## 第4讲　概率与统计的创新题型

概率统计问题在近几年的高考中背景取自现实，题型新颖，综合性增强，难度加深，掌握此类问题的解题策略在高考中就显得非常重要．

例　(2020·青岛模拟)某网络购物平台每年11月11日举行“双十一”购物节，当天有多项优惠活动，深受广大消费者喜爱．

(1)已知该网络购物平台近5年“双十一”购物节当天成交额如表所示：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 年份 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 |
| 成交额(百亿元) | 9 | 12 | 17 | 21 | 27 |

求成交额*y*(百亿元)与时间变量*x*(记2016年为*x*＝1,2017年为*x*＝2，…依次类推)的线性回归方程，并预测2021年该平台“双十一”购物节当天的成交额(百亿元)；

(2)在2021年“双十一”购物节前，某同学的爸爸、妈妈计划在该网络购物平台上分别参加*A*，*B*两店各一个订单的“秒杀”抢购，若该同学的爸爸、妈妈在*A*，*B*两店订单“秒杀”成功的概率分别为*p*，*q*，记该同学的爸爸和妈妈抢购到的订单总数量为*X*.

①求*X*的分布列及*E*(*X*)；

②已知每个订单由*k*(*k*≥2，*k*∈**N**\*)件商品*W*构成，记该同学的爸爸和妈妈抢购到商品*W*的总数量为*Y*，假设*p*＝－，*q*＝，求*E*(*Y*)取最大值时正整数*k*的值．

附：回归方程＝*x*＋中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为

＝＝，＝－.

解　(1)由已知可得

＝＝3，

＝＝17.2，

*iyi*＝1×9＋2×12＋3×17＋4×21＋5×27＝303，

＝12＋22＋32＋42＋52＝55.

所以＝＝＝＝4.5，

所以＝－＝17.2－4.5×3＝3.7，

所以＝4.5*x*＋3.7.

当*x*＝6时，＝4.5×6＋3.7＝30.7(百亿元)，

所以预测2021年该平台“双十一”购物节当天的成交额为30.7百亿元．

(2)①由题意知，*X*的所有可能取值为0,1,2.

*P*(*X*＝0)＝(1－*p*)(1－*q*)，

*P*(*X*＝1)＝(1－*p*)*q*＋(1－*q*)*p*，

*P*(*X*＝2)＝*pq*.

所以*X*的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 |
| *P* | (1－*p*)(1－*q*) | (1－*p*)*q*＋(1－*q*)*p* | *pq* |

*E*(*X*)＝0×(1－*p*)(1－*q*)＋(*p*＋*q*－2*pq*)＋2*pq*＝*p*＋*q*.

②因为*Y*＝*kX*，所以*E*(*Y*)＝*kE*(*X*)＝*k*(*p*＋*q*)

＝*k*＝2sin －.

令*t*＝∈，

设*f*(*t*)＝2sin π*t*－π*t*，则*E*(*Y*)＝*f*(*t*)．

因为*f*′(*t*)＝2πcos π*t*－π＝2π，且π*t*∈，所以，当*t*∈时，*f*′(*t*)>0，

所以*f*(*t*)在区间上单调递增；

当*t*∈时，*f*′(*t*)<0，

所以*f*(*t*)在区间上单调递减，

所以，当*t*＝时，*f*(*t*)max＝－，

即*E*(*Y*)取最大值时，正整数*k*的值为3.

概率统计问题考查学生的数据分析能力，要从已知数表中经过阅读分析判断获取关键信息，搞清各数据、各事件间的关系，建立适当的数学模型．

一种掷骰子走跳棋的游戏：棋盘上标有第0站、第1站、第2站…第100站，共101站，设棋子跳到第*n*站的概率为*Pn*，一枚棋子开始在第0站，棋手每掷一次骰子，棋子向前跳动一次．若掷出奇数点，棋子向前跳一站；若掷出偶数点，棋子向前跳两站，直到棋子跳到第99站(获胜)或第100站(失败)时，游戏结束(骰子是用一种均匀材料做成的立方体形状的游戏玩具，它的六个面分别标有点数1,2,3,4,5,6)．

(1)求*P*0，*P*1，*P*2，并根据棋子跳到第*n*站的情况，试用*Pn*－2和*Pn*－1表示*Pn*；

(2)求证：{*Pn*－*Pn*－1}(*n*＝1,2，…，99)为等比数列；

(3)求玩该游戏获胜的概率．

(1)解　棋子开始在第0站是必然事件，所以*P*0＝1.

棋子跳到第1站，只有一种情形，第一次掷骰子出现奇数点，其概率为，所以*P*1＝.

棋子跳到第2站，包括两种情形，①第一次掷骰子出现偶数点，其概率为；②前两次掷骰子都出现奇数点，其概率为，所以*P*2＝＋＝.

棋子跳到第*n*(2≤*n*≤99)站，包括两种情形，①棋子先跳到第*n*－2站，又掷骰子出现偶数点，其概率为*Pn*－2；

②棋子先跳到第*n*－1站，又掷骰子出现奇数点，其概率为*Pn*－1.

故*Pn*＝*Pn*－2＋*Pn*－1(2≤*n*≤99，*n*∈**N**\*)．

棋子跳到100站只有一种情况，棋子先跳到第98站，又掷骰子出现偶数点，其概率为*P*98，所以*P*100＝*P*98.

(2)证明　由(1)知，当2≤*n*≤99时，

*Pn*＝*Pn*－2＋*Pn*－1，

所以*Pn*－*Pn*－1＝－(*Pn*－1－*Pn*－2)．

又因为*P*1－*P*0＝－，

所以{*Pn*－*Pn*－1}(*n*＝1,2，…，99)是首项为－，公比为－的等比数列．

(3)解　由(2)知，

*Pn*－*Pn*－1＝－*n*－1＝*n*.

所以*P*99＝(*P*99－*P*98)＋(*P*98－*P*97)＋…＋(*P*1－*P*0)＋*P*0

＝99＋98＋…＋＋1

＝＋1

＝.

所以玩该游戏获胜的概率为.