## 第3讲　分类讨论思想

思想概述　分类讨论思想是当问题的对象不能进行统一研究时，需对研究的对象按某个标准进行分类，然后对每一类分别研究，给出每一类的结论，最终综合各类结果得到整个问题的解答．实质上分类讨论就是“化整为零，各个击破，再集零为整”的数学思想．



方法一　由概念、公式、法则、计算性质引起的讨论

概念、定理分类整合即利用数学中的基本概念、定理对研究对象进行分类，如绝对值的定义、不等式的转化、等比数列{*an*}的前*n*项和公式等，然后分别对每类问题进行解决．

例1　(1)设等比数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*，若*S*3＋*S*6＝2*S*9，则数列的公比*q*是(　　)

A．－ B. C．－ D.

答案　C

解析　若*q*＝1，则有*S*3＝3*a*1，*S*6＝6*a*1，*S*9＝9*a*1，

但*a*1≠0，即得*S*3＋*S*6≠2*S*9，

与题设矛盾，故*q*≠1.

又*S*3＋*S*6＝2*S*9，①

根据数列性质*S*3，*S*6－*S*3，*S*9－*S*6成等比数列，②

由①②可得*S*3＝2*S*6，

∴*q*3＝＝－，∴*q*＝－.

(2)已知函数*f*(*x*)＝若*f*(1)＋*f*(*a*)＝2，则*a*的取值集合是\_\_\_\_\_\_\_\_．

思路分析　求*a*→代入*f*1，*f**a*求解→讨论*a*

答案

解析　*f*(1)＝e0＝1，即*f*(1)＝1.

由*f*(1)＋*f*(*a*)＝2，得*f*(*a*)＝1.

当*a*≥0时，*f*(*a*)＝e*a*－1＝1，所以*a*＝1.

当－1<*a*<0时，*f*(*a*)＝sin(π*a*2)＝1，

所以π*a*2＝2*k*π＋(*k*∈**Z**)．

所以*a*2＝2*k*＋(*k*∈***Z***)，*k*只能取0，此时*a*2＝，

因为－1<*a*<0，所以*a*＝－.

则实数*a*的取值集合为.

解题时应准确把握数学概念的本质，根据需要对所有情形分类.本题中，等比数列求和公式的两种情形，分段函数中自变量的不同范围均构成分类的标准.



方法二　由图形位置或形状引起的讨论

图形位置、形状分类整合是指由几何图形的不确定性而引起的分类讨论，这种方法适用于对几何图形中点、线、面的位置关系以及解析几何中直线与圆锥曲线的位置关系的研究．

例2　设*F*1，*F*2为椭圆＋＝1的两个焦点，点*P*为椭圆上一点，已知点*P*，*F*1，*F*2是一个直角三角形的三个顶点，且|*PF*1|>|*PF*2|，则＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

思路分析　求→找|*PF*1|，|*PF*2|适合的条件→讨论Rt△*PF*1*F*2的直角顶点

答案　或2

解析　若∠*PF*2*F*1＝90°，

则|*PF*1|2＝|*PF*2|2＋|*F*1*F*2|2，

又|*PF*1|＋|*PF*2|＝6，|*F*1*F*2|＝2，

解得|*PF*1|＝，|*PF*2|＝，∴＝.

若∠*F*1*PF*2＝90°，则|*F*1*F*2|2＝|*PF*1|2＋|*PF*2|2，

∴|*PF*1|2＋(6－|*PF*1|)2＝20，

又|*PF*1|>|*PF*2|，∴|*PF*1|＝4，|*PF*2|＝2，

∴＝2.

综上知，＝或2.

圆锥曲线的形状、焦点位置不确定时要分类讨论；立体几何中点、线、面的位置变化，三角形和平行四边形的不确定性都要进行分类讨论.



方法三　由参数变化引起的分类讨论

某些含有参数的问题，由于参数的取值不同会导致所得的结果不同，需对参数进行讨论，如含参数的方程、不等式、函数等．解决这类问题要根据需要合理确定分类标准，讨论中做到不重不漏，结论整合要周全．

例3　(1)若函数*f*(*x*)＝*a*e*x*－*x*－2*a*有两个零点，则实数*a*的取值范围是(　　)

A. B.

C．(－∞，0) D．(0，＋∞)

答案　D

解析　函数*f*(*x*)＝*a*e*x*－*x*－2*a*的导函数*f*′(*x*)＝*a*e*x*－1，

当*a*≤0时，*f*′(*x*)<0恒成立，函数*f*(*x*)在**R**内单调递减，不可能有两个零点；

当*a*>0时，令*f*′(*x*)＝0，得*x*＝ln ，函数在内单调递减，在内单调递增，

所以*f*(*x*)的最小值为

*f*＝1－ln －2*a*＝1＋ln *a*－2*a*.

令*g*(*a*)＝1＋ln *a*－2*a*(*a*>0)，则*g*′(*a*)＝－2，

当*a*∈时，*g*(*a*)单调递增，当*a*∈时，*g*(*a*)单调递减，

所以*g*(*a*)max＝*g*＝－ln 2<0，

所以*f*(*x*)的最小值*f*<0，

当*x*→－∞时，*f*(*x*)→＋∞，当*x*→＋∞时，*f*(*x*)→＋∞，函数*f*(*x*)＝*a*e*x*－*x*－2*a*有两个零点．

综上，实数*a*的取值范围是(0，＋∞)．

(2)函数*f*(*x*)＝[*ax*2－(3*a*＋1)*x*＋3*a*＋2]·e*x*在*x*＝1处取得极小值，求*a*的取值范围．

思路分析　求*f*′*x*→看*f*′*x*＝0的解和1的关系→讨论*a*

解　*f*′(*x*)＝[*ax*2－(*a*＋1)*x*＋1]e*x*＝(*ax*－1)(*x*－1)e*x*.

令*f*′(*x*)＝0，得*x*1＝，*x*2＝1，

若*a*>1，则当*x*∈时，*f*′(*x*)<0；

当*x*∈(1，＋∞)时，*f*′(*x*)>0.

所以*f*(*x*)在*x*＝1处取得极小值．

若*a*≤1，则当*x*∈(0,1)时，*ax*－1≤*x*－1<0，

所以*f*′(*x*)>0.

所以1不是*f*(*x*)的极小值点．

综上可知，*a*的取值范围是(1，＋∞)．

含参数问题的求解要结合参数对题目结果的影响及参数的意义进行分类讨论.

