## 第2讲　用“不动点法”求数列的通项公式

对于一个函数*f*(*x*)，我们把满足*f*(*m*)＝*m*的值*x*＝*m*称为函数*f*(*x*)的“不动点”．利用“不动点法”可以构造新数列，求数列的通项公式．

例　(1)在数列{*an*}中，*a*1＝1, *an*＋1＝*an*＋1，求数列{*an*}的通项公式．

解　设*f*(*x*)＝*x*＋1，

令*f*(*x*)＝*x*，即*x*＋1＝*x*，得*x*＝2，

∴*x*＝2是函数*f*(*x*)＝*x*＋1的不动点，

∴*an*＋1－2＝(*an*－2)，

∴数列{*an*－2}是以－1为首项，以为公比的等比数列，

∴*an*－2＝－1×*n*－1，

∴*an*＝2－*n*－1，*n*∈**N**\*.

(2)已知数列{*an*}满足*a*1＝3，*an*＋1＝，求该数列的通项公式．

解　由方程*x*＝，得数列{*an*}的不动点为1和2，

＝＝＝·，所以是首项为＝2，公比为的等比数列，所以＝2·*n*－1，

解得*an*＝＋2＝，*n*∈**N**\*.

 (1)若*f*(*x*)＝*ax*＋*b*(*a*≠0,1)，*p*是*f*(*x*)的不动点．数列{*an*}满足*an*＋1＝*f*(*an*)，则*an*＋1－*p*＝*a*(*an*－*p*)，即{*an*－*p*}是公比为*a*的等比数列．

(2)设*f*(*x*)＝(*c*≠0，*ad*－*bc*≠0)，数列{*an*}满足*an*＋1＝*f*(*an*)，*a*1≠*f*(*a*1)．若*f*(*x*)有两个相异的不动点*p*，*q*，则＝*k*·.

1．已知数列{*an*}满足*an*＋1＝－*an*－2，*a*1＝4，求数列{*an*}的通项公式．

解　设*f*(*x*)＝－*x*－2，

由*f*(*x*)＝*x*，得*x*＝－.

∴*an*＋1＋＝－，

又*a*1＝4，

∴是以为首项，以－为公比的等比数列，

∴*an*＋＝×*n*－1，

∴*an*＝－＋·*n*－1，*n*∈**N**\*.

2．已知数列{*an*}满足*a*1＝2，*an*＝(*n*≥2)，求数列{*an*}的通项公式．

解　解方程*x*＝，

化简得2*x*2－2＝0，解得*x*1＝1，*x*2＝－1，

令＝*c*·，

由*a*1＝2，得*a*2＝，可得*c*＝－，

∴数列是以＝为首项，以－为公比的等比数列，∴＝·*n*－1，

∴*an*＝.

3．设数列{*an*}满足8*an*＋1*an*－16*an*＋1＋2*an*＋5＝0(*n*≥1，*n*∈**N**\*)，且*a*1＝1，记*bn*＝(*n*≥1)．求数列{*bn*}的通项公式．

解　由已知得*an*＋1＝，

由方程*x*＝，得不动点*x*1＝，*x*2＝.

所以＝＝·，

所以数列是首项为－2，公比为的等比数列，

所以＝－2×*n*－1＝－，

解得*an*＝.故*bn*＝＝，*n*∈**N**\*.