专题 1　三角函数图像与性质

第一讲　正弦函数 $y=\sin x$ 与 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像性质关系

	$y=\sin x$	$y=A\sin(\omega x+\varphi)$
周期	2π	$\dfrac{2\pi}{\omega}$
定义域	R	R
最大值	1，当 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 取得	A，当 $x=\dfrac{2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}$ 取得
最小值	−1，当 $x=2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$ 取得	$-A$，当 $x=\dfrac{2k\pi+\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega}$ 取得
单调增区间	$\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$	$\left[\dfrac{2k\pi-\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega},\dfrac{2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}\right]$
单调减区间	$\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right]$	$\left[\dfrac{2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega},\dfrac{2k\pi+\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega}\right]$
对称轴	$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$	$x=\dfrac{k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}$
对称中心	$(k\pi,0)$	$\left(\dfrac{k\pi-\varphi}{\omega},0\right)$

类比于研究 $y=\sin x$ 的性质，只需将 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中的 $\omega x+\varphi$ 看成 $y=\sin x$ 中的 x，但在求 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的单调区间时，要特别注意 A 和ω的符号，通过诱导公式先将ω化为正数．研究函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$，$y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的性质的方法与其类似，也是类比、转化．

【例 1】函数 $y=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，$x\in R$ 的最小正周期是（　　）

A．$\dfrac{\pi}{3}$　　B．$\dfrac{2\pi}{3}$　　C．$\dfrac{3\pi}{2}$　　D．π

【解析】$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{3}$，故选 B.

【例 2】函数 $f(x)=\tan\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为（　　）

A．3π　　B．6π　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　D．$\dfrac{2\pi}{3}$

【解析】$T=\dfrac{\pi}{\omega}=3\pi$，故选 A.

【例 3】已知函数 $y=A\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$（$\omega>0$）的最小正周期为$\pi$，则函数 $f(x)$ 的图象（　　）

A．关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称　　B．关于直线 $x=\dfrac{\pi}{8}$ 对称

C．关于点 $(\dfrac{\pi}{4},0)$ 对称　　D．关于点 $(\dfrac{\pi}{8},0)$ 对称

【解析】由函数 $y=A\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为π，可得 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$ 求得ω=2，$y=A\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

由于当 $x=\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}=k\pi+\frac{\pi}{8}$ 时，函数 f（x）取得最大值为 1，故函数 f（x）的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 对称，故选 B.

【例 4】设函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A\neq 0$，$\omega>0$，$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$）的图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称，它的最小正周期为 π，则（　　）

A．$f(x)$ 的图象过点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　　　B．$f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上是减函数

C．$f(x)$ 的一个对称中心是 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$　　　　D．$f(x)$ 的一个对称中心是 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$

【解析】由题意可得 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，∴ $\omega=2$，可得 $y=A\sin(\omega x+\phi)$．再由函数关于 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称，故 $\frac{2\pi}{3}=\frac{k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}=\frac{k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{2}\Rightarrow\varphi=k\pi+\frac{\pi}{6}$，取 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，故函数 $y=A\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

根据公式 $\left[\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}-\phi}{\omega},\frac{2k\pi+\frac{3\pi}{2}-\phi}{\omega}\right]$ 可求得函数的减区间为[$k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\pi+\frac{2\pi}{3}$]，B 错，由于 A 不确定，故选项 A 不正确．对称中心为 $\left(\frac{k\pi-\phi}{\omega},0\right)$，即 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},0\right)$，$k=1$ 时，选项 C 正确．选项 D 不正确．

【例 5】函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上对称轴的条数为（　　）

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．0

【解析】$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，∵ $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$，∴函数的对称轴为：$x=\frac{\pi}{6}(k=0)$，$x=-\frac{\pi}{3}(k=-1)$

故选 B.

【例 6】函数 $y=2\sin(3x-\frac{\pi}{4})$ 的图象中两条相邻对称轴之间的距离是__________.

【解析】两条相邻对称轴之间有半个周期，即 $\frac{T}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{3}$.

【例 7】同时具有以下性质：①最小正周期是 π；②图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称；③在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上是增函数，则这个函数是（　　）

A．$y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$　　B．$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$　　C．$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$　　D．$y=\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$

【解析】$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$ 求得ω=2，排除 A、D，在 B 选项中，对称轴为直线 $x=\frac{k\pi-\varphi}{\omega}=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$，当 $k=1$ 时，$x=\frac{\pi}{3}$，单调增区间为 $\left[\frac{2k\pi-\pi-\varphi}{\omega},\frac{2k\pi-\varphi}{\omega}\right]\Rightarrow\left[k\pi-\frac{2\pi}{3},k\pi-\frac{\pi}{6}\right]$，不能满足题意，C 选项中对称轴为直线

$x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$，当 $k=0$，$x=\frac{\pi}{3}$，单增区间为 $\left[\frac{2k\pi-\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega},\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}\right]\Rightarrow\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$.

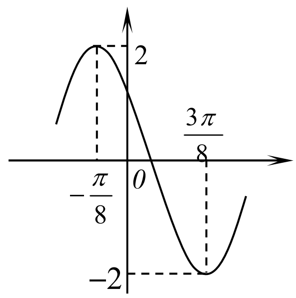
【例 8】函数 $y=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的单调递增区间是（　　）

A. $\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{\pi}{3}+2k\pi\right](k\in Z)$　　B. $\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right](k\in Z)$

C. $\left[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ \frac{\pi}{3}+k\pi\right](k\in Z)$　　D. $\left[\frac{\pi}{3}+k\pi,\ \frac{5\pi}{6}+k\pi\right](k\in Z)$

【解析】 $y=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，根据题意，只需求出 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的单调减区间即可.

【例 9】已知函数 $y=A(\omega x+\varphi)$ $(A>0,|\varphi|<\pi)$ 的一段图象如下图所示，求函数的解析式.



【解析】由图像可知，最大值为 2，最小值为-2，故 $A=2$ 图中已知的两点为 x_1，x_2

故可联立方程组 $\begin{cases}-\frac{\pi}{8}=\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}\\ \frac{3\pi}{8}=\frac{\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega=2\\ \varphi=\frac{3\pi}{4}\end{cases}$；　　$\therefore y=2\sin(2x+\frac{3\pi}{4})$.

【例 10】已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 在同一周期内，当 $x=\frac{\pi}{9}$ 时，取得最大值 $\frac{1}{2}$，当 $x=\frac{4\pi}{9}$ 时，取得最小值 $-\frac{1}{2}$，则该函数的解析式是（　　）

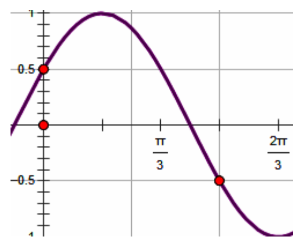
A. $y=2\sin(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6})$　　B. $y=\frac{1}{2}\sin(3x+\frac{\pi}{6})$

C. $y=\frac{1}{2}\sin(3x-\frac{\pi}{6})$　　D. $y=\frac{1}{2}\sin(-3x+\frac{\pi}{6})$

【解析】由题意可知，最大值为 $\frac{1}{2}$，最小值为 $-\frac{1}{2}$，故 $A=\frac{1}{2}$，已知的两点为 x_1，x_2，故可联立方程组

$\begin{cases}\frac{\pi}{9}=\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}\\ \frac{4\pi}{9}=\frac{\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega=3\\ \varphi=\frac{\pi}{6}\end{cases}$　　$\therefore y=\frac{1}{2}\sin(3x+\frac{\pi}{6})$　选 B.

【例 11】已知函数 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，求 $f(x)$ 在 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.



【解析】 $x_1=\frac{0-\varphi}{\omega}=-\frac{\pi}{12}$，$x_2=\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}=\frac{\pi}{6}$，$x_3=\frac{\pi-\varphi}{\omega}=\frac{5\pi}{12}$，$x_4=\frac{\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$，则区间 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 包含 $x_2=\frac{\pi}{6}$，最大值为 2，在 $\left[0,\ \frac{\pi}{6}\right]$ 单调递增，在 $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 单调递减，由于递减区间宽度大于递增区间宽度，故最小值为 $f(\frac{\pi}{2})=2\sin(\pi+\frac{\pi}{6})=-1$（如图）.

【例 12】若函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$，且 $f(\alpha)=-2$，$f(\beta)=0$，$|\alpha-\beta|$ 的最小值是 $\frac{\pi}{2}$，则 $f(x)$ 的单调递增区间是（　　）

A. $\left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right](k\in Z)$　　B. $\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right](k\in Z)$

C. $\left[-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right](k\in Z)$　　D. $\left[-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right](k\in Z)$

【解析】由题意可知，最大值为 2，最小值为 -2，已知的两点为 x_1，x_2，故可联立方程组

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{\omega}\\ \beta=\dfrac{2\pi-\frac{\pi}{3}}{\omega}\end{cases}\Rightarrow|\alpha-\beta|=\frac{\pi}{2}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\omega}\Rightarrow\omega=1$$ ；$\therefore y=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$ 故单调增区间为 $\left[2k\pi-\frac{5\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$ 选 D.

【例 13】(1) 若函数 $f(x)=3\cos(\omega x+\varphi)$ 对任意的 $x\in R$,有 $f(\frac{\pi}{6}+x)=f(\frac{\pi}{6}-x)$，则 $f(\frac{\pi}{6})$ 等于（　　）

A. -3　　B. 0　　C. 3　　D. ±3

(2) 若 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)+m$，对任意实数 t 都有 $f(t+\frac{\pi}{4})=f(-t)$，且 $f(\frac{\pi}{8})=-1$，则实数 m 的值为（　　）

A. ±1　　B. ±3　　C. -3 或 1　　D. -1 或 3

定理：$f(a+x)=f(b-x)\Rightarrow f(x)$ 关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称；$f(a+x)=-f(b-x)\Rightarrow f(x)$ 关于点 $\left(\frac{a+b}{2},0\right)$ 对称.

【解析】(1) 由题意可得：$f(x)$ 关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称；故 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\pm3$，选 D.

(2) 由题意可得：$f(x)$ 关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 对称；故 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\pm2+m=-1\Rightarrow m=-3$，$m=1$，选 C.

【例 14】设函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ (ω,φ 是常数，$\omega>0$). 若 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{3},1\right]$ 上具有单调性，且 $f(0)=f\left(\frac{2}{3}\right)=-f(1)$，则下列有关 $f(x)$ 的命题正确的有______（请填上所有正确命题的序号）.

① $f(x)$ 的最小周期为 2；　② $x=\frac{1}{3}$ 是 $f(x)$ 的对称轴；

③ $f(x)$ 在 $\left[1,\frac{5}{3}\right]$ 上具有单调性；　④ $y=f\left(x+\frac{5}{6}\right)$ 为奇函数.

【解析】$f(0)=f\left(\frac{2}{3}\right)\Rightarrow x=\frac{1}{3}$ 为对称轴，$f\left(\frac{2}{3}\right)=-f(1)\Rightarrow\left(\frac{5}{6},0\right)$ 为对称中心；故②正确，$f(x)=f\left(x+\frac{5}{6}\right)$ 表示将 $y=f(x)$ 向左移 $\frac{5}{6}$ 个单位，即关于原点对称，故④正确，由于 $y=f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{3},-1\right]$ 上具有单调性，故根据对称原理可得③正确；$\begin{cases}\frac{1}{3}=\dfrac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}\\ \frac{5}{6}=\dfrac{\pi-\varphi}{\omega}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega=\pi\\ \varphi=\frac{\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow T=2$，故①正确；答案为①②③.

第二讲　正弦函数的平移和伸缩变换

函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的图象可以通过下列两种方式得到：

1. $y=\sin x\xrightarrow{\text{图象左移}\varphi}y=\sin(x+\varphi)\xrightarrow{\text{横坐标缩短到原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍}}y=\sin(\omega x+\varphi)$

$\xrightarrow{\text{纵坐标伸长为原来的}A\text{倍}}y=A\sin(\omega x+\varphi)$

2. $y=\sin x\xrightarrow{\text{横坐标缩短到原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍}}y=\sin(\omega x)\xrightarrow{\text{图象左移}\frac{\varphi}{\omega}}y=\sin(\omega x+\varphi)$

$\xrightarrow{\text{纵坐标伸长为原来的}A\text{倍}}y=A\sin(\omega x+\varphi)$

关键：把握先移后缩和先缩后移的区别．类比可以得到：$y=A\cos(\omega x+\varphi)$，$y=A\tan(\omega x+\varphi)$ **的图像**

定理：$y=A\sin(\omega x+\varphi_1)\to y=A\sin(\omega x+\varphi_2)$ **则平移单位为** $\frac{|\varphi_2-\varphi_1|}{\omega}$ **（注意平移方向）**

【例 15】要得到 $y=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$ 的图象，且使平移的距离最短，则需将 $y=\cos 2x$ 的图象向_______方向平移_______个单位即可得到.

【解析】$\because \omega=2$，此题为先缩后移，故需将 $y=\cos 2x$ 的图象向右方向平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位.

【例 16】将函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象经过怎样的平移所得图象关于点 $(-\frac{\pi}{12},0)$ 中心对称（　　）

A．向右平移 $\frac{\pi}{12}$　　B．向右平移 $\frac{\pi}{6}$　　C．向左平移 $\frac{\pi}{12}$　　D．向左平移 $\frac{\pi}{6}$

【解析】法一：$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的对称中心横坐标为 $x=\frac{k\pi-\varphi}{\omega}=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$，当 $k=0$ 时，$x=-\frac{\pi}{6}$，故往右移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，即可所得图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$ 中心对称.

法二：设往左平移了 φ 个单位后，即 $f(x)=\sin\left(2(x+\phi)+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$ 中心对称，根据题意可得：$x=\frac{k\pi-\frac{\pi}{3}-2\varphi}{2}=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}-\varphi=-\frac{\pi}{12}$，$k=0$ 时，$\varphi=-\frac{\pi}{12}$，故往右移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位即可.

【例 17】(2019•天津) 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\pi)$ 是奇函数，且 $f(x)$ 的最小正周期为 π，将 $y=f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），所得图象对应的函数为 $g(x)$．若 $g(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，则 $f(\frac{3\pi}{8})=$（　　）

A．-2　　B．$-\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

【解析】因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $\varphi=0$，又 $f(x)$ 的最小正周期为 π，则 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，得 $\omega=2$，则 $f(x)=A\sin 2x$，将 $y=f(x)$ 的图像上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），所得图像对应的函数为 $g(x)$，则 $g(x)=A\sin x$，若 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，则 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=A\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}A=\sqrt{2}$，即 $A=2$，则 $f(x)=2\sin 2x$，则 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=2\sin\left(2\times\frac{3\pi}{8}\right)=2\sin\frac{3\pi}{4}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，故选 C.

【例 18】函数 $y=2\sin^2 x+2\cos x-3$ 的最大值是（　　）

A．-1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．-5

【解析】$y=2\sin^2 x+2\cos x-3=-2\cos^2 x+2\cos x-1=-2\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\le-\frac{1}{2}$. ∴函数 $y=2\sin^2 x+2\cos x-3$ 的最大值是 $-\frac{1}{2}$．故选 C.

【例 19】若关于 x 的方程 $\sin^2 x+a\sin x+4=0$ 在区间 $[0,\pi]$ 有两个不相等的实根，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$a<-4$ 或 $a>4$　　B．$-5\le a\le-4$　　C．$a<-5$　　D．$a\le-4$

【解析】$\because x\in[0,\pi]$，故 $\sin x\in[0,\pi]$，设 $t=\sin x$，则 $t\in[0,1]$，则方程 $\sin^2 x+a\sin x+4=0$ 等价为 $t^2+at+4=0$.

当 $t=0$ 时，无解，当 $t\ne0$ 时，即 $a=-\left(t+\frac{4}{t}\right)$，$t\in(0,1]$，根据对勾函数性质可得，函数 $f(t)=-\left(t+\frac{1}{t}\right)$ 在区间 $(0,1]$ 内单调递减，即 $a\le-5$，由于有两个不同的解，故 $a=-5$ 时只有一解，故 $a<-5$.

【例 20】已知 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，求函数 $y=(\sin x+1)(\cos x+1)$ 的最大值和最小值.

【解析】$y=(\sin x+1)(\cos x+1)=\sin x+\cos x+\sin x\cos x+1$，令 $\sin x+\cos x=t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，故 $t\in\left[0,\sqrt{2}\right]$，$\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$，即 $y=f(t)=t+\frac{t^2-1}{2}+1=\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t+1)^2$，$t\in\left[0,\sqrt{2}\right]$，故函数的最大值为 $f\left(\sqrt{2}\right)=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$，最小值为 $f(0)=\frac{1}{2}$.

【例 21】函数 $y=\sin^2 x+2\cos x$ 在区间 $\left[-\frac{2}{3}\pi,\alpha\right]$ 上的值域为 $[-\frac{1}{4}$，$2]$，则 α 的范围是（　　）

A. $\left[-\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right]$　　B. $\left(-\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right]$　　C. $\left[0,\frac{2}{3}\pi\right]$　　D. $\left(0,\frac{2}{3}\pi\right]$

【解析】$y=\sin^2 x+2\cos x=-\cos^2 x+2\cos x+1=-(\cos x-1)^2+2$，$\because$ 此函数在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3},\alpha\right]$ 上的值域为 $\left[-\frac{1}{4},2\right]$.

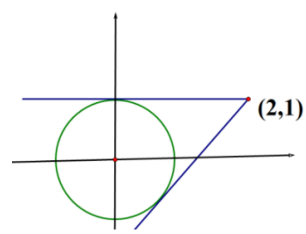
并且 $\cos x$ 能够取得最大值 1 时，函数值为 2，$\therefore \alpha\geq 0$，又 $x=-\frac{2\pi}{3}$ 时，函数值为 $-\frac{1}{4}$，$x=\frac{2\pi}{3}$ 时，函数值为 $-\frac{1}{4}$，$\therefore \alpha\leq\frac{2\pi}{3}$，所以 α 的取值范围是 $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$；故选 C.

【例 22】求 $y=\frac{\sin x}{2+\sin x}(x\in[0,\pi])$ 值域.

【解析】$y=\frac{\sin x}{2+\sin x}=\frac{2+\sin x-2}{2+\sin x}=1-\frac{2}{2+\sin x}$，$\because x\in[0,\pi]$，$\therefore \sin x\in[0,1]$，故 $\frac{2}{2+\sin x}\in\left[\frac{2}{3},1\right]$，则 $y=\frac{\sin x}{2+\sin x}(x\in[0,\pi])$ 值域为 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$.

【例 23】求函数 $y=\frac{\sin x-1}{\cos x-2}$ 的最大值和最小值.

【解析】法一：如图所示，$\frac{\sin x-1}{\cos x-2}$ 表示过点 $(2,1)$ 的直线与单位圆有交点时，直线的斜率，令直线方程为 $y-1=k(x-2)$，原点到直线的的距离为 $\frac{|-2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}\leq 1\Rightarrow 3k^2-4k\leq 0\Rightarrow 0\leq k\leq\frac{4}{3}$，故函数 $y=\frac{\sin x-1}{\cos x-2}$ 的最大值为 $\frac{4}{3}$，最小值为 0.



法二：利用辅助角公式：$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ 计算，

$y=\frac{\sin x-1}{\cos x-2}\Rightarrow \sin x-y\cos x=-2y+1\Rightarrow\sqrt{1+y^2}\sin(x+\varphi)=-2y+1\Rightarrow -1\leq\frac{-2y+1}{\sqrt{1+y^2}}\leq 1$，解得：$0\leq y\leq\frac{4}{3}$.

达标训练

1.（2019•新课标II）若 $x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 两个相邻的极值点，则 $\omega=$（　　）

A．2　　B．$\frac{3}{2}$　　C．1　　D．$\frac{1}{2}$

2.（2019•新课标II）下列函数中，以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期且在区间 $(\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2})$ 单调递增的是（　　）

A．$f(x)=|\cos 2x|$　　B．$f(x)=|\sin 2x|$　　C．$f(x)=\cos|x|$　　D．$f(x)=\sin|x|$

3.（2019•新课标III）设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{5})(\omega>0)$，已知 $f(x)$ 在 $[0$，$2\pi]$ 有且仅有 5 个零点．下述四个结论：

① $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 3 个极大值点　　② $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 2 个极小值点

③ $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{10})$ 单调递增　　④ ω 的取值范围是 $[\frac{12}{5}$，$\frac{29}{10})$

其中所有正确结论的编号是（　　）

A．①④　　B．②③　　C．①②③　　D．①③④

4.（2018•新课标III）函数 $f(x)=\frac{\tan x}{1+tan^2 x}$ 的最小正周期为（　　）

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．π　　D．2π

5.（2018•新课标I）已知函数 $f(x)=2\cos^2 x-\sin^2 x+2$，则（　　）

A．$f(x)$ 的最小正周期为 π，最大值为 3　　B．$f(x)$ 的最小正周期为 π，最大值为 4

C．$f(x)$ 的最小正周期为 2π，最大值为 3　　D．$f(x)$ 的最小正周期为 2π，最大值为 4

6.（2017•新课标II）函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的最小正周期为（　　）

A．4π　　B．2π　　C．π　　D．$\frac{\pi}{2}$

7.（2017•山东）函数 $y=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$ 的最小正周期为（　　）

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．$\frac{2\pi}{3}$　　C．π　　D．2π

8.（2017•新课标III）设函数 $f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{3})$，则下列结论错误的是（　　）

A．$f(x)$ 的一个周期为 -2π　　B．$y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{8\pi}{3}$ 对称

C．$f(x+\pi)$ 的一个零点为 $x=\frac{\pi}{6}$　　D．$f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}$，$\pi)$ 单调递减

9.（2017•天津）设函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in R$，其中 $\omega>0$，$|\varphi|<\pi$．若 $f(\frac{5\pi}{8})=2$，$f(\frac{11\pi}{8})=0$，且

$f(x)$ 的最小正周期大于 2π，则（　　）

A．$\omega=\frac{2}{3}$，$\varphi=\frac{\pi}{12}$　　B．$\omega=\frac{2}{3}$，$\varphi=-\frac{11\pi}{12}$

C．$\omega=\frac{1}{3}$，$\varphi=-\frac{11\pi}{24}$　　D．$\omega=\frac{1}{3}$，$\varphi=\frac{7\pi}{24}$

10．（2016•新课标II）若将函数 $y=2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，则平移后的图象的对称轴为（　　）

A．$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}(k\in Z)$　　B．$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$

C．$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in Z)$　　D．$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in Z)$

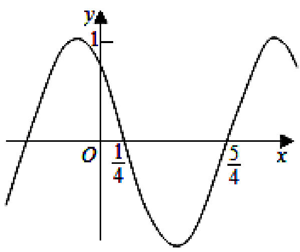
11．（2016•新课标I）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0$，$|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2})$，$x=-\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点，$x=\frac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图象的对称轴，且 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}$，$\frac{5\pi}{36})$ 上单调，则 ω 的最大值为（　　）

A．11　　B．9　　C．7　　D．5

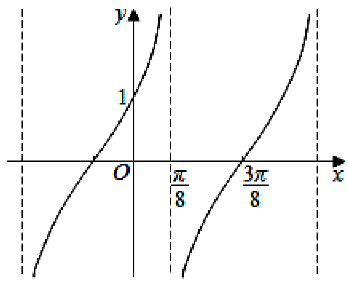
12．（2015•新课标I）函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的单调递减区间为（　　）

A．$(k\pi-\frac{1}{4}$，$k\pi+\frac{3}{4})$，$k\in z$　　B．$(2k\pi-\frac{1}{4}$，$2k\pi+\frac{3}{4})$，$k\in z$

C．$(k-\frac{1}{4}$，$k+\frac{3}{4})$，$k\in z$　　D．$(2k-\frac{1}{4}$，$2k+\frac{3}{4})$，$k\in z$



第 12 题图



第 13 题图

13．（2011•辽宁）已知函数 $f(x)=A\tan(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，$y=f(x)$ 的部分图象如图，则 $f(\frac{\pi}{24})=$（　　）

A．$2+\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$2-\sqrt{3}$

14．（2018•天津）将函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{5})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，所得图象对应的函数（　　）

A．在区间 $[\frac{3\pi}{4}$，$\frac{5\pi}{4}]$ 上单调递增　　B．在区间 $[\frac{3\pi}{4}$，$\pi]$ 上单调递减

C．在区间 $[\frac{5\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{2}]$ 上单调递增　　D．在区间 $[\frac{3\pi}{2}$，$2\pi]$ 上单调递减

15．（2017•新课标III）函数 $f(x)=\frac{1}{5}\sin(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{6})$ 的最大值为（　　）

A．$\dfrac{6}{5}$　　B．1　　C．$\dfrac{3}{5}$　　D．$\dfrac{1}{5}$

16．（2017•新课标I）已知曲线 $C_1: y=\cos x$，$C_2: y=\sin(2x+\dfrac{2\pi}{3})$，则下面结论正确的是（　　）

A．把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

B．把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

C．把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

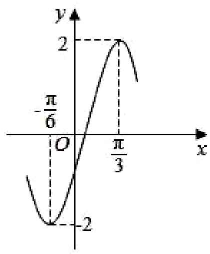
D．把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

17．（2016•新课标I）将函数 $y=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$ 的图象向右平移 $\dfrac{1}{4}$ 个周期后，所得图象对应的函数为（　　）

A．$y=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$　　B．$y=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$

C．$y=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{4})$　　D．$y=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$

18．（2016•新课标II）函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则（　　）



A．$y=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$　　B．$y=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$

C．$y=2\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$　　D．$y=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$

19．（2014•四川）为了得到函数 $y=\sin(2x+1)$ 的图象，只需把 $y=\sin 2x$ 的图象上所有的点（　　）

A．向左平行移动 $\dfrac{1}{2}$ 个单位长度　　B．向右平行移动 $\dfrac{1}{2}$ 个单位长度

C．向左平行移动 1 个单位长度　　D．向右平行移动 1 个单位长度

20．（2014•辽宁）将函数 $y=3\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度，所得图象对应的函数（　　）

A．在区间 $[\dfrac{\pi}{12}，\dfrac{7\pi}{12}]$ 上单调递增　　B．在区间 $[\dfrac{\pi}{12}，\dfrac{7\pi}{12}]$ 上单调递减

C．在区间 $[-\dfrac{\pi}{6}，\dfrac{\pi}{3}]$ 上单调递减　　D．在区间 $[-\dfrac{\pi}{6}，\dfrac{\pi}{3}]$ 上单调递增

21．（2016•新课标II）函数 $f(x)=\cos 2x+6\cos(\dfrac{\pi}{2}-x)$ 的最大值为（　　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

22．$f(x)=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$ 的值域是（　　）

A．$[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}]$　　B．$[-1,1]$　　C．$[-2,2]$　　D．$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$

23．对于函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+1}{\sin x}(0<x<\pi)$，下列结论正确的是（　　）

A．有最大值而无最小值　　B．有最小值而无最大值

C．既有最大值也有最小值　　D．既无最大值也无最小值

24．函数 $y=\dfrac{2+\cos x}{2-\cos x}$ 的最大值为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．不存在

25．函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值与最小值分别是（　　）

A．1，0　　B．$\dfrac{1}{2}$，0　　C．0，-1　　D．1，$\dfrac{1}{2}$

26．（2019•新课标I）函数 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{3\pi}{2})-3\cos x$ 的最小值为_________．

27．（2017•新课标II）函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{3}{4}(x\in[0,\dfrac{\pi}{2}])$ 的最大值是_________．

28．（2014•大纲版）函数 $y=\cos 2x+2\sin x$ 的最大值是__________．

29．（2008•四川）函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos^2 x$ 的最大值是__________．

30．（2008•辽宁）设 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则函数 $y=\dfrac{2\sin^2 x+1}{\sin 2x}$ 的最小值为___________．

31．（2014•大纲版）若函数 $f(x)=\cos 2x+a\sin x$ 在区间 $(\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2})$ 是减函数，则 a 的取值范围是________．

32．（2010•北京）已知函数 $f(x)=2\cos 2x+\sin^2 x-4\cos x$．

（1）求 $f(\dfrac{\pi}{3})$ 的值；

（2）求 $f(x)$ 的最大值和最小值．

33．（2008•四川）求函数 $y=7-4\sin x\cos x+4\cos^2 x-4\cos^4 x$ 的最大值与最小值．

专题 2　两角和与差的正弦余弦和正切

第一讲　两角和与差的正余弦与正切

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$；　$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$；　$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；　$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$；　$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

模型一：拆分角问题： $\alpha=2\cdot\dfrac{\alpha}{2}$；$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$；$\alpha=\beta-(\beta-\alpha)$；$\alpha=\dfrac{1}{2}\left[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\right]$；

$\beta=\dfrac{1}{2}\left[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\right]$；$\dfrac{\pi}{4}+\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$. **注意：特殊的角也看成已知角，如** $\alpha=\dfrac{\pi}{4}-\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

模型二： $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=2+2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta=2+2\cos(\alpha-\beta)$

【例 1】（2019•新课标I）$\tan 255^\circ=$（　　）

A．$-2-\sqrt{3}$　　B．$-2+\sqrt{3}$　　C．$2-\sqrt{3}$　　D．$2+\sqrt{3}$

【解析】 由

$$\tan 255^\circ=\tan(180^\circ+75^\circ)=\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=$$

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{(3+\sqrt{3})^2}{6}=\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=2+\sqrt{3}$$，故选 D.

【例 2】（1）若 α，β 为锐角，且满足 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{5}$，则 $\sin\beta$ 的值是________.

（2）若 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，α 是第三象限角，则 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$________.

【解析】（1）$\because\alpha$，β 为锐角 $\therefore\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$，$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

$\therefore\sin\beta=\sin\left[(\alpha+\beta)-\alpha\right]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\left(\dfrac{4}{5}\right)^2-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{7}{25}$

（2）由已知条件 $\therefore\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\dfrac{3}{5}$，$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha=-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

【例 3】$\sin 34^\circ\sin 26^\circ-\cos 34^\circ\cos 26^\circ$ 的值是（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】原式$=(\cos 34^\circ\cos 26^\circ-\sin 34^\circ\sin 26^\circ)=-60^\circ=-\dfrac{1}{2}$.

【例 4】若 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$，$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{3}$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\beta}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)=$（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$　　D. $-\dfrac{\sqrt{6}}{9}$

【解析】∵ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，∴ $\dfrac{\pi}{4}<\alpha+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}$，∵ $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{3}$，∴ $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

∵ $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$，∴ $\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\beta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$.∵ $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\beta}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，∴ $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\beta}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

∴ $\cos\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)=\cos\left[\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)-\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\beta}{2}\right)\right]=\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\beta}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$.

【例 5】（1）若 $\tan\alpha=3$，则 $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$ 的值等于__________.

（2）若 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=3$，$tan(\alpha-\beta)=2$，则 $tan(\beta-2\alpha)=$__________.

【解析】（1）$\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=2\tan\alpha=2\times3=6$.

（2）由条件知 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=3$，∴ $\tan\alpha=2$.

∴ $\tan(\beta-2\alpha)=\tan[(\beta-\alpha)-\alpha]=\dfrac{\tan(\beta-\alpha)-\tan\alpha}{1+\tan(\beta-\alpha)\tan\alpha}=\dfrac{4}{3}$.

【例 6】已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ 且 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\sin 2\alpha-\cos 2\alpha$ 等于________.

【解析】∵ $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ 且 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，∴ $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，∴ $\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha-2\left(\cos^2\alpha-1\right)=-\dfrac{31}{25}$.

【例 7】（1）若 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2}{5}$，则 $\tan\alpha=$______；（2）已知 $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\tan 2\alpha=$______.

【解析】（1）$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\dfrac{2}{5}$，∴ $5\tan\alpha+5=2-2\tan\alpha$，∴ $7\tan\alpha=-3$，∴ $\tan\alpha=-\dfrac{3}{7}$.

（2）由 $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，可得 $\cos\alpha=-\dfrac{12}{13}$，$\tan\alpha=-\dfrac{5}{12}$，∴ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\dfrac{120}{119}$.

【例 8】（2019•新课标 II）已知 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$，则 $\sin\alpha=$（　　）

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析】因为 $2\sin 2a=\cos 2a+1$，所以可得 $4\sin a\cos a=2\cos^2 a$，又 $a\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin a>0$，$\cos a>0$，所以 $\cos a=2\sin a$，又 $\sin^2 a+\cos^2 a=\sin^2 a+(2\sin a)^2=5\sin^2 a=1$，解得 $\sin a=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，故选 B.

【例 9】已知函数 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)(x\in R)$.

（1）求 $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ 的值；

（2）设 α、$\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f\left(3\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{10}{13}$，$f(3\beta+2\pi)=\frac{6}{5}$，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

【解析】(1) $\because f(x)=2\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)(x\in R)$，$\therefore ff\left(\frac{5\pi}{4}\right)=2\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$.

(2) $\because \alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f\left(3\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{10}{13}$，$f(3\beta+2\pi)=\frac{6}{5}$，$\therefore 2\sin\alpha=\frac{10}{13}$，$2\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{6}{5}$，

即 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\cos\beta=\frac{3}{5}$，$\therefore \cos\alpha=\frac{12}{13}$，$\sin\beta=\frac{4}{5}$，$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{16}{65}$.

【例 10】已知 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=2$，$\tan\beta=\frac{1}{2}$.（1）求 $\tan 2\alpha$ 的值；（2）求 $\frac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)}$ 的值.

【解析】(1) $\because \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=2$，$\therefore \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=2$，$\therefore \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=2$，$\therefore \tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\therefore \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{3}{4}$.

(2) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-2\sin\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)}$

$=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{1}{7}$.

【例 11】（1）设 $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$，$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{3}$，求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值；

（2）若 α,β 是锐角，且 $\sin\alpha-\sin\beta=-\frac{1}{2}$，$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$，则 $\tan(\alpha-\beta)=$________.

【解析】（1）$\because(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=2+2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta=2+2\cos(\alpha-\beta)$

$\therefore 2+2\cos(\alpha-\beta)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{13}{36}$　$\therefore\cos(\alpha-\beta)=-\frac{59}{72}$

（2）$\because \sin\alpha-\sin\beta=-\frac{1}{2}$，$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$，两式平方相加得：$2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}$.

即 $2-2\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$，$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{4}$，$\because \alpha,\beta$ 是锐角，且 $\sin\alpha-\sin\beta=-\frac{1}{2}<0$，$\therefore 0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore -\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$.

$\therefore \sin(\alpha-\beta)=-\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$，$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=-\frac{\sqrt{7}}{3}$.

秒杀秘籍：第二讲　两种辅助角公式

第一类：一次辅助角 $f(x)=a\sin x\pm b\cos x$

$f(x)=a\sin x\pm b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x\pm\varphi)$（辅助角 φ 由点 (a,b) 决定, $\tan\varphi=\frac{b}{a}$）.

例如：$\sin\alpha\pm\cos\alpha=\sqrt{1^2+1^2}\sin(\alpha\pm\varphi)=\sqrt{2}\sin(\alpha\pm\frac{\pi}{4})$

$\sin\alpha \pm \sqrt{3}\cos\alpha = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\sin(\alpha\pm\varphi) = 2\sin(\alpha\pm\frac{\pi}{3})$ ，$\sqrt{3}\sin\alpha \pm \cos\alpha = 2\sin(\alpha\pm\frac{\pi}{6})$

第二类：二次辅助角 $f\left(x\right)=a\sin\omega x\cos\omega x\pm b\cos^2\omega x\left(a,b>0\right)$

$$f\left(x\right)=\frac{a}{2}\sin 2\omega x\pm\frac{b}{2}\left(\cos 2\omega x+1\right)=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\sin\left(2\omega x\pm\phi\right)\pm\frac{b}{2}\left(\tan\phi=\frac{b}{a}\right)$$

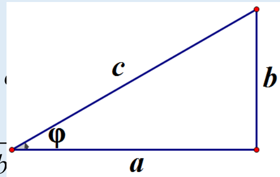
若遇到 $\sin^2\alpha$ **，则通过公式** $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ **转化成** $\cos^2\alpha$

注意：（1） $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

（2） $2\sin^2(\alpha\pm\frac{\pi}{4})=\left(\sin\alpha\pm\cos\alpha\right)^2=1\pm 2\sin\alpha\cos\alpha$

【例 12】求证： $a\sin\alpha\pm b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha\pm\varphi)$.（其中 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$ ）

证明：作一直角三角形如图，其中



$\sin\varphi=\frac{b}{c};\cos\varphi=\frac{a}{c}$ $a\sin\alpha\pm b\cos\alpha=c\left(\sin\alpha\cdot\frac{a}{c}\pm\cos\alpha\cdot\frac{b}{c}\right)=c\left(\sin\alpha\cdot\cos\varphi\pm\cos\alpha\cdot\sin\right.$

$=c\sin\left(\alpha\pm\varphi\right)=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha\pm\varphi\right)(\tan\varphi=\frac{b}{a})$同理可得： $a\cos\alpha\pm b\sin\alpha=\sqrt{a^2+b}$ … a)

【例 13】若方程 $2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x=k+1$ 有解，则 $k\in$__________.

【解析】 $\because 2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x=\frac{\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}}{2}\sin\left(2x-\varphi\right)-\frac{2}{2}=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1$ ，

$\therefore 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=k+2\in\left[-2,2\right]$ $\therefore k\in\left[-4,0\right]$.

【例 14】已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\alpha=\frac{4}{5}\sqrt{3}$ ，则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ 的值为（　　）

A． $\frac{4}{5}$　　　　B． $\frac{3}{5}$　　　　C． $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D． $\frac{\sqrt{3}}{5}$

【解析】由条件得 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{3}{2}\cos\alpha=\frac{4}{5}\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{4}{5}$， ∴ $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$.

【例 15】已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x\in R\right)$.

（1）若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，求 $f\left(x\right)$ 的最大值；

（2）在△ABC 中，若 $A<B$， $f\left(A\right)=f\left(B\right)=\frac{1}{2}$，求 A、B、C 的值.

