### 第6讲　定点问题

母题　已知椭圆*C*：＋*y*2＝1，点*P*(0,1)，设直线*l*不经过*P*点且与*C*相交于*A*，*B*两点，若直线*PA*与直线*PB*的斜率的和为－1，求证：*l*过定点．

思路分析

❶*l*斜率*k*存在时写出*l*的方程

　　　↓

❷联立*l*，*C*的方程，设而不求

　　　↓

❸计算*kPA*，*kPB*并代入*kPA*＋*kPB*＝－1

　　　↓

❹分析直线方程，找出定点

证明　设直线*PA*与直线*PB*的斜率分别为*k*1，*k*2.如果*l*与*x*轴垂直，设*l*：*x*＝*t*，由题设知*t*≠0，且|*t*|<2，可得*A*，*B*的坐标分别为，，

则*k*1＋*k*2＝－＝－1，得*t*＝2，不符合题设．

从而可设*l*：*y*＝*kx*＋*m*(*m*≠1)．将*y*＝*kx*＋*m*代入＋*y*2＝1得(4*k*2＋1)*x*2＋8*kmx*＋4*m*2－4＝0.

由题设可知*Δ*＝16(4*k*2－*m*2＋1)>0.

设*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，

则*x*1＋*x*2＝－，*x*1*x*2＝.

而*k*1＋*k*2＝＋

＝＋

＝.

由题设*k*1＋*k*2＝－1，

故(2*k*＋1)*x*1*x*2＋(*m*－1)(*x*1＋*x*2)＝0，

即(2*k*＋1)·＋(*m*－1)·＝0，

解得*k*＝－.

当且仅当*m*>－1时，*Δ*>0，于是*l*：*y*＝－*x*＋*m*，

即*y*＋1＝－(*x*－2)，所以*l*过定点(2，－1)．

[子题1]　已知抛物线*C*：*y*2＝4*x*的焦点为*F*，直线*l*与抛物线*C*交于*A*，*B*两点，*O*是坐标原点．若点*E*(－2,0)，直线*l*不与坐标轴垂直，且∠*AEO*＝∠*BEO*，求证：直线*l*过定点．

证明　设*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，由题意可设直线*l*的方程为*x*＝*ny*＋*b*(*n*≠0)，

由得*y*2－4*ny*－4*b*＝0，

则*y*1＋*y*2＝4*n*，*y*1*y*2＝－4*b*.

由∠*AEO*＝∠*BEO*，得*kEA*＝－*kEB*，

即＝－，

整理得*y*1*x*2＋2*y*1＋*x*1*y*2＋2*y*2＝0，

即*y*1(*ny*2＋*b*)＋2*y*1＋(*ny*1＋*b*)*y*2＋2*y*2＝0，

整理得2*ny*1*y*2＋(*b*＋2)(*y*1＋*y*2)＝0，

即－8*bn*＋4(*b*＋2)*n*＝0，得*b*＝2，

故直线*l*的方程为*x*＝*ny*＋2(*n*≠0)，

所以直线*l*过定点(2,0)．

[子题2]　(2020·湖南四校联考)已知抛物线*C*：*y*2＝4*x*与过点(2,0)的直线*l*交于*M*，*N*两点，若＝，*PQ*⊥*y*轴，垂足为*Q*，求证：以*PQ*为直径的圆过定点．

证明　由题意可知，直线*l*的斜率不为0，设其方程为*x*＝*my*＋2(*m*∈**R**)，

将*x*＝*my*＋2代入*y*2＝4*x*，消去*x*可得*y*2－4*my*－8＝0，

显然*Δ*＝16*m*2＋32>0，设*M*(*x*1，*y*1)，*N*(*x*2，*y*2)，

则*y*1＋*y*2＝4*m*，*y*1*y*2＝－8，

因为＝，所以*P*是线段*MN*的中点，

设*P*(*xP*，*yP*)，则*xP*＝＝＝2*m*2＋2，

*yP*＝＝2*m*，

所以*P*(2*m*2＋2,2*m*)，

又*PQ*⊥*y*轴，垂足为*Q*，所以*Q*(0,2*m*)，

设以*PQ*为直径的圆经过点*A*(*x*0，*y*0)，

则＝(2*m*2＋2－*x*0,2*m*－*y*0)，

＝(－*x*0,2*m*－*y*0)，

所以·＝0，即－*x*0(2*m*2＋2－*x*0)＋(2*m*－*y*0)2＝0，

化简可得(4－2*x*0)*m*2－4*y*0*m*＋*x*＋*y*－2*x*0＝0，①

令可得

所以当*x*0＝2，*y*0＝0时，对任意的*m*∈**R**，①式恒成立，

所以以*PQ*为直径的圆过定点，该定点的坐标为(2,0)．

规律方法　动线过定点问题的两大类型及解法

(1)动直线*l*过定点问题，解法：设动直线方程(斜率存在)为*y*＝*kx*＋*t*，由题设条件将*t*用*k*表示为*t*＝*mk*，得*y*＝*k*(*x*＋*m*)，故动直线过定点(－*m,*0)．

(2)动曲线*C*过定点问题，解法：引入参变量建立曲线*C*的方程，再根据其对参变量恒成立，令其系数等于零，得出定点．

跟踪演练

1．(2020·北京东城区模拟)已知椭圆*C*：＋＝1的右焦点为*F*，直线*l*：*y*＝*kx*＋*m*(*k*≠0)过点*F*，且与椭圆*C*交于*P*，*Q*两点，如果点*P*关于*x*轴的对称点为*P*′，求证：直线*P*′*Q*过*x*轴上的定点．

证明　∵*c*＝＝2，∴*F*(2,0)，

直线*l*：*y*＝*kx*＋*m*(*k*≠0)过点*F*，

∴*m*＝－2*k*，∴*l*：*y*＝*k*(*x*－2)．

由得(3*k*2＋1)*x*2－12*k*2*x*＋12*k*2－6＝0.

