## 第7讲　 三角恒等变换与解三角形

[**考情分析**]　1.三角恒等变换的求值、化简是命题的热点，利用三角恒等变换作为工具，将三角函数与解三角形相结合求解最值、范围问题.2.单独考查可出现在选择题、填空题中，综合考查以解答题为主，中等难度．

考点一　三角恒等变换

核心提炼

1．三角求值“三大类型”

“给角求值”“给值求值”“给值求角”．

2．三角恒等变换“四大策略”

(1)常值代换：常用到“1”的代换，1＝sin2*θ*＋cos2*θ*＝tan 45°等．

(2)项的拆分与角的配凑：如sin2*α*＋2cos2*α*＝(sin2*α*＋cos2*α*)＋cos2*α*，*α*＝(*α*－*β*)＋*β*等．

(3)降次与升次：正用二倍角公式升次，逆用二倍角公式降次．

(4)弦、切互化．

例1　(1)(2020·全国Ⅰ)已知*α*∈(0，π)，且3cos 2*α*－8cos *α*＝5，则sin *α*等于(　　)

A.　 B. C. D.

答案　A

解析　由3cos 2*α*－8cos *α*＝5，

得3(2cos2*α*－1)－8cos *α*＝5，

即3cos2*α*－4cos *α*－4＝0，

解得cos *α*＝－或cos *α*＝2(舍去)．

又因为*α*∈(0，π)，所以sin *α*>0，

所以sin *α*＝＝＝.

(2)已知sin *α*＝，sin(*α*－*β*)＝－，*α*，*β*均为锐角，则*β*等于(　　)

A. B. C. D.

答案　C

解析　因为*α*，*β*均为锐角，所以－<*α*－*β*<.

又sin(*α*－*β*)＝－，所以cos(*α*－*β*)＝.

又sin *α*＝，所以cos *α*＝，

所以sin *β*＝sin[*α*－(*α*－*β*)]

＝sin *α*cos(*α*－*β*)－cos *α*sin(*α*－*β*)

＝×－×＝.

所以*β*＝.

易错提醒　(1)公式的使用过程要注意正确性，要特别注意公式中的符号和函数名的变换，防止出现“张冠李戴”的情况．

(2)求角问题要注意角的范围，要根据已知条件将所求角的范围尽量缩小，避免产生增解．

跟踪演练1　(1)已知*α*∈，*β*∈，tan *α*＝，则(　　)

A．*α*＋*β*＝ B．*α*－*β*＝

C．*α*＋*β*＝ D．*α*＋2*β*＝

答案　B

解析　tan *α*＝＝

＝

＝＝＝tan，

因为*α*∈，*β*∈，

所以*α*＝＋*β*，即*α*－*β*＝.

(2)(tan 10°－)·＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　－2

解析　(tan 10°－)·＝(tan 10°－tan 60°)·＝·＝·＝－＝－2.

考点二　正弦定理、余弦定理

核心提炼

1．正弦定理：在△*ABC*中，＝＝＝2*R*(*R*为△*ABC*的外接圆半径)．变形：*a*＝2*R*sin *A*，*b*＝2*R*sin *B*，*c*＝2*R*sin *C*，sin *A*＝，sin *B*＝，sin *C*＝，*a*∶*b*∶*c*＝sin *A*∶sin *B*∶sin *C*等．

2．余弦定理：在△*ABC*中，*a*2＝*b*2＋*c*2－2*bc*cos *A*.

变形：*b*2＋*c*2－*a*2＝2*bc*cos *A*，cos *A*＝.

3．三角形的面积公式：*S*＝*ab*sin *C*＝*ac*sin *B*＝*bc*sin *A*.

考向1　求解三角形中的角、边

例2　在△*ABC*中，角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，且＝*c*.

(1)求角*A*的大小；

(2)若*b*＋*c*＝10，△*ABC*的面积*S*△*ABC*＝4，求*a*的值．

解　(1)由正弦定理及＝*c*，

得＝sin *C*，

∵sin *C*≠0，∴sin *A*＝(1－cos *A*)，

∴sin *A*＋cos *A*＝2sin＝，

∴sin＝，

又0<*A*<π，∴<*A*＋<，

∴*A*＋＝，∴*A*＝.

(2)∵*S*△*ABC*＝*bc*sin *A*＝*bc*＝4，∴*bc*＝16.

由余弦定理，得*a*2＝*b*2＋*c*2－2*bc*cos ＝(*b*＋*c*)2－2*bc*－*bc*＝(*b*＋*c*)2－3*bc*，

又*b*＋*c*＝10，∴*a*2＝102－3×16＝52，∴*a*＝2.