【解析】（1） $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}\left(1-\cos 2x\right)}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$， ∵ $0<x<\frac{\pi}{2}$， ∴ $-\frac{\pi}{3}<2x-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$， ∴

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ 时，即 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时， $f\left(x\right)$ 的最大值为 1.

（2） ∵ $f\left(x\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，若 x 是三角形的内角，则 $0<x<\pi$， ∴ $-\frac{\pi}{3}<2x-\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$.令 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}$，得

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，$\therefore 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$ 或 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$，解得 $x=\frac{\pi}{4}$ 或 $x=\frac{7\pi}{12}$. 由已知 A，B 是 ΔABC 的内角，$A<B$ 且 $f(A)=f(B)=\frac{1}{2}$，$\therefore A=\frac{\pi}{4}$，$B=\frac{7\pi}{12}$，$\therefore C=\frac{\pi}{6}$.

注意：解答题不能直接用二次辅助角公式，中间需要一个二倍角公式来过渡.

【例 16】已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x\ (x\in R)$，若 $f(x)\geq 1$，则 x 的取值范围为（　　）

A. $\left\{x\middle|k\pi+\frac{\pi}{3}\leq x\leq k\pi+\pi,k\in Z\right\}$　　B. $\left\{x\middle|2k\pi+\frac{\pi}{3}\leq x\leq 2k\pi+\pi,k\in Z\right\}$

C. $\left\{x\middle|k\pi+\frac{\pi}{6}\leq x\leq k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in Z\right\}$　　D. $\left\{x\middle|2k\pi+\frac{\pi}{6}\leq x\leq 2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in Z\right\}$

【解析】根据题意，变形得 $f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，$f(x)\geq 1$，所以 $2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\geq 1$，即 $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\geq\frac{1}{2}$，由图象可知满足 $\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq x\leq\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ (k\in Z)$，解得 $\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq x\leq\pi+2k\pi\ (k\in Z)$.

【例 17】已知函数 $f(x)=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}\cos 2x$.

（1）求 $f(x)$ 的周期和单调递增区间；

（2）若关于 x 的方程 $f(x)-m=2$ 在 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上有解，求实数 m 的取值范围.

【解析】(1) $f(x)=2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos 2x=1+\sin 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$，$\therefore$ 周期 $T=\pi$. 由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq 2x-\frac{\pi}{3}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 解得，单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right](k\in Z)$.

(2) $\because x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore 2x-\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ $\therefore \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$\therefore f(x)$ 的值域为 $[2,3]$. 而 $f(x)=m+2$，$\therefore m+2\in[2,3]$，即 $m\in[0,1]$.

【例 18】设 $\alpha\in R$，$f(x)=\cos x(a\sin x-\cos x)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，满足 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=f(0)$，求函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{11}{24}\pi\right]$ 上的最大值和最小值.

【解析】$f(x)=\alpha\sin x\cos x-2\cos^2 x+1$　由 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=f(0)$ 得 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}=-1$，解得 $a=2\sqrt{3}$

达标训练

1.（2018•新课标III）若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\cos 2\alpha=$（　　）

A．$\frac{8}{9}$　　B．$\frac{7}{9}$　　C．$-\frac{7}{9}$　　D．$-\frac{8}{9}$

2.（2018•新课标II）若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[0,\ a]$ 是减函数，则 a 的最大值是（　　）

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．$\frac{3\pi}{4}$　　D．π

3.（2018•新课标I）已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边上有两点 $A(1,a)$，$B(2,b)$，且 $\cos 2\alpha=\frac{2}{3}$，则 $|a-b|=$（　　）

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．1

4.（2017•山东）已知 $\cos x=\frac{3}{4}$，则 $\cos 2x=$（　　）

A．$-\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$-\frac{1}{8}$　　D．$\frac{1}{8}$

5.（2017•新课标III）已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{4}{3}$，则 $\sin 2\alpha=$（　　）

A．$-\frac{7}{9}$　　B．$-\frac{2}{9}$　　C．$\frac{2}{9}$　　D．$\frac{7}{9}$

6.（2015•新课标I）$\sin 20^\circ\cos 10^\circ-\cos 160^\circ\sin 10^\circ=$（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

7.（2015•重庆）若 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，则 $\tan\beta=$（　　）

A．$\frac{1}{7}$　　B．$\frac{1}{6}$　　C．$\frac{5}{7}$　　D．$\frac{5}{6}$

8.（2015•四川）下列函数中，最小正周期为 π 且图象关于原点对称的函数是（　　）

A．$y=\cos(2x+\frac{\pi}{2})$　　B．$y=\sin(2x+\frac{\pi}{2})$　　C．$y=\sin 2x+\cos 2x$　　D．$y=\sin x+\cos x$

9.（2018•新课标II）已知 $\sin\alpha+\cos\beta=1$，$\cos\alpha+\sin\beta=0$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$________.

10.（2018•新课标II）已知 $\tan(\alpha-\frac{5\pi}{4})=\frac{1}{5}$，则 $\tan\alpha=$________.

11.（2017•新课标I）已知 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\tan\alpha=2$，则 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=$________.

12.（2017•江苏）若 $\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{6}$．则 $\tan\alpha=$________.

13.（2016•浙江）已知 $2\cos^2 x+\sin 2x=A\sin(\omega x+\varphi)+b(A>0)$，则 $A=$________，$b=$________.

14.（2016•上海）若函数 $f(x)=4\sin x+a\cos x$ 的最大值为 5，则常数 $a=$________.

15.（2016•四川）$\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=$________.

16.（2016•新课标I）已知 θ 是第四象限角，且 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$，则 $\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=$________.

17.（2015•浙江）函数 $f(x)=\sin^2 x+\sin x\cos x+1$ 的最小正周期是________，最小值是________.

18.（2015•江苏）已知 $\tan\alpha=-2$，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{7}$，则 $\tan\beta$ 的值为________.

19.（2018•北京）已知函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$．

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）若 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},\ m]$ 上的最大值为 $\frac{3}{2}$，求 m 的最小值．

20.（2018•浙江）已知角 α 的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，它的终边过点 $P(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5})$.

（1）求 $\sin(\alpha+\pi)$ 的值；

（2）若角 β 满足 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，求 $\cos\beta$ 的值.

21.（2017•北京）已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos(2x-\frac{\pi}{3})-2\sin x\cos x$.

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）求证：当 $x\in[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}]$ 时，$f(x)\geqslant-\frac{1}{2}$.

22.（2015•重庆）已知函数 $f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)\sin x-\sqrt{3}\cos^2 x$.

【例 3】已知 $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$，则 $(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)=$（　　）

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期和最大值；

A. 2　　B. -2　　C. 1　　D. -1

【解析】$\tan\alpha+\tan\beta+\tan45^\circ=\tan\alpha\tan\beta\tan45^\circ\Rightarrow\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha-\tan\beta=1\Rightarrow\tan\alpha(\tan\beta-1)-\tan\beta+1=2$，即 $(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)=2$.

（1）求 $f(\frac{5\pi}{4})$ 的值；

（2）求函数 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间.

24.（2019•浙江）设函数 $f(x)=\sin x$，$x\in R$.

（1）已知 $\theta\in[0,\ 2\pi)$，函数 $f(x+\theta)$ 是偶函数，求 θ 的值；

（2）求函数 $y=[f(x+\frac{\pi}{12})]^2+[f(x+\frac{\pi}{4})]^2$ 的值域.

专题 3　正切恒等式

秒杀秘籍：第一讲 正切恒等式 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\left(当A+B+C=k\pi时\right)$

【证明】$\because\tan\left(A+B\right)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$，$\tan C=-\tan\left(A+B\right)$ $\therefore\tan A+\tan B=-\tan C\left(1-\tan A\tan B\right)$

故 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$

【推论】$\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\dfrac{-1}{\tan\dfrac{C}{2}}=\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{B}{2}\cdot\dfrac{-1}{\tan\dfrac{C}{2}}$（当 $A+B+C=\pi$ 时）

【证明】$A+B+C=\pi\Rightarrow\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\Rightarrow\dfrac{A+B}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=0\Rightarrow\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}-\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)$

$$=-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\Rightarrow\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}-\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}=-\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

【例 1】$\tan70^\circ-\tan10^\circ-\sqrt{3}\tan70^\circ\tan10^\circ=$__________.

【解析】$\tan70^\circ+\tan\left(-10^\circ\right)+\tan\left(120^\circ\right)=\tan70^\circ\tan\left(-10^\circ\right)\tan\left(120^\circ\right)$

$\therefore\tan70^\circ-\tan10^\circ-\sqrt{3}=-\sqrt{3}\tan70^\circ\tan\left(-10^\circ\right)\Rightarrow\tan70^\circ-\tan10^\circ-\sqrt{3}\tan70^\circ\tan10^\circ=\sqrt{3}$

【例 2】已知 $\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=4+\sqrt{5}$，则 $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=$（　　）

A. $4+\sqrt{5}$　　B. $4-\sqrt{5}$　　C. $-4-\sqrt{5}$　　D. $-4+\sqrt{5}$

【解析】$\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\dfrac{\tan45^\circ-\tan\alpha}{1+\tan45^\circ\tan\alpha}=\tan\left(45^\circ-\alpha\right)=4+\sqrt{5}$，故选 A.

【例 3】已知 $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$，则 $(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)=$（　　）

A. 2　　B. -2　　C. 1　　D. -1

【解析】$\tan\alpha+\tan\beta+\tan45^\circ=\tan\alpha\tan\beta\tan45^\circ\Rightarrow\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha-\tan\beta=1\Rightarrow\tan\alpha(\tan\beta-1)-\tan\beta+1=2$，即 $(1-\tan\alpha)(1-\tan\beta)=2$.

【例 4】求 $\tan(\frac{\pi}{6}-\theta)+\tan(\frac{\pi}{6}+\theta)+\sqrt{3}\tan(\frac{\pi}{6}-\theta)\tan(\frac{\pi}{6}+\theta)$ 的值.

【解析】由于 $\frac{\pi}{6}-\theta+\frac{\pi}{6}+\theta=\frac{\pi}{3}$，故 $\tan(\frac{\pi}{6}-\theta)+\tan(\frac{\pi}{6}+\theta)+\sqrt{3}\tan(\frac{\pi}{6}-\theta)\tan(\frac{\pi}{6}+\theta)=\sqrt{3}$.

【例 5】计算 $(1+\tan 1°)(1+\tan 2°)(1+\tan 3°)\cdots(1+\tan 45°)=$__________.

【解析】根据 45°角性质可得：$(1+\tan 1°)(1+\tan 44°)=2$，$(1+\tan 2°)(1+\tan 43°)=2$，$(1+\tan 3°)(1+\tan 42°)=2$.以此类推，可以得到 $(1+\tan 1°)(1+\tan 2°)(1+\tan 3°)\cdots(1+\tan 45°)=2^{22}(1+\tan 45°)=2^{23}$.

【例 6】在锐角 ΔABC 中，$\tan A=t+1$，$\tan B=t-1$，则实数 t 的取值范围是（　　）

A. $(\sqrt{2},+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(1,\sqrt{2})$　　D. $(-1,1)$

【解析】由题意可知，锐角 ΔABC 中，$\tan A>0\Rightarrow t+1>0$，$\tan B>0\Rightarrow t-1>0$ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\Rightarrow 2t+\tan C=(t^2-1)\cdot\tan C\Rightarrow\tan C=\frac{2t}{t^2-2}$，故需满足条件 $t>\sqrt{2}$.

第二讲　二倍角定理及模型

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.　$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)$.

降幂公式：$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$;$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$；　$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}$.

模型一：令 $\sin\alpha+\cos\alpha=t$，$1+\sin 2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=t^2=2\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{4})$；$\cos 2\alpha=\pm t\sqrt{2-t^2}$

令 $\sin\alpha-\cos\alpha=t$，$1-\sin 2\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=t^2=2\sin^2(\alpha-\frac{\pi}{4})$；$\cos 2\alpha=\pm t\sqrt{2-t^2}$

模型二：形如 $\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\cos 8\alpha\cdots\cos 2^n\alpha$ 的化简，

$$\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\cos 8\alpha\cdots\cos 2^n\alpha=\frac{\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\cos 8\alpha\cdots\cos 2^n\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{1}{2^n}\frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{\sin 2\alpha}$$

【例 7】若 $\sin 2\alpha=\frac{24}{25}$，则 $\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$ 的值为（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{7}{5}$　　C. $\pm\frac{1}{5}$　　D. $\pm\frac{7}{5}$

【解析】$1+\sin 2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\left[\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\right]^2=\frac{49}{25}$　$\therefore\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\pm\frac{7}{5}$.

【例 8】已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3},\alpha\in(0,\pi)$，求 $\cos 2\alpha$.

【解析】$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$，$\alpha\in(0,\pi)\Rightarrow\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{3}$，

$\cos 2\alpha=(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{17}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{17}}{9}$.

【例 9】求值：$\cos 36°\cos 72°=$__________.

【解析】原式 $=\frac{\sin 36°\cos 36°\cos 72°}{\sin 36°}=\frac{\frac{1}{2}\sin 72°\cos 72°}{\sin 36°}=\frac{\frac{1}{4}\sin 144°}{\sin 36°}=\frac{\frac{1}{4}\sin(180°-36°)}{\sin 36°}=\frac{1}{4}$

【例 10】已知 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{3}{5}$，则 $\sin 2x=$__________.

【解析】$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)=\frac{3}{5}\Rightarrow\sin x+\cos x=\frac{3\sqrt{2}}{5}=t\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}=-\frac{7}{50}$，$\sin 2x=-\frac{7}{25}$

【例 11】已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，$0\le\alpha\le\pi$，则 $\sin2\alpha=$________，$\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=$________.

【解析】$\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{5}=t\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1-t^2}{2}=\dfrac{12}{25}\Rightarrow\sin2\alpha=\dfrac{24}{25}$，$\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin2\alpha-\cos2\alpha)$，

$\sin\alpha-\cos\alpha>0\Rightarrow\alpha>45^\circ\Rightarrow\cos2\alpha<0$，$\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{31}{25}=\dfrac{31\sqrt{2}}{50}$.

【例 12】若 $\alpha\in$（0，π），且 $3\cos2\alpha=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$，则 sin2α的值为________.

【解析】$3\cos2\alpha=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\Rightarrow3(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)\Rightarrow\cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{6}=t$

则 $\sin2\alpha=t^2-1=-\dfrac{17}{18}$.

达标训练

1.（2019•四川模拟）在 ΔABC 中，若 $\tan A\tan B=\tan A+\tan B+1$，则 $\cos C=$（　　）

A．$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

2.（2019•重庆模拟）在锐角 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．若 $a=2b\sin C$，则 $\tan A+\tan B+\tan C$ 的最小值是（　　）

A．4　　B．$3\sqrt{3}$　　C．8　　D．$6\sqrt{3}$

3.（2018•云南期末）$\tan36^\circ+\tan84^\circ-\sqrt{3}\tan36^\circ\tan84^\circ=$（　　）

A．$-\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

4.（2018•武汉期末）$\sqrt{3}\tan12^\circ+\tan60^\circ\tan18^\circ+\tan12^\circ\tan18^\circ=$（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．1　　D．3

5.（2018•青羊期末）$\tan21^\circ+\tan24^\circ+\tan21^\circ\tan24^\circ=$（　　）

A．1　　B．-1　　C．$\sqrt{3}$　　D．$-\sqrt{3}$

6.（2018•贵阳期中）ΔABC 的三个内角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，若 $c=2\sqrt{3}$，$\tan A+\tan B=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan A\tan B$，则 ΔABC 的面积的取值范围是（　　）

A．$[\sqrt{3},+\infty)$　　B．$(0,\sqrt{3}]$　　C．$(\dfrac{1}{2},\sqrt{3}]$　　D．$(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$

7.（2018•江西期中）在 ΔABC 中，角 A，B，C 所对的边是 a，b，c，$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$，且 $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=0$，若 $\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B}=\dfrac{m}{\tan C}$，则实数 m 的值是（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{1}{5}$

8.（2018•武汉模拟）在 ΔABC 中，$C=60^\circ$，$\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}=1$，则 $\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{B}{2}=$________.

9.（2018•金安期末）在 ΔABC 中，若 $\tan A+\tan B+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\tan A\tan B$，则角 $C=$________.

10.（2018•金水期中）在 ΔABC 中，已知三内角满足 $2B=A+C$，则 $\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{C}{2}+\sqrt{3}\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}$ 的值为________.

11.（2018•上海期中）在锐角 ΔABC 中，若 $\sin A=3\sin B\sin C$，则 $\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$ 的最小值是________.

12.（2017•浙江月考）在 ΔABC 中，$\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}=1$，则 $\tan\dfrac{C}{2}$ 的取值范围为________.

13.（2018•江苏模拟）在锐角 ΔABC 中，若 $\tan A$，$\tan B$，$\tan C$ 依次成等差数列，则 $\tan A\cdot\tan C$ 的值为________.

14.（2017•江苏模拟）ΔABC 中，角 A，B 满足 $\tan(A+B)=3\tan A$，则 $\tan B$ 取到最大值时角 $C=$______.

15.（2018•甘肃二模）在 ΔABC 中，若 $\tan A:\tan B:\tan C=1:2:3$，则 $\angle A=$________.

16.（2018•杭州月考）已知 ΔABC 中，$\tan A$，$\tan B$ 是方程 $x^2+ax+4=0$ 的两个实数根.

（1）若 $a=-8$，求 $\tan C$ 的值；

（2）求 $\tan C$ 的最小值，并指出此时对应的 $\tan A$，$\tan B$ 的值.

17.（2018•四川模拟）在锐角 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $b=\frac{a}{2}\sin C$.

（1）求 $\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}$ 的值；

（2）求 $\tan B$ 的最大值.

专题 4　ω 函数之卡根法

表一：正弦函数 $y=\sin x$ 与 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像性质关系

	$y=\sin x$	$y=A\sin(\omega x+\varphi)$
周期	2π	$\frac{2\pi}{\omega}$
最大值	1，当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 取得	A，当 $x=\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}$ 取得
最小值	-1，当 $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ 取得	$-A$，当 $x=\frac{2k\pi+\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega}$ 取得
单调增区间	$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{2k\pi-\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega},\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}\right]$
单调减区间	$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega},\frac{2k\pi+\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega}\right]$
对称轴	$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$	$x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}$
对称中心	$(k\pi,0)$	$\left(\frac{k\pi-\varphi}{\omega},0\right)$

表二：余弦函数 $y=\cos x$ 与 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的图像性质关系

	$y=\cos x$	$y=A\cos(\omega x+\varphi)$
周期	2π	$\frac{2\pi}{\omega}$
最大值	1，当 $x=2k\pi$ 取得	A，当 $x=\frac{2k\pi-\varphi}{\omega}$ 取得
最小值	-1，当 $x=2k\pi+\pi$ 取得	$-A$，当 $x=\frac{2k\pi+\pi-\varphi}{\omega}$ 取得
单调增区间	$[2k\pi-\pi,2k\pi]$	$\left[\frac{2k\pi-\pi-\varphi}{\omega},\frac{2k\pi-\varphi}{\omega}\right]$
单调减区间	$[2k\pi,2k\pi+\pi]$	$\left[\frac{2k\pi-\varphi}{\omega},\frac{2k\pi+\pi-\varphi}{\omega}\right]$
对称轴	$x=k\pi$	$x=\frac{k\pi-\varphi}{\omega}$
对称中心	$\left(k\pi+\frac{\pi}{2},0\right)$	$(\frac{k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega},0)$

根据上一讲的内容，这一讲主要针对一些动态的三角函数涉及 ω 的取值范围题型，进行卡根法来破解.

第一讲 ω为定值卡根

此类型题就是根据题意，给定的区间宽度 $|b-a|$ 与函数周期 $nT(n\in Z)$ 的关系建立即可.

定理：任意对称轴（对称中心）之间的间距为 $\dfrac{nT}{2}$；最大值与最小值的水平间距为 $\dfrac{(2n-1)T}{2}$.

任意对称轴与对称中心之间的间距为 $\dfrac{(2n-1)T}{4}$；以上情况当 $n=1$ 时 ω 取得最小值.

【例 1】（2019•新课标 II）若 $x_1=\dfrac{\pi}{4}$，$x_2=\dfrac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 两个相邻的极值点，则 $\omega=$（　　）

A．2　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．1　　D．$\dfrac{1}{2}$

【解析】 因为 $x_1=\dfrac{\pi}{4}$，$x_2=\dfrac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 两个相邻的极值点，故 $|b-a|=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，

即 $\dfrac{T}{2}=\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{\omega}$，所以 ω=2，故选 A.

【例 2】（2017•天津）设函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in R$，其中 $\omega>0$，$|\varphi|<\pi$．若 $f(\dfrac{5\pi}{8})=2$，$f(\dfrac{11\pi}{8})=0$，且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π，则（　　）

A．$\omega=\dfrac{2}{3}$，$\varphi=\dfrac{\pi}{12}$　　B．$\omega=\dfrac{2}{3}$，$\varphi=-\dfrac{11\pi}{12}$

C．$\omega=\dfrac{1}{3}$，$\varphi=-\dfrac{11\pi}{24}$　　D．$\omega=\dfrac{1}{3}$，$\varphi=\dfrac{7\pi}{24}$

【解析】 由 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π，得 $\dfrac{T}{4}>\dfrac{\pi}{2}$，又 $f(\dfrac{5\pi}{8})=2$，$f(\dfrac{11\pi}{8})=0$，得 $\dfrac{T}{4}=\dfrac{11\pi}{8}-\dfrac{5\pi}{8}=\dfrac{3\pi}{4}$，所以 $T=3\pi$，则 $\dfrac{2\pi}{\omega}=3\pi$，即 $\omega=\dfrac{2}{3}$，对比 $y=\sin x$ 图像可知，当 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时取得最大值，故 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 时，当 $x\dfrac{2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}=\dfrac{5\pi}{8}\Rightarrow\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{12}$，因为 $|\varphi|<\pi$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{12}$，故选择 A.

注意：表一中要求对 $y=\sin x$ 卡住根 x_0，再转换为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的根为 x，两者之间通过 $x=\dfrac{x_0-\varphi}{\omega}$ 来转换.

【例 3】（2015•天津）已知函数 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$，$x\in R$，若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\omega,\omega)$ 内单调递增，且函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\omega$ 对称，则 ω 的值为________.

【解析】 因为 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x=\sqrt{2}\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{4})$，且函数 $f(x)$ 在区间 $(-\omega,\omega)$ 内单调递增，ω>0，所以

$\left[\dfrac{2k\pi-\dfrac{3\pi}{4}}{\omega}-\dfrac{2k\pi+\dfrac{\pi}{4}}{\omega}\right]$，故可得：$-\omega\geq\dfrac{2k\pi-\dfrac{3\pi}{4}}{\omega}(k\in Z)$①，$\omega\leq\dfrac{2k\pi+\dfrac{\pi}{4}}{\omega}(k\in Z)$②所以解的 $0<\omega^2\leq\dfrac{3\pi}{4}-2k\pi(k\in Z)$ 且 $0<\omega^2\leq 2k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k\in Z)$，即 $-\dfrac{1}{8}<k<\dfrac{3}{8}(k\in Z)$，所以 $k=0$，又因为由 $\omega x+\dfrac{\pi}{4}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$，可解得函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\dfrac{k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}}{\omega}=\dfrac{k\pi+\dfrac{\pi}{4}}{\omega}(k\in Z)$，所以由函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\omega$ 对称，可得 $\omega^2=\dfrac{\pi}{4}$，即 $\omega=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.故答案为 $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

【例 4】（2014•北京）设函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A$，$\omega$，$\varphi$ 是常数，$A>0$，$\omega>0)$ 若 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}]$ 上具有单调性，且 $f(\frac{\pi}{2})=f(\frac{2\pi}{3})=-f(\frac{\pi}{6})$，则 $f(x)$ 的最小正周期为_________.

【解析】由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 可知函数 $f\left(x\right)$ 的一条对称轴为 $x=\dfrac{\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{7\pi}{12}$. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-f\left(\frac{\pi}{6}\right)$,则 $f\left(x\right)$ 有对称中心 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$，由于 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性，则 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\le\frac{1}{2}T\Rightarrow T\ge\frac{2\pi}{3}$，从而 $\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{T}{4}\Rightarrow T=\pi$.故答案为 π.

第二讲　限定周期的 ω 卡

通常在固定的一两个周期内，给予单调性的限定或者值域的限定，对 ω 或者 φ 会有一个区间限定，此类型题就是要卡住两个临界点，通常可以找出 $y=\sin x$ 的范围，再推导至 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 当中.

常见的卡根数学语言转化如下：

① $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 (a,b) 内单调 $\Rightarrow\frac{T}{2}\ge|b-a|$ 且 $\dfrac{k\pi-\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}\le a$，$b\le\dfrac{k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}$（图 1）

同理，$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 $[a,b]$ 内单调 $\Rightarrow\frac{T}{2}\ge|b-a|$ 且 $\dfrac{k\pi-\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}\le a$，$b\le\dfrac{k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}$

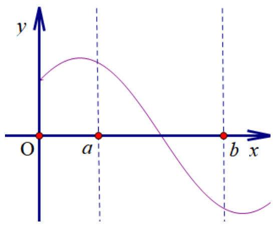


图 1

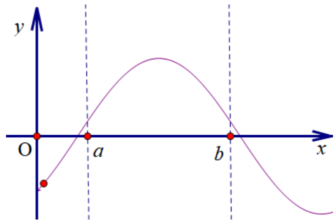


图 2

② $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 (a,b) 内没有零点 $\Rightarrow\frac{T}{2}\ge|b-a|$ 且 $\dfrac{k\pi-\varphi}{\omega}\le a$，$b\le\dfrac{(k+1)\pi-\varphi}{\omega}$（图 2）；

同理，$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 $[a,b]$ 内没有零点 $\Rightarrow\frac{T}{2}>|b-a|$ 且 $\dfrac{k\pi-\varphi}{\omega}<a$，$b<\dfrac{(k+1)\pi-\varphi}{\omega}$

关于在给定范围内单调或者没有零点的问题，卡根的范围都在半个周期，区间内单调的开区间和闭区间没有区别，没有零点问题的开区间和闭区间的区别在于是否加上等号，很多考题就喜欢在这个细节上体现学生的基本功．所以，我们给出了模型分解，那么请大家思考，如果区间是 $(a,b]$ 或者是 $[a,b)$ 呢？如果题目所说在区间内是单调递增或者单调递减呢？请读者自己分析模型，或者通过刷此类型的题目不断累积经验.

另外，区间内单调或者无零点叫做内卡根，即 (a,b) 卡在区间 $[\frac{x_1-\varphi}{\omega},\frac{x_2-\varphi}{\omega}]$ 内部.

③ $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 (a,b) 内有 n 个零点 $\Rightarrow\frac{(n+1)T}{2}\ge|b-a|>\frac{(n-1)T}{2}$

且 $\begin{cases}\dfrac{(k-1)\pi-\varphi}{\omega}\le a<\dfrac{k\pi-\varphi}{\omega}\\ \dfrac{(k+n)\pi-\varphi}{\omega}<b\le\dfrac{(k+n+1)\pi-\varphi}{\omega}\end{cases}$（图 3 图 4）

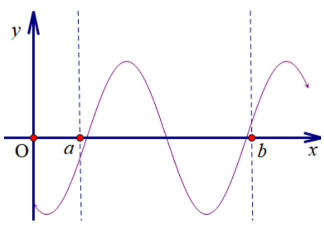


图 3

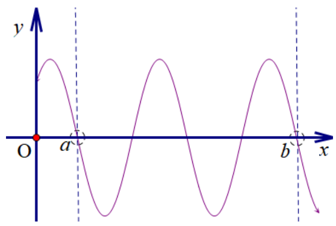


图 4

同理 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 $[a,b]$ 内有 n 个零点 $\Rightarrow\frac{(n+1)T}{2}>|b-a|\ge\frac{(n-1)T}{2}$

且$\begin{cases} \dfrac{(k-1)\pi-\varphi}{\omega}<a\le\dfrac{k\pi-\varphi}{\omega} \\ \dfrac{(k+n)\pi-\varphi}{\omega}\le b<\dfrac{(k+n+1)\pi-\varphi}{\omega} \end{cases}$ （图 5 图 6）

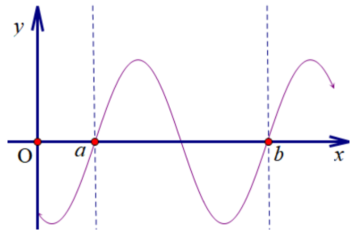


图 5

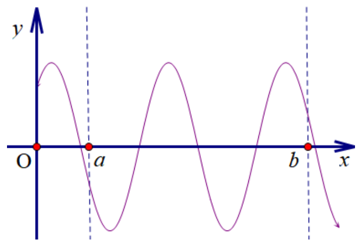
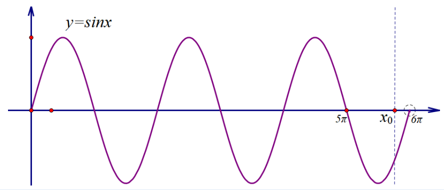


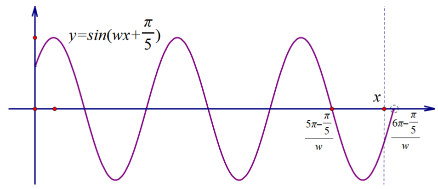
图 6

关于在给定范围内出现零点个数的问题，卡根的范围都在一个周期，即左端点卡半个，右端点卡半个的情形，而开区间和闭区间的区别也仅仅是加上等号而已．开区间是外取等，闭区间则是内取等．请大家思考关于 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)=m$ 在区间的零点问题是如何解决的呢？我们会在后面的例题进行阐述．

【例 5】（2019•新课标III）设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{5})(\omega>0)$，已知 $f(x)$ 在 $[0，2\pi]$ 有且仅有 5 个零点．下述四个结论：① $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 3 个极大值点；② $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 2 个极小值点；③ $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{10})$ 单调递增；④ ω 的取值范围是 $[\dfrac{12}{5}，\dfrac{29}{10})$．其中所有正确结论的编号是（　　）

A．①④　　B．②③　　C．①②③　　D．①③④





【解析】根据 $y=\sin x$ 图像可知，除了原点以外，正半轴出现 5 个零点时，一定有 $5\pi\le x_0<6\pi$，故当 $x\in[0,2\pi]$ 时，$f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 有且仅有 5 个零点，一定有 $\dfrac{0-\frac{\pi}{5}}{\omega}<0\le\dfrac{\pi-\frac{\pi}{5}}{\omega}$ 且 $\dfrac{5\pi-\frac{\pi}{5}}{\omega}<2\pi\le\dfrac{6\pi-\frac{\pi}{5}}{\omega}$，所以 $\dfrac{12}{5}<\omega\le\dfrac{29}{10}$，故④正确，根据图像即可判断②不正确，因为可以出现三个极小值点，因此由选项可知只需判断③是否正确即可得到答案，根据 $y=\sin x$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 递增，故可知若 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{10}\right)$ 单调递增，则一定有 $\dfrac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}}{\omega}>\dfrac{\pi}{10}$，即 $\omega<3$，因为 $\dfrac{12}{5}\le\omega<\dfrac{29}{10}$，故③正确，故选 D.

注意：在一些题目中，由于端点 $a=0$ 且 $\varphi>0$ 的时候只需考虑端点 b，原因就是 $\dfrac{0-\varphi}{\omega}\le0<\dfrac{\pi-\varphi}{\omega}$ 恒成立

【例 6】（2019•葫芦岛月考）已知函数 $f(x)=\sqrt{5}\sin(\omega x-\dfrac{\pi}{3})(\omega>0)$，若 $f(x)$ 在区间 $(\pi，2\pi]$ 内没有零点，则 ω 的取值范围是（　　）

A．$(0,\dfrac{1}{6})$　　B．$(0,\dfrac{1}{6})\cup[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3})$

C．$(0,\dfrac{1}{6})\cup[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}]$　　D．$(0,\dfrac{2}{3})$

【解析】一般给了区间，先卡住区间来限定 ω 的范围，此题由于区间 $(\pi,2\pi]$ 内没有零点，故 $\dfrac{T}{2}>\pi\Rightarrow T>2\pi$，由此可得在区间 $(0,\pi]$ 内可能有一个零点或者没有零点，此举判断可以大大减少计算，

我们只需知道 $y=\sin x$ 的根的分布即可对 $f(x)=\sqrt{5}\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 进行卡根布控.5

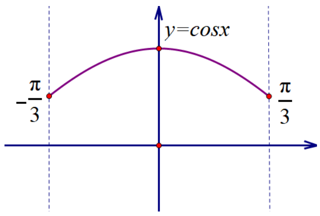
解法一　由于 $f(x)=\sqrt{5}\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$，$f(x)$ 由 $f(x)=\sqrt{5}\sin(\omega x)(\omega>0)$ 向右平移 $\dfrac{\pi}{3\omega}$ 个单位得来，故根据如左图所示，将 $y=\sin x$ 中的 $x=0$ 和 $x=\pi$ 代入卡根得：$\dfrac{0+\frac{\pi}{3}}{}\le\pi$，且 $\dfrac{\pi+\frac{\pi}{3}}{}>2\pi$，所以0<ω<$\dfrac{1}{6}$，故 ω 的取值范围为: $\left(0,\dfrac{1}{6}\right)\cup\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$,故选 B.

解法二　由于 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi]$ 内没有零点，故根据卡根定理得：$\begin{cases}\pi<\dfrac{T}{2}=\dfrac{T}{\omega}\Rightarrow\omega<1\\ \pi\ge\dfrac{k\pi+\frac{\pi}{3}}{\omega}\Rightarrow\omega\ge k+\dfrac{1}{3}\\ 2\pi<\dfrac{(k+1)\pi+\frac{\pi}{3}}{\omega}\Rightarrow\omega<\dfrac{k}{2}+\dfrac{2}{3}\end{cases}$

显然 $k=0$ 和 $k=-1$ 时符合条件，所以 ω 的取值范围为: $\left(0,\dfrac{1}{6}\right)\cup\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$,故选 B.

【例 7】(2019•九江三模)函数 $f(x)=\cos(\omega x-\dfrac{\pi}{3})(\omega>0)$ 在 $[0,\pi]$ 上的值域为 $[\dfrac{1}{2},1]$，则 ω 的取值范围是(　　)

A. $[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}]$　　B. $[0，\dfrac{2}{3}]$　　C. $[\dfrac{2}{3},1]$　　D. $[\dfrac{1}{3},1]$



解析　如图，根据余弦函数 $y=\cos x$ 的值域为 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 时，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right]$，因为 $x\in[0,\pi]$，又 $f(0)=\dfrac{1}{2}$，故右边区间卡根位于 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 范围内，即 $\dfrac{0+\frac{\pi}{3}}{\omega}\le\pi\le\dfrac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}}{\omega}$，所以 $\dfrac{1}{3}\le\omega\le\dfrac{2}{3}$，故选 A.

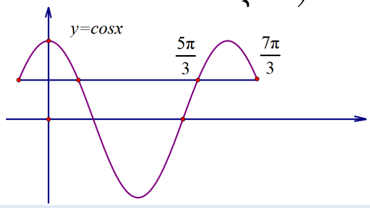
注意：定义域从零开始的函数往往都是 $k=0$ 开始的周期，故直接用五点法进行相应位置卡根，我们可以参考下一题也是如此.

【例 8】(2019•深圳二模）已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}]$ 上恰有一个最大值点和最小值点，则实数 ω 的取值范围为（　　）

A. $[\dfrac{8}{3},7)$　　B. $[\dfrac{8}{3},4)$　　C. $[4,\dfrac{20}{3})$　　D. $(\dfrac{20}{3},7)$

解析　函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$。由于函数 $y=2\sin x$ 两个相邻最大值点和最小值点为 $\dfrac{\pi}{2}$ 和 $-\dfrac{\pi}{2}$，故对此范围进行卡根，$\dfrac{-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}{\omega}\ge-\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\omega\ge\dfrac{8}{3}$ 且 $\dfrac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}{\omega}\le\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow\omega\ge1$；考虑其它最值不能出现，故再进行二次卡根，相邻 $-\dfrac{\pi}{2}$ 的最大值为 $-\dfrac{3\pi}{2}$，相邻 $\dfrac{\pi}{2}$ 的最大值为 $\dfrac{3\pi}{2}$，故 $\dfrac{-\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}{\omega}<-\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\omega<\dfrac{20}{3}$ 且 $\dfrac{\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}{\omega}>\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow\omega<4$，即 $\dfrac{8}{3}\le\omega<4$，故选 B.

【例 9】（2018•湖北模拟）已知函数 $f(x)=\cos(\omega x-\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}(\omega>0)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上恰有三个零点，则 ω 的取值范围是__________.



【解析】由题意：转化为函数 $y=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$ 与函数 $y=\frac{1}{2}$ 的图像在区间 $\left[0,\pi\right]$ 上恰有三个交点的问题，当，可得 $y=\frac{1}{2}$。即 $x\in\left[0,\pi\right]$ 时函数 $y=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$ 与函数 $y=\frac{1}{2}$ 在区间上还有两个交点的问题，根据 $y=\cos x=\frac{1}{2}$ 时，$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$，除了左端点有零点外，$\frac{5}{3}\pi\le x<\frac{7}{3}\pi$ 时必定有两交点，如图所示，所以 $\frac{\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{3}}{\omega}\le\pi<\frac{\frac{7\pi}{3}+\frac{\pi}{3}}{\omega}$，解的 $2\le\omega<\frac{8}{3}$，所以 ω 的取值范围是 $\left[2,\frac{8}{3}\right)$，故答案为 $\left[2,\frac{8}{3}\right)$.

