入得，*a*3＝3*a*2，所以*a*3＝12.

从而*b*1＝1，*b*2＝2，*b*3＝4.

(2){*bn*}是首项为1，公比为2的等比数列．理由如下：

由条件可得＝，即*bn*＋1＝2*bn*，

又*b*1＝1，所以{*bn*}是首项为1，公比为2的等比数列．

(3)由(2)可得＝2*n*－1，所以*an*＝*n*·2*n*－1(*n*∈N\*)．

## 专题强化练

一、单项选择题

1．在等比数列{*an*}中，若*a*3＝2，*a*7＝8，则*a*5等于(　　)

A．4 B．－4 C．±4 D．5

答案　A

解析　∵数列{*an*}为等比数列，且*a*3＝2，*a*7＝8，

∴*a*＝*a*3·*a*7＝2×8＝16，则*a*5＝±4，

∵等比数列奇数项的符号相同，∴*a*5＝4.

2．(2020·全国Ⅱ)记*Sn*为等比数列{*an*}的前*n*项和．若*a*5－*a*3＝12，*a*6－*a*4＝24，则等于(　　)

A．2*n*－1 B．2－21－*n*

C．2－2*n*－1 D．21－*n*－1

答案　B

解析　方法一　设等比数列{*an*}的公比为*q*，

则*q*＝＝＝2.

由*a*5－*a*3＝*a*1*q*4－*a*1*q*2＝12*a*1＝12得*a*1＝1.

所以*an*＝*a*1*qn*－1＝2*n*－1，*Sn*＝＝2*n*－1，

所以＝＝2－21－*n*.

方法二　设等比数列{*an*}的公比为*q*，

则

得＝*q*＝2.

将*q*＝2代入①，解得*a*3＝4.

所以*a*1＝＝1，下同方法一．

3．已知等差数列{*an*}和等比数列{*bn*}的各项都是正数，且*a*1＝*b*1，*a*11＝*b*11.那么一定有(　　)

A．*a*6≤*b*6 B．*a*6≥*b*6 C．*a*12≤*b*12 D．*a*12≥*b*12

答案　B

解析　因为等差数列{*an*}和等比数列{*bn*}的各项都是正数，且*a*1＝*b*1，*a*11＝*b*11，所以*a*1＋*a*11＝*b*1＋*b*11＝2*a*6，

所以*a*6＝＝≥＝*b*6.

当且仅当*b*1＝*b*11时，取等号，此时数列{*bn*}的公比为1.

4．在数列{*an*}中，*a*1＝2，＝＋ln，则*an*等于(　　)

A．2＋*n*ln *n* B．2*n*＋(*n*－1)ln *n*

C．2*n*＋*n*ln *n* D．1＋*n*＋*n*ln *n*

答案　C

解析　由题意得－＝ln(*n*＋1)－ln *n*，

*n*分别用1,2,3，…，*n*－1(*n*≥2)取代，

累加得－＝ln *n*－ln 1，即＝2＋ln *n*，

即*an*＝2*n*＋*n*ln *n*(*n*≥2)，

又*a*1＝2符合上式，故*an*＝2*n*＋*n*ln *n*.

5．已知数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*，*a*1＝1，*a*2＝2，且对于任意*n*>1，*n*∈**N\***，满足*Sn*＋1＋*Sn*－1＝2(*Sn*＋1)，则(　　)

A．*a*9＝17 B．*a*10＝19 C．*S*9＝81 D．*S*10＝91

答案　D

解析　∵对于任意*n*>1，*n*∈**N\***，满足*Sn*＋1＋*Sn*－1＝2(*Sn*＋1)，

∴*Sn*＋1－*Sn*＝*Sn*－*Sn*－1＋2，

∴*an*＋1－*an*＝2.

∴数列{*an*}在*n*>1，*n*∈**N**\*时是等差数列，公差为2，

又*a*1＝1，*a*2＝2，

*an*＝2＋(*n*－2)×2＝2*n*－2(*n*>1，*n*∈**N**\*)，

∴*a*9＝2×9－2＝16，*a*10＝2×10－2＝18，*S*9＝1＋8×2＋×2＝73，*S*10＝1＋9×2＋×2＝91.故选D.