考向2　求解三角形中的最值与范围问题

例3　(2020·新高考测评联盟联考)在：①*a*＝*c*sin *A*－*a*cos *C*，②(2*a*－*b*)sin *A*＋(2*b*－*a*)sin *B*＝2*c*sin *C*这两个条件中任选一个，补充在下列问题中，并解答．

已知△*ABC*的角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，*c*＝，而且\_\_\_\_\_\_\_\_．

(1)求角*C*；

(2)求△*ABC*周长的最大值．

解　(1)选①：因为*a*＝*c*sin *A*－*a*cos *C*，

所以sin *A*＝sin *C*sin *A*－sin *A*cos *C*，

因为sin *A*≠0，所以sin *C*－cos *C*＝1，

即sin＝，

因为0<*C*<π，所以－<*C*－<，

所以*C*－＝，即*C*＝.

选②：因为(2*a*－*b*)sin *A*＋(2*b*－*a*)sin *B*＝2*c*sin *C*，

所以(2*a*－*b*)*a*＋(2*b*－*a*)*b*＝2*c*2，

即*a*2＋*b*2－*c*2＝*ab*，

所以cos *C*＝＝，

因为0<*C*<π，所以*C*＝.

(2)由(1)可知，*C*＝，

在△*ABC*中，由余弦定理得

*a*2＋*b*2－2*ab*cos *C*＝3，即*a*2＋*b*2－*ab*＝3，

所以(*a*＋*b*)2－3＝3*ab*≤，

所以*a*＋*b*≤2，当且仅当*a*＝*b*时等号成立，

所以*a*＋*b*＋*c*≤3，即△*ABC*周长的最大值为3.

规律方法　(1)利用余弦定理求边，一般是已知三角形的两边及其夹角．利用正弦定理求边，必须知道两角及其中一边，且该边为其中一角的对边，要注意解的多样性与合理性．

(2)三角形中的最值与范围问题主要有两种解决方法：一是利用基本不等式求得最大值或最小值；二是将所求式转化为只含有三角形某一个角的三角函数形式，结合角的范围确定所求式的范围．

跟踪演练2　(1)在△*ABC*中，内角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*.若△*ABC*的面积为*S*，且*a*＝1,4*S*＝*b*2＋*c*2－1，则△*ABC*外接圆的面积为(　　)

A．4π B．2π C．π D.

答案　D

解析　由余弦定理得，*b*2＋*c*2－*a*2＝2*bc*cos *A*，*a*＝1，

所以*b*2＋*c*2－1＝2*bc*cos *A*，

又*S*＝*bc*sin *A,*4*S*＝*b*2＋*c*2－1，

所以4×*bc*sin *A*＝2*bc*cos *A*，

即sin *A*＝cos *A*，所以*A*＝，

由正弦定理得，＝2*R*，得*R*＝，

所以△*ABC*外接圆的面积为.

(2)在△*ABC*中，角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*，若*A*＝3*B*，则的取值范围是(　　)

A．(0,3) B．(1,3) C．(0,1] D．(1,2]

答案　B

解析　*A*＝3*B*⇒＝＝＝＝＝2cos2*B*＋cos 2*B*＝2cos 2*B*＋1，即＝＝2cos 2*B*＋1，

又*A*＋*B*∈(0，π)，即4*B*∈(0，π)⇒2*B*∈⇒cos 2*B*∈(0,1)，∴∈(1,3)．

(3)在△*ABC*中，内角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*，若tan *C*＝，*a*＝*b*＝，*BC*边上的中点为*D*，则sin∠*BAC*＝\_\_\_\_\_\_\_\_，*AD*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案

解析　因为tan *C*＝，所以sin *C*＝，cos *C*＝，

又*a*＝*b*＝，所以*c*2＝*a*2＋*b*2－2*ab*cos *C*＝13＋13－2×××＝16，所以*c*＝4.

由＝，得＝，

解得sin∠*BAC*＝.

因为*BC*边上的中点为*D*，所以*CD*＝，

所以在△*ACD*中，*AD*2＝*b*2＋2－2×*b*××cos *C*＝，所以*AD*＝.

## 专题强化练

一、单项选择题

1．(2020·全国Ⅲ)在△*ABC*中，cos *C*＝，*AC*＝4，*BC*＝3，则cos *B*等于(　　)

A. B. C. D.

答案　A

解析　由余弦定理得*AB*2＝*AC*2＋*BC*2－2*AC*·*BC*cos *C*＝42＋32－2×4×3×＝9，所以*AB*＝3，

所以cos *B*＝＝＝.

2．(2020·全国Ⅲ)已知sin *θ*＋sin＝1，则sin等于(　　)

A. B. C. D.

答案　B

解析　因为sin *θ*＋sin

＝sin＋sin

＝sincos －cossin ＋

sincos ＋cossin

＝2sincos ＝sin＝1.

所以sin＝.