【例 10】（2018•湖北模拟）已知函数 $f(x)=\cos(\omega x-\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 且 $f(\frac{2\pi}{3})=f(\frac{5\pi}{6})$，若 $f(x)$ 在区间 $(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6})$ 上有最大值，无最小值，则 ω 的最大值为（　　）

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{28}{9}$　　C. $\frac{52}{9}$　　D. $\frac{100}{9}$

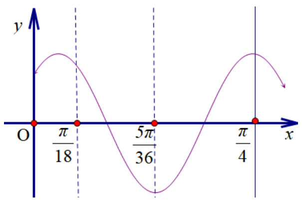
【解析】 函数 $f\left(x\right)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 且 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$，所以直线 $x=\frac{\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}}{\omega}=\frac{3\pi}{4}$ 为 $f\left(x\right)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的一条对称轴，且取得最大值；所以 $\frac{3\pi}{4}=\frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{\omega}$，$k\in Z$ 所以 $\omega=\frac{8}{3}k+\frac{4}{9}$，$k\in Z$，又 $\omega>0$，且 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$ 上有最大值；无最小值，所以 $T>\frac{5\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$，即 $\frac{2\pi}{\omega}>\frac{\pi}{6}$，所以 $\omega<12$，故当 $k=8$ 时，$\omega=\frac{32}{3}+\frac{4}{9}=\frac{100}{9}$ 为最大值，故选 D.

第三讲 已知一条对称轴和一个对称中心的ω卡根

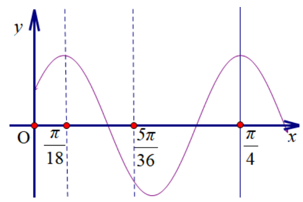
由于对称轴和对称中心的水平距离为 $\frac{(2n-1)}{4}T$，设计 $\frac{(2n-1)}{4}T=\frac{(2n-1)\pi}{2\omega}=|b-a|$，构造出 ω 函数的形式，再根据单调区间或者最值区间所处的范围进行卡根.

【例 11】（2016•新课标I）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0$，$|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2})$，$x=-\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点，$x=\frac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图象的对称轴，且 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}$，$\frac{5\pi}{36})$ 上单调，则 ω 的最大值为（　　）

A. 11　　B. 9　　C. 7　　D. 5



例 11 图 1



例 11 图 2

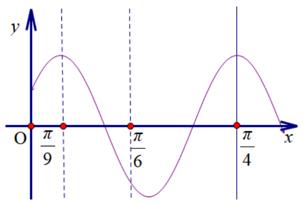
【解析】因为 $x=-\frac{\pi}{4}$ 为 $f\left(x\right)$ 的零点，$x=\frac{\pi}{4}$ 为 $f\left(x\right)$ 图像的对称轴，所以 $\frac{2n-1}{4}\cdot T=\frac{\pi}{2}$，即 $\frac{2n-1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$，$\left(n\in N\right)$ 即 $\omega=2n-1$，$\left(n\in N\right)$，即 ω 为正奇数.

解法一　因为 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$ 上单调，则 $\dfrac{5\pi}{36}-\dfrac{\pi}{18}=\dfrac{\pi}{12}\le\dfrac{T}{2}$，即 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}\ge\dfrac{\pi}{6}$，解得 $\omega\le 12$；当 $\omega=11$ 时，$\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\varphi}{11}$，$k\in Z$，因为 $|\varphi|\le\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$，此时由于对称轴 $x=\dfrac{k\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}}{11}$，当 $k=0$ 时，$x=\dfrac{3\pi}{44}\in\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$，所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$ 不单调，不满足题意；当 $\omega=9$ 时，$\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\varphi}{9}$，$k\in Z$，因为 $|\varphi|\le\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，此时 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$ 单调，满足题意；所以 ω 的最大值为 9，故选 B.

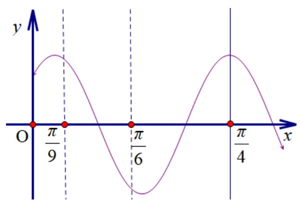
解法二　作图卡根，由于 $\dfrac{T}{2}\ge\dfrac{\pi}{12}$，故 $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{5\pi}{36}=\dfrac{\pi}{9}\ge\dfrac{T}{2}\Rightarrow\omega\ge 9$（如图 1），$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{18}=\dfrac{7\pi}{36}\le T\Rightarrow\omega\le\dfrac{72}{7}$（如图 2），故 $9\le\omega\le\dfrac{72}{7}$，由于 $\omega=2n-1$，所以 ω 最大值为 9，故选 B.

【例 12】（2019•洛阳月考）已知函数 $f(x)=A\sin(\varphi x+\varphi)(A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$，$x=-\dfrac{\pi}{4}$ 是函数的一个零点，且 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 是其图象的一条对称轴．若 $(\dfrac{\pi}{9},\dfrac{\pi}{6})$ 是 $f(x)$ 的一个单调区间，则 ω 的最大值为（　　）

A．18　　B．17　　C．15　　D．13



例 12 图 1



例 12 图 2

【解析】　由题意，得 $\dfrac{2k+1}{4}T=\dfrac{\pi}{4}-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{2}\left(k\in Z\right)$，所以 $T=\dfrac{2\pi}{2k+1}\left(k\in Z\right)$．又 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=2k+1\left(k\in Z\right)$．又因为 $\left(\dfrac{\pi}{9},\dfrac{\pi}{6}\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的一个单调区间，则 $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{9}\le\dfrac{T}{2}$，即 $T\ge\dfrac{\pi}{9}$．因为 $T=\dfrac{2\pi}{2k+1}$，所以 $2k+1\le 18$，即 $k\le 8.5$．

如图 1，$\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{9}\le\dfrac{T}{2}$，即 $\dfrac{\pi}{\omega}\ge\dfrac{\pi}{18}\Rightarrow\omega\le 18$，$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\ge\dfrac{T}{2}\Rightarrow\dfrac{\pi}{12}\ge\dfrac{\pi}{\omega}\Rightarrow\omega\ge 12$，由于半周期卡根的取值范围大，故需要进行一个周期的卡根．如图 2，即 $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{9}\le T\Rightarrow\dfrac{5\pi}{36}\le\dfrac{2\pi}{\omega}\Rightarrow\omega\le\dfrac{72}{5}=14.4$，所以只有 $\omega=13$ 符合题意，故选 D.

总结：关于卡根法，通常先进行 ω 的形式控制，即 $\dfrac{2n-1}{4}T=\dfrac{2n-1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{\omega}=|b-a|$ 来卡住形式，再利用三点控制，任意相邻区间卡住半周期，通常是一边大于半周期，另一边小于半周期，如果发现卡住的空间太大，再考虑整个周期的卡根，这样大大简化了计算．

达标训练

1.（2019•丹东二模）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$，若 $x=-\dfrac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴，$(\dfrac{\pi}{4},0)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心，则（　　）

A．$\omega=4k+1(k\in N)$　　B．$\omega=4k+3(k\in N)$　　C．$\omega=2k+1(k\in N)$　　D．$\omega=2k(k\in N^{*})$

2.（2019•珠海二模）函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 在区间 $(\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2})$ 上的最大值为1，则下列 φ 的取值不可能为（　　）

A．0　　B．$\frac{\pi}{12}$　　C．$-\frac{\pi}{3}$　　D．$-\frac{\pi}{2}$

3．(2019•茂名模拟）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ 的最小正周期为 π，且 $f(x)$ 是 $(\frac{\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{5})$ 上的单调函数，则 φ 的取值范围是（　　）

A．$(-\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{6}]$　　B．$(-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{6}]$　　C．$[-\frac{\pi}{6}$，$-\frac{\pi}{10}]$　　D．$[-\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2})$

4．(2019•长春二模）定义在 $[0$，$\pi]$ 上的函数 $y=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 有零点，且值域 $M\subseteq[-\frac{1}{2}$，$+\infty)$，则 ω 的取值范围是（　　）

A．$[\frac{1}{2}$，$\frac{4}{3}]$　　B．$[\frac{4}{3}$，$2]$　　C．$[\frac{1}{6}$，$\frac{4}{3}]$　　D．$[\frac{1}{6}$，$2]$

5．(2018•定远期末）已知函数 $y=3\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ 的定义域为 $[a$，$b]$，值域为 $[-1$，$3]$，则 $b-a$ 的值可能是（　　）

A．$\frac{\pi}{3}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．$\frac{3\pi}{4}$　　D．π

6．(2018•吉林期末）已知函数 $f(x)=3\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，若函数 $y=f^2(x)-(m-1)f(x)-m$ 在 $[0$，$\frac{\pi}{2}]$ 上有 3 个零点，则 m 的取值范围为（　　）

A．$[\frac{3}{2}$，$3)$　　B．$[-\frac{3}{2}$，$3)$　　C．$[-\frac{3}{2}$，$\frac{3}{2})$　　D．$[\frac{3}{2}$，$3]$

7．(2018•宿州期末）已知 $\omega>0$，函数 $f(x)=\sin\omega x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}]$ 上恰有 9 个零点，那么 ω 的取值范围为（　　）

A．$[16$，$20)$　　B．$(16$，$20]$　　C．$(16,24)$　　D．$[16$，$24]$

8．(2018•东湖期中）若函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$ $(\omega>0)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有最值，则 ω 的取值范围是（　　）

A．$(0$，$\frac{1}{12}]\cup[\frac{1}{4}$，$\frac{2}{3}]$　　B．$(0$，$\frac{1}{6}]\cup[\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}]$

C．$[\frac{1}{4}$，$\frac{2}{3}]$　　D．$[\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}]$

9．(2018•如皋月考）已知函数 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})-m$，$x\in[0,\frac{7\pi}{3}]$ 有三个不同的零点 x_1，x_2，x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，则 $x_1+2x_2+x_3$ 的值为（　　）

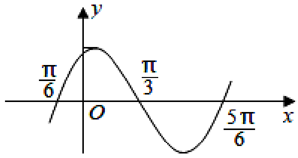
A．$\frac{10\pi}{3}$　　B．4π　　C．$\frac{11\pi}{3}$　　D．不能确定

10．(2018•佛山二模）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{4})(\omega>0)$ 的图象在区间 $(1,2)$ 上不单调，则 ω 的取值范围为（　　）

A．$(\frac{3\pi}{8}$，$+\infty)$　　B．$(\frac{3\pi}{8}$，$\frac{3\pi}{4})\cup(\frac{7\pi}{8}$，$+\infty)$

C．$(\frac{3\pi}{8}$，$\frac{7\pi}{8})\cup(\frac{7\pi}{4}$，$+\infty)$　　D．$(\frac{3\pi}{4}$，$+\infty)$

11．（2018•河东模拟）已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象如图，当 $x\in[-\frac{\pi}{12},\frac{13\pi}{12}]$ 时，$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与直线 $y=m$ 的三个交点的横坐标分别为 x_1，x_2，x_3，其中 $x_1<x_2<x_3$，那么 $x_1+2x_2+x_3$ 的值为（　　）



A．$\frac{5\pi}{3}$　　B．$\frac{5\pi}{6}$　　C．$\frac{10\pi}{3}$　　D．$\frac{4\pi}{3}$

12．（2018•安庆模拟）已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的最大值为 2，相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，且 $f(\frac{\pi}{6}-x)=f(\frac{\pi}{6}+x)$，且当 $x\in[-\frac{\pi}{4},\partial]$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3},2]$，则 ∂ 的取值范围为（　　）

A．$[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{12}]$　　B．$[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12}]$　　C．$[-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{12}]$　　D．$[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12}]$

13．（2018•广州一模）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}$，$\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增，则 ω 的取值范围为（　　）

A．$(0$，$\frac{8}{3}]$　　B．$(0$，$\frac{1}{2}]$　　C．$[\frac{1}{2}$，$\frac{8}{3}]$　　D．$[\frac{3}{8}$，$2]$

14．（2019•天津月考）已知函数 $f(x)=-2\sin(2x+\varphi)(|\varphi|<\pi)$，若 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{5},\frac{5}{8}\pi)$ 上单调递增，则 φ 的取值范围是（　　）

A．$[-\frac{9}{10}\pi,-\frac{3}{10}\pi]$　　B．$[\frac{2}{5}\pi,\frac{9}{10}\pi]$

C．$[\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{4}]$　　D．$[-\pi,-\frac{\pi}{10}]\cup(\frac{\pi}{4},\pi)$

15．（2019•太原月考）已知函数 $f(x)=\sin\omega x-\cos\omega x(\omega>\frac{1}{4},x\in R)$，若 $f(x)$ 的图象的任意一条对称轴与 x 轴的交点的横坐标都不属于区间 $(2\pi,3\pi)$，则 ω 的取值范围是（　　）

A．$(\frac{3}{8},\frac{7}{12})$　　B．$[\frac{3}{8},\frac{11}{12}]$

C．$(\frac{3}{8},\frac{7}{12})\cup(\frac{7}{8},\frac{11}{12})$　　D．$[\frac{3}{8},\frac{7}{12}]\cup[\frac{7}{8},\frac{11}{12}]$

16．（2018•株洲二模）已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)+1(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2})$，其图象与直线 $y=3$ 相邻两个交点的距离为 π，若 $f(x)>2$ 对 $\forall x\in(\frac{\pi}{24},\frac{\pi}{3})$ 恒成立，则 φ 的取值范围是（　　）

A．$(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$　　B．$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$　　C．$(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3})$　　D．$[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}]$

17.（2019•浙江模拟）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2})$，$x=-\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点，$x=\frac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图象的对称轴，且 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$ 单调，则 ω 的最大值为（　　）

A．12　　B．11　　C．10　　D．9

18.（2018•湖北模拟）已知函数 $f(x)=\cos(\omega x-\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 且 $f(\frac{2\pi}{3})=f(\frac{5\pi}{6})$，若 $f(x)$ 在区间 $(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6})$ 上有最大值，无最小值，则 ω 的最大值为（　　）

A．$\frac{4}{9}$　　B．$\frac{28}{9}$　　C．$\frac{52}{9}$　　D．$\frac{100}{9}$

19.（2019•芜湖模拟）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，其中 $\omega>0$，$|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点：且 $f(x)\leqslant|f(\frac{\pi}{4})|$ 恒成立，$f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{24})$ 上有最小值无最大值，则 ω 的最大值是（　　）

A．11　　B．13　　C．15　　D．17

20.（2019•小店期中）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\ 0<\varphi<\pi)$ 的图象关于 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，$(-\frac{\pi}{6},0)$ 是函数 $y=f(x)$ 的一个对称中心，且 $y=f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{6})$ 上单调，则 ω 的最大值为（　　）

A．9　　B．7　　C．5　　D．3

21.（2019•日照期中）已知函数 $f(x)=3\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$，$f(-\frac{\pi}{3})=0$，对 $x\in R$ 恒有 $f(x)\leqslant|f(\frac{\pi}{3})|$，且在区间 $(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5})$ 上有且只有一个 x_1 使 $f(x_1)=3$，则 ω 的最大值为（　　）

A．$\frac{57}{4}$　　B．$\frac{105}{4}$　　C．$\frac{111}{4}$　　D．$\frac{117}{4}$

22.（2019•衡水金卷联考）已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0,\ |\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2})$，两个等式：$f(-\frac{\pi}{4}+x)-f(-\frac{\pi}{4}-x)=0$，$f(\frac{\pi}{4}-x)+f(\frac{\pi}{4}+x)=0$ 对任意的实数均恒成立，且 $f(x)$ 在 $(0,\frac{3\pi}{16})$ 上单调，则 ω 的最大值为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

23.（2019•湛江一模）已知函数 $f(x)=\cos\omega x+\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 在 $[0,\pi]$ 上恰有一个最大值点和两个零点，则 ω 的取值范围是_________.

24.（2019•承德期末）已知函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)$，满足函数 $y=f(x-\frac{\pi}{12})$ 是奇函数，且当 $|\varphi|$ 取最小值时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},\frac{a}{2}]$ 和 $[3a,\frac{7\pi}{6}]$ 上均单调递增，则实数 a 的取值范围为_________.

25.（2019•定远一模）已知函数 $f(x)=\sin^2\frac{\omega x}{2}+\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}(\omega>0)$，若 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有极值点，则 ω 的取值范围是_________.

专题 5 周期函数

第一讲 周期函数与函数迭代

如果函数 $f(x)$对于定义域内任意的x，存在一个不等于0 的常数T，使得$f\ (x+T\ )=f(x)$恒成立，则称函数$f(x)$是周期函数，T是它的一个周期．一般情况下，如果T是函数$f(x)$的周期，则$kT(k\in N_{+})$也是$f(x)$的周期．

（1）若 $f(x+a)=f(x+b)$ 或 $f(x-a)=f(x-b)$ ，则 $T=|b-a|$

证明：$\because f(x+a)=f(x+b)$，$\therefore f(x)=f(x-a+a)=f(x-a+b)$，$\therefore T=|b-a|$

$\because f(x-a)=f(x-b)$，$\therefore f(x)=f(x+a-a)=f(x+a-b)$，$\therefore T=|b-a|$

（2）若 $f(x+m)=-f(x)$ ，则 $T=2m$

证明：$f(x+2m)=f(x+m+m)=-f(x+m)=f(x)$，$\therefore T=2m$

代表函数：$f(x)=\sin x$，则 $f(x+\pi)=-\sin x$，$f(x+2\pi)=\sin x$，$\therefore T=2\pi$．

（3） 若 $f(x+m)=\pm\dfrac{1}{f(x)}$，则 $T=2m$

证明：$f(x+2m)=f(x+m+m)=\pm\dfrac{1}{f(x+m)}=f(x)$．

代表函数：$f(x)=\tan x$，则 $f(x+\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{1}{-\tan x}$，$f(x+\pi)=\tan x$，$\therefore T=\pi$．

（4） $f(x+m)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$，则 $T=2m$

证明：$f(x+2m)=\dfrac{1-f(x+m)}{1+f(x+m)}=\dfrac{1-\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}}=f(x)$．

综合（2）、（3）、（4），我们得到定理 1：当一个函数 $f(x+m)=\varphi(x)=\varphi^{-1}(x)$时，一定有 $f(x+2m)=f(x)$，$f(x)$是周期为$2m$的周期函数．可以理解为周期为$2m$的函数来自于一个原函数的反函数相等的函数迭代两次回到最初的点，在（2）中，$\varphi(x)=\varphi^{-1}(x)=-x$（图 1）；在（3）中，$\varphi(x)=\varphi^{-1}(x)=\pm\dfrac{1}{x}$（图 2）；在（4）中，$\varphi(x)=\varphi^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$（图 3）．

推论：$f(x+m)=\dfrac{af(x)+b}{cf(x)+d}$，当仅当$a+d=0$时，$f(x)$是周期为$2m$的周期函数．

证明：令$d=-a$ $\because f(x+m)=\dfrac{af(x)+b}{cf(x)-a}=\varphi(x)$，$\therefore f(x+2m)=\varphi_2(x)=\dfrac{a\varphi(x)+b}{c\varphi(x)-a}=\dfrac{a\cdot\dfrac{af(x)+b}{cf(x)-a}+b}{c\cdot\dfrac{af(x)+b}{cf(x)-a}-a}$

$=\dfrac{a^2f(x)+ab+bcf(x)-ab}{acf(x)+bc-acf(x)+a^2}=\dfrac{(a^2+bc)f(x)}{a^2+bc}=f(x)$，$\therefore f(x)$是周期为$2m$的周期函数．

当$f(x)$是周期为$2m$的周期函数时，有$f(x+m)=\varphi(x)=\varphi^{-1}(x)$，令$f(x+m)=\dfrac{af(x)+b}{cf(x)+d}=\varphi(x)$，

则$y=\dfrac{af(x)+b}{cf(x)+d}\Rightarrow f(x)=\dfrac{-yd+b}{cy-a}$ $\therefore\varphi^{-1}(x)=\dfrac{-df(x)+b}{cf(x)-a}$，故$a=-d$时，$\varphi(x)=\varphi^{-1}(x)$．

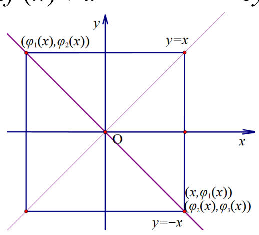


图 1：$\varphi(x)=-x$

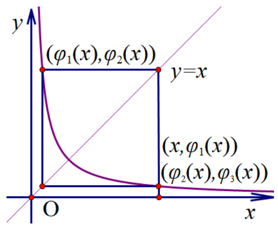


图 2：$\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$

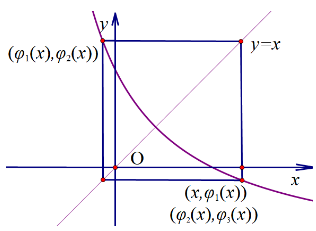


图 3：$\varphi(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$

我们可以根据蛛网图来形象表达迭代原理，具体原理可以参考《秒 2》的数列的本质部分，这里不详细叙述，周期数列和周期函数本质上是一样的，源于一个函数的 n 次迭代，其最终的结果就是经过 n 次迭代后能回到最初的 $f(x)$．

（5）$f(x+m)=\dfrac{f(x)+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}f(x)}$，则 $f(x)$ 是以 $3m$ 为周期的周期函数．

证明：$f(x+3m)=\dfrac{f(x+2m)+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}f(x+2m)}=\dfrac{\dfrac{f(x+m)+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}f(x+m)}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\dfrac{f(x+m)+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}f(x+m)}}=\dfrac{f(x+m)-\sqrt{3}}{\sqrt{3}f(x+m)+1}=\dfrac{\dfrac{f(x)+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}f(x)}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\dfrac{f(x)+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}f(x)}+1}=f(x)$

代表函数：$f(x)=\tan x$，则 $f(x+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\tan x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan x}$，$f(x+\pi)=\tan x$，$\therefore T=\pi$．

（6）$f(x+m)=1-\dfrac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$，则 $f(x)$ 是以 $3m$ 为周期的周期函数．

证明：$f(x+3m)=1-\dfrac{1}{f(x+2m)}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{f(x+m)}}=\dfrac{-1}{f(x+m)-1}=\dfrac{-1}{1-\dfrac{1}{f(x)}-1}=f(x)$（图 4）

综合（5）和（6），我们得到定理 2：当一个函数 $f(x+m)=\varphi(x)$ 时，则可以根据迭代推出 $f(x+2m)=\varphi_2(x)$，$f(x+3m)=\varphi_3(x)=f(x)$，那么 $f(x)$ 是周期为 $3m$ 的周期函数，我们可以得出定理 2．

定理 2：函数 $f(x+m)=\dfrac{af(x)+b}{cf(x)+d}$，当仅当 $(a+d)^2=ad-bc$ 时，$f(x)$ 是周期为 $3m$ 的周期函数．

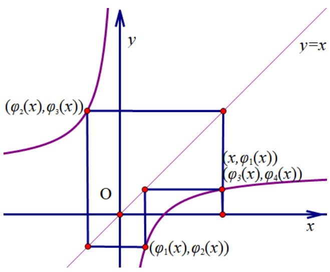


图 4：$\varphi(x)=1-\dfrac{1}{x}$

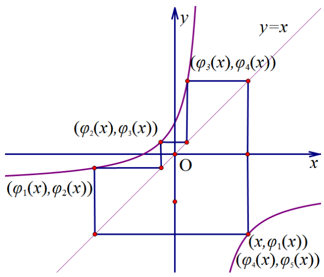


图 5：$\varphi(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$

（7）$f(x+m)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$，则 $T=4m$

证明：$f(x+2m)=\dfrac{1+f(x+m)}{1-f(x+m)}=\dfrac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\dfrac{1}{f(x)}$．　$f(x+4m)=-\dfrac{1}{f(x+2m)}=f(x)$　（图 5）

代表函数：$f(x)=\tan x$，则 $f(x+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$，$f(x+\pi)=\tan x$，$\therefore T=\pi$．

定理 3：函数 $f(x+m)=\dfrac{af(x)+b}{cf(x)+d}$，当仅当 $(a+d)^2=2(ad-bc)$ 时，$f(x)$ 是周期为 $4m$ 的周期函数．

（8）$f(x+m)=\dfrac{1+\sqrt{3}f(x)}{\sqrt{3}-f(x)}$，则 $T=6m$

代表函数：$f(x)=\tan x$，则 $f(x+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1+\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}$，$f(x+\pi)=\tan x$，$\therefore T=\pi$．

定理 4：函数 $f(x+m)=\dfrac{af(x)+b}{cf(x)+d}$，当仅当 $(a+d)^2=3(ad-bc)$ 时，$f(x)$ 是周期为 $6m$ 的周期函数；

当 $(a+d)^2>3(ad-bc)$ 时，不会再产生周期函数．

周期函数的迭代定理：若 $f(x+m)=\varphi\left[f(x)\right]$，则存在 $f(x+2m)=\varphi_2\left[f(x)\right]$，$f(x+3m)=\varphi_3\left[f(x)\right]$，一定存在最小的正整数 n，使得 $\varphi_n\left[f(x)\right]=f(x)$ 成立，即 $f(x+nm)=\varphi_n\left[f(x)\right]=f(x)$，$nm$ 即为这个函数的最小正周期.

（9）$f(x)=f(x+a)+f(x-a)$，则 $f(x)$ 是以 $6a$ 为周期的周期函数.

证明：$f(x)=f(x+a)+f(x-a)\Rightarrow f(x+a)=f\left(x+2a\right)+f\left(x\right)\Rightarrow f(x)=f(x+2a)+f(x)+f(x-a)$，

$\therefore 0=f(x+2a)+f(x-a);\therefore f(x-a)=-f(x+2a)\Rightarrow f(x)=-f(x+3a)=f\left(x+3a+3a\right)=f\left(x+6a\right)$

代表函数：$f(x)=\sin x$，则 $f(x+\frac{\pi}{3})+f(x-\frac{\pi}{3})=2\sin x\cos\frac{\pi}{3}=\sin x=f(x)$，$\therefore T=2\pi$.

【例 1】定义在 R 上的奇函数且 $f(x+2)=f(x-2)$，且 $f(1)=2$，则 $f(2)+f(7)=$____________.

【解析】因为 $f\left(x+2\right)=f\left(x-2\right)$，知 $f\left(x+4\right)=f\left(x\right)$。所以 $f\left(7\right)=f\left(3\right)=f\left(-1\right)=-f\left(1\right)=-2$。又 $f\left(-2\right)=-f\left(2\right)$ 且 $f\left(2\right)=f\left(-2+4\right)=f\left(-2\right)$，所以 $f\left(2\right)=0$，从而 $f\left(7\right)+f\left(2\right)=-2$.

【例 2】对任意整数 x，函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$，若 $f(1)=2$，则 $f(2020)=$__________，$f(2019)=$__________.

【解析】因为 $f\left(x+1\right)=\dfrac{1+f\left(x\right)}{1-f\left(x\right)}=\varphi\left(x\right)$，所以 $f\left(x+2\right)=\varphi_2\left(x\right)=\dfrac{1+\dfrac{1+f\left(x\right)}{1-f\left(x\right)}}{1-\dfrac{1+f\left(x\right)}{1-f\left(x\right)}}=-\dfrac{1}{f\left(x\right)}$，所以

$f\left(x+3\right)=\varphi_3\left(x\right)=\dfrac{1+\left[-\dfrac{1}{f\left(x\right)}\right]}{1-\left[-\dfrac{1}{f\left(x\right)}\right]}=\dfrac{f\left(x\right)-1}{f\left(x\right)+1}$，$f\left(x+4\right)=\varphi_4\left(x\right)=\dfrac{1+\dfrac{f\left(x\right)-1}{f\left(x\right)+1}}{1-\dfrac{f\left(x\right)-1}{f\left(x\right)+1}}=f\left(x\right)$，所以

$f\left(2020\right)=f\left(4\times504+4\right)=f\left(4\right)=f\left(1+34\right)=\varphi_3\left(1\right)=\dfrac{f\left(1\right)-1}{f\left(1\right)+1}=\dfrac{1}{3}$，

$f\left(2019\right)=f\left(4\times504+3\right)=f\left(3\right)=f\left(1+23\right)=\varphi_2\left(1\right)=-\dfrac{1}{f\left(1\right)}=-\dfrac{1}{2}$

【例 3】设函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称且满足：(ii) $f(x_1-x_2)=\dfrac{f(x_1)\cdot f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}$；(ii) 存在正常数 a 使 $f(a)=1$.

【解析】（1）令 $x=x_1=x_2$，$f\left(-x\right)=f\left(x_2-x_1\right)=\dfrac{f\left(x_2\right)f\left(x_1\right)+1}{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}=-\dfrac{f\left(x_2\right)f\left(x_1\right)+1}{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}=-f\left(x_1-x_2\right)=-f\left(x\right)$，所以 $f\left(x\right)$ 是奇函数.

(2)因为 $f\left(x+a\right)=f\left[x-\left(-a\right)\right]=\varphi\left(x\right)=\dfrac{f\left(-a\right)f\left(x\right)+1}{f\left(-a\right)-f\left(-x\right)}=\dfrac{-f\left(a\right)f\left(x\right)+1}{-f\left(a\right)-f\left(-x\right)}=\dfrac{f\left(x\right)-1}{f\left(x\right)+1}\left(f\left(a\right)=1\right)$，

所以 $f\left(x+2a\right)=f\left[\left(x+a\right)+a\right]=\varphi_2\left(x\right)=\dfrac{\dfrac{f\left(x\right)-1}{f\left(x\right)+1}-1}{\dfrac{f\left(x\right)-1}{f\left(x\right)+1}+1}=-\dfrac{1}{f\left(x\right)}$，所以

$f\left(x+4a\right)=f\left[\left(x+2a\right)+2a\right]=\varphi_4\left(x\right)=\dfrac{1}{-f\left(x+2a\right)}=f\left(x\right)$，故 $f\left(x\right)$ 是以 $4a$ 为周期的周期函数.

【例 4】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 N，且对任意正整数 x，都有 $f(x)=f(x+1)+f(x-1)$．若 $f(4)=2020$，求 $f(2020)$ 的值．

【解析】因为 $f(x)=f(x+1)+f(x-1)$，所以 $f(x)=f(x+2)+f(x)+f(x-1)$，所以 $0=f(x+2)+f(x-1)$，所以 $f(x-1)=-f(x+2)\Rightarrow f(x)=-f(x+3)=f(x+3+3)=f(x+6)$，则 $f(x)$ 是以 6 为周期的周期函数，又 $2020=6\times336+4$，所以 $f(2014)=f(4)=2020$．

【例 5】定义在 R 上的函数 $f(x)$ 对任意实数 a、b 都有 $f(a+b)+f(a-b)=2f(a)\cdot f(b)$ 成立，且 $f(0)\neq0$．

（1）求 $f(0)$ 的值；

（2）试判断 $f(x)$ 的奇偶性；

（3）若存在常数 $c>0$ 使 $f(c)=0$，试问 $f(x)$ 是否为周期函数？若是，指出它的一个周期；若不是，请说明理由．

【解析】（1）令 $a=b=0$,则 $f(0)+f(0)=2f(0)\cdot f(0)$，所以 $2f(0)\cdot[f(0)-1]=0$，所以 $f(0)=1$；（2）令 $a=0$，$b=x$，则 $f(x)+f(-x)=2f(0)\cdot f(x)$，由 $f(0)=1$ 可得 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是 R 上的偶函数，又 $f[(x+c)+c]+f[(x+c)-c]=2f(x+c)\cdot f(c)=0\Rightarrow f(x+2c)=-f(x)=\varphi(x)$；（3）令 $a=x+c$，$b=c$，则 $f(x+4c)=\varphi_2(x)=\varphi[-f(x)]=f(x)$，故 $f(x)$ 是以 $4c$ 为周期的周期函数．

【例 6】已知 $f(x+1)=1-\dfrac{1}{f(x)}(f(x)\neq0)$，若 $f(1)=2$，求 $f(2019)$ 和 $f(2020)$ 的值．

【解析】因为 $f(x+1)=1-\dfrac{1}{f(x)}=\varphi(x)$，$f(x+2)=\varphi_2(x)=-\dfrac{1}{f(x)-1}$，$f(x+3)=\varphi_3(x)=f(x)$，故 $T=3$，所以 $f(2019)=f(3\times671+3)=f(3)=\varphi_2(1)=-1$，$f(2020)=f(3\times672+1)=f(1)=2$．

【例 7】设 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$，又记 $f_1(x)=f(x)$，$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]$，$k=1$，2，…，则 $f_{2018}(x)=$（　　）

A．$-\dfrac{1}{x}$　　B．x　　C．$\dfrac{x-1}{x+1}$　　D．$\dfrac{1+x}{1-x}$

【解析】因为 $f_1(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$，$a=1$，$b=1$，$c=-1$，$d=1$，所以 $(a+d)^2=2(ad-bc)$，故 $T=4$，$f_{2018}(x)=f_2(x)-\dfrac{1}{x}$，故选 A．

【例 8】已知 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-3x}$，$f_1(x)=f[f(x)]$，$f_2(x)=f[f_1(x)]$，…，$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$，则 $f_{2020}(-2)=$（　　）

A．$-\dfrac{1}{7}$　　B．$\dfrac{1}{7}$　　C．$-\dfrac{3}{5}$　　D．3

【解析】由 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-3x}$，$a=1,b=1,c=-3,d=1$ 得，$(a+d)^2=ad-bc$ 所以 $T=3$，易知 3 为 $f(x)$ 的迭代周期，故 $f_{3n}(x)=f(x)$，$f_1(x)=\dfrac{x-1}{1+3x}$，$f_{2020}(x)=f_1(x)$，$f_{2020}(-2)=f_1(-2)=-\dfrac{3}{5}$，故选 C．

【例 9】设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，对于任意的 $x\in R$，都有 $f(x+2)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$，当 $0<x\leq1$ 时，$f(x)=2x$，则 $f(11.5)=$________．

【解析】由 $f(x+2)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$，$a=-1$，$b=1$，$c=-3$，$d=1$ 得，$a+d=0$，所以 $T=4$，故 $f(11.5)=-f(0.5)=-1$.

【例 10】函数 $f(x)$ 在 R 上有定义，且满足 $f(x)$ 是偶函数，且 $f(0)=20$，$g(x)=f(x-1)$ 是奇函数，则 $f(2018)$ 的值为__________.

【解析】因为 $g(x)=f(x-1)$ 是奇函数，故 $f(x)=g(x+1)$ 关于点 $(-1,0)$ 对称，又 $f(x)$ 是偶函数，故 $T=4$，且点 $(1,0)$ 也是 $f(x)$ 的对称点，$f(2018)=f(2+4\times504)=f(2)$，又因为 $f(2)+f(0)=0$，故 $f(2018)=-20$.

第二讲 函数对称与周期的关系

定理 5：若函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$，$x=b$ 都对称，则 $f(x)$ 为周期函数且 $2|b-a|$ 是它的一个周期.

推论：若偶函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称，则 $f(x)$ 为周期函数且 $2|a|$ 是它的一个周期.

代表函数：$f(x)=\cos x$，则 $f(x)$ 关于直线 $x=0$ 和 $x=\pi$ 对称，$\therefore T=2\pi$.

证明定理 5：函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(a-x)$ 且 $f(b+x)=f(b-x)$，则可推出 $f(x)=f(2a-x)=f(2b-x)$；令 $t=2a-x$，则 $x=2a-t$，$f(t)=f(2b-2a+x)=f[x+2(b-a)]$，即可以得到 $y=f(x)$ 的周期为 $2|b-a|$，即可以得到：如果函数在定义域内关于垂直于 x 轴两条直线对称，则函数一定是周期函数.

定理 6：函数 $y=f(x)$ $(x\in R)$ 的图象关于两点 $A(a,y_0)$、$B(b,y_0)$ 都对称，则函数 $f(x)$ 是以 $2|b-a|$ 为周期的周期函数.

推论：若奇函数 $y=f(x)$ 的图像关于 $A(a,0)$ 对称，则 $f(x)$ 为周期函数且 $2|a|$ 是它的一个周期.

代表函数：$f(x)=\tan x$，则 $f(x)$ 关于原点和 $(\frac{\pi}{2},0)$ 对称，$\therefore T=\pi$.

证明定理 6：函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(a-x)$ 且 $f(b+x)=f(b-x)$，则可推出 $f(x)=f(2a-x)=f(2b-x)$；令 $t=2a-x$，则 $x=2a-t$，$f(t)=f(2b-2a+x)=f[x+2(b-a)]$，即可以得到 $y=f(x)$ 的周期为 $2|b-a|$，即可以得到：如果函数在定义域内关于垂直于 x 轴两条直线对称，则函数一定是周期函数.

定理 7：函数 $y=f(x)$ $(x\in R)$ 的图象关于 $A(a,y_0)$ 和直线 $x=b$ 都对称，则函数 $f(x)$ 是以 $4|b-a|$ 为周期的周期函数.

推论：若奇函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称，则 $f(x)$ 为周期函数且 $4|a|$ 是它的一个周期.

代表函数：$f(x)=\sin x$，则 $f(x)$ 关于原点和 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，$\therefore T=2\pi$.

定理 8：周期为 T 的奇函数一定关于点 $(\frac{T}{2},0)$ 对称，周期为 T 的偶函数关于直线 $x=\frac{T}{2}$ 对称.

引论：（1）函数 $y=f(x)$ 关于 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow$ $\underline{f(a+x)=f(a-x)}$

$f(a+x)=f(a-x)$ 也可以写成 $f(x)=f(2a-x)$ 或 $f(-x)=f(2a+x)$

简证：设点 (x_1,y_1) 在 $y=f(x)$ 上，通过 $f(x)=f(2a-x)$ 可知，$y_1=f(x_1)=f(2a-x_1)$，即点 $(2a-x_1,y_1)$ 也在 $y=f(x)$ 上，而点 (x_1,y_1) 与点 $(2a-x_1,y_1)$ 关于 $x=a$ 对称．得证.

若写成：$f(a+x)=f(b-x)$

（1）函数 $y=f(x)$ 关于直线 $x=\dfrac{(a+x)+(b-x)}{2}=\dfrac{a+b}{2}$ 对称

（2）函数 $y=f(x)$ 关于点 (a,b) 对称 $\Leftrightarrow$ $\underline{f(a+x)+f(a-x)=2b}$

上述关系也可以写成 $f(2a+x)+f(-x)=2b$ 或 $f(2a-x)+f(x)=2b$.

