## 第8讲　三角函数中的范围、最值问题

以三角函数为背景的范围与最值问题是高考的热点，对问题的准确理解和灵活转化是解题的关键．

例1　(1)若函数*y*＝sin2*x*＋*a*cos *x*＋*a*－在上的最大值是1，则实数*a*的值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案

解析　*y*＝1－cos2*x*＋*a*cos *x*＋*a*－

＝－2＋＋*a*－.

∵0≤*x*≤，∴0≤cos *x*≤1.

①若>1，即*a*>2，则当cos *x*＝1时，

*y*max＝*a*＋*a*－＝1⇒*a*＝<2(舍去)；

②若0≤≤1，即0≤*a*≤2，

则当cos *x*＝时，*y*max＝＋*a*－＝1，

∴*a*＝或*a*＝－4<0(舍去)；

③若<0，即*a*<0，则当cos *x*＝0时，

*y*max＝*a*－＝1⇒*a*＝>0(舍去)．

综上可得，*a*＝.

(2)在△*ABC*中，角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，若3*a*cos *C*＋*b*＝0，则tan *B*的最大值是\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案

解析　在△*ABC*中，因为3*a*cos *C*＋*b*＝0，

所以*C*为钝角，

由正弦定理得3sin *A*cos *C*＋sin(*A*＋*C*)＝0，

3sin *A*cos *C*＋sin *A*cos *C*＋cos *A*sin *C*＝0，

所以4sin *A*cos *C*＝－cos *A*·sin *C*，

即tan *C*＝－4tan *A*.

因为tan *A*>0，

所以tan *B*＝－tan(*A*＋*C*)＝－

＝＝＝

≤＝，

当且仅当tan *A*＝时取等号，故tan *B*的最大值是.

例2　(1)(2020·烟台模拟)将函数*f*(*x*)＝cos *x*的图象向右平移个单位长度，再将各点的横坐标变为原来的(*ω*>0)，得到函数*g*(*x*)的图象，若*g*(*x*)在上的值域为，则*ω*的取值范围为(　　)

A. B. C. D.

答案　A

解析　*f*(*x*)＝cos *x*向右平移个单位长度，得到*y*＝cos的图象，再将各点横坐标变为原来的(*ω*>0)得*g*(*x*)＝cos，

当*x*∈时，*ωx*－∈，

又此时*g*(*x*)的值域为，

∴0≤－≤，∴≤*ω*≤.

(2)若将函数*f*(*x*)＝sin的图象向右平移*φ*个单位长度，所得图象关于*y*轴对称，则*φ*的最小正值是\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案

解析　方法一　将*f*(*x*)＝sin的图象向右平移*φ*个单位长度，得到函数*g*(*x*)＝sin的图象，该图象关于*y*轴对称，即*g*(*x*)为偶函数，因此－2*φ*＝*k*π＋，*k*∈**Z**，所以*φ*＝－－(*k*∈**Z**)，故当*k*＝－1时，*φ*的最小正值为.

方法二　将*f*(*x*)＝sin的图象向右平移*φ*个单位长度，得到函数*g*(*x*)＝sin的图象，令2*x*－2*φ*＋＝*k*π＋，*k*∈**Z**，得*x*＝＋＋*φ*(*k*∈**Z**)，此即为*g*(*x*)的对称轴方程，

又*g*(*x*)的图象关于*y*轴对称，所以有＋＋*φ*＝0，*k*∈**Z**，于是*φ*＝－－(*k*∈**Z**)，故当*k*＝－1时，*φ*取最小正值.

 (1)求解三角函数的范围或最值的关键在于根据题目条件和函数形式选择适当的工具：三角函数的有界性，基本不等式，二次函数等．

(2)求解和三角函数性质有关的范围、最值问题，要结合三角函数的图象．

1．已知函数*f*(*x*)＝2sin(*ωx*＋*φ*)(*ω*>0)的图象关于直线*x*＝对称，且*f*＝0，则*ω*的最小值为(　　)

A．2 B．4 C．6 D．8

答案　A

解析　函数*f*(*x*)的周期*T*≤4＝π，则≤π，解得*ω*≥2，故*ω*的最小值为2.

2．若函数*f*(*x*)＝2sin *x*＋cos *x*在[0，*α*]上是增函数，则当*α*取最大值时，sin 2*α*的值等于(　　)

A. B. C. D.

答案　A

解析　*f*(*x*)＝sin(*x*＋*φ*)，其中tan *φ*＝，且*φ*∈，由－＋2*k*π≤*x*＋*φ*≤＋2*k*π，*k*∈**Z**，得－－*φ*＋2*k*π≤*x*≤－*φ*＋2*k*π，*k*∈**Z**.当*k*＝0时，增区间为，所以*α*max＝－*φ*，所以当*α*取最大值时，sin 2*α*＝sin 2＝sin 2*φ*＝＝＝.

3．已知函数*f*(*x*)＝2sin中*x*在任意的个单位长度的距离内能同时取得最大值和最小值，那么正实数*ω*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　[10π，＋∞)

解析　由题意得*T*＝≤，∴*ω*≥10π，

∵*ω*>0，∴*ω*≥10π.

4．已知函数*f*(*x*)＝sin(*ω*>0)，若*f*(*x*)在上恰有两个零点，且在上单调递增，则*ω*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案

解析　令*ωx*＋＝*k*π，*k*∈**Z**，

得*x*＝，*k*∈**Z**，

∴*f*(*x*)的第2个、第3个正零点分别为，，

∴解得≤*ω*<4，

令－＋2*k*π≤*ωx*＋≤＋2*k*π，*k*∈**Z**，

∴－＋≤*x*≤＋，*k*∈**Z**，

令*k*＝0，*f*(*x*)在上单调递增，

∴⊆，

∴⇒0<*ω*≤，

综上得*ω*的取值范围是≤*ω*≤.