3．在△*ABC*中，内角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，且*b*＝2，＝1，*B*＝，则*a*的值为(　　)

A.－1 B．2＋2

C．2－2 D.＋

答案　D

解析　在△*ABC*中，内角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，且*b*＝2，＝1，

所以＝1，所以tan *C*＝1，*C*＝.

因为*B*＝，所以*A*＝π－*B*－*C*＝，

所以sin *A*＝sin＝sin cos ＋cos sin ＝.

由正弦定理可得＝，则*a*＝＋.

4．在△*ABC*中，角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，*a*cos *B*＋*b*cos *A*＝2*c*cos *C*，*c*＝，且△*ABC*的面积为，则△*ABC*的周长为(　　)

A．1＋ B．2＋

C．4＋ D．5＋

答案　D

解析　在△*ABC*中，*a*cos *B*＋*b*cos *A*＝2*c*cos *C*，

则sin *A*cos *B*＋sin *B*cos *A*＝2sin *C*cos *C*，

即sin(*A*＋*B*)＝2sin *C*cos *C*，

∵sin(*A*＋*B*)＝sin *C*≠0，∴cos *C*＝，∴*C*＝，

由余弦定理可得，*a*2＋*b*2－*c*2＝*ab*，

即(*a*＋*b*)2－3*ab*＝*c*2＝7，

又*S*＝*ab*sin *C*＝*ab*＝，∴*ab*＝6，

∴(*a*＋*b*)2＝7＋3*ab*＝25，即*a*＋*b*＝5，

∴△*ABC*的周长为*a*＋*b*＋*c*＝5＋.

5．若*α*，*β*都是锐角，且cos *α*＝，sin(*α*＋*β*)＝，则cos *β*等于(　　)

A. B.

C.或 D.或

答案　A

解析　因为*α*，*β*都是锐角，且cos *α*＝<，

所以<*α*<，

又sin(*α*＋*β*)＝，而<<，

所以<*α*＋*β*<，

所以cos(*α*＋*β*)＝－＝－，

又sin *α*＝＝，

所以cos *β*＝cos(*α*＋*β*－*α*)＝cos(*α*＋*β*)cos *α*＋sin(*α*＋*β*)·sin *α*＝.

6．在△*ABC*中，*A*，*B*，*C*的对边分别是*a*，*b*，*c*.若*A*＝120°，*a*＝1，则2*b*＋3*c*的最大值为(　　)

A．3 B. C．3 D.

答案　B

解析　因为*A*＝120°，*a*＝1，所以由正弦定理可得

＝＝＝＝，

所以*b*＝sin *B*，*c*＝sin *C*，

故2*b*＋3*c*＝sin *B*＋2sin *C*

＝sin＋2sin *C*

＝sin *C*＋2cos *C*＝sin(*C*＋*φ*)．

其中sin *φ*＝，cos *φ*＝，

所以2*b*＋3*c*的最大值为.

二、多项选择题

7．(2020·临沂模拟)在△*ABC*中，角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，若*b*＝2，*c*＝3，*A*＋3*C*＝π，则下列结论正确的是(　　)

A．cos *C*＝ B．sin *B*＝

C．*a*＝3 D．*S*△*ABC*＝

答案　AD

解析　因为*A*＋3*C*＝π，*A*＋*B*＋*C*＝π，所以*B*＝2*C*.由正弦定理＝，得＝，即＝，所以cos *C*＝，故A正确；因为cos *C*＝，所以sin *C*＝，所以sin *B*＝sin 2*C*＝2sin *C*cos *C*＝2××＝，故B错误；因为cos *B*＝cos 2*C*＝2cos2*C*－1＝－，所以sin *A*＝sin(*B*＋*C*)＝sin *B*cos *C*＋cos *B*sin *C*＝×＋×＝，则cos *A*＝，所以*a*2＝*b*2＋*c*2－2*bc*cos *A*＝(2)2＋32－2×2×3×＝1，所以*a*＝1，故C错误；*S*△*ABC*＝*bc*sin *A*＝×2×3×＝，故D正确．

8．已知0<*θ*<，若sin 2*θ*＝*m*，cos 2*θ*＝*n*且*m*≠*n*，则下列选项中与tan恒相等的有(　　)

A. B. C. D.

答案　AD

解析　∵sin 2*θ*＝*m*，cos 2*θ*＝*n*，

∴*m*2＋*n*2＝1，∴＝，

∴tan＝＝

＝＝＝＝.

三、填空题

9．(2020·保定模拟)已知tan＝，则＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　－

解析　因为tan＝，所以＝，

即＝，解得tan *α*＝－，

所以＝＝tan *α*－＝－.