简证：设点 (x_1,y_1) 在 $y=f(x)$ 上，即 $y_1=f(x_1)$，通过 $f(2a-x)+f(x)=2b$ 可知，$f(2a-x_1)+f(x_1)=2b$，所以 $f(2a-x_1)=2b-f(x_1)=2b-y_1$，所以点 $(2a-x_1,2b-y_1)$ 也在 $y=f(x)$ 上，而点 $(2a-x_1,2b-y_1)$ 与 (x_1,y_1) 关于 (a,b) 对称，得证.

【例 11】设 $f(x)$ 是定义在 R 上以 6 为周期的函数，$f(x)$ 在(0，3)内单调递减，且 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称，则下面正确的结论是（　　）

A．$f(1.5)<f(3.5)<f(6.5)$　　B．$f(3.5)<f(1.5)<f(6.5)$

C．$f(6.5)<f(3.5)<f(1.5)$　　D．$f(3.5)<f(6.5)<f(1.5)$

【解析】 因为 $f\left(x\right)$ 关于直线 $x=3$ 对称，又 $T=6$，$f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,3\right)$ 单调递减，故 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(3,6\right)$ 单调递增，$f\left(3.5\right)=f\left(2.5\right)<f\left(1.5\right)<f\left(6.5\right)=f\left(0.5\right)$，故选 B.

【例 12】（2018•邕宁模拟）定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足：对任意的实数 x 都有 $f(1-x)=f(x+1)$，且 $f(-1)=2$，$f(2)=-1$．则 $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(2017)$ 的值为（　　）

A．2017　　B．1010　　C．1008　　D．2

【解析】 由题意可得，$f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，又 $f\left(1-x\right)=f\left(x+1\right)$，可得 $f\left(-x\right)=f\left(x+2\right)$，得 $f\left(x+2\right)=f\left(x\right)$，因此 $f\left(x\right)$ 是周期为 2 的周期函数，所以 $f\left(-1\right)=f\left(1\right)=f\left(2n+1\right)=2$，又 $f\left(2\right)=f\left(2n\right)=-1$，于是 $f\left(2n+1\right)+f\left(2^{n}\right)=1$，所以 $f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+\cdots+f\left(2017\right)=f\left(1\right)+1008=2+1008=1010$，故选 B.

注意：偶函数关于直线 $x=1$ 对称是推出 $T=2$ 的关键.

【例 13】（2018•三明二模）已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$，当 $x\geqslant 0$ 时，恒有 $f(x+2)=f(x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=e^{x}-1$，则 $f(-2017)+f(2018)=$（　　）

A．0　　B．e　　C．$e-1$　　D．$1-e$

【解析】 由 $x\geq 0$ 时，恒有 $f\left(x+2\right)=f\left(x\right)$，可知函数 $f\left(x\right)$ 的周期为 2.所以 $f\left(2017\right)=f\left(1\right)$，$f\left(2018\right)=f\left(0\right)$，又 $f\left(x\right)$ 是奇函数，所以 $f\left(-2017\right)=f\left(2017\right)$，而当 $x\in\left[0,1\right]$ 时 $f\left(x\right)=e^{x}$，所以 $f\left(-2017\right)+f\left(2018\right)=-f\left(2017\right)+f\left(2018\right)=-f\left(1\right)+f\left(0\right)=-\left(e^{1}-1\right)+\left(e^{0}-1\right)=1-e$，故选 D.

【例 14】（2019•桥东月考）已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$，当 $x\in(0,2]$ 时，$f(x)=x-\sin\pi x$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(2019)=$（　　）

A．6　　B．4　　C．2　　D．0

【解析】 根据题意，函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x+2\right)=-f\left(x\right)$，而 $f\left(x+4\right)=f\left(x\right)$，即 $f\left(x\right)$ 是周期为 4 的周期函数，当 $x\in\left[0,2\right]$ 时，$f\left(x\right)=x-\sin\pi x$，则 $f\left(1\right)=1-\sin\pi=1$，$f\left(2\right)=2-\sin 2\pi=2$，又由 $f\left(x+2\right)=-f\left(x\right)$，则 $f\left(3\right)=-f\left(1\right)=-1$，$f\left(4\right)=-f\left(2\right)=-2$，则有 $f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+f\left(4\right)=0$，则

$$f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+\cdots+f\left(2019\right)=\left[f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+f\left(4\right)\right]+\left[f\left(5\right)+f\left(6\right)+f\left(7\right)+f\left(8\right)\right]+\cdots+\left[f\left(2013\right)+f\left(2014\right)+f\left(2015\right)+f\left(2016\right)\right]+\left[f\left(2017\right)+f\left(2018\right)+f\left(2019\right)+f\left(2020\right)\right]$$

$=f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)=2$，故选 D.

【例 15】(2019•渭南一模)定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：$f(x+6)=f(x)$，当 $-3\leqslant x<-1$ 时，$f(x)=-(x+2)^2$；当 $-1\leqslant x<3$ 时，$f(x)=x$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(2019)=$（　　）

A．336　　B．337　　C．338　　D．339

【解析】 因为 $f(x+6)=f(x)$，当 $-3\le x<-1$ 时，$f(x)=-(x+2)^2$；当 $-1\le x<3$ 时，$f(x)=x$，所以 $f(1)=1$，$f(2)=2$，$f(3)=f(-3)=-1$，$f(4)=f(-2)=0$，$f(5)=f(-1)=-1$，$f(6)=f(0)=0$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1$，因为 $f(x+6)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的周期为 6，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2019)=336+f(1)+f(2)+f(3)=338$，故选 C.

【例 16】（2013•湖北） x 为实数，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则函数 $f(x)=x-[x]$ 在 R 上为（　　）

A．奇函数　　B．偶函数　　C．增函数　　D．周期函数

【解析】因为 $f(x)=x-[x]$，所以 $f(-x)=f(x+1)=f(x+1)-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]=f(x)$，所以 $f(x)=x-[x]$ 在 R 是周期为 1 的函数，故选 D.

【例 17】(2009•江西)已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数，若对于 $x\geqslant 0$，都有 $f(x+2)=f(x)$，且当 $x\in[0$，$2)$ 时，$f(x)=\log_2(x+1)$，则 $f(-2008)+f(2009)$ 的值为（　　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

【解析】 因为 $f(-2008)+f(2009)=f(2008)+f(2009)=f(0)+f(1)=\log_2^1+\log_2^2=1$，故选 C.

【例 18】(2009•重庆)已知函数 $f(x)$ 周期为 4，且当 $x\in(-1，3]$ 时，$f(x)=\begin{cases} m\sqrt{1-x^2}, x\in(-1,1] \\ 1-|x-2|, x\in(1,3] \end{cases}$，其中 $m>0$．若方程 $3f(x)=x$ 恰有 5 个实数解，则 m 的取值范围为（　　）

A．$(\frac{\sqrt{15}}{3}，\frac{8}{3})$　　B．$(\frac{\sqrt{15}}{3}，\sqrt{7})$　　C．$(\frac{4}{3}，\frac{8}{3})$　　D．$(\frac{4}{3}，\sqrt{7})$

【解析】 因为当 $x\in(-1,1)$，将函数化为方程 $x^2+\frac{y^2}{m^2}=1(y\ge 0)$，所以实质上是一个半椭圆，其图像如图所示，同时在坐标系中做出当 $x\in(1,3]$ 得图像，再根据周期性作出函数其它部分的图像，由图易知直线 $y=\frac{x}{3}$ 与第二个椭圆 $(x-4)^2+\frac{y^2}{m^2}=1(y\ge 0)$ 相交而与第三个半椭圆 $(x-8)^2+\frac{y^2}{m^2}=1(y\ge 0)$ 无公共交点，方程恰有 5 个实数解，将 $y=\frac{x}{3}$ 代入 $(x-4)^2+\frac{y^2}{m^2}=1(y\ge 0)$ 得，$(9m^2+1)x^2-72m^2x+135m^2=0$，令 $t=9m^2(t>0)$，则 $(t+1)x^2-8tx+15t=0$，由 $\Delta=(8t)^2-4\times 15t(t+1)>0$，得 $t>15$，由 $9m^2>15$，且 $m>0$ 得 $m>\frac{\sqrt{15}}{3}$，同样由 $y=\frac{x}{3}$ 与第三个椭圆 $(x-8)^2+\frac{y^2}{m^2}=1(y\ge 0)$ 由 $\Delta<0$ 可计算 $m<\sqrt{7}$，综上可知 $m\in\left(\frac{\sqrt{15}}{3},\sqrt{7}\right)$，故选 B.

【例 19】（2011•上海）设 $g(x)$ 是定义在 R 上，以 1 为周期的函数，若函数 $f(x)=x+g(x)$ 在区间 $[3,4]$ 上的值域为 $[-2,5]$，则 $f(x)$ 在区间 $[-10,10]$ 上的值域为________.

【解析】 解法一 因为 $g(x)$ 为 R 上周期为 1 的函数，则 $g(x)=g(x+1)$，又因为函数 $f(x)=x+g(x)$ $[3,4]$ 的值域是 $[-2,5]$，令 $x+6=t$，当 $x\in[3,4]$ 时，$t=x+6\in[9,10]$，此时，$f(t)=t+g(t)=(x+6)+g(x+6)=(x+6)+g(x)=[x+g(x)]+6$，所以，在 $t\in[9,10]$ 时，$f(t)\in[4,11]$ …(1)，同理，令 $x-13=t$，在当 $x\in[3,4]$ 时，$t=x-13\in[-10,-9]$，此时，$f(t)=t+g(t)=(x-13)+g(x-13)=(x-13)+g(x)=[x+g(x)]-13$，所以，当 $t\in[-10,-9]$ 时，$f(t)\in[-15,-8]$ …（2），由（1）（2）得到，$f(t)$ 在 $[-10,10]$ 上的值域为 $[-15,11]$，故答案为 $[-15,11]$.

解法二 由题意 $f(x)-x=g(x)$ 在 R 上成立，故 $f(x+1)-(x+1)=g(x+1)$，所以 $f(x+1)-f(x)=1$，由此知自变量增大 1，函数值也增大 1，故 $f(x)$ 在 $[-10,10]$ 上的值域为 $[-15,11]$，故答案为 $[-15,11]$.

【例 20】（2018•全国）x_1、$x_2\in R$，$f(0)\neq 0$，且 $f(2x_1)+f(2x_2)=f(x_1+x_2)\cdot f(x_1-x_2)$.

（1）求 $f(0)$；

（2）求证 $f(x)$ 为偶函数；

（3）若 $f(\pi)=0$，求证 $f(x)$ 为周期函数.

【解析】（1）由 $f(2x_1)+f(2x_2)=f(x_1+x_2)\cdot f(x_1-x_2)$，可令 $x_2=x_1=0$，可得 $f(0)+f(0)=f(0)\cdot f(0)$，由 $f(0)\neq 0$，可得 $f(0)=2$；

（2）证明：可令 $x_1=\dfrac{x}{2}$，$x_2=-\dfrac{x}{2}$，则 $f(x)+f(-x)=f(0)\cdot f(x)=2f(x)$，可得 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数；

（3）证明：可令 $x_1=\dfrac{x}{2}+\pi$，$x_2=\dfrac{x}{2}$，则 $f(x+2\pi)+f(x)=f(x+\pi)\cdot f(\pi)=0$，即有 $f(x+2\pi)=f(-x)$，将 x 换为 $x+2\pi$，可得 $f(x+4\pi)=-f(x+2\pi)=f(x)$，可得 $f(x)$ 为最小正周期为 4π 的周期函数.

达标训练

1.（2019•长沙月考）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R．当 $x<0$ 时，$f(x)=x^3-1$；当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(-x)=-f(x)$；当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x+\dfrac{1}{2})=f(x-\dfrac{1}{2})$，则 $f(2019)=$（　　）

A．-2　　B．-1　　C．0　　D．2

2.（2019•赤峰模拟）设定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$，且 $f(x)=\begin{cases}1,-2<x\leqslant 0\\-1,0<x\leqslant 2\end{cases}$，则下列函数值为 -1 的是（　　）

A．$f(f(5.5))$　　B．$f(f(4.5))$　　C．$f(3.5)$　　D．$f(6)$

3.（2019•宜宾模拟）已知函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=2$，且对任意 $x\in R$ 都满足 $f(x+3)=-f(x)$，则 $f(2019)$ 的值为（　　）

A．2019　　B．2　　C．0　　D．-2

4.（2019•渝水月考）函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(x)=f(x-3)$，当 $-2\leqslant x<0$ 时，$f(x)=(x+1)^2$；当 $0\leqslant x<1$ 时，$f(x)=-2x+1$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2018)=$（　　）

A．671　　B．673　　C．1343　　D．1345

5.（2018•龙岩期末）设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，满足 $f(x+1)=-f(x-1)$，若 $f(-1)>1$，$f(5)=a^2-2a-4$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-1,3)$ B．$(-\infty，-1)\cup(3，+\infty)$

C．$(-3,1)$ D．$(-\infty，-3)\cup(1，+\infty)$

6．（2018•杭州期末）已知函数 $f(x)(x\in R)$ 的周期为 $T(T>0)$，且在 $(0,T)$ 上单调，则（　　）

A．$f(x^2)$ 是周期函数，且在 $(0,\sqrt{T})$ 上单调 B．$f(x^2)$ 不是周期函数，且在 $(0,\sqrt{T})$ 上单调

C．$f(x^2)$ 是周期函数，且在 $(0,T^2)$ 上单调 D．$f(x^2)$ 不是周期函数，且在 $(0,T^2)$ 上单调

7．（2018•泉州二模）已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$，满足 $f(x+4)=-f(x)$，且在 $[0，2]$ 上单调递减，则（　　）

A．f（8）$<f(11)<f(15)$ B．$f(11)<f(8)<f(15)$

C．$f(15)<f(11)<f$（8） D．$f(15)<f(8)<f(11)$

8．（2019•昌江期中）定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x)$，当 $x\in[3，5]$ 时，$f(x)=2-|x-4|$，则下列不等式一定不成立的是（　　）

A．$f(\cos\frac{\pi}{6})>f(\sin\frac{\pi}{6})$ B．$f(\sin 1)<f(\cos 1)$

C．$f(\cos\frac{2\pi}{3})>f(\sin\frac{2\pi}{3})$ D．$f(\sin 2)<f(\cos 2)$

9．（2018•张家界期末）已知 $f(x)$ 在 R 上是奇函数，且满足 $f(x+4)=f(x)$，当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)=2x^2$，则 $f(2019)$ 等于（　　）

A．-2 B．2 C．-98 D．98

10．（2018•温州模拟）已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的最小正周期等于 T，则下列函数最小正周期一定等于 $\frac{T}{2}$ 的是（　　）

A．$f(2x)$ B．$f(\frac{x}{2})$ C．$2f(x)$ D．$f(x^2)$

11．（2018•葫芦岛一模）设偶函数 $f(x)$ 对任意 $x\in R$，都有 $f(x+3)=-\frac{1}{f(x)}$，且当 $x\in[-3，-2]$ 时，$f(x)=4x$，则 $f(107.5)=$（　　）

A．10 B．$\frac{1}{10}$ C．-10 D．$-\frac{1}{10}$

12．（2018•澧县一模）已知函数 $f(x)$ 是定义域为 R 的周期为 3 的奇函数，且当 $x\in(0,1.5)$ 时 $f(x)=ln(x^2-x+1)$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 $[0，6]$ 上的解的个数是（　　）

A．3 B．5 C．7 D．9

13．（2017•珠海期中）设 $f(x)$ 是定义在 R 上周期为 2 的函数，且对任意的实数 x，恒有 $f(x)-f(-x)=0$，当 $x\in[0，1]$ 时，$f(x)=-\sqrt{1-x^2}$，则函数 $g(x)=f(x)-e^x+1$ 在区间 $[-2018，2018]$ 上零点的个数为（　　）

A．2017 B．2018 C．4034 D．4036

14．（2017•福建月考）已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x)$，且当 $x\in[0，1]$ 时，$f(x)=x$，则函数 $g(x)=f(x)-\log_4|x|$ 的零点个数是（　　）

A．0 B．2 C．4 D．6

15．（2017•台州一模）若函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的周期为 2 的奇函数，则 $f(2017)=$（　　）

A．-2017 B．0 C．1 D．2017

16．（2017•昆都仑月考）已知 $f(x)$ 是定义在 R 上周期为 2 的偶函数，且当 $x\in[0，1]$ 时，$f(x)=2^x-1$，则函数 $g(x)=f(x)-\log_5|x|$ 的零点个数是（　　）

A．2 B．4 C．6 D．8

17．（2019•成都月考）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq k\pi，k\in Z\}$，且对于定义域内的任何 x、y，有 $f(x-y)=\frac{f(x)\cdot f(y)+1}{f(y)-f(x)}$ 成立，且 f（a）$=1$（a 为正常数），当 $0<x<2a$ 时，$f(x)>0$ 则（　　）

A．$f(3a)=1$ B．$f(x)$ 是偶函数

C．$f(x)$ 在 $[2a，3a]$ 上单调递增 D．$4a$ 为 $f(x)$ 的周期

18.（2019•上海模拟）函数 $f(x)$ 周期为 1，且当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)=-\log_2 x$，则 $f(\frac{3}{2})=$__________.

19.（2019•江苏一模）已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且 $f(x+2)=f(x)$．当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^3-ax+1$，则实数 a 的值为__________.

20.（2019•雁塔一模）设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的以 5 为周期的奇函数，若 $f(2)>1$，f（3）$=\dfrac{a^2+a+3}{a-3}$，则 a 的取值范围是__________.

21.（2019•南关月考）已知偶函数 $y=f(x)$ 满足条件 $f(x+1)=f(x-1)$，且当 $x\in[-1,\ 0]$ 时，$f(x)=3x+\dfrac{4}{9}$，则 $f(\log_{\frac{1}{3}}5)$ 的值等于__________.

22.（2018•南岗月考）已知函数 $y=f(x)$ 是 R 上的偶函数，对于 $x\in R$ 都有 $f(x+6)=f(x)+f$（3）成立，且 $f(-4)=-2$，当 x_1，$x_2\in[0,\ 3]$，且 $x_1\neq x_2$ 时，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$．则给出下列命题：

①$f(2018)=-2$；　　②函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴为 $x=-6$；

③函数 $y=f(x)$ 在 $[-9,\ -6]$ 上为增函数；　　④方程 $f(x)=0$ 在 $[-9,\ 9]$ 上有 4 个根；

其中正确的命题序号是__________.

23.（2018•香坊期中）设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且对任意的 $x\in R$ 恒有 $f(x+1)=f(x-1)$，当 $x\in[0,\ 1]$ 时，$f(x)=2^{x-1}$ 则：（1）2 是函数 $f(x)$ 的周期；（2）函数 $f(x)$ 在 $(2,3)$ 上是增函数；（3）函数 $f(x)$ 的最大值是 1，最小值是 0；（4）直线 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴．其中正确的命题是__________.

24.（2019•溧水期中）已知 $\tan(x+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$，$y=\tan x$ 的周期 $T=\pi$，函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+a)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$，$x\in R$，（$a$ 是非零常数），则函数 $y=f(x)$ 的周期是__________.

25.（2019•衡阳一模）定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：$f(x+2)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$，当 $x\in(0,4)$ 时，$f(x)=x^2-1$，则 $f(2019)=$__________.

26.（2019•寿县月考）已知函数 $f(x)$ 对定义域内任意 x，y，有 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ 且 f（1）$=1$，则 $f(2019)=$__________.

27.（2018•海安模拟）已知函数 $f(x)$ 满足：$f(1)=2$，$f(x+1)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$，则 $f(2018)=$__________.

28.（2016•全国）定义域为 R 的偶函数 $f(x)$ 为周期函数，其周期为 8，当 $x\in[-4,\ 0]$ 时，$f(x)=x+1$，则 $f(25)=$__________.

29.（2014•四川）设 $f(x)$ 是定义在 R 上的周期为 2 的函数，当 $x\in[-1,\ 1)$ 时，$f(x)=\begin{cases}-4x^2+2, & -1\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\end{cases}$，则 $f(\frac{3}{2})=$__________.

30.（2012•江苏）设 $f(x)$ 是定义在 R 上且周期为 2 的函数，在区间 $[-1,\ 1]$ 上，$f(x)=\begin{cases}ax+1, & -1\leqslant x<0\\ \dfrac{bx+2}{x+1}, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$，其中 a，$b\in R$．若 $f(\frac{1}{2})=f(\frac{3}{2})$，则 $a+3b$ 的值为__________.

31.（2019•岳麓期末）设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，其图象关于直线 $x=1$ 对称，对任意 x_1，$x_2\in[0,\ \frac{1}{2}]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，且 f（1）$=a>0$．

（1）求 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{4})$；

（2）证明 $f(x)$ 是周期函数．

32.（2012•上海）已知 $f(x)=lg(x+1)$．

（1）若 $0<f(1-2x)-f(x)<1$，求 x 的取值范围；

（2）若 $g(x)$ 是以 2 为周期的偶函数，且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$g(x)=f(x)$，求函数 $y=g(x)(x\in[1,\ 2])$ 的反函数．

33.（2005•广东）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f(2-x)=f(2+x)$，$f(7-x)=f(7+x)$，且在闭区间 $[0,7]$ 上，只有 $f(1)=f(3)=0$．

（1）试判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性；

（2）试求方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-2005,\ 2005]$ 上的根的个数，并证明你的结论．

专题 6　三角恒等变形求值

第一讲 三角恒等求值

一些非特殊角的三角恒等变形求值题，由于最后得出的是一个具体的数值，故将其设为一个元 t，再利用恒等变形公式计算出结果.

【例 1】利用三角公式化简：$\sin 50°(1+\sqrt{3}\tan 10°)$.

【解析】$\sin 50°(1+\sqrt{3}\tan 10°)=t$，即 $\sin 50°(1+\sqrt{3}\dfrac{\sin 10°}{\cos 10°})=t$.

$\sin 50°(\dfrac{\cos 10°+\sqrt{3}\sin 10°}{\cos 10°})=t \Rightarrow \sin 50°\cdot 2\sin(10°+30°)=t\cos 10° \Rightarrow 2\sin 50°\cos 50°=t\cos 10°$，

即 $\sin 100°=\cos 10°=t\cos 10° \Rightarrow t=1$.

【例 2】求 $\tan 20°+4\sin 20°$ 的值.

【解析】令 $\tan 20°+4\sin 20°=t$，即

$\dfrac{\sin 20°}{\cos 20°}+4\sin 20°=t \Rightarrow \sin 20°+4\sin 20°\cos 20°=t\cos 20°$

$2\sin 40°=t\cos 20°-\sin 20°=t\sin 70°-\cos 70°=\sqrt{t^2+1}\sin(70°-\varphi)$，则必须满足条件.

$\begin{cases}\sqrt{t^2+1}=2\\70°-\varphi=40°\end{cases} \Rightarrow \varphi=30°, \tan\varphi=\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow t=\sqrt{3}$.

【例 3】求 $\tan 70°\cos 10°(\sqrt{3}\tan 20°-1)$ 的值.

【解析】令 $\tan 70°\cos 10°(\sqrt{3}\tan 20°-1)=t$，即 $\dfrac{\cos 20°}{\sin 20°}\cos 10°(\sqrt{3}\dfrac{\sin 20°}{\cos 20°}-1)=t$，

即 $\cos 20°\cos 10°\left(\sqrt{3}\sin 20°-\cos 20°\right)=t\sin 20°\cos 20° \Rightarrow \cos 10°\cdot 2\sin(20°-30°)=t\sin 20°$，

$-2\cos 10°\cdot\sin 10°=-\sin 20°=t\sin 20°$，故 $t=-1$.

【例 4】$\dfrac{3-\sin 70°}{2-\cos^2 10°}$等于________.

【解析】令 $\dfrac{3-\sin 70°}{2-\cos^2 10°}=t$，则 $3-\sin 70°=t(2-\cos^2 10°)=2t-\dfrac{t}{2}(1+\cos 20°) \Rightarrow 3-\dfrac{3}{2}t=\sin 70°-\dfrac{t}{2}\cos 20°$

$3-\dfrac{3}{2}t=\sin 70°-\dfrac{t}{2}\sin 70°=\sin 70°\left(1-\dfrac{t}{2}\right)$，因为 $\sin 70°$ 为常数，故 $1-\dfrac{t}{2}=0$，即 $t=2$.

【例 5】化简：$\dfrac{\cos 85°+\sin 25°\cos 30°}{\cos 25°}$.

【解析】令 $\dfrac{\cos 85°+\sin 25°\cos 30°}{\cos 25°}=t$，即 $\cos 85°+\sin 25°\dfrac{\sqrt{3}}{2}=t\cos 25° \Rightarrow \sin 25°\dfrac{\sqrt{3}}{2}-t\cos 25°=-\cos 85°$

$\sin 25°\dfrac{\sqrt{3}}{2}-t\cos 25°=\sqrt{\dfrac{3}{4}+t^2}\sin(25°-\varphi)=\sin(-5°) \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{3}{4}+t^2=1\\\varphi=30°\end{cases} \Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

【例 6】求值：$\dfrac{\sin 40°+\sin 50°\left(1+\sqrt{3}\tan 10°\right)}{\sin 65°\sqrt{1+\cos 50°}}$.

【解析】令 $\dfrac{\sin 40°+\sin 50°\left(1+\sqrt{3}\tan 10°\right)}{\sin 65°\sqrt{1+\cos 50°}}=t$，即 $\sin 40°+\sin 50°\left(1+\sqrt{3}\tan 10°\right)=t\sin 65°\sqrt{1+\cos 50°}$.

$\sin 40°+\sin 50°\left(\dfrac{\cos 10°+\sqrt{3}\sin 10°}{\cos 10°}\right)=\sqrt{2}t\sin 65°\cos 25°$.

即 $\sin 40°\cos 10°+2\sin 50°\sin 40°=\sqrt{2}t\sin 65°\cos 25°\cos 10°=\sqrt{2}t\dfrac{\cos 50°+1}{2}\cos 10°$，即

$\sin 40°\cos 10°+\sin 80°=\sqrt{2}t\dfrac{\cos 50°+1}{2}\cos 10° \Rightarrow \sin 40°\cos 10°+\cos 10°=\sqrt{2}t\dfrac{\sin 40°+1}{2}\cos 10°$，

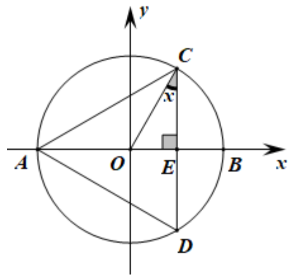
同时除以 $\cos 10°$ 得：$\sin 40°+1=\sqrt{2}t\dfrac{\sin 40°+1}{2} \Rightarrow 1=\dfrac{\sqrt{2}t}{2} \Rightarrow t=\sqrt{2}$.

秒杀秘籍：第二讲　$\sin 2x+2\cos x$ 与 $\sin 2x+2\sin x$ 类型的数形结合方法

【例 7】（2018•全国Ⅰ卷 16）已知函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$，则 $f(x)$ 的最小值是__________.

【解析】 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos x+2\sin x+2\sqrt{3}\cos x=2\sqrt{3}\cos x(\sin x+1)+4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，如图，以 AB 为直径作一单位圆，C 为圆上的任意一点，$CD\perp AB$于E，$\angle OCE=x$，

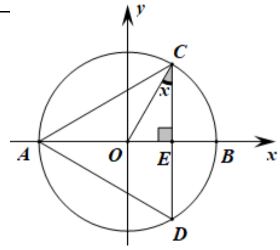
$\left|f(x)\right|=\left|2\sqrt{3}\cos x(1+\sin x)\right|+\left|4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|=2\sqrt{3}S_{\Delta ACD}+\left|4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|$，当仅当



$x=\frac{\pi}{6}$ 时，两式子同时取得最大值，故 $f(x)_{\max}=\frac{17}{2}$.

【例 8】已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\sin x+4\sqrt{3}\cos x$，则 $f(x)$ 的最大值是__________

【解析】 $f(x)=2\sin x+\sin 2x=2\sin x(1+\cos x)$，如图，以 AB 为直径作一单位圆，C 为圆上的任意一点，$CD\perp AB$于E，$\angle COB=x$，$\sin x=y_C=|CE|$，$1+\cos x=1+x_C=|AE|$，故 $|f(x)|=|2\sin x(1+\cos x)|=2S_{\Delta ACD}$，当仅当 $x=\angle CAD=60^\circ$ 时，$S_{\Delta ACD}$ 取得最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 由于 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ 为奇函数，故当仅当 $x=-60^\circ$ 时，$f(x)$ 的最小值是 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



秒杀秘籍：第三讲　探秘 $f(x)=\sin x\cos x+m\sin x+n\cos x$ 最值

定理：若 $m\cdot n>0$，$f(x)$ 存在最大值，　若 $m\cdot n<0$，$f(x)$ 存在最小值，若 $m\cdot n=0$，$f(x)$ 最大最小都可根据奇偶性来求．其中求最值的充要条件：$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{m+\cos x}{n+\sin x}$

证明最大值时如下：

①必要探路：若 $x=\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$ 最大值，　若 $x=-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$ 最小值．（在 2018 高考题解答中给到了数形结合）

② $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{m+\cos x}{n+\sin x}=t$，则 $\frac{m+\cos x}{n+t\cos x}=t\ \therefore\cos x=\frac{m-tn}{t^2-1}$，$\sin x=\frac{tm-t^2n}{t^2-1}$，$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，则 $t=?$（也可以考虑万能公式，参考例题 23）

【例 9】（2018•全国Ⅰ卷 16）已知函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$，则 $f(x)$ 的最小值是__________.

【解析】 由 $f(x)=2\sin x+sin2x=2(\sin x\cos x+\sin x)\Rightarrow m=1$，$n=0$，取得最值时

$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin x}$，按照必要探路法，$|\sin x|>|\cos x|$，$\begin{cases}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos=\frac{1}{2}\end{cases}$，满足最值的式子，此时求得最大值，

$\begin{cases}\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos=\frac{1}{2}\end{cases}$，满足最值的式子，此时求得最小值为 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【例 10】已知函数 $f(x)=\sin 2x+\left(2+\sqrt{3}\right)\sin x-\cos x$，则 $f(x)$ 的最小值是__________.

【解析】 $f(x)=2\left[\sin x\cos x+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right]\Rightarrow m=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$n=-\frac{1}{2}$，取得最值时

$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x}{-\frac{1}{2}+\sin x}$，按照必要探路法，求最小值时通常取负号，$\begin{cases}\sin x=-\frac{3\sqrt{3}}{2}\\ \cos=\frac{1}{2}\end{cases}$，满足最值的式子，

此时求得最小值为 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}-2$.

【例 11】（张联忠老师提供）求 $f(x)=\sin x\cos x+\sin x+\frac{\sqrt{5}}{3}\cos x(0<x<\frac{\pi}{2})$ 的最大值.

【解析】由 $f(x)=\sin x\cos x+\sin x+\frac{\sqrt{5}}{3}\cos\Rightarrow m=1$，$n=\frac{\sqrt{5}}{3}$，取得最值时 $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1+\cos x}{\frac{\sqrt{5}}{3}+\sin x}$，按照必要探路法，$|\sin x|>|\cos x|$，求最大值时取正号，$\begin{cases}\sin x=\frac{\sqrt{5}}{3}\\ \cos=\frac{2}{3}\end{cases}$，满足最值的式子，此时求得最大值 $\frac{7\sqrt{5}}{9}$.

【例 12】（2015•武汉模拟）已知函数 $f(x)=\sin x\cos x+\sin x+\frac{2}{5}\cos x(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$，则函数 $f(x)$ 的最大值为（　　）

A．1　　B．$\frac{7}{5}$　　C．$\frac{38}{25}$　　D．$\frac{43}{25}$

【解析】解法一　因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，所以 $t=\tan\frac{x}{2}\in[0,1]$，由万能公式可得，$f(x)=f(t)=\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+$

$\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}+\frac{10t+2t(1-t^2)}{5(1+t^2)}=\frac{10t(1-t^2)+10t(1+t^2)+2(1-t^4)}{5(1+t^2)^2}=\frac{20t-t^4+2}{5(1+t^2)^2}$，求导数可得 $f'(x)=\frac{20-60t^2-8t^3-8t}{5(1+t^2)^3}$，令 $f'(x)=0$ 可得 $20-60t^2-8t^3-8t=0$，分解因式可得 $\left(t-\frac{1}{2}\right)(t^2+8t+5)=0$，因为 $t[0,1]$，所以 $t=\frac{1}{2}$，当 $0<t<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(t)$ 单调递增，当 $\frac{1}{2}<t<1$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(t)$ 单调递减，所以 $f(x)$ 的最大值即 $f(t)$ 最大值为 $f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{38}{25}$，故选 B.

解法二　由 $f(x)=\sin x\cos x+\sin x+\frac{2}{5}\cos x(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$，$m=1$，$n=\frac{2}{5}$，取得最值时 $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1+\cos x}{\frac{2}{5}+\sin x}$，按照必要探路法，$|\sin x|>|\cos x|$，求最大值时取正号，$\begin{cases}\sin x=\frac{4}{5}\\ \cos x=\frac{3}{5}\end{cases}$，满足最值的式子，此时求得最大值为 $\frac{38}{25}$，故选 C.

综上所述，当 $m=1$，$n=\frac{k}{c}(c>0,k>0)$ 时，必要探路步骤中，通常令 $\sin x=\frac{a}{c}$，$\cos x=\frac{b}{c}$ 来设计，例 8 和例 9、10 属于特殊角，容易构造出来，但例 11 和 12 中，都是分母暴露了构造的方向，比如例 11 中，由于 $n=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\sin x=\frac{a}{3}>\cos x=\frac{b}{3}$，最终发现 $a=\sqrt{5}$，$b=2$ 时构造成功；例 12 中，由于 $n=\frac{2}{5}$，$\sin x=\frac{a}{5}>\cos x=\frac{b}{5}$，最终发现 $a=4$，$b=3$ 时构造成功；获取模型的解题思路同时，一定需要获取一个半成品定理或者公式，并不是要求记忆深刻，而是在下次遇到的时候，不能仅仅感觉此题做过，如果做过而没有细究和深入挖掘，那么每次做题都会花同样的时间，效率提不上去．本书更多是启发思考，关于一些二级结论或者秒杀公式，更多是代表数学解题和研究的一个方向，不是想着去改变数学教与学，而是笔者认为数学的教育学本来就是这个样子．不建模，无数学！

达标训练 1

1. （2017•新课标III）已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{4}{3}$，则 $\sin 2\alpha=$（　　）

A. $-\frac{7}{9}$　　B. $-\frac{2}{9}$　　C. $\frac{2}{9}$　　D. $\frac{7}{9}$

2. （2016•新课标II）若 $\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{3}{5}$，则 $\sin 2\alpha=$（　　）

A. $\frac{7}{25}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $-\frac{1}{5}$　　D. $-\frac{7}{25}$

3. （2013•重庆）$4\cos 50^\circ-\tan 40^\circ=$（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{2}-1$

4. （2012•重庆）$\frac{\sin 47^\circ-\sin 17^\circ\cos 30^\circ}{\cos 17^\circ}=$（　　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. （2012•大纲版）已知 α 为第二象限角，$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos 2\alpha=$（　　）

A. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{9}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{9}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

6. （2011•辽宁）设 $\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)=\frac{1}{3}$，则 $\sin 2\theta=$（　　）

A. $-\frac{7}{9}$　　B. $-\frac{1}{9}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{7}{9}$

7. （2010•宁夏）若 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，α 是第三象限的角，则 $\frac{1+\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}}=$（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. -2

8. （2008•海南）$\frac{3-\sin 70^\circ}{2-\cos^2 10^\circ}=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. （2006•辽宁）已知等腰 ΔABC 的腰为底的 2 倍，则顶角 A 的正切值是（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{15}}{8}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{7}$

10. （2011•重庆）已知 $\sin\alpha=\frac{1}{2}+\cos\alpha$，且 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})}$ 的值为________.

11. （1996•全国）求值：tan20°+tan40°+$\sqrt{3}$ tan20°tan40°=________.

12. （2016•江苏）在锐角 ΔABC 中，若 $\sin A=2\sin B\sin C$，则 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值是________.

13. 已知函数 $f(x)=\sin 2x+2\sin x+\frac{4\sqrt{13}-10}{3\sqrt{13}}\cos x(0<x<\frac{\pi}{2})$，则 $f(x)$ 的最大值是________.

14. 已知函数 $f(x)=\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin x+3\cos x$，则 $f(x)$ 的最大值是________.

15. （2007•福建）在 ΔABC 中，$\tan A=\frac{1}{4}$，$\tan B=\frac{3}{5}$.

（1）求角 C 的大小；

（2）若 AB 边的长为 $\sqrt{17}$，求 BC 边的长.

16. （2006•四川）已知 A、B、C 是 ΔABC 三内角，向量 $\vec{m}=(-1,\sqrt{3})$，$\vec{n}=(\cos A,\sin A)$，且 $\vec{m}\cdot\vec{n}=1$，

（1）求角 A；

（2）若 $\frac{1+\sin 2B}{\cos^2 B-\sin^2 B}=-3$，求 $\tan C$.