6.侏罗纪蜘蛛网是一种非常有规律的蜘蛛网，如图是由无数个正方形环绕而成的，且每一个正方形的四个顶点都恰好在它的外边最近一个正方形四条边的三等分点上，设外围第1个正方形的边长是*m*，侏罗纪蜘蛛网的长度(蜘蛛网中正方形的周长之和)为*Sn*，则(　　)

A．*Sn*无限大 B．*Sn*<3(3＋)*m*

C．*Sn*＝3(3＋)*m* D．*Sn*可以取100*m*

答案　B

解析　由题意可得，外围第2个正方形的边长为

＝*m*；

外围第3个正方形的边长为

＝*m*；

……

外围第*n*个正方形的边长为*n*－1*m*.

所以蜘蛛网的长度

*Sn*＝4*m*

＝4*m*×<4*m*×

＝3(3＋)*m*.故选B.

二、多项选择题

7．(2020·厦门模拟)记*Sn*为等差数列{*an*}的前*n*项和，若*a*1＋3*a*5＝*S*7，则以下结论一定正确的是(　　)

A．*a*4＝0 B．*Sn*的最大值为*S*3

C．*S*1＝*S*6 D．|*a*3|<|*a*5|

答案　AC

解析　设等差数列{*an*}的公差为*d*，则*a*1＋3(*a*1＋4*d*)＝7*a*1＋21*d*，解得*a*1＝－3*d*，则*an*＝*a*1＋(*n*－1)*d*＝(*n*－4)*d*，所以*a*4＝0，故A正确；因为*S*6－*S*1＝5*a*4＝0，所以*S*1＝*S*6，故C正确；由于*d*的取值情况不清楚，故*S*3可能为最大值也可能为最小值，故B不正确；因为*a*3＋*a*5＝2*a*4＝0，所以*a*3＝－*a*5，即|*a*3|＝|*a*5|，故D错误．

8．已知等比数列{*an*}的各项均为正数，公比为*q*，且*a*1>1，*a*6＋*a*7>*a*6*a*7＋1>2，记{*an*}的前*n*项积为*Tn*，则下列选项中正确的是(　　)

A．0<*q*<1 B．*a*6>1

C．*T*12>1 D．*T*13>1

答案　ABC

解析　由于等比数列{*an*}的各项均为正数，公比为*q*，且*a*1>1，*a*6＋*a*7>*a*6*a*7＋1>2，所以(*a*6－1)(*a*7－1)<0，由题意得*a*6>1，*a*7<1，所以0<*q*<1，A，B正确；因为*a*6*a*7＋1>2，所以*a*6*a*7>1，*T*12＝*a*1·*a*2·…·*a*11·*a*12＝(*a*6*a*7)6>1，*T*13＝*a*<1，所以满足*Tn*>1的最大正整数*n*的值为12，C正确，D错误．

三、填空题

9．(2020·江苏)设{*an*}是公差为*d*的等差数列，{*bn*}是公比为*q*的等比数列．已知数列{*an*＋*bn*}的前*n*项和*Sn*＝*n*2－*n*＋2*n*－1(*n*∈**N**\*)，则*d*＋*q*的值是\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　4

解析　由题意知*q*≠1，

所以*Sn*＝(*a*1＋*a*2＋…＋*an*)＋(*b*1＋*b*2＋…＋*bn*)

＝*na*1＋*d*＋

＝*n*2＋*n*＋－

＝*n*2－*n*＋2*n*－1，

所以解得*d*＝2，*q*＝2，

所以*d*＋*q*＝4.

10．(2020·北京市顺义区质检)设*Sn*为公比*q*≠1的等比数列{*an*}的前*n*项和，且3*a*1，2*a*2，*a*3成等差数列，则*q*＝\_\_\_\_\_\_\_\_，＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　3　10

解析　设等比数列的通项公式*an*＝*a*1*qn*－1，又因为3*a*1,2*a*2，*a*3成等差数列，所以2×2*a*2＝3*a*1＋*a*3，即4*a*1*q*＝3*a*1＋*a*1*q*2，解得*q*＝3或*q*＝1(舍)，＝＝＝10.

11．(2020·潍坊模拟)九连环是我国从古至今广泛流传的一种益智游戏．在某种玩法中，用*an*表示解下*n*(*n*≤9，*n*∈**N**\*)个圆环所需移动的最少次数，{*an*}满足*a*1＝1，且*an*＝则解下5个圆环需最少移动\_\_\_\_\_\_\_\_次．

答案　16

解析　因为*a*5＝2*a*4＋2＝2(2*a*3－1)＋2＝4*a*3，

所以*a*5＝4*a*3＝4(2*a*2＋2)＝8*a*2＋8＝8(2*a*1－1)＋8＝16*a*1＝16，

所以解下5个圆环需最少移动的次数为16.