依题意*Δ*>0，设*P*(*x*1，*y*1)，*Q*(*x*2，*y*2)，

则*x*1＋*x*2＝，*x*1*x*2＝.

∵点*P*关于*x*轴的对称点为*P*′，则*P*′(*x*1，－*y*1)．

∴直线*P*′*Q*的方程可以设为*y*＋*y*1＝(*x*－*x*1)，

令*y*＝0，*x*＝＋*x*1＝

＝＝

＝＝3.

∴直线*P*′*Q*过*x*轴上的定点(3,0)．

2．已知*P*(0,2)是椭圆*C*：＋＝1(*a*>*b*>0)的一个顶点，*C*的离心率*e*＝.

(1)求椭圆的方程；

(2)过点*P*的两条直线*l*1，*l*2分别与*C*相交于不同于点*P*的*A*，*B*两点，若*l*1与*l*2的斜率之和为－4，则直线*AB*是否经过定点？若是，求出定点坐标；若不过定点，请说明理由．

解　(1)由题意可得

解得*a*＝，*b*＝2，*c*＝，∴椭圆的方程为＋＝1.

(2)当直线*AB*的斜率存在时，设直线*AB*的方程为*y*＝*kx*＋*t*(*t*≠2)，*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，

联立消去*y*并整理，

可得(3*k*2＋2)*x*2＋6*ktx*＋3*t*2－12＝0，

∴*Δ*＝36(*kt*)2－4×(3*k*2＋2)(3*t*2－12)>0，

即24(6*k*2－*t*2＋4)>0，

则*x*1＋*x*2＝－，*x*1*x*2＝，

由*l*1与*l*2的斜率之和为－4，

可得＋＝－4，

又*y*1＝*kx*1＋*t*，*y*2＝*kx*2＋*t*，

∴＋＝＋

＝2*k*＋＝2*k*＋＝－4，

∵*t*≠2，化简可得*t*＝－*k*－2，

∴*y*＝*kx*－*k*－2＝*k*(*x*－1)－2，

∴直线*AB*经过定点(1，－2)．

当直线*AB*的斜率不存在时，设直线*AB*的方程为*x*＝*m*，*A*(*m*，*y*1)，*B*(*m*，*y*2)，

∴＋＝＝－4，

又点*A*，*B*均在椭圆上，

∴*A*，*B*关于*x*轴对称，∴*y*1＋*y*2＝0，∴*m*＝1，

故直线*AB*的方程为*x*＝1，也过点(1，－2)，

综上直线*AB*经过定点，定点为(1，－2)．

## 专题强化练

1．已知椭圆*C*：＋*y*2＝1，设直线*l*与椭圆*C*相交于*A*，*B*两点，*D*(0，－1)，若直线*AD*与直线*BD*的斜率之积为.证明：直线*l*恒过定点．

证明　①当直线*l*斜率不存在时，设*l*：*x*＝*m*，*A*(*m*，*yA*)，*B*(*m*，－*yA*)，

因为点*A*(*m*，*yA*)在椭圆＋*y*2＝1上，

所以＋*y*＝1，即*y*＝1－，

所以*kAD*·*kBD*＝·＝＝＝≠，不满足题意．

②当直线*l*斜率存在时，设*l*：*y*＝*kx*＋*b*(*b*≠－1)，

*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，

联立整理得

(1＋2*k*2)*x*2＋4*kbx*＋2*b*2－2＝0，

依题意得，*Δ*>0，

所以*x*1＋*x*2＝，*x*1*x*2＝，

则*kAD*·*kBD*＝·

＝

＝.

将*x*1＋*x*2＝，*x*1*x*2＝，

代入上式化简得，*kAD*·*kBD*＝·＝＝，即＝，解得*b*＝－2.

所以直线*l*恒过定点(0，－2)．

2．已知点*H*为抛物线*C*：*x*2＝4*y*的准线上任一点，过*H*作抛物线*C*的两条切线*HA*，*HB*，切点为*A*，*B*，证明直线*AB*过定点，并求△*HAB*面积的最小值．

解　设点*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，*H*(*t*，－1)，

由*C*：*x*2＝4*y*，即*y*＝*x*2，得*y*′＝*x*，

所以抛物线*C*：*x*2＝4*y*在点*A*(*x*1，*y*1)处的切线*HA*的方程为*y*－*y*1＝(*x*－*x*1)，即*y*＝*x*－*x*＋*y*1，

因为*y*1＝*x*，所以*y*＝*x*－*y*1，

因为*H*(*t*，－1)在切线*HA*上，所以－1＝*t*－*y*1，①

同理－1＝*t*－*y*2，②

综合①②得，点*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)的坐标满足方程

－1＝*t*－*y*，即直线*AB*恒过抛物线的焦点*F*(0,1)，

当*t*＝0时，此时*H*(0，－1)，可知*HF*⊥*AB*，

|*HF*|＝2，|*AB*|＝4，*S*△*HAB*＝×2×4＝4，

当*t*≠0时，此时直线*HF*的斜率为－，得*HF*⊥*AB*，

于是*S*△*HAB*＝×|*HF*|×|*AB*|，

而|*HF*|＝＝，

把直线*y*＝*x*＋1代入*C*：*x*2＝4*y*中，消去*x*得

*y*2－(2＋*t*2)*y*＋1＝0，

|*AB*|＝*y*1＋*y*2＋2＝*t*2＋4，

即*S*△*HAB*＝(*t*2＋4)＝>4，

综上所述，当*t*＝0时，*S*△*HAB*最小，且最小值为4.