达标训练 2

1.（2018•长沙模拟）若 $\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{4}{5}$，则 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)$ 的值为（　　）

A. $\frac{24}{25}$　　B. $-\frac{24}{25}$　　C. $\frac{7}{25}$　　D. $-\frac{7}{25}$

2.（2018•赣州一模）已知 $\theta\in(0,\pi)$，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，则 $\cos 2\theta=$（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.（2018•开封三模）已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，则 $\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)=$（　　）

A. $\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{4}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{3}{5}$

4.（2018•上饶二模）$\frac{\sin 65^\circ-\sin 35^\circ\cos 30^\circ}{\cos 35^\circ}=$（　　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5.（2018•日照二模）若 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$，则 $\sin\left(\frac{5}{6}\pi-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ 值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

6.（2018•湛江二模）已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\cos 2\alpha=\frac{4}{5}$，则 $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=$（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

7.（2018•广州一模）已知 $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，则 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=$（　　）

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $-\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{3}{5}$

8.（2018•湖南模拟）已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}\sin$，则 $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=$（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{5}{18}$　　C. $\frac{5}{18}$　　D. $\frac{13}{18}$

9.（2018•延边州模拟）已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{4}{3}$，则 $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$（　　）

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{2}{9}$　　C. $\frac{4}{9}$　　D. $\frac{5}{9}$

10.（2018•齐齐哈尔二模）函数 $y=\frac{1}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$ 的最大值为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{5}{4}$

11.（2018•内江一模）已知函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$，则（　　）

A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π　　B. $f(x)$ 的最大值为 2

C. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$ 上单调递减　　D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称

12.（2018•日照二模）已知 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$，则 $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ 的值为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{15}{16}$　　D. $\frac{1}{16}$

13．（2018•上饶二模）函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的最大值为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．1　　D．$\frac{4}{3}$

14．（2017•香坊期末）$\frac{\sin10°\cdot\sin80°}{\cos^2 35°-\sin^2 35°}$ 的值为（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．1　　D．-1

15．（2018•渭南一模）已知函数 $y=\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\frac{1}{2}$，$x\in$（0，$\frac{\pi}{2}$），则该函数的值域为_________.

16．（2018•凌源市模拟）$\frac{\sin47°-\sin17°\cos30°}{\cos17°}$ 的值等于_________.

17．（2018•安徽模拟）$\frac{2\cos55°-\sqrt{3}\sin5°}{\cos5°}$ 的值为_________.

18．（2018•重庆模拟）$\frac{\sqrt{3}\tan10°-1}{\sin10°}=$_________．（用数字作答）

19．（2018•辽阳一模）已知 $\sin10°+m\cos10°=2\cos140°$，则 $m=$_________.

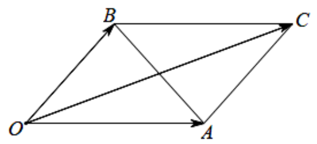
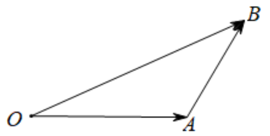
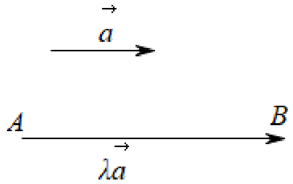
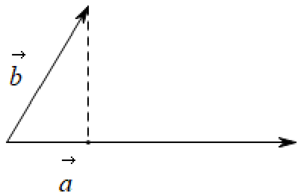
20．（2017•台州期末）求值：$\cos40°(1+\sqrt{3}\tan10°)=$_________.

21．（2017•田家庵期末）$\frac{1}{\sin10°}-\frac{\sqrt{3}}{\sin80°}$ 的值是_________.

22．（2017•武昌期末）计算 $\frac{\tan40°+\tan80°+\tan240°}{\tan40°\tan80°}=$_________.

专题 1　向量的基础知识

第一讲 向量的基础知识

运算	图形语言	符号语言	坐标语言
加法与减法		$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$	记 $\overrightarrow{OA}=(x_1,\ y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,\ y_2)$ 则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2)$ $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$
		$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$	
实数与向量的乘积		$\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{a}(\lambda\in R)$	记 $\vec{a}=(x,\ y)$，　则 $\lambda\vec{a}=(\lambda x,\ \lambda y)$
两个向量的数量积		$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$	记 $\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

提醒：

（1）向量 $\vec{b}$ 与非零向量 $\vec{a}$ 共线的充要条件是有且只有一个实数 λ，使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$．

（2）设 $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$，$\vec{b}=(x_2,\ y_2)$，$\vec{a}/\!/\vec{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$，$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a\cdot b=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_2y_1=0$．

（3）两个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角公式：$\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$．

【例 1】（2015•四川）设向量 $\vec{a}=(2,\ 4)$ 与向量 $\vec{b}=(x,\ 6)$ 共线，则实数 $x=$（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．6

【解析】由于 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，故 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$，即 $2=\lambda x$，$4=6\lambda\Rightarrow\lambda=\dfrac{2}{3}$，$x=3$，选 B．

【例 2】（2015•河北）已知点 $A(0,\ 1)$，$B(3,\ 2)$，向量 $\overrightarrow{AC}=(-4,\ -3)$，则向量 $\overrightarrow{BC}=$（　　）

A．$(-7,\ -4)$　　B．$(7,\ 4)$　　C．$(-1,\ -4)$　　D．$(1,\ 4)$

【解析】由于 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，故 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-4,-3)-(3,1)=(-7,-4)$，选 A．

【例 3】（2015•黑龙江）$\vec{a}=(1,\ -1)$，$\vec{b}=(-1,\ -2)$，则（$2\vec{a}+\vec{b}$）$\cdot\vec{a}=$（　　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

【解析】$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=(2\times1-1,\ 2\times(-1)+2)\cdot(1,\ -1)=1\times1+0\times(-1)=1$，故选 C．

【例 4】（2015•广东）在平面直角坐标系 xoy 中，已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\overrightarrow{AB}=(1\ ,-2)$，$\overrightarrow{AD}=(2,\ 1)$

则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$（　　）

A．5　　B．4　　C．3　　D．2

【解析】四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2$，

即 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1\times2+(-2)\times1+2^2+1^2=5$，选 A．

第二讲 向量运算与整式运算的同与异（无坐标的向量运算）

同：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；$|a\pm b|=\sqrt{a^2\pm 2ab+b^2}$；$a(b+c)=ab+ac$ 公式都可通用

异：整式：$ab=\pm|a||b|$，$|a|$ 仅仅表示数；向量：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|\cos\theta(\theta为\vec{a}与\vec{b}夹角)$

$\left|m\vec{a}\pm n\vec{b}\right|=\sqrt{m^2\left|\vec{a}\right|^2\pm 2mn\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta+n^2\left|\vec{b}\right|^2}$，使用范围广泛，通常是求模或者夹角.

$\left|m\vec{a}\right|-\left|n\vec{b}\right|\le\left|m\vec{a}\pm n\vec{b}\right|\le\left|m\vec{a}\right|+\left|n\vec{b}\right|$，通常是求 $\left|m\vec{a}\pm n\vec{b}\right|$ 最值的时候用.

【例 5】（2015•山东）已知菱形 $ABCD$ 的边长为 a，$\angle ABC=60°$，则 $\overline{BD}\cdot\overline{CD}=$（　　）

A. $-\frac{3}{2}a^2$　　B. $-\frac{3}{4}a^2$　　C. $\frac{3}{4}a^2$　　D. $\frac{3}{2}a^2$

【解析】因为 $ABCD$ 是菱形，由图形可知 $\left|\overline{DC}\right|=a$，$\left|\overline{BD}\right|=\sqrt{3}a$，$\overline{BD}与\overline{CD}夹角为30°$ 即

$\overline{BD}\cdot\overline{CD}=\sqrt{3}a\cdot a\cdot\cos 30°=\frac{3}{2}a^2$，选 D.

【例 6】（2015•安徽）ΔABC 是边长为 2 的等边三角形，已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\overline{AB}=2\vec{a}$，$\overline{AC}=2\vec{a}+\vec{b}$，则下列结论正确的是（　　）

A. $\left|\vec{b}\right|=1$　　B. $\vec{a}\perp\vec{b}$　　C. $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$　　D. $\left(4\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\overrightarrow{BC}$

【解析】 ABC 是等边三角形，$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=2\cdot2\cdot\cos 60°=2$，根据题意，$\overline{AB}\cdot=2\vec{a}\Rightarrow\left|\vec{a}\right|=1$，另向量 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角为 θ，

$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=2\vec{a}\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=4\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=4+2\left|\vec{b}\right|\cos\theta=2\Rightarrow\left|\vec{b}\right|\cos\theta=-1$，

$\left|AC\right|=2\Rightarrow 4\left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta+\left|\vec{b}\right|^2=4$，$\left|\vec{b}\right|=2$，$\cos\theta=-\frac{1}{2}$；$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta=-1$，$A$、$B$、$C$ 错，

$\left(4\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\overline{BC}=\left(4\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\overline{AC}-\overline{AB}\right)=4\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2=0$，选 D.

【例 7】已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 $120°$，$\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{b}\right|=3$，则 $|5\vec{a}-\vec{b}|=$________.

【解析】 $\left|5\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(5\vec{a}-\vec{b}\right)^2=25\vec{a}^2-10\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=49$，$\left|5\vec{a}-\vec{b}\right|=7$.

【例 8】（2015•重庆）若非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{a}\right|=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left|\vec{b}\right|$，且 $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\perp\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. π

【解析】 $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)=3\left(\vec{a}\right)^2-\vec{a}\vec{b}-2\left(\vec{b}\right)^2=0\Rightarrow 3\cdot\frac{8}{9}\left|\vec{b}\right|^2-\frac{2\sqrt{2}}{3}\left|\vec{b}\right|^2\cos\theta-2\left|\vec{b}\right|^2=0\Rightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$，选 A.

【例 9】（2019•海南）已知 $\overrightarrow{AB}=(2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(3,t)$，$|\overrightarrow{BC}|=1$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$（　　）

A. -3　　B. -2　　C. 2　　D. 3

【解析】 因为 $\overrightarrow{AB}=(2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(3,t)$，所以 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(1,t-3)$，因为 $\left|\overrightarrow{BC}\right|=1$，所以 $t-3=0$，即 $\overrightarrow{BC}=(1,0)$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2$，故选 C.

【例 10】（2019•海南）已知向量 $\vec{a}=(2,3)$，$\vec{b}=(3,2)$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $5\sqrt{2}$　　D. 50

【解析】 因为 $a=(2,3)$，$b=(3,2)$，所以 $a-b=(2,3)-(3,2)=(-1,1)$，所以 $|a-b|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，故选 A.

【例 11】（2019•新课标I）已知非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$，且 $(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

【解析】 因为 $(a-b)\perp b$，所以 $(a-b)\cdot b=a\cdot b-b^2=|a||b|\cos\langle a,b\rangle-b^2=0$，所以 $\cos\langle a,b\rangle=\frac{|b|^2}{|a||b|}=\frac{|b|^2}{2|b|^2}=\frac{1}{2}$，因为 $\langle a,b\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\langle a,b\rangle=\frac{\pi}{3}$，故选 B.

【例 12】（2019•新课标III）已知向量 $\vec{a}=(2,2)$，$\vec{b}=(-8,6)$，则 $\cos<\vec{a}$，$\vec{b}>=$________.

【解析】因为 $a\cdot b=2\times(-8)+2\times6=-4$，$|a|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$|b|=\sqrt{(-8)^2+64}=10$，$\cos\langle a,b\rangle=\dfrac{-4}{2\sqrt{2}\times10}=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，故答案为 $-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

【例 13】（2019•新课标III）已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为单位向量，且 $\vec{a}\bullet\vec{b}=\vec{0}$，若 $\vec{c}=2\vec{a}-\sqrt{5}\vec{b}$，则 $\cos<\vec{a}$，$\vec{c}>=$____.

【解析】因为 $a\cdot c=a\cdot\left(2a-\sqrt{5}b\right)=2a^2-\sqrt{5}a\cdot b=2$，则 $c^2=\left(2a-\sqrt{5}b\right)^2=4a^2-4\sqrt{5}a\cdot b+5b^2=9$，所以 $|c|=3$，即 $cos\langle a,c\rangle=\dfrac{a\cdot c}{|a||c|}=\dfrac{2}{3}$，故答案为 $\dfrac{2}{3}$.

达标训练

1.（2018•新课标II）已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，则 $\vec{a}\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=$（　　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．0

2.（2017•新课标II）设非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ 则（　　）

A．$\vec{a}\perp\vec{b}$　　B．$|\vec{a}|=|\vec{b}|$　　C．$\vec{a}//\vec{b}$　　D．$|\vec{a}|>|\vec{b}|$

3.（2016•新课标III）已知向量 $\overrightarrow{BA}=(\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{BC}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{1}{2})$，则 $\angle ABC=$（　　）

A．$30°$　　B．$45°$　　C．$60°$　　D．$120°$

4.（2016•新课标II）已知向量 $\vec{a}=(1,m)$，$\vec{b}=(3,-2)$，且 $(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$，则 $m=$（　　）

A．-8　　B．-6　　C．6　　D．8

5.（（2015•陕西）对任意向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，下列关系式中不恒成立的是（　　）

A．$|\vec{a}\bullet\vec{b}|\leqslant|\vec{a}||\vec{b}|$　　B．$|\vec{a}-\vec{b}|\leqslant||\vec{a}|-|\vec{b}||$

C．$(\vec{a}+\vec{b})^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2$　　D．$(\vec{a}+\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$

6.（2015•福建）设 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(1,1)$，$\vec{c}=\vec{a}+k\vec{b}$，若 $\vec{b}\perp\vec{c}$，则实数 k 的值等于（　　）

A．$-\dfrac{3}{2}$　　B．$-\dfrac{5}{3}$　　C．$\dfrac{5}{3}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

7.（2015•新课标II）$\vec{a}=(1,-1)$，$\vec{b}=(-1,2)$，则 $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=$（　　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

8.（2015•安徽）ΔABC 是边长为 2 的等边三角形，已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=2\vec{a}+\vec{b}$，则下列结论正确的是（　　）

A．$|\vec{b}|=1$　　B．$\vec{a}\perp\vec{b}$　　C．$\vec{a}\bullet\vec{b}=1$　　D．$(4\vec{a}+\vec{b})\perp\overrightarrow{BC}$

9.（2015•新课标I）已知点 $A(0,1)$，$B(3,2)$，向量 $\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$，则向量 $\overrightarrow{BC}=$（　　）

A．$(-7,-4)$　　B．$(7,4)$　　C．$(-1,4)$　　D．$(1,4)$

10.（2015•重庆）若非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}|\vec{b}|$，且 $(\vec{a}-\vec{b})\perp(3\vec{a}+2\vec{b})$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（　　）

A．$\dfrac{\pi}{4}$　　B．$\dfrac{\pi}{2}$　　C．$\dfrac{3\pi}{4}$　　D．π

11.（2014•大纲版）已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为单位向量，其夹角为 $60°$，则 $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}=$（　　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

12.（2018•新课标III）已知向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(2,-2)$，$\vec{c}=(1,\lambda)$．若 $\vec{c}//(2\vec{a}+\vec{b})$，则 $\lambda=$__________.

13.（2018•北京）设向量 $\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(-1,m)$．若 $\vec{a}\perp(m\vec{a}-\vec{b})$，则 $m=$_________．

14.（2018•上海）在平面直角坐标系中，已知点 $A(-1,0)$、$B(2,0)$，E、F 是 y 轴上的两个动点，且 $|\overrightarrow{EF}|=2$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$ 的最小值为_________．

15.（2018•江苏）在平面直角坐标系 xOy 中，A 为直线 $l:y=2x$ 上在第一象限内的点，$B(5,0)$，以 AB 为直径的圆 C 与直线 l 交于另一点 D．若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，则点 A 的横坐标为_________．

16.（2017•山东）已知向量 $\vec{a}=(2,6)$，$\vec{b}=(-1,\lambda)$，若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $\lambda=$_________．

17.（2017•新课标III）已知向量 $\vec{a}=(-2,3)$，$\vec{b}=(3,m)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $m=$_________．

18.（2017•新课标I）已知向量 $\vec{a}=(-1,2)$，$\vec{b}=(m,1)$，若向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，则 $m=$_________．

19.（2017•新课标I）已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 $60°$，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，则 $|\vec{a}+2\vec{b}|=$_________．

20.（2017•山东）已知 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 是互相垂直的单位向量，若 $\sqrt{3}\vec{e_1}-\vec{e_2}$ 与 $\vec{e_1}+\lambda\vec{e_2}$ 的夹角为 $60°$，则实数 λ 的值是_________．

21.（2017•江苏）在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-12,0)$，$B(0,6)$，点 P 在圆 $O:x^2+y^2=50$ 上．若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant 20$，则点 P 的横坐标的取值范围是_________．

22.（2017•北京）已知点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，点 A 的坐标为 $(-2,0)$，O 为原点，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的最大值为_________．

23.（2016•新课标II）已知向量 $\vec{a}=(m,4)$，$\vec{b}=(3,-2)$，且 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $m=$_________．

24.（2016•新课标I）设向量 $\vec{a}=(m,1)$，$\vec{b}=(1,2)$，且 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$，则 $m=$_________．

25.（2016•山东）已知向量 $\vec{a}=(1,-1)$，$\vec{b}=(6,-4)$，若 $\vec{a}\perp(t\vec{a}+\vec{b})$，则实数 t 的值为_________．

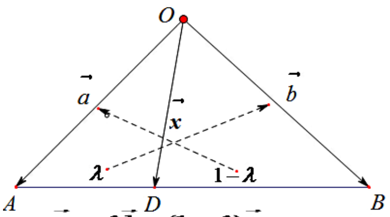
26.（2016•新课标I）设向量 $\vec{a}=(x,x+1)$，$\vec{b}=(1,2)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $x=$_________．

27.（2015•新课标II）设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不平行，向量 $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}+2\vec{b}$ 平行，则实数 $\lambda=$_________．

专题 2　共线之对面的女孩看过来

第一讲　对面的女孩看过来

平面上 O，A，B 三点不共线，D 在直线 AB 上，且 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}$，令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{x}$，则有 $\vec{x}=\lambda\vec{b}+(1-\lambda)\vec{a}$



$\vec{x}=\lambda\vec{b}+(1-\lambda)\vec{a}$

其表达意思就是从一个顶点 O 引出三个向量，且它们共线，每一个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 分别乘以它对面的比值，简称对面的女孩看过来．

特殊点：当 D 为 AB 中点时，$\lambda=\frac{1}{2}$，$\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}$（中线定理）

【例 1】在ΔABC中，已知$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$，则$\overrightarrow{AD}=$（　　）

A．$\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB})$　　B．$\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})$　　C．$\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB})$　　D．$\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB})$

【解析】可以知道$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$，$\lambda=\frac{1}{3}$，故$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，选 A.

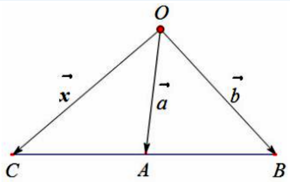
【例 2】已知$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$C$为线段$AB$上距$A$较近的一个三等分点，$D$为线段$CB$上距$C$较近的一个三等分点，则用$\vec{a}$，$\vec{b}$表示$\overrightarrow{OD}$的表达式为（　　）

A．$\frac{1}{9}(4\vec{a}+5\vec{b})$　　B．$\frac{1}{16}(9\vec{a}+7\vec{b})$　　C．$\frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})$　　D．$\frac{1}{4}(3\vec{a}+\vec{b})$

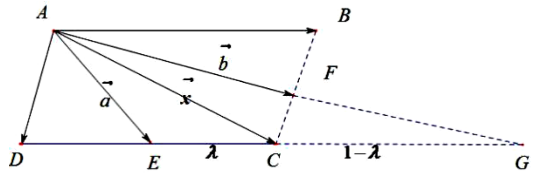
【解析】$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$，故$\overrightarrow{AD}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB}=\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DB}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$，$\therefore\overrightarrow{OD}=\frac{5}{9}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{a}$，选 A.

【例 3】已知O，A，B是平面上的三个点，直线AB上有一点C，满足$2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$，则$\overrightarrow{OC}=$（　　）

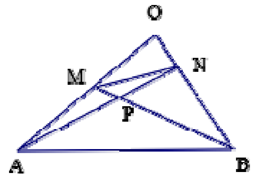
【解析】以全长CB为单位，故$\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，$\lambda=\frac{1}{2}$，$\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$，故$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}$.



例 3 题图



例 4 题图



例 5 题图

【例 4】在平行四边形$ABCD$中，E和F分别是边CD和BC的中点．若$\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AE}+n\overrightarrow{AF}$，其中$m$，$n\in R$，则$m+n=$__________.

【解析】如图，延长$\overrightarrow{AF}$交$\overrightarrow{DC}$延长线于G，故$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AG}+(1-\lambda)\overrightarrow{AE}$，易发现，$\Delta ABF\cong\Delta GCF$，故$\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AF}$ $\lambda=\frac{1}{3}$，$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$，$m+n=\frac{4}{3}$.

【例 5】在△OAB的边OA、OB上分别取点M、N，使$|\overrightarrow{OM}|:|\overrightarrow{OA}|=1:3$，$|\overrightarrow{ON}|:|\overrightarrow{OB}|=1:4$，设线段$AN$与$BM$交于点$P$，记$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，用$\vec{a}$，$\vec{b}$表示向量$\overrightarrow{OP}$.

【解析】∵ B、P、M共线∴ 记$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BM}$，则$\overrightarrow{PM}=(1-\lambda)\overrightarrow{BM}$ ∴ $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OM}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\lambda\vec{a}+(1-\lambda)\vec{b}$ ①，

同理，记$\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{AN}$，∴ $\overrightarrow{OP}=(1-\mu)\vec{a}+\frac{1}{4}\mu\vec{b}$ ② 由①，②得$\begin{cases}\frac{1}{3}\lambda=1-\mu\\1-\lambda=\frac{1}{4}\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{9}{11}\\\mu=\frac{8}{11}\end{cases}$，∴ $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{11}\vec{a}+\frac{2}{11}\vec{b}$.

达标训练

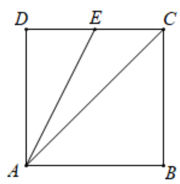
1．（2019•汕头期末）在△ABC中，D是BC边上的点，且$\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{DC}$，$E$为$AD$的中点，则$\overrightarrow{EB}=$（　　）

A．$\frac{9}{10}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$　　B．$-\frac{9}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$　　C．$\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{9}{10}\overrightarrow{AC}$　　D．$-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{9}{10}\overrightarrow{AC}$

2．（2019•玉山期中）如图，正方形中，E为DC的中点，若$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则$\lambda\cdot\mu$的值为（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$

C．-1　　D．1



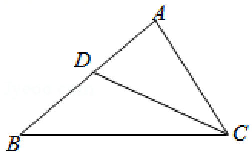
3．（2019•郑州三模）在△ABC中，若点D满足$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$，点$M$为$AC$中点，则$MD=$（　　）

A．$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　B．$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　C．$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　D．$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

4．（2019•安徽二模）在平行四边形$ABCD$中，E为BC的中点，点F在CD上，且$DF=2FC$，连接AE，BF交于G点，则$\overrightarrow{DG}=$（　　）

A．$\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{7}\overrightarrow{AD}$　　B．$\frac{6}{7}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{7}\overrightarrow{AD}$　　C．$\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{7}\overrightarrow{AD}$　　D．$\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{7}\overrightarrow{AD}$

5．（2019•赣州期中）如图所示，D 是 ΔABC 的边 AB 的中点，则向量 $\overrightarrow{DC}=$（　　）



A．$-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　　B．$-\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　　C．$\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　　D．$\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

6．（2019•武汉期中）在△ABC 中，D 为 BC 边上的三等分点（靠近 B 点），E 为 AD 上的中点，则 $\overrightarrow{EB}=$（　　）

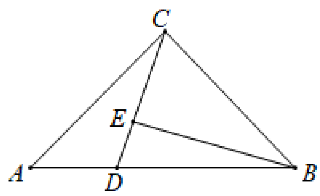
A．$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　B．$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　C．$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　D．$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

7．（2019•滨州二模）在△ABC 中，G 为△ABC 的重心，M 为 AC 上一点，且满足 $\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{AM}$，则（　　）

A．$\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$　　B．$\overrightarrow{GM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$

C．$\overrightarrow{GM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$　　D．$\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$

8．（2019•广东模拟）在如图所示的△ABC 中，点 D，E 分别在边 AB，CD 上，且 $BD=2AD$，$CE=2ED$，则 $\overrightarrow{BE}=$（　　）



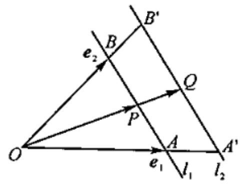
A．$\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$　　B．$\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

C．$\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}$　　D．$\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{7}{9}\overrightarrow{AB}$

专题 3　等高线定理的运用

第一讲　等高线定理

如图设 e_1，e_2 是平面内两个不共线向量，若 $\overrightarrow{OP}=xe_1+ye_2$，且 $x+y=1$，$\overrightarrow{OQ}=x'e_1+y'e_2$ 且 $x'+y'=k$，则有 $k=\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OP}|}$.



证明：设 $\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OP}$，根据相似三角形关系可知：$\overrightarrow{OQ}=\lambda(xe_1+ye_2)=\lambda xe_1+\lambda ye_2=x'e_1+y'e_2$，

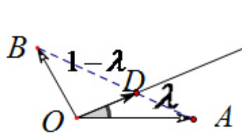
所以 $x'+y'=\lambda(x+y)=\lambda$　所以 $x'+y'=k=\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OP}|}$.

【例 1】如图，平面内有三个向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，其中 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 $120°$，$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 $30°$，且 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$，$|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{3}$．若 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}(m,\ n\in R)$，则 $m+n$ 的值为__________.

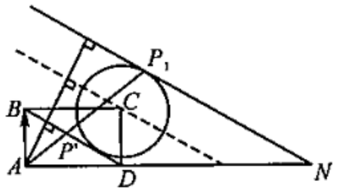
【解析】法一：连接 AB，交 $\overrightarrow{OC}$ 于点 D，$\angle DOA=\angle OAD=30°$，$\angle BOD=90°$，$|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{DA}|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$|\overrightarrow{DB}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故 $\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$；$|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{3}=6|\overrightarrow{OD}|$ $\therefore\overrightarrow{OC}=6\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)=4\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$，$m+n=6$.

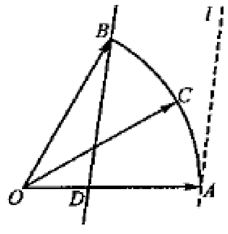
法二：根据等高线定理可得：$\frac{|OC|}{|OD|}=k=m+n$，根据几何性质 $\frac{|OD|}{|OB|}=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $k=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=6$.



例 1 题图



例 2 题图



例 3 题图

【例 2】在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=2$，动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上，若 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}$，则 $m+n$ 的最大值为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 2

【解析】如图，当 BD 的平行线 PN 与圆 C 相切时，即点 P 位于 P_1 点时，此时 $\dfrac{|AN|}{|AD|}$ 取得最大值.根据相似三角形的高之比，可以得到 $\dfrac{|AN|}{|AD|}$ 取得最大比值为 3，即 $m+n$ 的最大值为 3.故选 A.

【例 3】在扇形 OAB 中，$\angle AOB=60^\circ$，C 为弧 AB 上的一个动点. 若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 $3x+y$ 的取值范围是________.

【解析】如图，$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=3x\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}\right)+y\overrightarrow{OB}=3x\overrightarrow{OD}+y\overrightarrow{OB}$，故取点 D 使得 $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ 当点 C 位于直线 BD 上时（即点 C 与点 B 重合时），$3x+y$ 取得最小值 1；当点 C 与点 A 重合时，$3x+y$ 取最大值 3，故 $3x+y$ 的取值范围是 $[1,3]$.

第二讲　未知夹角的向量乘积

第一步：选定基底，就是所谓的几何图形中模和夹角都很清楚的两个向量 $\vec{a},\vec{b}$.

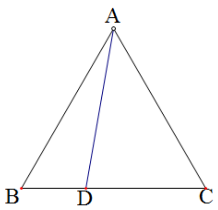
第二步：利用加法和减法，以及三点共线将两个向量表示为 $\lambda_1\vec{a}+\mu_1\vec{b}$ 和 $\lambda_2\vec{a}+\mu_2\vec{b}$.

第三步：利用向量乘积知识算出结果.

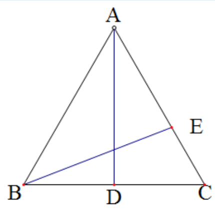
【例 4】在正三角形 ABC 中，D 是边 BC 上的点，若 $AB=3$，$BD=1$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$________.

【解析】令 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=\dfrac{9}{2}$；

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\vec{a}\left(\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)=\dfrac{2}{3}|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{3}\vec{a}\vec{b}=\dfrac{2}{3}\times 9+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9}{2}=\dfrac{15}{2}$.



例 4 题图



例 5 题图

【例 5】在边长为 1 的正三角形 ABC 中，设 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CE}$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=$________.

【解析】令 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$；

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{3}(-\vec{a})+\dfrac{2}{3}(\vec{b}-\vec{a})=-\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$，

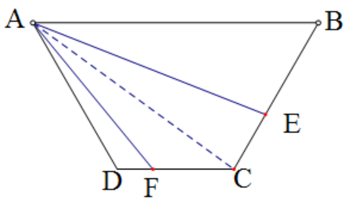
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)\left(-\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)=-\dfrac{1}{2}|\vec{a}|^2-\dfrac{1}{6}\vec{a}\vec{b}+\dfrac{1}{3}|\vec{b}|^2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{4}$.

【例 6】在等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB /\!/ DC$，$AB=2$，$BC=1$，$\angle ABC=60°$，点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上，且 $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的值为__________.

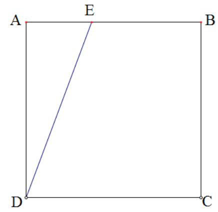
【解析】如图，令 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos120°=-1$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\vec{a}+\vec{b}+\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2}\vec{a}\right)=\frac{7}{12}\vec{a}+\vec{b}$.

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)\left(\frac{7}{12}\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{7}{12}|\vec{a}|^2+\frac{25}{18}\vec{a}\vec{b}+\frac{2}{3}|\vec{b}|^2=\frac{7}{3}-\frac{25}{18}+\frac{2}{3}=\frac{29}{18}$.



例 6 题图



例 7 题图

【例 7】已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，点 E 是 AB 边上的动点，则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$ 的最大值为__________.

【解析】如图，令 $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DA}=\vec{b}$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos90°=0$，$\overrightarrow{AE}=\lambda\vec{a}$；

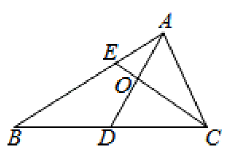
$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\lambda\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}=(\lambda\vec{a}+\vec{b})\vec{a}=\lambda|\vec{a}|^2+\vec{a}\vec{b}=\lambda$ $\lambda_{\max}=1$.

【例 8】（2019•天津）在四边形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$AB=2\sqrt{3}$，$AD=5$，$\angle A=30°$，点 E 在线段 CB 的延长线上，且 $AE=BE$，则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=$________.

【解析】因为 $AE=BE$，$AD /\!/ BC$，$\angle A=30°$，所以在等腰三角形 ABE 中，$\angle BEA=120°$，又 $AB=2\sqrt{3}$，所以 $AE=2$，即 $\overrightarrow{BE}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$，因为 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$，所以 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$，又 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}\right)=-\overrightarrow{AB}^2+\frac{7}{5}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}^2=-\overrightarrow{AB}^2+\frac{7}{5}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cos A-\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}^2=-12+\frac{7}{5}\times5\times2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{5}\times25=-1$，故答案为-1.

【例 9】（2019•江苏）如图，在 ΔABC 中，D 是 BC 的中点，E 在边 AB 上，$BE=2EA$，AD 与 CE 交于点 O. 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}$，则 $\frac{AB}{AC}$ 的值是_________.



【解析】设 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AD}=\frac{\lambda}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}+\mu\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\right)=(1-\mu)\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AC}=\frac{1-\mu}{3}\overrightarrow{AB}-\mu\overrightarrow{AC}$，所以 $\left\{\begin{array}{l}\frac{}{2}=\frac{}{3}\\ \lambda\end{array}\right.$，所以 $\left\{\begin{array}{l}\frac{}{2}=\frac{}{3}\\ \lambda\end{array}\right.$，，，因为，所以，所以，即，故答案为.

【例 10】（2019•浙江）已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1．当每个 $\lambda_i(i=1，2，3，4，5，6)$ 取遍 ±1 时，$|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\overrightarrow{AC}+\lambda_6\overrightarrow{BD}|$ 的最小值是________，最大值是_________.

等高线专题训练

1．（2019•咸阳二模）已知G是$\triangle ABC$的重心，若$\overrightarrow{GC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC},x,y\in R$，则$x+y=$（　　）

A．-1　　B．1　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$-\frac{1}{3}$

2．（2019•潍坊期中）已知O是ΔABC内一点，且$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，点$M$在$\Delta OBC$内（不含边界），若$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$\lambda+2\mu$的取值范围是（　　）

A．$(1,\frac{5}{2})$　　B．$(1,2)$　　C．$(\frac{2}{3},1)$　　D．$(\frac{1}{2},1)$

3．（2019•武昌模拟）已知点C为扇形AOB的弧$\widehat{AB}$上任意一点，且$\angle AOB=120^\circ$，若$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in R)$，则$\lambda+\mu$的取值范围为（　　）

A．$[-2，2]$　　B．$(1，\sqrt{2}]$　　C．$[1，\sqrt{2}]$　　D．$[1，2]$

4．（2019•武汉期中）给定两个长度为1的平面向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$，它们的夹角为90°，点C在以O为圆心的圆弧AB上运动，若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中$x$，$y\in R$，则$3x+5y$的最大值为（　　）

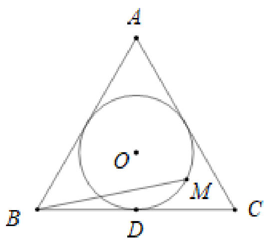
A．$\sqrt{34}$　　B．5　　C．$\sqrt{37}$　　D．6

5．（2019•湖北模拟）如图，圆O是边长为$2\sqrt{3}$的等边三角形ABC的内切圆，其与BC边相切于点D，点M为圆上任意一点，$\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BD}(x,y\in R)$，则$2x+y$的最大值为（　　）

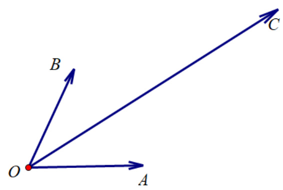
A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

6．（2019•岳麓月考）已知$\triangle ABC$的一内角$A=\frac{\pi}{3}$，O为$\triangle ABC$所在平面上一点，满足$|OA|=|OB|=|OC|$，设$\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，则$m+n$的最大值为（　　）

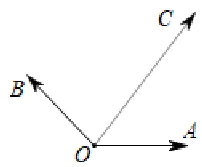
A．$\frac{2}{3}$　　B．1　　C．$\frac{4}{3}$　　D．2



第5题图



第7题图



第8题图

7．（2019•濮阳模拟）如图，平面内的两个单位向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，它们的夹角是60°，$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$向量的夹角都为30°，且$|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{3}$，若$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，则$\lambda+\mu$值为（　　）

A．2　　B．4　　C．$2\sqrt{3}$　　D．$4\sqrt{3}$

8．（2019•萍乡一模）如图，已知$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$，$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{2}$，$\tan\angle AOB=-\frac{4}{3}$，$\angle BOC=45^\circ$，$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，则$\frac{m}{n}$等于（　　）

A．$\frac{5}{7}$　　B．$\frac{7}{5}$　　C．$\frac{3}{7}$　　D．$\frac{7}{3}$

高考真题训练

1. （2018•新课标I）在$\triangle ABC$中，AD为BC边上的中线，E为AD的中点，则$\overrightarrow{EB}=$（　　）

A．$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　B．$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$　C．$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　D．$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

2. （2015•新课标I）设D为$\triangle ABC$所在平面内一点，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，则（　　）

A．$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　B．$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

C．$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　D．$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

3. （2014•新课标I）设D，E，F分别为$\triangle ABC$的三边BC，CA，AB的中点，则$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=$（　　）

A．$\overrightarrow{AD}$　B．$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$　C．$\overrightarrow{BC}$　D．$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

4. （2009•山东）设P是$\triangle ABC$所在平面内的一点，$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$，则（　　）

A．$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$　B．$\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=\vec{0}$　C．$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$　D．$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

5. （2008•辽宁）已知四边形$ABCD$的三个顶点$A(0,2)$，$B(-1,-2)$，$C(3,1)$，且$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$，则顶点$D$的坐标为（　　）

A．$(2,\frac{7}{2})$　B．$(2,-\frac{1}{2})$　C．$(3,2)$　D．$(1,3)$

6. （2008•全国卷I）在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$．若点$D$满足$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则$\overrightarrow{AD}=$（　　）

A．$\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$　B．$\frac{5}{3}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{b}$　C．$\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}$　D．$\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

7. （2008•辽宁）已知O，A，B是平面上的三个点，直线AB上有一点C，满足$2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=0$，则$\overrightarrow{OC}$等于（　　）

A．$2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$　B．$-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$　C．$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$　D．$-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

8. （2008•广东）在平行四边形$ABCD$中，AC与BD交于点O，E是线段OD的中点，AE的延长线与CD交于点F．若$\overrightarrow{AC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BD}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{AF}=$（　　）

A．$\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$　B．$\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$　C．$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$　D．$\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

9. （2007•全国卷II）在$\triangle ABC$中，已知D是AB边上一点，若$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$，则$\lambda=$（　　）

A．$\frac{2}{3}$　B．$\frac{1}{3}$　C．$-\frac{1}{3}$　D．$-\frac{2}{3}$

10. （2016•天津）已知$\triangle ABC$是边长为1的等边三角形，点D、E分别是边AB、BC的中点，连接DE并延长到点F，使得$DE=2EF$，则$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$的值为（　　）

A．$-\frac{5}{8}$　B．$\frac{1}{4}$　C．$\frac{1}{8}$　D．$\frac{11}{8}$

11. （2015•四川）设四边形$ABCD$为平行四边形，$|\overrightarrow{AB}|=6$，$|\overrightarrow{AD}|=4$，若点M、N满足$\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{NC}$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}=$（　　）

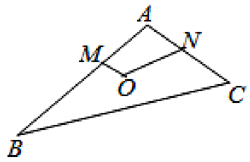
A．20　B．15　C．9　D．6

12.（2012•天津）在$\triangle ABC$中，$\angle A=90^\circ$，$AB=1$，$AC=2$．设点P，Q满足$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$，$\lambda\in R$．若$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=-2$，则$\lambda=$（　　）