12．已知等比数列{*an*}的首项为，公比为－，前*n*项和为*Sn*，且对任意的*n*∈**N**\*，都有*A*≤2*Sn*－≤*B*恒成立，则*B*－*A*的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案

解析　∵等比数列{*an*}的首项为，公比为－，

∴*Sn*＝＝1－*n*，

令*t*＝*n*，则－≤*t*≤，*Sn*＝1－*t*，

∴≤*Sn*≤，

∴2*Sn*－的最小值为，最大值为，

又*A*≤2*Sn*－≤*B*对任意*n*∈**N**\*恒成立，

∴*B*－*A*的最小值为－＝.

四、解答题

13．(2020·聊城模拟)在①*a*5＝*b*3＋*b*5，②*S*3＝87，③*a*9－*a*10＝*b*1＋*b*2这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并给出解答．

设等差数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*，数列{*bn*}的前*n*项和为*Tn*，\_\_\_\_\_\_\_\_，*a*1＝*b*6，若对于任意*n*∈**N**\*都有*Tn*＝2*bn*－1，且*Sn*≤*Sk*(*k*为常数)，求正整数*k*的值．

解　由*Tn*＝2*bn*－1，*n*∈**N**\*得，

当*n*＝1时，*b*1＝1；

当*n*≥2时，*Tn*－1＝2*bn*－1－1，

从而*bn*＝2*bn*－2*bn*－1，即*bn*＝2*bn*－1，

由此可知，数列{*bn*}是首项为1，公比为2的等比数列，

故*bn*＝2*n*－1.

①当*a*5＝*b*3＋*b*5时，*a*1＝32，*a*5＝20，

设数列{*an*}的公差为*d*，则*a*5＝*a*1＋4*d*，

即20＝32＋4*d*，解得*d*＝－3，

所以*an*＝32－3(*n*－1)＝35－3*n*，

因为当*n*≤11时，*an*>0，当*n*>11时，*an*<0，

所以当*n*＝11时，*Sn*取得最大值．

因此，正整数*k*的值为11.

②当*S*3＝87时，*a*1＝32,3*a*2＝87，

设数列{*an*}的公差为*d*，则3(32＋*d*)＝87，

解得*d*＝－3，

所以*an*＝32－3(*n*－1)＝35－3*n*，

因为当*n*≤11时，*an*>0，当*n*>11时，*an*<0，

所以当*n*＝11时，*Sn*取得最大值，

因此，正整数*k*的值为11.

③当*a*9－*a*10＝*b*1＋*b*2时，*a*1＝32，*a*9－*a*10＝3，

设数列{*an*}的公差为*d*，则－*d*＝3，解得*d*＝－3，

所以*an*＝32－3(*n*－1)＝35－3*n*，

因为当*n*≤11时，*an*>0，当*n*>11时，*an*<0，

所以当*n*＝11时，*Sn*取得最大值，

因此，正整数*k*的值为11.

14．已知等比数列{*an*}的公比*q*>1，*a*1＝2，且*a*1，*a*2，*a*3－8成等差数列，数列{*anbn*}的前*n*项和为.

(1)分别求出数列{*an*}和{*bn*}的通项公式；

(2)设数列的前*n*项和为*Sn*，任意*n*∈**N\***，*Sn*≤*m*恒成立，求实数*m*的最小值．

解　(1)因为*a*1＝2，且*a*1，*a*2，*a*3－8成等差数列，

所以2*a*2＝*a*1＋*a*3－8，

即2*a*1*q*＝*a*1＋*a*1*q*2－8，所以*q*2－2*q*－3＝0，

所以*q*＝3或*q*＝－1，又*q*>1，所以*q*＝3，

所以*an*＝2·3*n*－1(*n*∈**N**\*)．

因为*a*1*b*1＋*a*2*b*2＋…＋*anbn*＝，

所以*a*1*b*1＋*a*2*b*2＋…＋*an*－1*bn*－1＝(*n*≥2)，

两式相减，得*anbn*＝2*n*·3*n*－1(*n*≥2)，

因为*an*＝2·3*n*－1，所以*bn*＝*n*(*n*≥2)，

当*n*＝1时，由*a*1*b*1＝2及*a*1＝2，得*b*1＝1(符合上式)，

所以*bn*＝*n*(*n*∈**N**\*)．

(2)因为数列{*an*}是首项为2，公比为3的等比数列，

所以数列是首项为，公比为的等比数列，

所以*Sn*＝＝<.

因为任意*n*∈**N**\*，*Sn*≤*m*恒成立，

所以*m*≥，即实数*m*的最小值为.