10．在△*ABC*中，*a*，*b*，*c*分别是内角*A*，*B*，*C*的对边，且＝，则*A*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案

解析　由正弦定理＝＝，

得＝，

整理得*b*2－*a*2＝2*ac*sin *B*－*c*2，

即*b*2＋*c*2－*a*2＝2*ac*sin *B*＝2*bc*sin *A*，

由余弦定理得，*b*2＋*c*2－*a*2＝2*bc*cos *A*，

∴2*bc*cos *A*＝2*bc*sin *A*，即cos *A*＝sin *A*，

∴tan *A*＝1，∴*A*＝.

11．(2020·全国Ⅰ)如图，在三棱锥*P*－*ABC*的平面展开图中，*AC*＝1，*AB*＝*AD*＝，*AB*⊥*AC*，*AB*⊥*AD*，∠*CAE*＝30°，则cos∠*FCB*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　－

解析　在△*ABD*中，∵*AB*⊥*AD*，*AB*＝*AD*＝，∴*BD*＝，∴*FB*＝*BD*＝.

在△*ACE*中，∵*AE*＝*AD*＝，*AC*＝1，∠*CAE*＝30°，

∴*EC*＝＝1，

∴*CF*＝*CE*＝1.

又∵*BC*＝＝＝2，

∴在△*FCB*中，由余弦定理得

cos∠*FCB*＝＝＝－.

12．(2020·山东省师范大学附中月考)在△*ABC*中，设角*A*，*B*，*C*对应的边分别为*a*，*b*，*c*，记△*ABC*的面积为*S*，且4*a*2＝*b*2＋2*c*2，则的最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案

解析　由题意知，4*a*2＝*b*2＋2*c*2⇒*b*2＝4*a*2－2*c*2＝*a*2＋*c*2－2*ac*cos *B*，

整理，得2*ac*cos *B*＝－3*a*2＋3*c*2⇒cos *B*＝，

因为2＝2＝2＝，

代入cos *B*＝，整理得

2＝－，

令*t*＝，则2＝－(9*t*2－22*t*＋9)

＝－2＋，

所以2≤，所以≤，故的最大值为.

四、解答题

13．(2020·全国Ⅱ)△*ABC*中，sin2*A*－sin2*B*－sin2*C*＝sin *B*sin *C*.

(1)求*A*；

(2)若*BC*＝3，求△*ABC*周长的最大值．

解　(1)由正弦定理和已知条件得

*BC*2－*AC*2－*AB*2＝*AC*·*AB*.①

由余弦定理得*BC*2＝*AC*2＋*AB*2－2*AC*·*AB*cos *A*．②

由①②得cos *A*＝－.

因为0<*A*<π，所以*A*＝.

(2)由正弦定理及(1)得＝＝＝2，

从而*AC*＝2sin *B*，

*AB*＝2sin(π－*A*－*B*)＝3cos *B*－sin *B*.

故*BC*＋*AC*＋*AB*＝3＋sin *B*＋3cos *B*

＝3＋2sin.

又0<*B*<，

所以当*B*＝时，△*ABC*周长取得最大值3＋2.

14．(2020·重庆模拟)在△*ABC*中，*a*，*b*，*c*分别为内角*A*，*B*，*C*的对边，2*b*2＝(*b*2＋*c*2－*a*2)(1－tan *A*)．

(1)求角*C*；

(2)若*c*＝2，*D*为*BC*的中点，在下列两个条件中任选一个，求*AD*的长度．

条件①：△*ABC*的面积*S*＝4且*B*>*A*；

条件②：cos *B*＝.

解　(1)在△*ABC*中，由余弦定理知，

*b*2＋*c*2－*a*2＝2*bc*cos *A*，

所以2*b*2＝2*bc*cos *A*(1－tan *A*)，

所以*b*＝*c*(cos *A*－sin *A*)，

又由正弦定理知，＝，

得sin *B*＝sin *C*(cos *A*－sin *A*)，

所以sin(*A*＋*C*)＝sin *C*(cos *A*－sin *A*)，

即sin *A*cos *C*＋cos *A*sin *C*＝sin *C*cos *A*－sin *C*sin *A*，

所以sin *A*cos *C*＝－sin *C*sin *A*，

因为sin *A*≠0，所以cos *C*＝－sin *C*，

所以tan *C*＝－1，

又因为0<*C*<π，所以*C*＝.

(2)选择条件②，cos *B*＝，

因为cos *B*＝，且0<*B*<π，所以sin *B*＝，

因为sin *A*＝sin(*B*＋*C*)＝sin *B*cos *C*＋sin *C*cos *B*

＝×＋×＝，

由正弦定理知＝，

所以*a*＝＝＝2，

在△*ABD*中，由余弦定理知

*AD*2＝*AB*2＋*BD*2－2*AB*·*BD*·cos *B*

＝(2)2＋()2－2×2××＝26，

所以*AD*＝.

(答案不唯一)