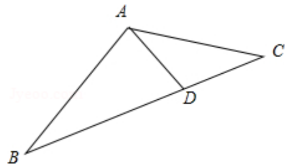
A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{4}{3}$　　D．2

13．（2018•天津）在如图的平面图形中，已知$OM=1$，$ON=2$，$\angle MON=120^\circ$，$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NA}$，则$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OM}$的值为（　　）

A．-15　　B．-9　　C．-6　　D．0



13 题图



14 题图

14．（2010•天津）如图，在$\triangle ABC$中，$AD\perp AB$，$\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BD}$，$|\overrightarrow{AD}|=1$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$（　　）

A．$2\sqrt{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\sqrt{3}$

15．（2017•新课标III）在矩形$ABCD$中，$AB=1$，$AD=2$，动点P在以点C为圆心且与BD相切的圆上．若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则$\lambda+\mu$的最大值为（　　）

A．3　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．2

16．（2017•新课标II）已知$\triangle ABC$是边长为2的等边三角形，P为平面ABC内一点，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的最小值是（　　）

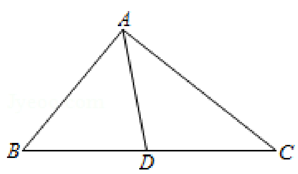
A．-2　　B．$-\dfrac{3}{2}$　　C．$-\dfrac{4}{3}$　　D．-1

17．（2006•安徽）在平行四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$，$M$为$BC$的中点，则$\overrightarrow{MN}=$　（用a，b表示）．

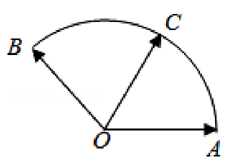
18．（2015•北京）在$\triangle ABC$中，点M，N满足$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$，若$\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则$x=$________，$y=$________．

19．（2007•天津）在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$AC=3$，D是边BC的中点，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$________．

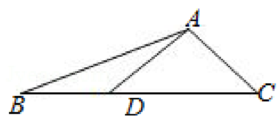
20．（2009•安徽）给定两个长度为1的平面向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$，它们的夹角为120°．如图所示，点C在以O为圆心，以1半径的圆弧AB上变动．若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中$x$，$y\in R$，则$x+y$的最大值是________．



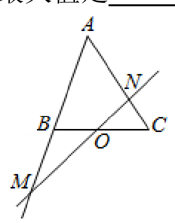
19 题图



20 题图



21 题图



22 题图

21．（2007•天津）如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=120^\circ$，$AB=2$，$AC=1$，D是边BC上一点，$\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$________．

22．（2007•江西）如图，在$\triangle ABC$中，点O是BC的中点．过点O的直线分别交直线AB、AC于不同的两点M、N，若$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$，则$m+n$的值为________．

23.（2013•新课标I）已知两个单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$60°$，$\vec{c}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$．若$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，则$t=$________．

24.（2013•天津）在平行四边形$ABCD$中，$AD=1$，$\angle BAD=60°$，E为CD的中点．若$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=1$，则$AB$的长为________．

25.（2013•新课标II）已知正方形$ABCD$的边长为2，E为CD的中点，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=$________．

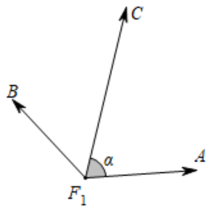
26.（2017•天津）在$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$，$AB=3$，$AC=2$．若$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}(\lambda\in R)$，且$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=-4$，则$\lambda$的值为________．

27.（2015•天津）在等腰梯形$ABCD$中，已知$AB//DC$，$AB=2$，$BC=1$，$\angle ABC=60°$，点E和F分别在线段BC和DC上，且$\overrightarrow{BE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{DC}$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$的值为________．

28.（2015•天津）在等腰梯形$ABCD$中，已知$AB//DC$，$AB=2$，$BC=1$，$\angle ABC=60°$．动点E和F分别在线段BC和DC上，且$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{9\lambda}\overrightarrow{DC}$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$的最小值为_________．

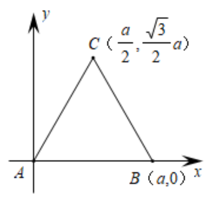
29.（2014•天津）已知菱形$ABCD$的边长为2，$\angle BAD=120°$，点E，F分别在边BC，DC上，$BC=3BE$，$DC=\lambda DF$，若$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1$，则$\lambda$的值为________．

30.（2017•江苏）如图，在同一个平面内，向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$的模分别为1，1，$\sqrt{2}$，$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OC}$的夹角为α，且$\tan\alpha=7$，$\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{OC}$的夹角为$45°$．若$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}(m,n\in R)$，则$m+n=$________．

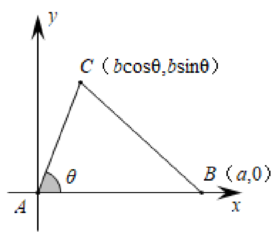


专题 4　万能的建系法求向量乘积问题

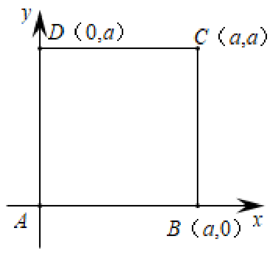
第一讲 常见的坐标系建立



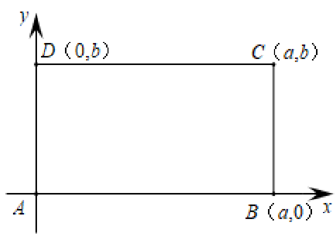
边长为a的等边三角形



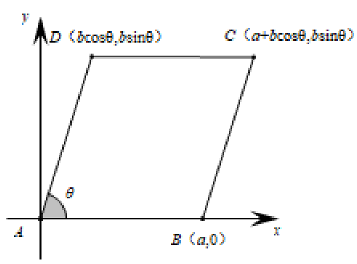
知道夹角的任意三角形



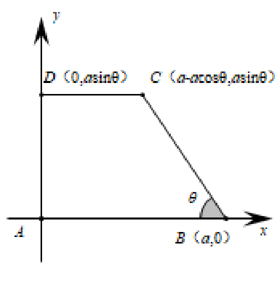
正方形



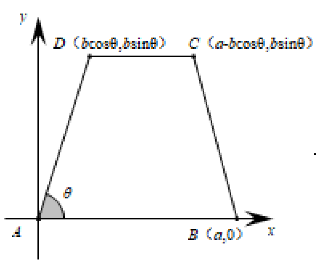
矩形



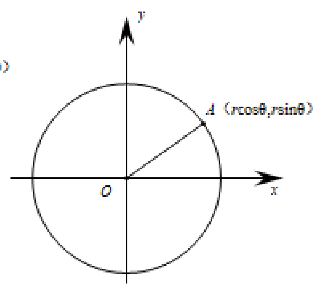
平行四边形



直角梯形



等腰梯形



圆

建系必备：（1）三角函数知识$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

（2）向量三点共线知识$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OB}+(1-\lambda)\overrightarrow{OA}$（对面女孩看过来）

【例 1】(2016•天津)已知 ΔABC 是边长为 1 的等边三角形，点 D，E 分别是边 AB，BC 的中点，连接 DE 并延长到点 F，使得 $DE=2EF$，则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为（　　）

A. $-\dfrac{5}{8}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{8}$　　D. $\dfrac{11}{8}$

【解析】如图，以 A 为原点建立坐标系，则 $B(1,\ 0)$ 和 $C\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，由于点 D、E 分别是边 AB、BC 的中点，则点 $D\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{\frac{1}{2}+1}{2},\ \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}+0}{2}\right)\Rightarrow E\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$，

$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EF}\Rightarrow\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AF}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AF}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AE}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\left(\dfrac{5}{8},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)$，

又由于 $\overrightarrow{BC}=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，故 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{5}{8}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{8}$，选 C.

【例 2】(2017•天津)在 ΔABC 中，$\angle A=60^{\circ}$，$AB=3$，$AC=2$．若 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}(\lambda\in R)$，且 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=-4$，则 λ 的值为________.

【解析】如图，以 A 为原点建立坐标系，根据题意可知点 $B(3\ ,\ 0)$ 和 $C(1,\ \sqrt{3})$，

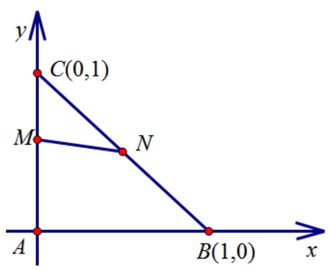
$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AE}=(\lambda-3,\ \sqrt{3}\lambda)$，

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=\dfrac{5}{3}(\lambda-3)+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}\lambda=-4\Rightarrow\lambda=\dfrac{3}{11}$.

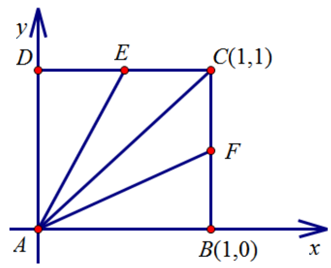
【例 3】(2013•新课标II)已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，E 为 CD 的中点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=$__________.

【解析】如图，以 A 为原点建立坐标系，则点 $B(2,0)$、$C(2,2)$、$D(0,2)$、$E(1,2)$，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=1\times(-2)+2\times2=2$.

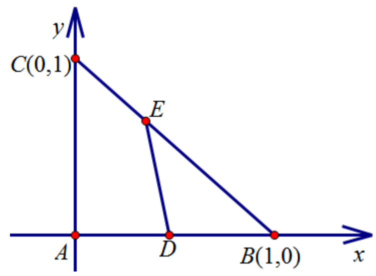
化斜为直的技巧处理：遇到没有给定夹角和模长的向量，就把两个向量基底转化为平面直角坐标系的单位向量，解出坐标来表示；在遇到一些斜坐标系的题型，可以直接转化为直角坐标系，从而利用象限的点坐标达到简化的效果.



例 4 图



例 5 图



例 6 图

【例 4】(2015•北京)在 ΔABC 中，点 M，N 满足 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$，若 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $x=$______，$y=$_______.

【解析】如图，此类型题可以化斜为值,令 $B(1,0)$，$C(0,1)$，则 $M\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$，$N\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{6}\right)$，$\therefore x=\dfrac{1}{2}$，$y=-\dfrac{1}{6}$.

【例 5】(2009•安徽)在平行四边形 $ABCD$ 中，E 和 F 分别是边 CD 和 BC 的中点，若 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}$，其中 λ、$\mu\in R$，则 $\lambda+\mu=$________.

【解析】如图，化斜为值，令 $A(0,\ 0)$，$B(1,\ 0)$，$C(1,\ 1)$，$D(0,\ 1)$，由于 E 和 F 分别是边 CD 和 BC 的中点，则 $E\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$，$F\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}\Rightarrow(1,\ 1)=\left(\dfrac{1}{2}\lambda+\mu,\ \lambda+\dfrac{1}{2}\mu\right)$，则 $\lambda+\mu=\dfrac{4}{3}$.

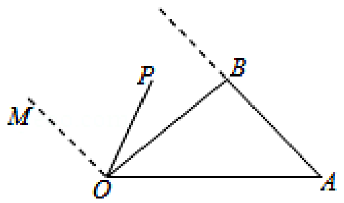
【例 6】(2013•江苏)设 D，E 分别是 ΔABC 的边 AB，BC 上的点，$AD=\dfrac{1}{2}AB$，$BE=\dfrac{2}{3}BC$，若 $\overrightarrow{DE}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AC}(\lambda_1$，$\lambda_2$ 为实数)，则 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值为________.

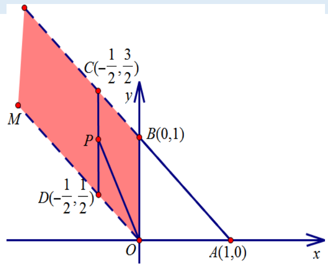
【解析】如图，令 $A(0,0)$，$B(1,0)$，$C(0,1)$，由于 $AD=\frac{1}{2}AB$，则 $D\left(\frac{1}{2},0\right)$，

$\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，$\overrightarrow{DE}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AC}\Rightarrow\left(-\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)=(\lambda_1,\lambda_2)\Rightarrow\lambda_1+\lambda_2=\frac{1}{2}$.

【例 7】(2006•湖南）如图，$OM//AB$，点 P 在由射线 OM，线段 OB 及 AB 的延长线围成的区域内（不含边界）运动，且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 x 的取值范围是_______；当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，y 的取值范围是_______.

【解析】化斜为直，如图所示，将原图转化为右图所示，由于题目中是以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为基底，故令 $\overrightarrow{OA}=(1,0)$，$\overrightarrow{OB}=(0,1)$ 延长 AB，并作 $OM//AB$ 得到右图中的阴影部分，已知 $x<0$；当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，作 $CD//OB$ 交阴影区域边界于 C、D 两点，易求得 $C\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ 和 $D\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，故 $\frac{1}{2}<y<\frac{3}{2}$.

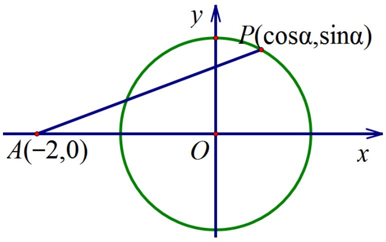




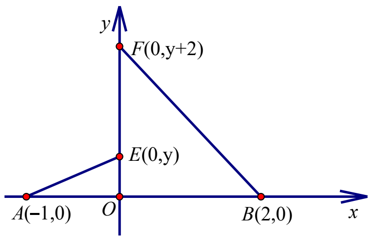
最值问题：遇到最值问题时，往往利用坐标来建立函数，转化为函数的最值问题，遇到圆的时候最好使用三角换元.

【例 8】(2017•北京）已知点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，点 A 的坐标为 $(-2,0)$，O 为原点，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的最大值为________.

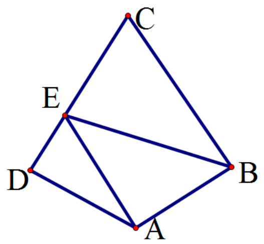
【解析】如图所示，$\overrightarrow{AO}=(2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(\cos\alpha+2,\sin\alpha)$，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}=2(\cos\alpha+2)$，$\because\cos\alpha\in[-1,1]$，$\therefore\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}\in[2,6]$，故最大值为 6.



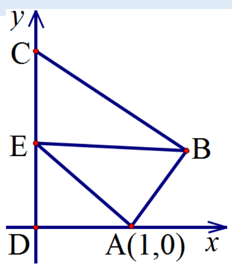
例 8 图



例 9 图



例 10 原图



例 10 建系图

【例 9】(2018•上海）在平面直角坐标系中，已知点 $A(-1,0)$，$B(2,0)$，E，F 是 y 轴上的两个动点，且 $|\overrightarrow{EF}|=2$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$ 的最小值为________.

【解析】如图，设 $E(0,y)$，$F(0,y+2)$，$\overrightarrow{AE}=(1,y)$，$\overrightarrow{BF}=(-2,y+2)$，

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=-2+y(y+2)=(y+1)^2-3$，当 $y=-1$ 时，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$ 取得最小值 -3.

【例 10】(2018•天津）如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$AD\perp CD$，$\angle BAD=120^\circ$，$AB=AD=1$. 若点 E 为边 CD 上的动点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的最小值为（　　）

A. $\frac{21}{16}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{25}{16}$　　D. 3

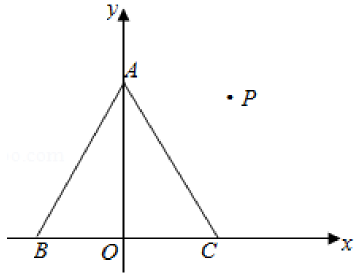
【解析】如图，由于 $AD\perp CD$，故以 D 为坐标原点建系，故 $A(1,0)$，设点 $E(0,y)$，由于 $AB=1$，$\angle BAD=120^\circ$，故 $B(1+\cos60^\circ,\sin60^\circ)=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=(-1,y)\cdot\left(-\frac{3}{2},y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=y^2-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{3}{2}=\left(y-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\frac{21}{16}$，根据二次函数知识可得，当 $y=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 时取的最小值，此时 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{21}{16}$，故选 A.

【例 11】(2017•新课标II）已知ΔABC是边长为2的等边三角形，P为平面ABC内一点，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的最小值是(　　)

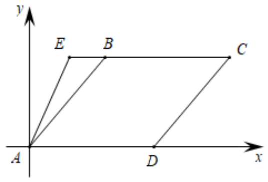
A. -2　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. -1

【解析】建立如图所示的坐标系，以BC中点为坐标原点，则$A(0,\sqrt{3})$，$B(-1,0)$，$C(1,0)$，设$P(x,y)$，则$\overrightarrow{PA}=(-x,\sqrt{3}-y)$，$\overrightarrow{PB}=(-1-x,-y)$，$\overrightarrow{PC}=(1-x,-y)$，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2x^2-2\sqrt{3}y+2y^2$

$=2[x^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2-\frac{3}{4}]$ ∴当$x=0$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，取得最小值$2\times(-\frac{3}{4})=-\frac{3}{2}$，故选$B$.



【例 12】(2019•天津）在四边形$ABCD$中，$AD//BC$，$AB=2\sqrt{3}$，$AD=5$，$\angle BAD=30^\circ$，点E在线段CB的延长线上，且$AE=BE$，则$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=$________.



【解析】如图，A 为原点建立直角坐标系，易知$B\left(3,\sqrt{3}\right)$，$C\left(8,\sqrt{3}\right)$，$D\left(5,0\right)$，$AE=BE\Rightarrow\angle E=120^\circ$，故点$E\left(1,\sqrt{3}\right)$，故$\overrightarrow{BD}\left(2,-\sqrt{3}\right)$，所以$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=2\times1+\left(-\sqrt{3}\right)\times\sqrt{3}=-1$，故答案为-1.

达标训练

1.（2014•天津）已知菱形$ABCD$的边长为2，$\angle BAD=120^\circ$，点E、F分别在边BC、DC上，$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=\mu\overrightarrow{DC}$，若$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1$，$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=-\frac{2}{3}$，则$\lambda+\mu=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{5}{6}$　　D. $\frac{7}{12}$

2.（2012•天津）在△ABC中，$\angle A=90^\circ$，$AB=1$，$AC=2$．设点P，Q满足$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$，$\lambda\in R$．若$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=-2$，则$\lambda=$（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. 2

3.（2012•天津）已知△ABC为等边三角形，$AB=2$．设点P，Q满足$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$，$\lambda\in R$．若$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=-\frac{3}{2}$，则$\lambda=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{1\pm\sqrt{10}}{2}$　　D. $\frac{-3\pm\sqrt{2}}{2}$

4.（2011•全国）点D，E，F是△ABC内三点，满足$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{FD}$，设$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$(\lambda,\mu)=$（　　）

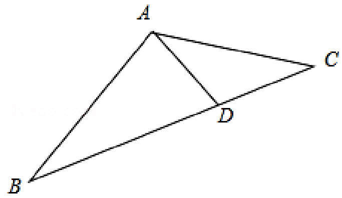
A. $(\frac{4}{7},\frac{2}{7})$　　B. $(\frac{1}{7},\frac{4}{7})$　　C. $(\frac{4}{7},\frac{1}{7})$　　D. $(\frac{2}{7},\frac{4}{7})$

5.（2010•湖南）在$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$AC=4$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$等于（　　）

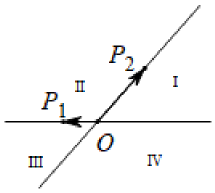
A. -16　　B. -8　　C. 8　　D. 16

6.（2010•天津）如图，在△ABC中，$AD\perp AB$，$\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BD}$，$|\overrightarrow{AD}|=1$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$（　　）

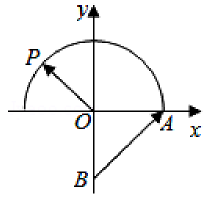
A. $2\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$



第 6 题图



第 11 题图



第 13 题图

7.（2009•全国）在△ABC 中，点 D、E 满足 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EC}$，设 $P=AE\cap CD$，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $(\lambda，\mu)=$（　　）

A. $(\frac{2}{7}，\frac{4}{7})$　　B. $(\frac{1}{7}，\frac{2}{7})$　　C. $(\frac{1}{4}，\frac{1}{2})$　　D. $(\frac{4}{15}，\frac{8}{15})$

8.（2009•陕西）在△ABC 中，M 是 BC 的中点，$AM=1$，点 P 在 AM 上且满足 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 等于（　　）

A. $-\frac{4}{9}$　　B. $-\frac{4}{3}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{4}{9}$

9.（2008•辽宁）已知四边形 $ABCD$ 的三个顶点 $A(0,2)$，$B(-1,-2)$，$C(3,1)$，且 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$，则顶点 D 的坐标为（　　）

A. $(2,\frac{7}{2})$　　B. $(2,-\frac{1}{2})$　　C. $(3,2)$　　D. $(1,3)$

10.（2008•安徽）在平行四边形 $ABCD$ 中，AC 为一条对角线，若 $\overrightarrow{AB}=(2,4)$，$\overrightarrow{AC}=(1,3)$，则 $\overrightarrow{BD}=$（　　）

A. $(-2,-4)$　　B. $(-3,-5)$　　C. $(3,5)$　　D. $(2,4)$

11.（2007•上海）如图，平面内的两条相交直线 OP_1 和 OP_2 将该平面分割成四个部分Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ（不包括边界）．若 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OP_1}+b\overrightarrow{OP_2}$，且点 P 落在第Ⅲ部分，则实数 a、b 满足（　　）

A. $a>0$，$b>0$　　B. $a>0$，$b<0$

C. $a<0$，$b>0$　　D. $a<0$，$b<0$

12.（2015•四川）设四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$|\overrightarrow{AB}|=6$，$|\overrightarrow{AD}|=4$，若点 M、N 满足 $\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{NC}$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}=$（　　）

A. 20　　B. 15　　C. 9　　D. 6

13.（2016•上海）如图，已知点 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,-1)$，P 是曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上一个动点，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BA}$ 的取值范围是________．

14.（2015•上海）在锐角△ABC 中，$\tan A=\frac{1}{2}$，D 为边 BC 上的点，△ABD 与△ACD 的面积分别为 2 和 4．过 D 作 $DE\perp AB$ 于 E，$DF\perp AC$ 于 F，则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=$________．

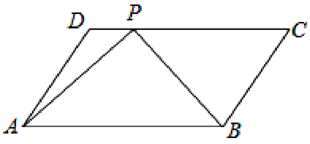
15.（2015•天津）在等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB//DC$，$AB=2$，$BC=1$，$\angle ABC=60°$，点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上，且 $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的值为________．

16.（2015•湖北）已知向量 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，$|\overrightarrow{OA}|=3$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$________．

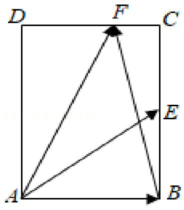
17.（2015•天津）在等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB//DC$，$AB=2$，$BC=1$，$\angle ABC=60°$．动点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上，且 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{9\lambda}\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的最小值为________．

18.（2015•北京）在△ABC 中，点 M，N 满足 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$，若 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $x=$________，$y=$________．

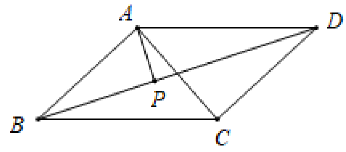
19.（2014•江苏）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=8$，$AD=5$，$\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的值是________．



第 19 题图



第 26 题图



第 28 题图

20.（2014•湖北）若向量 $\overrightarrow{OA}=(1,-3)$，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，则 $|\overrightarrow{AB}|=$__________.

21.（2014•天津）已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle BAD=120°$，点 E，F 分别在边 BC，DC 上，$BC=3BE$，$DC=\lambda DF$，若 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1$，则 λ 的值为__________.

22.（2013•江苏）设 D，E 分别是 ΔABC 的边 AB，BC 上的点，$AD=\frac{1}{2}AB$，$BE=\frac{2}{3}BC$，若 $\overrightarrow{DE}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AC}$($\lambda_1$，$\lambda_2$ 为实数)，则 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值为__________.

23.（2013•浙江）设 $\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$ 为单位向量，非零向量 $\vec{b}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，$x$、$y\in R$．若 $\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$ 的夹角为 $30°$，则 $\frac{|x|}{|\vec{b}|}$ 的最大值等于__________.

24.（2013•天津）在平行四边形 $ABCD$ 中，$AD=1$，$\angle BAD=60°$，E 为 CD 的中点．若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=1$，则 AB 的长为__________.

25.（2013•山东）已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 $120°$，且 $|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=2$．若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$，则实数 λ 的值为__________.

26.（2012•江苏）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，点 E 为 BC 的中点，点 F 在边 CD 上，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$ 的值是__________.

27.（2012•北京）已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，点 E 是 AB 边上的动点．则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的值为__________.

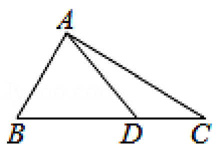
28.（2012•湖南）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AP\perp BD$，垂足为 P，且 $AP=3$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=$________.

29.（2011•天津）已知直角梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$\angle ADC=90°$，$AD=2$，$BC=1$，P 是腰 DC 上的动点，则 $|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|$ 的最小值为__________.

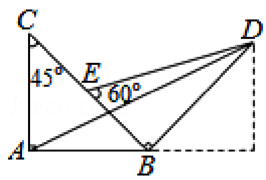
30.（2011•上海）在正三角形 ABC 中，D 是 BC 上的点．若 $AB=3$，$BD=1$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$__________.

31.（2011•湖南）在边长为 1 的正三角形 ABC 中，设 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CE}$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=$__________.

32.（2010•天津）如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp AB$，$\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BD}$，$|\overrightarrow{AD}|=1$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$__________.



第 32 题图



第 33 题图

33.（2009•湖南）如图所示，把两块斜边长相等的直角三角板拼在一起，若 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $x=$__________，$y=$__________.

34.（2009•天津）若等边 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$，平面内一点 M 满足 $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=$__________.

35.（2008•江西）直角坐标平面上三点 $A(1,2)$、$B(3,-2)$、$C(9,7)$，若 E、F 为线段 BC 的三等分点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=$__________.

专题 5　奔驰定理与向量四心

第一讲 奔驰定理与三角形四心

重心定理：三角形三条中线的交点.

已知$\triangle ABC$的顶点$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，则$\triangle ABC$的重心坐标为$G(x, y)$.

注意：（1）在$\triangle ABC$中，若O为重心，则$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

（2）三角形的重心分中线两段线段长度比为$2:1$，且分的三个三角形面积相等.

定理：重心的向量表示：$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

定理：$S_A\cdot\overrightarrow{OA}+S_B\cdot\overrightarrow{OB}+S_C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$（奔驰定理），则$\Delta AOB$、$\Delta AOC$、$\triangle BOC$的面积之比等于$\lambda_3:\lambda_2:\lambda_1$

垂心定理：三角形三边上的高相交于一点．点O是ΔABC的垂心，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$.

角平分线定理：若$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则$\angle AOB$平分线上的向量$\overrightarrow{OM}$为 $\lambda(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|})$，$\lambda$由$\overrightarrow{OM}$决定

外心定理：垂直平分线的交点，到三个顶点的距离相等；

（1）$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$；$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$；

（2）$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$，$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$，$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$；

（3）$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$，$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\right|^2$，$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$.

重心定理证明：$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

奔驰定理证明：如图，令$\lambda_1\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1},\lambda_2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB_1},\lambda_3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC_1}$，即满足$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=0$

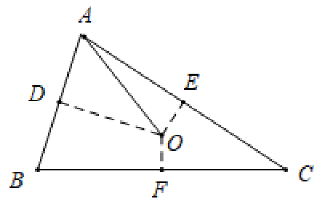
$\frac{S_{AOB}}{S_{A_1OB_1}}=\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}$，$\frac{S_{AOC}}{S_{A_1OC_1}}=\frac{1}{\lambda_1\lambda_3}$，$\frac{S_{BOC}}{S_{B_1OC_1}}=\frac{1}{\lambda_2\lambda_3}$，故$S_{AOB}:S_{AOC}:S_{BOC}=\lambda_3:\lambda_2:\lambda_1$.

垂心定理证明：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=0\Rightarrow\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，即$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CA}$，以此类推.

角平分线定理证明：$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$和$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$分别为$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$方向上的单位向量，$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$是以$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$和$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$为一组邻边的平行四边形过$O$点的的一条对角线，而此平行四边形为菱形，故$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$在$\angle AOB$平分线上，但$\angle AOB$平分线上的向量$\overrightarrow{OM}$终点的位置由$\overrightarrow{OM}$决定. 当$\lambda=1$时，四边形$OAMB$构成以$\angle AOB=120°$的菱形.

外心定理证明：如图，$\triangle ABC$中，D、E、F分别为AD、AC、BC边中点，O为$\triangle ABC$外心，则$OD\perp AB$，$OE\perp AC$，$OF\perp BC$，$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EO}$，

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$，



同理可证：$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$，$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$；

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$；

同理$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$；同理$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$.

【例 1】在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(1,0)$，$\dfrac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}+\dfrac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BD}|}$，则四边形 $ABCD$ 的面积是（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

【解析】$\dfrac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}+\dfrac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BD}|}\Rightarrow BD$为$\angle ABC$的角平分线,且$|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{BA}|=1$，又因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(1,0)$，

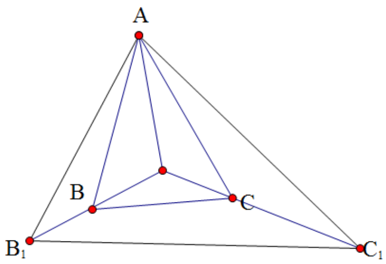
故 $ABCD$ 是一个菱形，且 $\angle ABC=120°$，故面积为 $S=1\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，选 A.

【例 2】已知点 O 为 ΔABC 内一点，且 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 ΔAOB、ΔAOC、ΔBOC 的面积之比等于（　　）

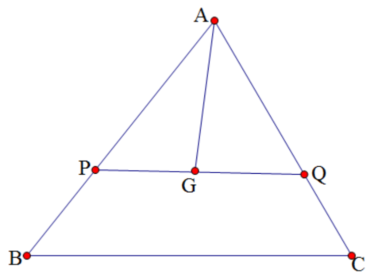
A．9∶4∶1　　B．1∶4∶9　　C．3∶2∶1　　D．1∶2∶3

【解析】如图，令 $2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB_1}+3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC_1}$，即满足 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=0$

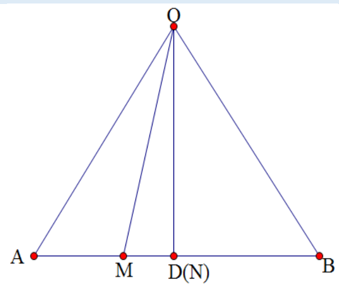
$\dfrac{S_{AOB}}{S_{AOB_1}}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{S_{AOC}}{S_{AOC_1}}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{S_{BOC}}{S_{B_1OC_1}}=\dfrac{1}{2\times3}$，故 $S_{AOB}:S_{AOC}:S_{BOC}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{6}=3:2:1$.



例 2 图



例 3 图



例 4 图

【例 3】已知 G 为 ΔABC 的重心，令 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，过点 G 的直线分别交 AB、AC 于 P、Q 两点，且 $\overrightarrow{AP}=m\vec{a}$，$\overrightarrow{AQ}=n\vec{b}$，则 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=$__________.

【解析】$\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{AP}=m\vec{a}\Rightarrow\vec{a}=\dfrac{\overrightarrow{AP}}{m}$，$\overrightarrow{AQ}=n\vec{b}\Rightarrow\vec{b}=\dfrac{\overrightarrow{AQ}}{n}$；$\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}=\dfrac{\overrightarrow{AP}}{3m}+\dfrac{\overrightarrow{AQ}}{3n}$；

令 $\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{PQ}$，即 $\overrightarrow{AG}=(1-\lambda)\overrightarrow{AP}+\lambda\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{AG}=(1-\lambda)\overrightarrow{AP}+\lambda\overrightarrow{AQ}$，故 $1-\lambda=\dfrac{1}{3m}\Rightarrow\lambda=\dfrac{1}{3n}\Rightarrow\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=3$.

【例 4】在 ΔOAB 中，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}-\vec{b}|=2$.

（1）求 $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$ 的值；

（2）若 $\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$，$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BN}$，求 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 的值.

【解析】（1）由于 $|\vec{a}-\vec{b}|=2\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\Rightarrow|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=4+2\vec{a}\vec{b}=8$；

（2）$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 表示 $\angle AOB$ 的角平分线 $\overrightarrow{OD}$ 的共线向量，$\vec{a}-\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BA}$，$\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)(\vec{a}-\vec{b})=0.$

可知 OAB 为等腰三角形，即 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=8\Rightarrow|\vec{a}|=|\vec{b}|=2=|\vec{a}-\vec{b}|\Rightarrow OAB$ 为等边三角形.

$\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}=\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)\left(\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)=\dfrac{1}{3}|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{2}\vec{a}\vec{b}+\dfrac{1}{6}|\vec{b}|^2=\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{2}+\dfrac{4}{6}=3$.

【例 5】已知 O 为 ΔABC 的外心，$AB=4$，$AC=2$，$\angle BAC$ 为钝角，M 是边 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AO}$ 的值（　　）

A．$2\sqrt{3}$　　B．12　　C．6　　D．5

【解析】$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=5$．

【例 6】设 P 为锐角 ΔABC 的外心（三角形外接圆圆心），$\overrightarrow{AP}=k\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$（$k\in R$）．若 $\cos\angle BAC=\frac{2}{5}$，则 $k=$（　　）

A．$\frac{5}{14}$　　B．$\frac{2}{14}$　　C．$\frac{5}{7}$　　D．$\frac{3}{7}$

【解析】$\left.\begin{aligned}&\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left(k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=k\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{2}{5}k\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\Rightarrow\left(\frac{1}{2}-k\right)\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{2}{5}k\left|\overrightarrow{AC}\right|\\&\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left(k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=k\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\frac{2}{5}k\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\Rightarrow\left(\frac{1}{2}-k\right)\left|\overrightarrow{AC}\right|=\frac{2}{5}k\left|\overrightarrow{AB}\right|\end{aligned}\right\}$；

$\therefore\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$ 故 $\left(\frac{1}{2}-k\right)=\frac{2}{3}k\Rightarrow k=\frac{5}{14}$，选 A．

达标训练

1．已知两个非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则下面结论正确的是（　　）

A．$\vec{a}\parallel\vec{b}$　　B．$\vec{a}\perp\vec{b}$　　C．$|\vec{a}|=|\vec{b}|$　　D．$\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}$

2．已知△ABC 和点 M 满足 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=0$．若存在实数 m 使得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}$ 成立，则 $m=$（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

3．已知 O 是 ΔABC 所在平面内一点，D 为 BC 边中点，且 $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$，那么（　　）

A．$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$　　B．$\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$　　C．$\overrightarrow{AO}=3\overrightarrow{OD}$　　D．$2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$

4．已知非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 满足 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，且 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$，则△$ABC$ 为（　　）

A．等腰非等边三角形　　B．等边三角形

C．三边均不相等的三角形　　D．直角三角形

5．点 O 是△ABC 所在平面内的一点，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$，则点 O 是△ABC 的（　　）

A．三个内角的角平分线的交点　　B．三条边的垂直平分线的交点

C．三条中线的交点　　D．三条高的交点

6．点 P 是△ABC 所在平面上一点，若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$，则 P 是△ABC 的（　　）

A．外心　　B．内心　　C．重心　　D．垂心

7．点 O 是平面上一定点，A、B、C 是平面上不共线的三个点，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，$\lambda\in[0,+\infty)$，则 P 的轨迹一定通过△ABC 的（　　）

A．外心　　B．内心　　C．重心　　D．垂心

8．设点 O 在△ABC 的内部，且有 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=0$，则△$ABC$ 的面积与△AOC 的面积的比为（　　）

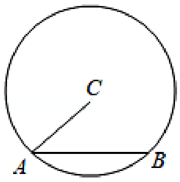
A．2　　B．$\frac{3}{2}$　　C．3　　D．$\frac{5}{3}$

9．已知 P 为 ΔABC 内部任一点（不包括边界），且满足 $(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{PC})=\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})=0$，则 ΔABC 一定为（　　）

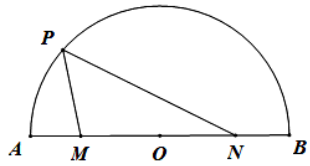
A．直角三角形　　B．等边三角形　　C．等腰直角三角形　　D．等腰三角形

10．如图，在圆 C 中，弦 AB 的长为 4，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$（　　）

A．8　　B．-8　　C．4　　D．-4



第 10 题



第 15 题

11．已知点 G 是 $\triangle ABC$ 内一点，满足 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$，若 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$，则 $|\overrightarrow{AG}|$ 的最小值是（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

12．边长为 8 的等边 $\triangle ABC$ 所在平面内一点 O，满足 $\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}=0$，若 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{19}$，则 $|PA|$ 的最大值为（　　）

A．$6\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{19}$　　C．$3\sqrt{19}$　　D．$4\sqrt{19}$

13．已知 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，$|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，则 $\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=$（　　）

A．10　　B．9　　C．8　　D．6

14．已知 $\triangle ABC$ 中，$A=45°$，$B=60°$，点 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，存在实数 s，t，使得 $\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$，则 s，t 的值分别为（　　）

A．$s=2-\sqrt{3}$，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$s=2+\sqrt{3}$，$t=\sqrt{3}$

C．$s=2-\sqrt{3}$，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$s=2+\sqrt{3}$，$t=2-\sqrt{3}$

15．如图，AB 是圆 O 的直径，P 是圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的点，M、N 是直径 AB 上关于 O 对称的两点，且 $AB=6$，$MN=4$，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=$（　　）

A．13　　B．7　　C．5　　D．3

16．在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=5$，$BC=6$，I 是 $\triangle ABC$ 的内心，若 $\overrightarrow{BI}=m\overrightarrow{BA}+n\overrightarrow{BC}$ $(m，n\in R)$（m，n∈R），则 $\dfrac{m}{n}=$（　　）

A．$\dfrac{4}{3}$　　B．$\dfrac{6}{5}$　　C．2　　D．$\dfrac{1}{2}$

17．已知 A、B、C 三点不共线，且点 O 满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$，则下列结论正确的是（　　）

A．$\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$　　B．$\overrightarrow{OA}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

C．$\overrightarrow{OA}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$　　D．$\overrightarrow{OA}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

18．在 $\triangle ABC$ 中，G 为 $\triangle ABC$ 的重心，过 G 点的直线分别交 AB，AC 于 P，Q 两点，且 $\overrightarrow{AP}=h\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AC}$，则 $16h+25k$ 的最小值（　　）

A．27　　B．81　　C．66　　D．41

19．已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形，动点 P 在以 BC 为直径的圆上，若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+2\mu$ 的最大值为（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\dfrac{5}{2}$　　D．$2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

20. 已知平面上不共线的四点 O，A，B，C，若 $\overrightarrow{OC}=5\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OC}$，则 $\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BC}|}$ 等于（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

21. $\triangle ABC$ 所在平面上一点 P 满足 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$，则 $\triangle PAB$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积比为（　　）

A. $2:3$　　B. $1:3$　　C. $1:4$　　D. $1:6$

22. 在 $\triangle ABC$ 中，G 为 $\triangle ABC$ 的重心，过 G 点的直线分别交 AB，AC 于 P，Q 两点，且 $\overrightarrow{AP}=h\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AC}$，则 $\dfrac{1}{h}+\dfrac{1}{k}=$（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

23. 已知平面向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 满足：$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{2}$．若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OB}$，$(x，y\in R)$，则 $x+y$ 的最大值是（　　）

A. 1　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. 2　　D. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

24. 在 $\triangle ABC$ 中，点 G 满足 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$．若存在点 O，使得 $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{BC}$，且 $\overrightarrow{OA}=m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$，则 $m-n=$（　　）

A. 2　　B. -2　　C. 1　　D. -1

25. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 内一点，且有 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=0$，记 $\triangle ABC$，$\triangle BCO$，$\triangle ACO$ 的面积分别为 S_1，S_2，S_3，则 S_1：S_2：S_3 等于（　　）

A. $3:2:1$　　B. $3:1:2$　　C. $6:1:2$　　D. $6:2:1$

26. 已知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，过点 G 作直线 MN 与 AB，AC 交于点 M，N，且 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$，$(x，y>0)$，则 $3x+y$ 的最小值是（　　）

A. $\dfrac{8}{3}$　　B. $\dfrac{7}{2}$　　C. $\dfrac{5}{2}$　　D. $\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

27. 已知 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$，$|\overrightarrow{PC}|=|\overrightarrow{PC}|=|\overrightarrow{AB}|=2$，则 $\triangle PBC$ 的面积等于（　　）

A. $3\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

28. A，B，C，D 在一个平面内，满足 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=-2$．$|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DC}|$，动点 P，M 满足 $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$，$|\mathrm{PA}|=1$，则 $|\overrightarrow{MB}|$ 的最大值是（　　）

A. $\dfrac{7}{2}$　　B. 4　　C. $\dfrac{9}{2}$　　D. 5

29. 在 $\triangle ABC$ 中，O 为中线 AM 上的一个动点，若 $AM=4$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ 的最小值是（　　）

A. -4　　B. -8　　C. -10　　D. -12

30. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=1$，$\angle ABC=60^\circ$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-1$，若 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，则 $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值为（　　）

A. 1　　B. $\dfrac{5}{2}$　　C. $\dfrac{8}{3}$　　D. 5

31. 已知点 P 在圆 $y^2+x^2=1$ 上，点 A 的坐标为 $(-2,0)$，O 为原点，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的最大值为_________．

32. 过点 $P(1,\sqrt{3})$ 作圆 $y^2+x^2=1$ 的两条切线，切点分别为 A，B，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=$_________．

33. 已知 A，B，C 为圆 O 上的三点，若 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为_________．

34. 在 $\triangle ABC$ 中，M 是 BC 的中点，$AM=3$，$BC=10$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$_________．

35. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=$（1，1），$\dfrac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}+\dfrac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{|\overrightarrow{BD}|}\overrightarrow{BD}$，则四边形 $ABCD$ 的面积是_________．

36. 在 $\triangle ABC$ 中，M 是 BC 的中点，$\angle A=120^\circ$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{2}$，则线段 AM 长的最小值为_________．

专题 6　极化恒等式

第一讲　极化恒等式：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2\right]$

在△ABC 中，若 AM 是△ABC 的 BC 边中线，有以下两个重要的向量关系：$\begin{cases}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)\\ \overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\end{cases}$

定理 1　平行四边形两条对角线的平分和等于两条邻边平分和的两倍. 以此类推到三角形，若 AM 是 ΔABC 的中线，则 $AB^2+AC^2=2\left(AM^2+BM^2\right)$.

