## 第4讲　数列中的奇、偶项问题

数列中的奇、偶项问题是对一个数列分成两个新数列进行单独研究，利用新数列的特征(等差、等比数列或其他特征)求解原数列．

例　已知数列{*an*}满足*a*1＝1，*a*2＝，[3＋(－1)*n*]*an*＋2－2*an*＋2[(－1)*n*－1]＝0，*n*∈**N**\*.

(1)令*bn*＝*a*2*n*－1，判断{*bn*}是否为等差数列，并求数列{*bn*}的通项公式；

(2)记数列{*an*}的前2*n*项和为*T*2*n*，求*T*2*n*.

解　(1)因为[3＋(－1)*n*]*an*＋2－2*an*＋2[(－1)*n*－1]＝0，

所以[3＋(－1)2*n*－1]*a*2*n*＋1－2*a*2*n*－1＋2[(－1)2*n*－1－1]＝0，

即*a*2*n*＋1－*a*2*n*－1＝2，

又*bn*＝*a*2*n*－1，所以*bn*＋1－*bn*＝*a*2*n*＋1－*a*2*n*－1＝2，

所以{*bn*}是以*b*1＝*a*1＝1为首项，2为公差的等差数列，

所以*bn*＝1＋(*n*－1)×2＝2*n*－1，*n*∈**N**\*.

(2)对于[3＋(－1)*n*]*an*＋2－2*an*＋2[(－1)*n*－1]＝0，

当*n*为偶数时，可得(3＋1)*an*＋2－2*an*＋2(1－1)＝0，

即＝，所以*a*2，*a*4，*a*6，…是以*a*2＝为首项，为公比的等比数列；

当*n*为奇数时，可得(3－1)*an*＋2－2*an*＋2(－1－1)＝0，即*an*＋2－*an*＝2，所以*a*1，*a*3，*a*5，…是以*a*1＝1为首项，2为公差的等差数列，所以

*T*2*n*＝(*a*1＋*a*3＋…＋*a*2*n*－1)＋(*a*2＋*a*4＋…＋*a*2*n*)

＝＋

＝*n*2＋1－，*n*∈**N**\*.

 (1)数列中的奇、偶项问题的常见题型

①数列中连续两项和或积的问题(*an*＋*an*＋1＝*f*(*n*)或*an*·*an*＋1＝*f*(*n*))；

②含有(－1)*n*的类型；

③含有{*a*2*n*}，{*a*2*n*－1}的类型；

④已知条件明确的奇偶项问题．

(2)对于通项公式分奇、偶不同的数列{*an*}求*Sn*时，我们可以分别求出奇数项的和与偶数项的和，也可以把*a*2*k*－1＋*a*2*k*看作一项，求出*S*2*k*，再求*S*2*k*－1＝*S*2*k*－*a*2*k*.

1．数列{*an*}的通项公式为*an*＝(－1)*n*－1·(4*n*－3)，则它的前100项之和*S*100等于(　　)

A．200 B．－200 C．400 D．－400

答案　B

解析　*S*100＝(4×1－3)－(4×2－3)＋(4×3－3)－…－(4×100－3)＝4×[(1－2)＋(3－4)＋…＋(99－100)]＝4×(－50)＝－200.

2．已知数列{*an*}的前*n*项和*Sn*＝(－1)*n*·*n*，若对任意的正整数*n*，使得(*an*＋1－*p*)·(*an*－*p*)<0恒成立，则实数*p*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　(－1,3)

解析　当*n*＝1时，*a*1＝*S*1＝－1；

当*n*≥2时，*an*＝*Sn*－*Sn*－1＝(－1)*nn*－(－1)*n*－1(*n*－1)＝(－1)*n*(2*n*－1)．

因为对任意的正整数*n*，(*an*＋1－*p*)(*an*－*p*)<0恒成立，

所以[(－1)*n*＋1(2*n*＋1)－*p*][(－1)*n*(2*n*－1)－*p*]<0.

①当*n*是正奇数时，化为[*p*－(2*n*＋1)][*p*＋(2*n*－1)]<0，

解得1－2*n*<*p*<2*n*＋1，

因为对任意的正奇数*n*都成立，取*n*＝1时，

可得－1<*p*<3.

②当*n*是正偶数时，化为[*p*－(2*n*－1)][*p*＋(1＋2*n*)]<0，

解得－1－2*n*<*p*<2*n*－1，

因为对任意的正偶数*n*都成立，取*n*＝2时，

可得－5<*p*<3.

联立解得－1<*p*<3.

所以实数*p*的取值范围是(－1,3)．

3．在数列{*an*}中，已知*a*1＝1，*an*·*an*＋1＝*n*，记*Sn*为{*an*}的前*n*项和，*bn*＝*a*2*n*＋*a*2*n*－1，*n*∈**N**\*.

(1)判断数列{*bn*}是否为等比数列，并写出其通项公式；

(2)求数列{*an*}的通项公式；

(3)求*Sn*.

解　(1)因为*an*·*an*＋1＝*n*，

所以*an*＋1·*an*＋2＝*n*＋1，

所以＝，即*an*＋2＝*an*.

因为*bn*＝*a*2*n*＋*a*2*n*－1，

所以＝＝＝，

所以数列{*bn*}是公比为的等比数列．

因为*a*1＝1，*a*1·*a*2＝，所以*a*2＝，*b*1＝*a*1＋*a*2＝，所以*bn*＝×*n*－1＝，*n*∈**N**\*.

(2)由(1)可知*an*＋2＝*an*，所以*a*1，*a*3，*a*5，…是以*a*1＝1为首项，为公比的等比数列；*a*2，*a*4，*a*6，…是以*a*2＝为首项，为公比的等比数列，

所以*a*2*n*－1＝*n*－1，*a*2*n*＝*n*，

所以*an*＝

(3)因为*S*2*n*＝(*a*1＋*a*3＋…＋*a*2*n*－1)＋(*a*2＋*a*4＋…＋*a*2*n*)＝＋＝3－，

又*S*2*n*－1＝*S*2*n*－*a*2*n*＝3－－＝3－，

所以*Sn*＝