## 第4讲　转化与化归思想

思想概述　转化与化归思想方法适用于在研究、解决数学问题时，思维受阻或试图寻求简单方法或从一种情形转化到另一种情形，也就是转化到另一种情形使问题得到解决，这种转化是解决问题的有效策略，同时也是获取成功的思维方式．

方法一　特殊与一般的转化

一般问题特殊化，使问题处理变得直接、简单，也可以通过一般问题的特殊情形找到一般思路；特殊问题一般化，可以使我们从宏观整体的高度把握问题的一般规律，从而达到成批处理问题的效果；对于某些选择题、填空题，可以把题中变化的量用特殊值代替，得到问题答案．

例1　(1)(2020·青岛模拟)“蒙日圆”涉及几何学中的一个著名定理，该定理的内容为：椭圆上两条互相垂直的切线的交点必在一个与椭圆同心的圆上，该圆称为原椭圆的蒙日圆，若椭圆*C*：＋＝1(*a*>0)的离心率为，则椭圆*C*的蒙日圆的方程为(　　)

A．*x*2＋*y*2＝9 B．*x*2＋*y*2＝7

C．*x*2＋*y*2＝5 D．*x*2＋*y*2＝4

答案　B

解析　因为椭圆*C*：＋＝1(*a*>0)的离心率为，

所以＝，解得*a*＝3，

所以椭圆*C*的方程为＋＝1，

所以椭圆的上顶点*A*(0，)，右顶点*B*(2,0)，

所以经过*A*，*B*两点的切线方程分别为*y*＝，*x*＝2，

所以两条切线的交点坐标为(2，)，

又过*A*，*B*的切线互相垂直，

由题意知交点必在一个与椭圆*C*同心的圆上，可得圆的半径*r*＝＝，

所以椭圆*C*的蒙日圆方程为*x*2＋*y*2＝7.

(2)在△*ABC*中，角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*，若*a*，*b*，*c*成等差数列，则等于(　　)

A. B. C. D.

思路分析　求→考虑正三角形*ABC*的情况

答案　A

解析　令*a*＝*b*＝*c*，则△*ABC*为等边三角形，且cos *A*＝cos *C*＝，代入所求式子，得＝＝.

一般问题特殊化，使问题处理变得直接、简单，特殊问题一般化，可以使我们从宏观整体的高度把握问题的一般规律，从而达到成批处理问题的效果.

方法二　命题的等价转化

将题目已知条件或结论进行转化，使深奥的问题浅显化、繁杂的问题简单化，让题目得以解决．一般包括数与形的转化、正与反的转化、常量与变量的转化、图形形体及位置的转化．

例2　(1)由命题“存在*x*0∈**R**，使－*m*≤0”是假命题，得*m*的取值范围是(－∞，*a*)，则实数*a*的值是(　　)

A．(－∞，1) B．(－∞，2)

C．1 D．2

思路分析　命题：存在*x*0∈**R**，使－*m*≤0是假命题→任意*x*∈**R**，e|*x*－1|－*m*>0是真命题→*m*<e|*x*－1|恒成立→求*m*的范围→求*a*

答案　C

解析　由命题“存在*x*0∈**R**，使－*m*≤0”是假命题，可知它的否定形式“任意*x*∈**R**，e|*x*－1|－*m*>0”是真命题，可得*m*的取值范围是(－∞，1)，而(－∞，*a*)与(－∞，1)为同一区间，故*a*＝1.

(2)若对于任意*t*∈[1,2]，函数*g*(*x*)＝*x*3＋*x*2－2*x*在区间(*t,*3)上总不为单调函数，则实数*m*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

思路分析　*g**x*在*t*，3上总不为单调函数→先看*g**x*在*t*，3上单调的条件→补集法求*m*的取值范围

答案

解析　*g*′(*x*)＝3*x*2＋(*m*＋4)*x*－2，若*g*(*x*)在区间(*t,*3)上为单调函数，则①*g*′(*x*)≥0在(*t,*3)上恒成立，

或②*g*′(*x*)≤0在(*t,*3)上恒成立．

由①得3*x*2＋(*m*＋4)*x*－2≥0，

即*m*＋4≥－3*x*在*x*∈(*t,*3)上恒成立，

所以*m*＋4≥－3*t*恒成立，则*m*＋4≥－1，

即*m*≥－5；

由②得*m*＋4≤－3*x*在*x*∈(*t,*3)上恒成立，

则*m*＋4≤－9，即*m*≤－.

所以使函数*g*(*x*)在区间(*t,*3)上总不为单调函数的*m*的取值范围为－<*m*<－5.

根据命题的等价性对题目条件进行明晰化是解题常见思路；对复杂问题可采用正难则反策略，也称为“补集法”；含两个变量的问题可以变换主元.

方法三　函数、方程、不等式之间的转化

函数与方程、不等式紧密联系，通过研究函数*y*＝*f*(*x*)的图象性质可以确定方程*f*(*x*)＝0，不等式*f*(*x*)>0和*f*(*x*)<0的解集．

例3　(2020·全国Ⅱ)若2*x*－2*y*<3－*x*－3－*y*，则(　　)

A．ln(*y*－*x*＋1)>0 B．ln(*y*－*x*＋1)<0

C．ln|*x*－*y*|>0 D．ln|*x*－*y*|<0

答案　A

解析　∵2*x*－2*y*<3－*x*－3－*y*，

∴2*x*－3－*x*<2*y*－3－*y*.

∵*y*＝2*x*－3－*x*＝2*x*－*x*在**R**上单调递增，

∴*x*<*y*，∴*y*－*x*＋1>1，

∴ln(*y*－*x*＋1)>ln 1＝0.

例4　已知函数*f*(*x*)＝eln *x*，*g*(*x*)＝*f*(*x*)－(*x*＋1)．(e＝2.718……)

(1)求函数*g*(*x*)的极大值；

(2)求证：1＋＋＋…＋>ln(*n*＋1)(*n*∈***N***\*)．

思路分析　*g**x*的极值→ln *x*<*x*－1→赋值叠加证明结论(1)

解　∵*g*(*x*)＝*f*(*x*)－(*x*＋1)＝ln *x*－(*x*＋1)，

∴*g*′(*x*)＝－1(*x*>0)．

令*g*′(*x*)>0，解得0<*x*<1；

令*g*′(*x*)<0，解得*x*>1.

∴函数*g*(*x*)在(0,1)上单调递增，在(1，＋∞)上单调递减，

∴*g*(*x*)极大值＝*g*(1)＝－2.

(2)证明　由(1)知*x*＝1是函数*g*(*x*)的极大值点，也是最大值点，

∴*g*(*x*)≤*g*(1)＝－2，

即ln *x*－(*x*＋1)≤－2⇒ln *x*≤*x*－1(当且仅当*x*＝1时等号成立)，

令*t*＝*x*－1，得*t*≥ln(*t*＋1)(*t*>－1)．

取*t*＝(*n*∈***N***\*)时，

则>ln＝ln，

∴1>ln 2，>ln ，>ln ，…，>ln，

∴叠加得1＋＋＋…＋>ln

＝ln(*n*＋1)．

即1＋＋＋…＋>ln(*n*＋1)(*n*∈**N**\*)．

借助函数、方程、不等式进行转化与化归可以将问题化繁为简，一般可将不等关系转化为最值值域问题，从而求出参变量的范围.