定理 2　在 ΔABC 中，若 M 是 BC 的中点，则有 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AM}^2-\overrightarrow{BM}^2$.

【例 1】（2014•新课标 II）设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|a+b|=\sqrt{10}$，$|a-b|=\sqrt{6}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 等于（　　）

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．5

【解析】由极化恒等式，即得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{|a+b|^2-|a-b|^2}{4}=\dfrac{10-6}{4}=1$.

【例 2】（2014•江苏）在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=8$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的值是________.

【解析】取 AB 中点 E，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PE}^2-\overrightarrow{AE}^2=2$，$\therefore PE^2=18$，$\because \overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$，$\left|CD\right|=8$，$\therefore\left|PD\right|=2$，$\left|AE\right|=4$

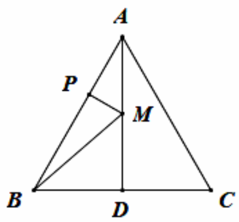
故 DP 为 FAE 中位线，$\therefore\overrightarrow{AP}^2=\dfrac{\overrightarrow{AF}^2+\overrightarrow{AE}^2-2\overrightarrow{PE}^2}{2}=40$，$\therefore\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AP}^2-\overrightarrow{PE}^2=22$.

【例 3】设点 P 是边长为 2 的 ΔABC 三边上的一动点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的取值范围是________.

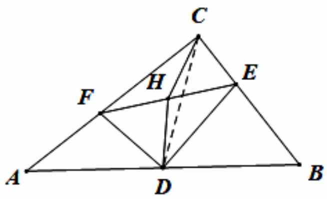
【解析】如图，设 BC 的中点为 D，则 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PD}$，设 AD 的中点为 M，

则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2(\overrightarrow{PM}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2)$，显然，当 P 在 B 点时，$\left|\overrightarrow{PM}\right|$ 的值最大，此时 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2$；当 $PM\perp AB$ 时，

$\left|\overrightarrow{PM}\right|$ 的值最小，此时 $\left|\overrightarrow{PA}\right|\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=-\frac{9}{8}$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的取值范围是 $[-\frac{9}{8},2]$.



例3题图



例4题图

【例 4】正方形 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，MN 是它的内切球的一条弦（把球面上任意两点之间的线段称为球的弦），P 为正方形表面上的动点，当弦 MN 最长时，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的最大值为________.

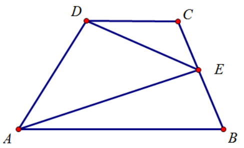
【解析】设球心为 O，球半径为 R，则 R=2，根据极化恒等式：$4\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=4\left|\overrightarrow{PO}\right|^2-R^2=4\left|\overrightarrow{PO}\right|^2-4$，又因为 P 为正方形表面上的动点，所以 $\left|\overrightarrow{PO}\right|$ 的最大值为正方体体对角线长的一半，即 $\sqrt{3}$，所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的最大值为 2.

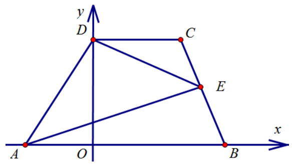
【例 5】ΔABC 中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$BC=3$，D 是 AB 的中点，E,F 分别是边 BC，AC 上的动点，且 $EF=1$，则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}$ 的最小值等________.

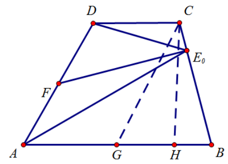
【解析】$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DH}^2-\dfrac{\overrightarrow{EF}^2}{4}=\overrightarrow{DH}-\dfrac{1}{4}$（$H$ 为 EF 的中点），$\because CH+DH\ge CD$，$\therefore DH\ge CD-CH=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2$，

$\therefore\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DH}^2-\frac{1}{4}\ge 4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$.

【例 6】（2019•河西一模）如图梯形 $ABCD$， $AB//CD$ 且 $AB=5$， $AD=2DC=4$， E 在线段 BC 上，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DE}$ 的最小值为（　　）







A．$\dfrac{15}{13}$　　B．$\dfrac{95}{13}$　　C．15　　D．$-\dfrac{15}{13}$

【解析】解法一 在梯形 $ABCD$，$AB\,//\,CD$，则向量 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角和向量 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 的夹角相等，不妨设为 θ，由可知 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=0$，整理得 $16-20\cos\theta+8\cos\theta-10=0$，解之得 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，所以 $\theta=60°$，即 $\angle DAB=60°$，过点 D 向 AB 作垂线垂足为 O，建立如图 1 所示的直角坐标系，则 $A(-2,0)$，$B(3,0)$，$D\left(0,2\sqrt{3}\right)$，$C\left(2,2\sqrt{3}\right)$，则 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}=\left(-\lambda,2\sqrt{3}\lambda\right)$，所以 $E\left(3-\lambda,2\sqrt{3}\lambda\right)$，所以 $\overrightarrow{AE}=\left(5-\lambda,2\sqrt{3}\lambda\right)$，$\overrightarrow{DE}=\left(3-\lambda,2\sqrt{3}(\lambda-1)\right)$，

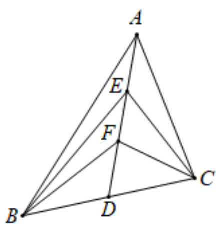
$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DE}=(5-\lambda)(3-\lambda)+12\lambda(\lambda-1)=13\lambda^2-20\lambda+15$，又知 $0\le\lambda\le1$，当 $\lambda=\dfrac{10}{13}$ 时，取得最小值 $\dfrac{95}{13}$，故选 B．

解法二 极化恒等式，如图 2 所示.取 AD 中点 F，故 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=EF^2-\left(\dfrac{AD}{2}\right)^2=EF^2-4$，故只需求出 EF 的最小值，根据几何意义可知，$E_0F\perp CB$ 时取得最小值，由于 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，根据对角线向量定理（斯坦纳定理），可知 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{AD^2+BC^2-AB^2-CD^2}{2}=0\Rightarrow BC^2=13$，过 C 作 $CG\,//\,AD$ 交 AB 于 G，$CH\perp AB$ 于 H，令 $GH=x$，则 $h=CH=\sqrt{42-x^2}=\sqrt{13-(3-x)^2}$，解得 $x=2$，$h=2\sqrt{3}$，根据等面积法，$S_{\Delta BFC}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta ABCD}=\dfrac{7}{2}\sqrt{3}=\dfrac{BC\cdot E_0F}{2}=\dfrac{\sqrt{13}\cdot E_0F}{2}\Rightarrow E_0F^2=\dfrac{147}{13}$，$\left(\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DE}\right)_{\min}=\dfrac{147}{13}$-4=$\dfrac{95}{13}$，故选 B.

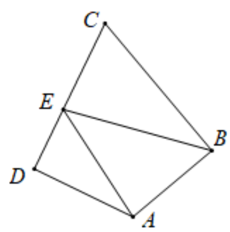
达标训练

1.（2016•江苏卷）如图，在△ABC 中，D 是 BC 的中点 E，F 是 AD 的两个三等分点，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$

则 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=$__________.



第 1 题图



第 7 题图

2.（2012•浙江卷）在△ABC 中，M 是 BC 的中点，$AM=3$，$BC=10$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$__________.

3.（2019•启东期中）在 ΔABC 中，若 $AB=7$，$BC=8$，$CA=7$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$__________.

A．19　　B．-32　　C．38　　D．-38

4.（2019•商丘期中）已知 ΔABC 中，$AB=AC=10$，$BC=12$，点 D 为 AC 的中点，点 M 为边 BC 上一动点，则 $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MC}$ 的最小值为（　　）

A. $-\frac{3}{2}$　　B. $-\frac{7}{4}$　　C. $-\frac{9}{4}$　　D. $-\frac{5}{4}$

5.（2019•长沙模拟）在 $Rt\triangle ABC$ 中，$CA=CB=3$，M、N 是斜边 AB 上的两个动点，且 $MN=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}$ 的取值范围为（　　）

A. $\left[2,\frac{5}{2}\right]$　　B. $[2,4]$　　C. $[3,6]$　　D. $[4,6]$

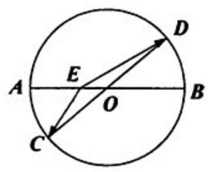
6.（2017•全国 II 卷）已知△ABC 是边长为 2 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$ 的最小值是（　　）

A. -2　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. -1

7.（2018•天津）如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$AD\perp CD$，$\angle BAD=120°$，$AB=AD=1$．若点 E 为边 CD 上的动点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的最小值为（　　）

A. $\frac{21}{16}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{25}{16}$　　D. 3

8.（2016•浙江卷）已知向量 a，b，$|a|=1$，$|b|=2$，若对任意单位向量 e，均有 $|a\cdot e|+|b\cdot e|\le\sqrt{6}$，则 $a\cdot b$ 的最大值是_________.



9.（2019•天津二模）如图，AB，CD 是半径为 1 的圆 O 的两条直径，$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EO}$，则 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}$ 的值是（　　）

A. $-\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{15}{16}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{5}{8}$

10.（2013•重庆卷）在平面内，$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{AB_2}$，$\left|\overrightarrow{OB_1}\right|=\left|\overrightarrow{OB_2}\right|=1$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AB_2}$. 若 $\left|\overrightarrow{OP}\right|<\frac{1}{2}$，则 $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ 的取值范围是（　　）

A. $\left[0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right]$　　C. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}\right]$　　D. $\left(\frac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}\right]$

11.（2017•浙江卷）已知向量 a,b 满足：$|a|=1$，$|b|=2$，则 $|a+b|+|a-b|$ 的最小值是__________，最大值是__________.

12.（2013•天津卷）在平行四边形 $ABCD$ 中，$AD=1$，$\angle BAD=60°$，E 为 CD 的中点.若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=1$，则 $AB=$__________.

13. 若边长为 4 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成平面角大小为 $60°$ 的二面角，则边 BC 的中点与点 A 的距离为_________.

14. 设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上异于长轴端点的任意一点，F_1,F_2 分别是其左右焦点，O 为中心，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|+|PO|^2=$_________.

15.（2012•江西卷）在 $Rt\triangle ABC$ 中，点 D 是斜边 AB 的中点，点 P 为线段 CD 的中点，则 $\frac{|PA|^2+|PB|^2}{|PC^2|}$ 等于（　　）

A. 2　　B. 4　　C. 5　　D. 10

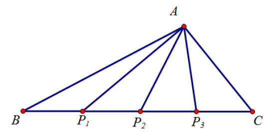
16.（2013•浙江卷）已知在$\triangle ABC$中，P_0是边AB上一定点，满足$P_0B=\frac{1}{4}AB$，且对于边AB上任一点P，恒有$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geq\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$，则（　　）

A．$\angle ABC=90^\circ$　　B．$\angle BAC=90^\circ$　　C．$AB=AC$　　D．$AC=BC$

17.（2018•嵊州期末）如图，在$\triangle ABC$中，$AB=2AC$，$A=\frac{2\pi}{3}$，P_1，P_2，P_3是边BC的四等分点，记$I_1=\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}$，$I_2=\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_3}$，$I_3=\overrightarrow{AP_2}\cdot\overrightarrow{AP_3}$，则（　　）

A．$I_1<I_2<I_3$　　B．$I_2<I_1<I_3$

C．$I_2<I_3<I_1$　　D．$I_3<I_2<I_1$



18.（2014•浙江卷）记$\max\{x,y\}=\begin{cases}x,x\geq y\\y,x<y\end{cases}$，$\min\{x,y\}=\begin{cases}y,x\geq y\\x,x<y\end{cases}$，设$a$，$b$为平面向量，则（　　）

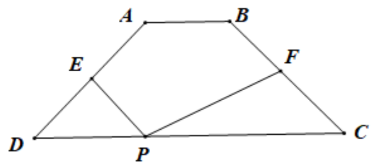
A．$\min\{|a+b|,|a-b|\}\leq\min\{|a|,|b|\}$　　B．$\min\{|a+b|,|a-b|\}\geq\min\{|a|,|b|\}$

C．$\max\{|a+b|^2,|a-b|^2\}\leq|a|^2+|b|^2$　　D．$\max\{|a+b|^2,|a-b|^2\}\geq|a|^2+|b|^2$

19.（2018•浙江联考）如图，在等腰梯形$ABCD$中，$AB=2$，$CD=4$，$BC=\sqrt{5}$，点E，F分别为AD，BC的中点．如果对于常数λ，在等腰梯形$ABCD$的四条边上，有且只有8个不同的点P，使得$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=\lambda$成立，那么$\lambda$的取值范围是（　　）

A．$\left(-\frac{5}{4},-\frac{9}{20}\right)$　　B．$\left(-\frac{9}{20},\frac{11}{4}\right)$

C．$\left(-\frac{9}{20},-\frac{1}{4}\right)$　　D．$\left(-\frac{5}{4},\frac{11}{4}\right)$



20.（2018•浙江期末）在$\triangle ABC$中，$AB=2$，若$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}$，则$\angle A$的最大值是（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

21.（2019•青羊月考）已知AB是半径为2的圆M的一条直径，四边形$ABCD$是圆M内接四边形，$\angle CMD=120^\circ$，若P在线段CD上（端点C、D除外）运动，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围（　　）

A．$(0,3)$　　B．$(1,3)$　　C．$[-3,0)$　　D．$(-3,3)$

22.（2018•柯桥期末）已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，若对于长度为2的任意向量$\vec{c}$都有$|\vec{a}\cdot\vec{c}|+|\vec{b}\cdot\vec{c}|\leq\sqrt{26}$，则$|\vec{a}-\vec{b}|$的最小值为（　　）

A．1　　B．$\frac{\sqrt{14}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{26}}{2}$　　D．3

23.（2019•青羊二模）已如平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{e}$，满足$|\vec{e}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{e}=2$，$\vec{b}\cdot\vec{e}=-1$，$|\vec{a}+\vec{b}|=2$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最大值为（　　）

A．-1　　B．-2　　C．$-\frac{5}{2}$　　D．$-\frac{5}{4}$

24.（2019•海安期中）已知四边形$ABCD$中，$AB=2$，$AC=4$，$\angle BAC=60^\circ$，P为线段AC上任意一点，则$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$的取值范围是__________.

25.（2011•山东卷）已知直线l与椭圆$C:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$交于$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$两个不同点，且$\triangle OPQ$的面积$S=\frac{\sqrt{6}}{2}$，其中$O$为坐标原点.

（1）求证：$x_1^2+x_2^2$和$y_1^2+y_2^2$均为定值；

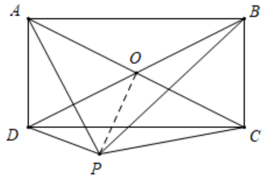
（2）设线段PQ的中点为M，求$|OM|\cdot|PQ|$的最大值.

专题 7　极化恒等式之矩形大法

第一讲 极化恒等式之矩形大法

如图，在矩形 $ABCD$ 中，若对角线 AC 和 BD 交于点 O，P 为平面内任意一点，有以下两个重要的向量关系：

① $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$ ；② $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$.



证明：①连接 PO，根据极化恒等式 $a^2+b^2=2\left[\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2\right]$，可得

$PA^2+PC^2=2\left(PO^2+\dfrac{AC^2}{4}\right)=PB^2+PD^2$；

②根据极化恒等式 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$，可得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=PO^2-\dfrac{AC^2}{4}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$

推广到空间，得到的结论就是：底面是矩形的四棱锥相对侧棱长的平方和以及向量乘积均相等.

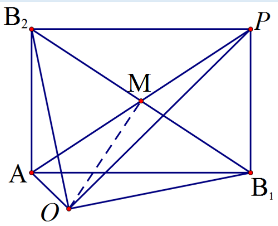
【例 1】(2015•四川预赛)在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$AD=4$，P 为矩形 $ABCD$ 所在平面上一点，满足 $PA=2$，$PC=\sqrt{21}$，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=$__________.

【解析】此题由于 $|PA|^2+|PC|^2=|AC|^2\Rightarrow|PO|=|AO|=|DO|$，$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=PO^2-AO^2=0$.

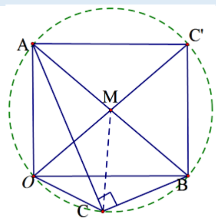
【例 2】(2013•重庆卷）在平面内，$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{AB_2}$，$|\overrightarrow{OB_1}|=|\overrightarrow{OB_2}|=1$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AB_2}$ 若 $|\overrightarrow{OP}|<\dfrac{1}{2}$，则 $|\overrightarrow{OA}|$ 的取值范围是（　　）

A. $\left[0,\dfrac{\sqrt5}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{\sqrt5}{2},\dfrac{\sqrt7}{2}\right]$　　C. $\left(\dfrac{\sqrt5}{2},\sqrt2\right]$　　D. $\left(\dfrac{\sqrt7}{2},\sqrt2\right]$

【解析】如图在三角形 OPA 中 M 为 AP 中点，$2(OM^2+MP^2)=OP^2+OA^2$，又因为 $OM\perp B_1B_2,MB_2=PM$，$OM^2+MB_2{}^2=OB_2{}^2=1$，即 $OP^2+OA^2=2$，即 $\dfrac{7}{4}<OP^2\le2$，即 $\dfrac{\sqrt7}{2}<OP\le\sqrt2$，选 D.



例 2 图



例 3 图

【例 3】(2008•浙江卷）已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是平面内两个互相垂直的单位向量，若向量 c 满足 $(a-c)\cdot(b-c)=0$，则 $|\vec{c}|$ 的最大值是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt2$　　D. $\dfrac{\sqrt2}{2}$

【解析】$(a-c)(b-c)=\left[\dfrac{(a-c)+(b-c)}{2}\right]^2-\left[\dfrac{(a-c)-(b-c)}{2}\right]^2=0\Rightarrow|a+b-2c|=|a-b|$，由于 $|a+b|=|a-b|=\sqrt2$，而 $2\vec{c}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}$ 反向时，取得最大值，此时 $|c|=\sqrt2$.

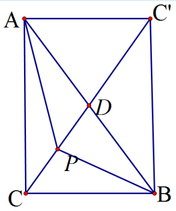
法二：辅助圆法，如图，构造 $\overrightarrow{OA}=a$，$\overrightarrow{OB}=b$，$\overrightarrow{OC}=c$，取 AB 中点 M，根据题意可知 $AC\perp BC$，$|OM|=|AM|=|BM|=\dfrac{\sqrt2}{2}$，显然 C 在以 AB 为斜边的圆上，故 $|CM|=\dfrac{\sqrt2}{2}$，根据几何意义可知，O、A、C、B 四点共圆，故当 C 位于图中 C' 时，$|c|_{\max}=|OC'|=\sqrt2$.

【例 4】（2012•江西卷）在 $Rt\Delta ABC$ 中，点 D 是斜边 AB 的中点，点 P 为线段 CD 的中点，则 $\dfrac{|PA|^2+|PB|^2}{|PC^2|}$ 等于（　　）

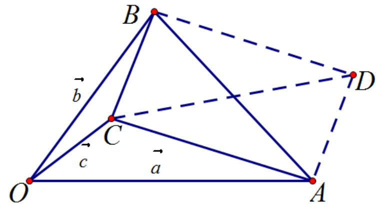
A．2　　　　B．4　　　　C．　5　　　　D．　10

【解析】如图，将 $Rt\Delta ABC$ 补全成矩形 $ACBC'$，$|PA|^2+|PB|^2=2\left(|PD|^2+|AD|^2\right)$

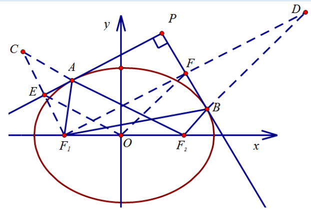
$=\left(|PC|^2+|C'D|^2\right)=2\left(|PC|^2+4|PC|^2\right)=10|PC|^2$，故 $\dfrac{|PA|^2+|PB|^2}{|PC^2|}=10$，选 D.



例 4 图



例 5 图


例 6 图

【例 5】已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=1$，且 $(\vec{a}-\vec{c})(\vec{b}-\vec{c})=0$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|$ 的取值范围是__.

【解析】如图所示，令 $\overline{OA}=\vec{a}$，$\overline{OB}=\vec{b}$，$\overline{OC}=\vec{c}$，易知 $BC\perp AC$，则作矩形 $ACBD$，根据矩形大法可知 $|OA|^2+|OB|^2=|OC|^2+|OD|^2$，即 $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2+|OD|^2$，根据 $|CD|-|OC|\le|OD|\le|OC|+|CD|$，$|AB|=|CD|$，即 $|AB|-1\le 2\sqrt{3}\le 1+|AB|$，$|\vec{a}-\vec{b}|\in\left[2\sqrt{3}-1,2\sqrt{3}+1\right]$.

【例 6】（2014•广东卷）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $(\sqrt{5}，0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）若动点 $P(x_0，\ y_0)$ 为椭圆 C 外一点，且点 P 到椭圆 C 的两条切线相互垂直，求点 P 的轨迹方程.

【解析】（1）依题意知 $\begin{cases}a^2-b^2=5\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{cases}$，求得 $a=3$，$b=2$，$\therefore$ 椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

（2）（常规解法）①当两条切线中有一条斜率不存在时，即 A、B 两点分别位于椭圆长轴与短轴的端点，P 的坐标为 $(\pm3,\pm2)$，符合题意，

②当两条切线斜率均存在时，设过点 $P(x_0，y_0)$ 的切线为 $y=k(x-x_0)+y_0$，$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{[k(x-x_0)+y_0]^2}{4}=1$，

$4x^2+9[k^2(x-x_0)^2+y_0{}^2+2ky_0(x-x_0)]=36$，$4x^2+9[k^2x^2+k^2x_0{}^2-2kx_0x+y_0{}^2+2ky_0x-2ky_0x_0]=36$，整理得 $(9k^2+4)x^2+18k(y_0-kx_0)x+9[(y_0-kx_0)^2-4]=0$，$\therefore\ \Delta=[18k(y_0-kx_0)]^2-4(9k^2+4)\times9[(y_0-kx_0)^2-4]=0$，

整理得 $(x_0^2-9)k^2-2x_0\times y_0\times k+(y_0^2-4)=0$，$\therefore -1=k_1\bullet k_2=\dfrac{y_0^2-4}{x_0^2-9}=-1$，$\therefore x_0^2+y_0^2=13$．把点 $(\pm3，\pm2)$ 代入亦成立，$\therefore$ 点 P 的轨迹方程为：$x^2+y^2=13$.

【秒杀解法】如图，作 F_1 关于 PA、PB 的对称点 C、D，F_1C、F_1D 分别交 PA、PB 于 E、F，连接 OE、OF，$CA=AF_1\Rightarrow CF_2=2a=6$，$BD=BF_1\Rightarrow DF_2=2a=6$，根据中位线原理，$OE=\dfrac{1}{2}CF_2=3$，$OF=\dfrac{1}{2}DF_2=3$，四边形 PEF_1F 为矩形 $\Rightarrow OE^2+OF^2=OF_1^2+OP^2\Rightarrow OP^2=13$，故点 P 的轨迹方程为：$x^2+y^2=13$.

这道高考题的背景就是蒙日圆.普通高中课程标准实验教科书《数学 2·必修·A 版》(人民教育出版社，2007 年第 3 版，2014 年第 8 次印刷)第 22 页对画法几何的创始人蒙日(G.Monge，1745-1818)作了介绍.以上高考题第(2)问的一般情形是：曲线 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的两条互相垂直的切线的交点 P 的轨迹是圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$.此结论中的圆就是蒙日圆.

达标训练

1.（2018•漳州模拟）已知$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=1$，$(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$，则$|\vec{a}-\vec{b}|$的取值范围是（　　）

A．$[\sqrt{6}-1，\sqrt{6}+1]$　　B．$[\frac{\sqrt{7}-1}{2},\frac{\sqrt{7}+1}{2}]$

C．$[\sqrt{7}-1,\sqrt{7}+1]$　　D．$[\frac{\sqrt{6}-1}{2},\frac{\sqrt{6}+1}{2}]$

2.（2018•龙岩期中）已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足：$|\vec{a}|=1,(\vec{a}-\vec{c})\perp(\vec{b}-\vec{c}),\vec{a}\perp(\vec{a}-2\vec{b})$，若$|\vec{b}|=\frac{\sqrt{37}}{2}$，$|\vec{c}|$的最大值和最小值分别为$m$，$n$，则$m+n$等于（　　）

A．$\frac{3}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C．$\sqrt{37}$　　D．$\frac{3\sqrt{5}}{2}$

3.（2018•唐山二模）在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$|AB|=6$，点P满足$|CP|=2$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最大值为（　　）

A．9　　B．16　　C．18　　D．25

4.（2018•运城市四模）已知$\vec{a}$，$\vec{b}$为单位向量，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，向量$\vec{c}$满足$|\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}|=2$，则$|\vec{c}|$的范围为（　　）

A．$[1，1+\sqrt{2}]$　　B．$[2-\sqrt{2}，2+\sqrt{2}]$

C．$[\sqrt{2},2\sqrt{2}]$　　D．$[3-2\sqrt{2}，3+2\sqrt{2}]$

5.（2018•三门峡期末）已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，满足$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，若$(\vec{c}-2\vec{a})\cdot(\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{b})=0$，则$|\vec{b}-\vec{c}|$的最小值是（　　）

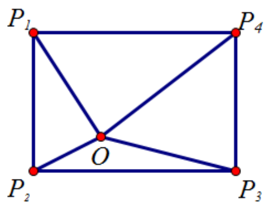
A．$2-\sqrt{3}$　　B．$2+\sqrt{3}$　　C．1　　D．2

6.（2018•浙江三模）已知$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，向量$\vec{c}$满足$|\vec{c}-(\vec{a}+\vec{b})|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则$|\vec{c}|$的最大值为__________.

7.（2018•赣州期中）已知$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，若$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{m}|\leqslant 1$成立，则$|\vec{m}|$的取值范围是__________.

8.（2018•黔东二模）在平面上，$\overrightarrow{OB_1}\perp\overrightarrow{OB_2}$，$|\overrightarrow{MB_1}|=|\overrightarrow{MB_2}|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}$．若$|\overrightarrow{MP}|<1$，则$|\overrightarrow{OM}|$的取值范围是__________.

9.（2018•宝山区二模）如图，已知O为矩形$P_1P_2P_3P_4$内的一点，满足$OP_1=4$，$OP_3=5$，$P_1P_3=7$，则$\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_4}$的值为__________.



10.（2018•黔东南州二模）在平面上，$\overrightarrow{OB_1}\perp\overrightarrow{OB_2}$，且$|\overrightarrow{OB_1}|=2$，$|\overrightarrow{OB_2}|=1$，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}$．若$|\overrightarrow{MB_1}|=|\overrightarrow{MB_2}|$，则$|\overrightarrow{PM}|$的取值范围是________.

11.（2018•天津南开区一模）在四边形$ABCD$中，$AB=AC=AD=\sqrt{2}$，$AB\perp AD$，则$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$的最小值为__________.

12.（2019•播州月考）已知向量$|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{BC}|=2$，若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$，则$|\overrightarrow{BD}|$的最大值为（　　）

A．$\frac{2}{5}\sqrt{5}$　　B．2　　C．$\sqrt{5}$　　D．$2\sqrt{5}$

13.（2019•浙江期中）已知$\vec{a}$，$\vec{b}$是两个单位向量，与$\vec{a}$，$\vec{b}$共面的向量$\vec{c}$满足$\vec{c}^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则$|\vec{c}|$的最大值为（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．1

14.（2019•衢州期中）设平面向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$，则$|2\vec{a}-\vec{c}|$的最大值为（　　）

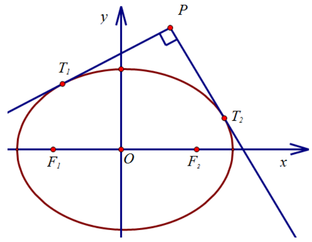
A．$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

15.（2016•重庆月考）已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，满足$|\vec{a}|=4,|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$．

（1）求$|\vec{a}-2\vec{b}|$的值；

（2）求$|\vec{c}|$的最大值．

16.（2016•武汉模拟）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的短轴长为2，离心率$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．



（1）求椭圆C的标准方程；

（2）T_1，T_2为椭圆上不同两点，过T_1，T_2作椭圆切线交于点P，若$T_1P\perp T_2P$，求点P的轨迹E的方程；

（3）若PT_1交E于Q_1，PT_2交E与Q_2，求△PQ_1Q_2面积的最大值．

专题 8　对角线向量定理

第一讲 对角线向量定理（斯坦纳定理）

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2)-(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2)}{2}$ ①

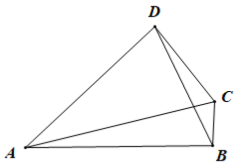


图 1

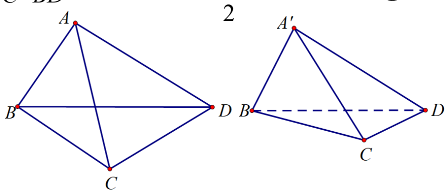


图 2

如图 1 所示，在ΔABC中，由余弦定理的向量式有$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CB}^2-\overrightarrow{AB}^2}{2}$；在$\Delta CAD$中，同理有$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{AD}^2}{2}$．所以在四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})=\dfrac{(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2)-(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2)}{2}$，

即$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2)-(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2)}{2}$，这就是对角线向量定理（斯坦纳定理）．

推论 1：$\cos\left\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right\rangle=\dfrac{\left(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2\right)-\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2\right)}{2\left|AC\right|\left|BD\right|}$ ②

说明：式子①②既适用于平面向量也适用于空间向量

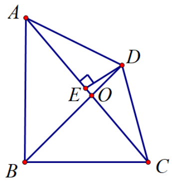
推论 2：在空间向量中涉及折叠的问题，一定有折痕的向量与任意向量在折叠前后对应的向量的乘积不变；

证明：如图 2 所示，在四边形$ABCD$中，沿着BD折叠后，A移到了A'位置，则

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{CD}^2}{2}=\frac{\overrightarrow{A'D}^2+\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{A'B}^2-\overrightarrow{CD}^2}{2}=\overrightarrow{A'C}\cdot\overrightarrow{BD}.$$

【例 1】（2018•宁波期末）如图，在四边形$ABCD$中，$AB\perp BC$，$AB=3$，$BC=CD=DA=2$，AC与BD交于点O，记$I_1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$I_2=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，$I_3=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$，则（　　）

A．$I_1<I_2<I_3$　　B．$I_1<I_3<I_2$　　C．$I_2<I_1<I_3$　　D．$I_3<I_1<I_2$



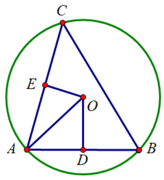
【解析】由对角线向量定理得$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\dfrac{(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2)-(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{CB}^2)}{2}=\dfrac{5}{2}>0$，

所以$b-a=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}>0(t>0)$，

而$c-a=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\left|\overrightarrow{OC}\right|\left|\overrightarrow{OD}\right|-\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|)COS\angle AOB<0$，所以$c<a<b$选择 C.

【例 2】如图，在圆 O 中，若弦 $AB=3$，弦 $AC=5$，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值是（　　）

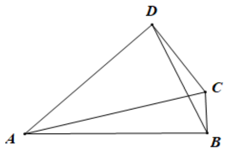
A. -8　　B. -1　　C. 1　　D. 8



【解析】如图所示，由对角向量定理得，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{(\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BO}^2)-(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CO}^2)}{2}=8$，所以答案选 D.

【例 3】(2018•宝山期末)如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$AD\perp DC$ 若，$\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AD}=b$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 等于（　　）

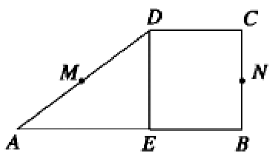
A. b^2-a^2　　B. a^2-b^2　　C. a^2+b^2　　D. $a^2\cdot b^2$

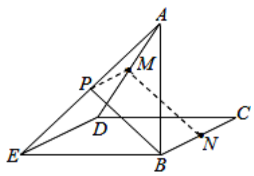


【解析】如图所示，由对角线向量定理得 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2)-(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2)}{2}=\dfrac{(b^2-a^2)+(\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{CD}^2)}{2}$

$=\dfrac{(b^2-a^2)+(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2)-(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AD}^2)}{2}=b^2-a^2$ 所以答案选 A.

【例 4】（2005•浙江）如图所示，M、N 是直角梯形 $ABCD$ 两腰的中点，$DE\perp AB$ 于 E，现将 ΔADE 沿 DE 折起，使二面角 $A-DE-B$ 为 45°，此时点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影恰为点 B，则 M、N 的连线与 AE 所成的角的大小为________.

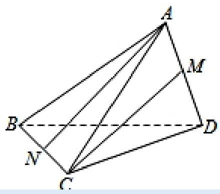


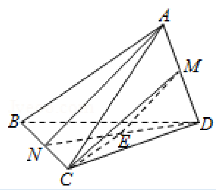


【解析】连接 EM、EN、AN，由题意有 $AM=EM$，$AN=EN$，由对角线向量定理得

$\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{MN}\Rightarrow\dfrac{(\overrightarrow{AN}^2+\overrightarrow{EM}^2)-(\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{EN}^2)}{2}=0$，即 $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{MN}$，所以答案是 90°.

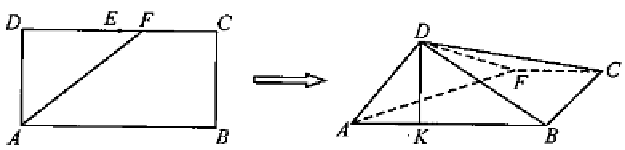
【例 5】（2015•浙江）如图，三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=AC=BD=CD=3$，$AD=BC=2$，点 M，N 分别是 AD，BC 的中点，则异面直线 AN，CM 所成的角的余弦值是________.





【解析】容易求得 $AN=CM=2\sqrt{2}$，$MN=\sqrt{7}$，由推论 2 有 $\cos<\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}>=\dfrac{(\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{CN}^2)-(\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{MN}^2)}{2\left|\overrightarrow{AN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CM}\right|}=\dfrac{7}{8}$.

【例 6】（2009•浙江）如图在长方形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=1$，E 为 DC 的中点，F 为线段 EC（端点除外）上的动点，现将 $\triangle AFD$ 沿 AF 折起，使平面 $ABD\perp$ 平面 $ABCF$，在平面 ABD 内过点 D 做 $DK\perp AB$，K 为垂足，设 $AK=t$，则 t 的取值范围是________.



【解析】根据推论 1 有：当 $DK\perp AF$ 时，$\overrightarrow{DF}^2+\overrightarrow{KA}^2=\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{KF}^2$，设 $DF=x(x>1)$，则 $x^2+t^2=1^2+(x-t)^2+1^2$，

所以 $t=\dfrac{1}{x}\in(\dfrac{1}{2},1)$.

【例 7】（2012•浙江）已知矩形 $ABCD$，AB=1，BC=$\sqrt{2}$，将 ΔABD 沿矩形的对角线 BD 所在的直线进行翻折，在翻折过程中（　　）

A．存在某个位置，使得直线 AC 与直线 BD 垂直

B．存在某个位置，使得直线 AB 与直线 CD 垂直

C．存在某个位置，使得直线 AD 与直线 BC 垂直

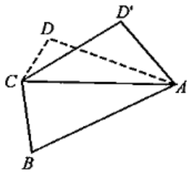
D．对任意位置，三对直线 AC 与 BD，AB 与 CD，AD 与 BC 均不垂直

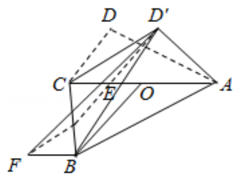
【解析】在翻折过程中，只有 AC 的长度是变化的，且 $\frac{\sqrt{3}}{3}\le AC\le\sqrt{3}$，由对角线向量定理有：

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2\right)-\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2\right)\right]=1$，显然 AC 与直线 BD 不垂直，而 $\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{CD}^2=\frac{1}{2}[(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2)$

$-(\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2)]=\frac{1}{2}(1-\overrightarrow{AC}^2)$. 当 AC=1 时，直线 AB 与直线 CD 垂直，所以选择 B.

【例 8】（2016•浙江）如图已知平面四边形 $ABCD$，$AB=BC=3$，$CD=1$，$AD=\sqrt{5}$，$\angle ADC=90°$，沿直线 AC 将△ACD 翻折成△ACD'，直线 AC 与 BD' 所成角的余弦值的最大是_________.



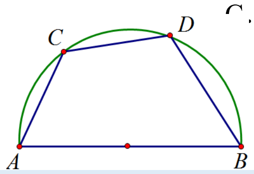


【解析】翻折后仍有 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD'}=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AD'}^2+\overrightarrow{BC}^2\right)-\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD'}^2\right)\right|}{2}=2$.设直线 AC 与 BD' 所成角为 θ，由对角线向量定理的 $\sqrt{6}|BD'|\cos\theta=2$，当且仅当 BD' 最小时，AC 与 BD' 所成角的余弦值最大.

有 $\cos\angle ACD=\cos\angle ACB$,所以，在翻折过程中，$BD'$ 的最小值为 $BC-CD'$=2，即 $\cos\theta$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

【题目】已知 AB 为半圆的直径，且 $AB=2$，C、D 在半圆上，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的最大值是（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　　　B．1　　　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D．2



【解析】$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{|AD|^2+|BC|^2-|AB|^2-|CD|^2}{2}=\frac{|AB|^2-|BD|^2+|AB|^2-|AC|^2-|AB|^2-|CD|^2}{2}$

$=\frac{|AB|^2-|BD|^2-|AC|^2-|CD|^2}{2}\le\frac{4-3\sqrt[3]{|BD|^2\cdot|AC|^2\cdot|CD|^2}}{2}=\frac{1}{2}$,当仅当 $|AC|=|CD|=|BD|=1$ 时等号成立；关于此题的争论，王亮老师认为取等条件过去牵强，并且三个数乘积 $|AC|\cdot|CD|\cdot|BD|$ 并非定值，所以此解答方法不严谨.

老唐给到的回复是：此题只有一个等式，就是 $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DB}=\pi$,令三段弧分别对的圆心角为 θ_1、θ_2、θ_3，当圆心角相等，则弦相等，根据柯西不等式 $(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DB})^2\le\left[(\overset{\frown}{AC})^2+(\overset{\frown}{CD})^2+(\overset{\frown}{DB})^2\right](1+1+1)$，此时取等条件是三段弧长相等，则对应的弦长相等。或者利用琴生不等式，由于 $f(x)=\sin x$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是凸函数，故有 $\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}\ge f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)$，故 $AC+CD+DB=2\sin\frac{\theta_1}{2}+2\sin\frac{\theta_2}{2}+2\sin\frac{\theta_3}{2}$

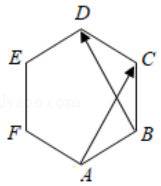
$\le2\times3\sin\left(\frac{\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2}+\frac{\theta_3}{2}}{3}\right)=6\sin\frac{\pi}{6}=3$，再利用柯西不等式求出 $AC^2+CD^2+DB^2$ 最小值，两次的取等条件一致，故得出答案

达标训练

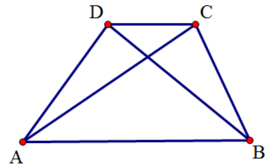
1. 在△ABC 中，AB=2，AC=3，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$．若点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PC}$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}$ ________．

2. （2019•迎泽月考）如图，正六边形 ABCDEF 的边长为 1，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$（　　）

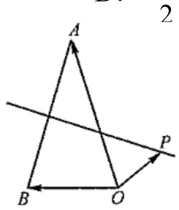
A．3　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



第 2 题图



第 4 题图



第 6 题图

3. （2013•新课标 II）已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，E 为 CD 的中点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}$ ________．

4. （2019•河西一模）如图梯形 $ABCD$，$AB//CD$ 且 $AB=5$，$AD=2DC=4$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为（　　）

A．$\dfrac{15}{13}$　　B．10　　C．15　　D．$-\dfrac{15}{13}$

5. （2019•沙坪坝期中）在边长为 4 的等边 ΔABC 中，M，N 分别为 BC，AC 的中点，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=$（　　）

A．-6　　B．6　　C．0　　D．$-\dfrac{3}{2}$

6. 如图，P 为△ABO 所在平面内一点，向量 $\overrightarrow{OA}=a,\overrightarrow{OB}=b$，且点 P 在线段 AB 的垂直平分线上，向量 $\overrightarrow{OP}=\vec{c}$，若 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，则 $\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$ 的值为（　　）

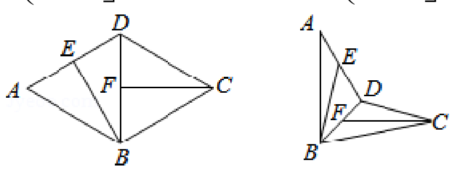
A．3　　B．5　　C．$\dfrac{3}{2}$　　D．$\dfrac{5}{2}$

7. （2019•全国 I 卷模拟）$\triangle ABC$ 的外心为 O，$AB=3$，$AC=4$，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}$ 等于（　　）

A．$\dfrac{3}{2}$　　B．$\dfrac{5}{2}$　　C．3　　D．$\dfrac{7}{2}$

8. （2015•浙江学业考试）如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60°$ 线段 AD，BD 的中点分别为 E，F．现将△ABC 沿对角线 BD 翻折，则异面直线 BF 与 CF 所成角的取值范围是（　　）

A．$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$　　B．$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$　　C．$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$　　D．$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$

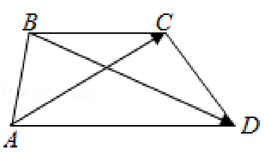


9. （2018•新课标II）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为（　　）

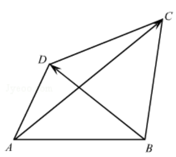
A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{6}$　　C．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10. （2018•和平一模）如图，已知在梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$AD=5$，$BC=3$，且梯形 $ABCD$ 的面积等于 8，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 可取得的最大值为（　　）

A．10　　B．11　　C．12　　D．15



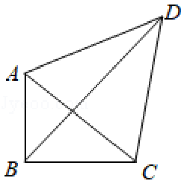
第 10 题图



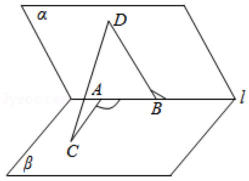
第 11 题图

11. （2018•如皋二模）如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=2$，ΔBCD 是等边三角形，若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$=1，则 AD 的长为________．

12. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \perp BC$，$AB=6$，$BC=8$，ΔACD 是等边三角形，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的值为________.



第 12 题图



第 13 题图

13. （2019•山西期末）如图，$60°$的二面角的棱上有 A，B 两点，直线 AC，BD 分别在这个二面角的两个半平面内，且都垂直于 AB．已知 $AB=4$，$AC=6$，$BD=8$，则 CD 的长为（　　）

A．$\sqrt{17}$　　B．7　　C．$2\sqrt{17}$　　D．9

14. （2018•临川模拟）在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=3$，沿对角线 AC 把矩形折成二面角 $D-AC-B$ 的平面角为 $60°$ 时，则 $|BD|=$________.

第三章　解三角形

专题 1　三板斧之射影定理

第一讲　一板斧射影定理

在$\triangle ABC$中，求证：$a=b\cos C+c\cos B$，$b=c\cos A+a\cos C$，$c=a\cos B+b\cos A$.

证明：　在$\triangle ABC$中，由 $A+B+C=\pi$，得 $A=\pi-(B+C)$.

所以 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$.

设$\triangle ABC$的外接圆半径为 R，由正弦定理得，$\dfrac{a}{2R}=\sin(B+C)=\dfrac{b}{2R}\cos C+\dfrac{c}{2R}\cos B$，

即 $a=b\cos C+c\cos B$. 同理可证：$b=c\cos A+a\cos C$，$c=a\cos B+b\cos A$.

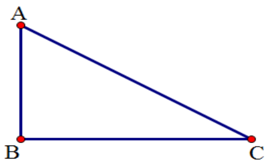


图 1

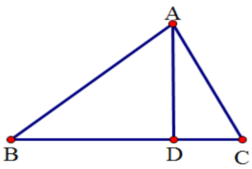


图 2

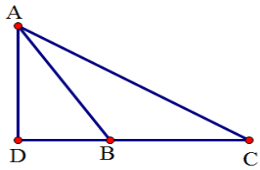


图 3

几何解释：（1）当$\triangle ABC$为直角三角形时（如图 1），不妨设角 B 为直角，由直角三角形的边角关系得 $a=b\cos C$，又 $\cos B=0$，所以 $a=b\cos C+c\cos B$.

（2）当$\triangle ABC$为锐角三角形时（如图 2）过点 A 作 $AD\perp BC$,垂足为 D.由直角三角形的边角关系得 $BD=c\cos B$，$CD=b\cos C$，所以 $a=BD+DC=b\cos C+c\cos B$.

（3）当$\triangle ABC$为钝角三角形时（如图 3），不妨设角 B 为钝角，过点 A 作 $AD\perp BC$，交 CB 的延长线于点 D，由直角三角形边角关系得，$DC=b\cos C$，$BD=c\cos\angle ABD=\cos(\pi-B)=-c\cos B$，

所以，$a=DC-BD=b\cos C-(-c\cos B)=b\cos C+c\cos B$.

【例 1】(2013•陕西）设$\triangle ABC$，$b\cos C+C\cos B=a\sin A$，则$\triangle ABC$的形状为（　　）

A．锐角三角形　　B．直角三角形　　C．钝角三角形　　D．不确定

【解析】$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$\because b\cos C+C\cos B=a\sin A$，则由正弦定理可得 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin^2 A$，即 $\sin\left(B+C\right)=\sin^2 A$，可得 $\sin A=1$，故 $A=\dfrac{\pi}{2}$，故三角形为直角三角形，故选 B．由于是选填，此题可以直接利用射影定理 $a=b\cos C+c\cos B=a\sin A\Rightarrow\sin A=1$，会更快.

【例 2】(2008•山东）$\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，向量 $m=(\sqrt{3},-1)$，$n=(\cos A,\sin A)$，若 $m\perp n$，且 $a\cos B+b\cos A=c\sin C$，则角 A、B 的大小分别为　（　　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{3}$　　B．$\dfrac{2\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{6}$　　C．$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{6}$　　D．$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{3}$

【解析】$\vec{m}\cdot\vec{n}=x_1x_2+y_1y_2=\sqrt{3}\cos A-\sin A=0\Rightarrow\sin A=\sqrt{3}\cos A\Rightarrow\tan A=\sqrt{3}\Rightarrow A=\dfrac{\pi}{3}$.

$a\cos B+b\cos A=c=c\sin C\Rightarrow\sin C=1\Rightarrow C=\dfrac{\pi}{2}$，故 $B=\dfrac{\pi}{6}$.

【例 3】(2013•辽宁)在△ABC，内角 A，B，C 所对的边长分别为 a，b，c，$a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b$，且 $a>b$，则 $\angle B=$（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

【解析】$a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b\Rightarrow a\cos C+c\cos A=R=b\Rightarrow\sin B=\frac{b}{2R}=\frac{1}{2}\Rightarrow B=\frac{\pi}{6}$，故选 A．

【例 4】(2019•新乡三模)在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c．已知 $a\in(\frac{\sqrt{6}}{2}，\sqrt{2})$，$b=1$，且 $ab\cos C+c\cos A=abc$，则 $\cos B$ 的取值范围为（　　）

A．$(\frac{7}{12}，\frac{3}{4})$　　B．$(\frac{7}{12}，\frac{2}{3})$　　C．$(0,\frac{3}{4})$　　D．$(0,\frac{2}{3})$

【解析】　解法一　因为 $b=1$，且 $ab\cos C+c\cos A=abc$，所以 $ab\cos C+bc\cos A=ac$，即 $ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+bc\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=ac$，所以 $b^2=ac=1$，从而 $c=\frac{1}{a}$，所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+\frac{1}{a}^2-1}{2}$，因为 $a\in\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}\right)$，所以当 $a=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时，$\cos B=\frac{7}{12}$；当 $a=\sqrt{2}$ 时，$\cos B=\frac{3}{4}$，又 $f\left(x\right)=x+\frac{1}{x}$ 在 $\left(\frac{3}{2},2\right)$ 上单调递增，故的取值范围为 $\left(\frac{7}{12},\frac{3}{4}\right)$，故选 A.

解法二　因为 $b=1$，且 $ab\cos C+c\cos A=abc$，所以 $ab\cos C+bc\cos A=ac$，根据射影定理：$a\cos C+c\cos A=\frac{ac}{b}=b$，所以 $b^2=ac=1$，剩余步骤同法易，故选 A.

【例 5】（2019•安徽模拟）斜△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $2c\cdot\cos A(\sin B-1)=a\cos C-b$，则 $\sin B$ 的值为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】　解法一　因为 $2c\cdot\cos A\left(\sin B-1\right)=a\cos C-b$，所以由正弦定理可得：$2\sin C\cos A\cdot\left(\sin B-1\right)=\sin A\cos C-\sin B$，可得：$2\sin C\cos A\sin B-2\sin C\cos A=\sin A\sin C-\left(\sin A\cos C+\sin C\cos A\right)$，整理可得：$2\sin C\cos A\sin B=\sin A\cos C$，因为在 ΔABC 中，$\sin C\cos A\neq 0$，所以解得 $\sin B=\frac{1}{2}$，故选 B.

解法二　根据射影定理，$2c\cdot\cos A\left(\sin B-1\right)=a\cos C-b=a\cos C-a\cos C-c\cos A=-c\cos A$，故 $2\left(\sin B-1\right)=-1$，$\sin B=\frac{1}{2}$，故选 B.

【例 6】(2019•河南一模）在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $\frac{2a-c}{b}=\frac{\cos C}{\cos B}$，$b=4$，则△$ABC$ 的面积的最大值为（　　）

A．$4\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{3}$

【解析】 解法一　因为在 ΔABC 中，$\dfrac{2a-c}{b}=\dfrac{\cos C}{\cos B}$，所以 $(2a-c)\cos B=b\cos C$，所以 $(2\sin A-\sin C)\cos B=\sin B\cos C$，所以 $2\sin A\cos B=\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(B+C)=\sin A$，约掉 $\sin A$ 可得 $\cos B=\dfrac{1}{2}$，即 $B=\dfrac{\pi}{3}$，由余弦定理可得 $16=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac\geq 2ac-ac$，所以 $ac\leq 16$，当且仅当 $a=c$ 时取等号，所以 ΔABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac\leq 4\sqrt{3}$，故选 A.

解法二　因为 $\dfrac{2a-c}{b}=\dfrac{\cos C}{\cos B}$，所以 $(2a-c)\cos B=b\cos C$，根据射影定理可得：$2a\cos B=b\cos C+c\cos B=a$，所以 $\cos B=\dfrac{1}{2}$，即 $B=\dfrac{\pi}{3}$，根据椭圆灵动焦点三角形面积公式 $S=\dfrac{1}{4}\left[(a+c)^2-b^2\right]\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\left[(a+c)^2-16\right]$，由于 $a+c=2R\left(2\sin A+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)\right)=8\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)\leq 8$，$S\leq\dfrac{\sqrt{3}}{12}(8^2-16)=4\sqrt{3}$，故选 A.

注意：法二中用到了射影定理、椭圆灵动焦点三角形面积公式、万能辅助角公式，在接下来的专题中，这些公式会逐步体现出来优势.

达标训练

1.（2019•宝坻期中）在△ABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，则 $a\cos B+b\cos A$ 等于（　　）

A. $\dfrac{a+b}{2}$　　　B. b　　　C. c　　　D. a

2.（2019•海淀月考）在△ABC 中，角 A，B，C 的对应边分别是 a，b，c，若 $3b\sin A=c\cos A+a\cos C$，则 $\sin A=$________；$\cos 2A=$_________.

3.（2019•石河子月考）在三角形 ABC 中，角 A、B、C 所对应的边分别为 a、b、c，已知 $a\cos B+b\cos A=3a$，则 $\dfrac{c}{a}=$_________.

4.（2019•金牛期中）已知△ABC 的三个内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，满足 $b\cos C+(a+c)(b\sin C-1)=0$，且 $a+c=2$，则 $\sin B$ 的值为__________.

5.（2019•镜湖模拟）在△ABC 中，若 $a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\dfrac{1}{2}b$，且 $a>b$，则角 $B=$_________.

6.（2019•淄博三模）在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，$a=4$，$b=2\sqrt{3}$，$c\cos B=(2a-b)\cos C$，则 ΔABC 的面积为____________.

7.（2019•珠海二模）△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $(a+2c)\cos B+b\cos A=0$，则 $B=$____________.

8.（2019•淮安期中）△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $b=a(\cos C+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin C)$，$a=\sqrt{3}$，$c=1$，则角 $C=$__________.

9.（2018•红岗期中）已知 A、B、C 分别为△ABC 三边 a，b，c 所对的角，且 $(2b-c)(b^2+c^2-a^2)=2abc\cos C$.

（1）求角 A；

（2）若 $a=\sqrt{3}$，求 BC 边上中线 AM 的最大值.

10.（2019•涪陵月考）在△ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\dfrac{4\sin A-\sqrt{7}\cos C}{c}=\dfrac{\sqrt{7}\cos B}{b}$.

（1）求$\sin B$的值；

（2）若a，b，c成等差数列，且公差大于0，求$\cos A-\cos C$的值.

11.（2019•长沙期末）已知a，b，c分别为△ABC三个内角A，B，C的对边，$a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$.

（1）求A；

（2）若边b，c是方程$x^2-2\sqrt{3}x+2=0$的两根，求边a的长及ΔABC的面积.

12.（2019•孝感期中）已知a，b，c分别是△ABC三个内角A，B，C的对边，且$2a\cos C=b\cos C+c\cos B$.

（1）求角C的大小；

（2）若$c=2$，ΔABC的周长为6，求该三角形的面积.

13.（2019•河南月考）已知a，b，c分别为△ABC三个内角A，B，C的对边，$a(\cos C+\sqrt{3}\sin C)=b+c$.

（1）求角A；

（2）若$a=5$，求△ABC的周长的最大值.

专题2　三板斧之灵动面积周长公式

第一讲 二板斧之灵动面积周长公式

1．**余弦定理推导式：**$(a+b-c)(a+b+c)=(a+b)^2-c^2=2ab(1+\cos C)$，（**把**$(a+b)$**当做一个整体**）

2．**面积公式推导式：**

公式一：$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\dfrac{(a^2+b^2-c^2)}{2\cos C}\sin C=\dfrac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)\tan C$.

$2ab\cos C=a^2+b^2-c^2\Rightarrow 2ab(1+\cos C)=(a+b)^2-c^2\Rightarrow ab=\dfrac{(a+b)^2-c^2}{2(1+\cos C)}$，又$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

公式二：$S=\dfrac{1}{4}\left[(a+b)^2-c^2\right]\dfrac{\sin C}{1+\cos C}=\dfrac{1}{4}\left[(a+b)^2-c^2\right]\tan\dfrac{C}{2}$.（**椭圆灵动焦点三角形面积公式**）

同理$2ab(-1+\cos C)=(a-b)^2-c^2\Rightarrow ab=\dfrac{(a-b)^2-c^2}{2(-1+\cos C)}$，**代入**$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

公式三：$S=\dfrac{1}{4}\left[(a-b)^2-c^2\right]\dfrac{\sin C}{-1+\cos C}=\dfrac{1}{4}\left[c^2-(a-b)^2\right]\dfrac{1}{\tan\dfrac{C}{2}}$.（**双曲线灵动焦点三角形面积公式**）

【例1】（2019•新课标II）△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c．若$b=6$，$a=2c$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，则△ABC的面积为_______.

【解析】 解法一 由余弦定理有$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，因为$b=6$，$a=2c$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，所以$36=(2c)^2+c^2-4c^2\cos\dfrac{\pi}{3}$，所以$c^2=12$，所以$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=c^2\sin B=6\sqrt{3}$，故答案为$6\sqrt{3}$.

解法二 $(a+c)^2-b^2=2ac(1+\cos B)\Rightarrow C=2\sqrt{3}$，$S=\dfrac{1}{4}\left[(a+c)^2-b^2\right]\tan\dfrac{B}{2}=6\sqrt{3}$，故答案为$6\sqrt{3}$.

【例2】（2019•浙江模拟）在△ABC中，已知三边a、b、c满足$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，则$\angle C$等于_________.

【解析】$(a+b-c)(a+b+c)=2ab(1+\cos C)=3ab$，故$1+\cos C=\dfrac{3}{2}$，$\cos C=\dfrac{1}{2}$，$C=60^0$

【例4】(2019•株洲月考)在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边分别是a,b,c.若$\cos A=\frac{13}{14}$,$a=3$,且$\triangle ABC$的面积为$\frac{15\sqrt{3}}{4}$,则$b+c=$( )

A. 11 B. 12 C. 13 D. 14

【解析】因为$\cos A=\frac{13}{14}$,所以$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$,$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{\sqrt{3}}{9}$,根据椭圆灵动焦点三角形面积公式$S=\frac{1}{4}\left[(b+c)^2-a^2\right]\tan\frac{A}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$,则$b+c=12$,故选B.

【例5】(2019•孝感期中)在$\triangle ABC$中,a,b,c分别为内角A,B,C所对的边长,若$c^2=(a-b)^2+4$,$C=\frac{\pi}{3}$,则$\triangle ABC$的面积是( )

A. $\frac{3}{2}$ B. 3 C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

【解析】根据双曲线灵动焦点三角形面积公式$S=\frac{1}{4}\left[c^2-(a-b)^2\right]\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}=\sqrt{3}$,故选C.

【例6】(2019•蚌埠三模)在$\triangle ABC$中,a,b,c分别为内角A,B,C的对边,若$a+c=4$,$2\sin B=\sin A+\sin C$,则$\triangle ABC$的面积的最大值为( )

A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $2\sqrt{3}$ D. 4

【解析】 因为$2\sin B=\sin A+\sin C$,由正弦定理得$2b=c+c=4$,即$b=2$,由于$(a+c)^2-b^2=2ac(1+\cos B)$,故$ac=\frac{6}{1+\cos B}=\frac{3}{\cos^2\frac{B}{2}}\le\frac{(a+c)^2}{4}\Rightarrow\cos^2\frac{B}{2}\ge\frac{3}{4}\Rightarrow B\le 60^\circ$,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}\left[(a+c)^2-b^2\right]\tan\frac{B}{2}=3\tan\frac{B}{2}\le\sqrt{3}$,故选A.

达标训练

1.(2019•乐山期中)在$\triangle ABC$中,若$\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}=1$,则$\angle A$的大小是( )

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

2.(2019•山东模拟)在$\triangle ABC$中,a,b,c分别为角A,B,C的对边,若$\triangle ABC$的面为S,且$4\sqrt{3}S=(a+b)^2-c^2$,则$\sin(C+\frac{\pi}{4})=$( )

A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

3.(2019•绵阳模拟)在$\triangle ABC$中,a、b、c,分别为内角A,B,C的对边,若$A=\frac{2\pi}{3}$,$a=2\sqrt{10}$,且$\triangle ABC$的面积$S=\frac{a^2+b^2-c^2}{12}$,则$c=$( )

A. $2\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

4.(2019•宜宾模拟)在$\triangle ABC$中,A,B,C的对边分别是a,b,c,且$b=2$,$B=60^\circ$,$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$,则$a+c=$( )

A. 4 B. $\sqrt{14}$ C. 2 D. $4+2\sqrt{3}$

5.（2019•海安月考）在$\triangle ABC$中，a，b，c分别是角A，B，C所对应的边，若c边长$\sqrt{7}$，$\triangle ABC$的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，且$c=2\cos C(a\cos B+b\cos A)$，则$\triangle ABC$的周长为（　　）

A．$5+\sqrt{3}$　　B．$3+\sqrt{5}$　　C．$5+\sqrt{7}$　　D．$7+\sqrt{5}$

6.（2019•安远月考）在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，面积为S，若$2S+a^2=(b+c)^2$，则$\sin A$等于（　　）

A．$\frac{12}{13}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{15}{17}$　　D．$\frac{4}{5}$

7．(2019•汕头模拟)在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$(a+b-c)(a+b+c)=3ab$，且$c=4$，则$\triangle ABC$面积的最大值为________.

8.（2019•德州一模）在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$\triangle ABC$的面积为$5\sqrt{2}$，$c-b=2$，$\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$a$的值为________.

专题3　三板斧之万能辅助角公式

第一讲 万能辅助角公式

已知三角形的一个内角C，求$\sin A+\sin B$或者$\sin A+\lambda\sin B$

公式四：$a+b=4R\cos\frac{C}{2}\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)$，$a+\lambda b=2R\sqrt{\lambda^2+2\lambda\cos C+1}\sin(B+\varphi)\le 2R\sqrt{\lambda^2+2\lambda\cos C+1}(\lambda>0)$

证明：$\sin A+\sin B=\sin A+\sin(A+C)=\sin A(1+\cos C)+\cos A\sin C$

$$=2\sin A\cos^2\frac{C}{2}+2\cos A\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=2\cos\frac{C}{2}\left(\sin A\cos\frac{C}{2}+\cos A\sin\frac{C}{2}\right)=2\cos\frac{C}{2}\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)$$

故：$a+b=4R\cos\frac{C}{2}\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)$

$\sin A+\lambda\sin B=\sin(B+C)+\lambda\sin B=\sin B(\lambda+\cos C)+\cos B\sin C=\sqrt{(\lambda+\cos C)^2+\sin^2 C}\sin(B+\varphi)$，其中$\tan\varphi=\frac{\sin C}{\cos C+\lambda}$，故$\sin A+\lambda\sin B\le\sqrt{\lambda^2+2\lambda\cos C+1}$

【例2】(2011•新课标）在$\triangle ABC$中，$B=60°$，$AC=\sqrt{3}$，则$AB+2BC$的最大值为__________.

【解析】$\because\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60°}=2$，$\therefore AB+2BC=c+2a=2(\sin C+2\sin A)=2\sin(A+B)+4\sin A$，$=2(\sin 60°\cos A+\cos 60°\sin A)+4\sin A$ $=\sqrt{3}\cos A+5\sin A$ $=2\sqrt{7}\sin(A+\varphi)$，（其中$\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$，$\cos\varphi=\frac{5}{2\sqrt{7}}$）所以$AB+2BC$的最大值为$2\sqrt{7}$．故答案为$2\sqrt{7}$.

注意：此题属于万能辅助角模型题，通常只需要用到$c+2a=2R\sqrt{2^2+2\times 2\cos B+1}\sin(A+\varphi)\le 2\sqrt{7}$**即可.**

【例3】(2010•浙江卷）在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，设S为$\triangle ABC$的面积，满足$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2-c^2)$.

（1）求角C的大小；

（2）求 $\sin A+\sin B$ 的最大值.

【解析】（1）$\begin{cases}S=\dfrac{1}{2}ab\sin C\\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{cases}\Rightarrow S=\dfrac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)\tan C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2-c^2)\Rightarrow \tan C=\sqrt{3}$， $C=60°$；

（2） $\sin A+\sin B=\sin A+\sin\left(120°-A\right)=\dfrac{3}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\sqrt{3}\sin\left(A+30°\right)$，

当 $A=60°$， $\sin A+\sin B$ 取得最大值 $\sqrt{3}$.

【例 4】（2007•全国卷）在 $\triangle ABC$ 中，已知内角 $A=\dfrac{\pi}{3}$，边 $BC=2\sqrt{3}$.设内角 $B=x$， 面积为 y .

（1）求函数 $y=f(x)$ 的解析式和定义域;

（2）求 y 的最大值.

【解析】$\because A=\dfrac{\pi}{3}$， $BC=2\sqrt{3}$，$\therefore 2R=\dfrac{a}{\sin A}=4$， $b=2R\sin B=4\sin B$， $c=2R\sin C=4\sin C$，根据面积公式 $y=S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 4\sin x\times 4\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\sin x\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)=6\sin x\cos x+2\sqrt{3}\sin^2 x$

$=2\sqrt{3}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$， $x\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$； 当 $2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}$ 时， y 取得最大值 $3\sqrt{3}$.

第二讲　带负号的万能辅助角公式（$\lambda<0$ 形式）

（1）当 $\cos C+\lambda=0$ 时， $a+\lambda b=2R[\sin B(\cos C+\lambda)+\cos B\sin C]=2R\cdot\sin C\cos B$，

（2）当 $\cos C+\lambda\neq 0$ 时，一定有 $a+\lambda b=\begin{cases}2R\sqrt{\lambda^2+2\lambda\cos C+1}\cdot\sin(B+\varphi)(\cos C+\lambda>0)\\ -2R\sqrt{\lambda^2+2\lambda\cos C+1}\cdot\sin(B+\varphi)(\cos C+\lambda<0)\end{cases}$， $\tan\varphi=\dfrac{\sin C}{\cos C+\lambda}$

证明： $a+\lambda b=2R\left(\sin A+\lambda\sin B\right)=2R\left[\sin B\left(\cos C+\lambda\right)+\cos B\sin C\right]$， 当 $\cos C+\lambda>0$，

$a+\lambda b=2R[\sin B(\cos C+\lambda)+\cos B\sin C]=2R\sqrt{(\cos C+\lambda)^2+\sin^2 C}\cdot\sin(B+\varphi)$

$=2R\sqrt{\lambda^2+2\lambda\cos C+1}\cdot\sin(B+\varphi)(\tan\varphi=\dfrac{\sin C}{\cos C+\lambda}$ 且 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$

当 $\cos C+\lambda<0$， $a+\lambda b=-2R[\sin B(-\cos C-\lambda)-\cos B\sin C]=-2R\sqrt{(\lambda+\cos C)^2+\sin^2 C}\cdot\sin(B+\varphi)$

$=-2R\sqrt{\lambda^2+2\lambda\cos C+1}\cdot\sin(B+\varphi)(\tan\varphi=\dfrac{\sin C}{\cos C+\lambda}$ 且 $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<0)$

注意：无论 λ 正负，若 $\cos C+\lambda>0$，一切照旧，若 $\cos C+\lambda<0$，故要在 $\sin B$ 前面提出负号，再用辅助角公式计算，一样能得到相同的答案.

【例 17】(2019•天台月考)在 $\triangle ABC$ 中， 内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $c=a(\sin B+\cos B)$.

（1） 求角 A 的大小;

（2） 若边 $a=\sqrt{2}$，求 $\sqrt{2}b-c$ 的取值范围 .

【解析】（1）因为在 ΔABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c， $c=a\left(\sin B+\cos B\right)$，所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{a\left(\sin B+\cos B\right)}{\sin C}=\dfrac{a\left(\sin B+\cos B\right)}{\sin\left(A+B\right)}$，所以

$\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin A\sin B+\sin A\cos B$， 即 $\cos A=\sin A$，所以 $A=45°$.

（2）因为 $a=\sqrt{2}$，$A=45°$，所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2$，即 $b=2\sin B$，$c=2\sin C$，且

$B+C=135°$，$B=135°-C$，$(0°<C<135°)$ 则

$\sqrt{2}b-c=2\sqrt{2}\sin B-2\sin C=2\sqrt{2}\sin(45°+C)-2\sin C$

$=2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos C+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin C\right)-2\sin C=2\cos C+2\sin C-2\sin C=2\cos C$，因为 $(0°<C<135°)$，

所以 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos C<1$，所以 $-\sqrt{2}<2\cos C<2$，故 $\sqrt{2}b-c$ 的取值范围是 $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

注意：$\sqrt{2}b-c=2\sqrt{2}R(\sin B-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin C)$，由于 $\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\lambda$，故 $\sqrt{2}b-c=2\sqrt{2}R(\sin B-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin C)$

$=2\sqrt{2}R\sin A\cos C=2\cos C$，关键就在于判断 $\cos A+\lambda$ 的状况.

【例 18】（2019•苏州期中）在锐角 $\triangle ABC$ 中，a，b，c 分别为角 A，B，C 所对的边，$2c-\sqrt{3}b=2a\cos B$，$a=\sqrt{7}$．则 $\sqrt{3}b-c$ 的取值范围为__________.

【解析】根据射影定理，$2c-\sqrt{3}b=2a\cos B\Rightarrow 2a\cos B+2b\cos A-\sqrt{3}b=2a\cos B\Rightarrow\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$2R=\dfrac{\sqrt{7}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{7}$，由于 $\cos A-\dfrac{\sqrt{3}}{3}>0$，

$\sqrt{3}b-c=2\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}\left(\sin B-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin C\right)=2\sqrt{21}\left[\sin\left(c+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin C\right]=2\sqrt{7}\sin\left(C+\dfrac{\pi}{3}\right)$，因为

ΔABC 是锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<C<\dfrac{\pi}{2}\\0<\dfrac{5\pi}{6}-C<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，即的 $\dfrac{\pi}{3}<C<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{2\pi}{3}<C+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5\pi}{6}$，

$\dfrac{1}{2}<\sin\left(C+\dfrac{\pi}{3}\right)<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sqrt{7}<2\sqrt{7}\sin\left(C+\dfrac{\pi}{3}\right)<\sqrt{21}$，$\sqrt{3}b-c$ 取值范围是 $\left(\sqrt{7},\sqrt{21}\right)$，故答案为 $\left(\sqrt{7},\sqrt{21}\right)$.

第三讲 万能辅助角公式最值存在性问题

在 $a+\lambda b(\lambda>0)$ 中，（1）若 $C<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\cos C+\lambda>0$，一定有 $a+\lambda b=2R\sqrt{\lambda^2+2\lambda\cos C+1}\cdot\sin(B+\varphi)$，由于 $B\in(0,\pi-C)$，且 $\pi-C>\dfrac{\pi}{2}$，故无论 λ 为任何正值，都存在 $\tan\varphi=\dfrac{\sin C}{\cos C+\lambda}$，使得 $B+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 成立；

（2）若 $C>\dfrac{\pi}{2}$，当 $\cos C+\lambda<0$ 时，$a+\lambda b=-2R\sqrt{\lambda^2+2\lambda\cos C+1}\cdot\sin(B+\varphi)$ 一定取不到最值，$a+\lambda b$ 的取值范围为开区间；

（3）若 $C>\dfrac{\pi}{2}$，当 $\cos C+\lambda>0$ 时，$a+\lambda b=2R\sqrt{\lambda^2+2\lambda\cos C+1}\cdot\sin(B+\varphi)$，故需要进行判断能否取得最值，由于 $0<B<\pi-C$，故 $B+\varphi\geq\dfrac{\pi}{2}$ 时才能取到最大值，此时 $\varphi\geq\dfrac{\pi}{2}-B>C-\dfrac{\pi}{2}$，即 $\tan\varphi>\tan(C-\dfrac{\pi}{2})=-\dfrac{1}{\tan C}$，

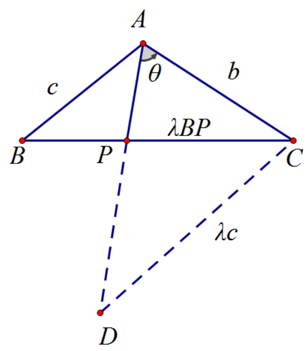
代入数据得：$\dfrac{\sin C}{\cos C+\lambda}>\dfrac{1}{-\tan C}$，即 $\lambda<-\dfrac{1}{\cos C}$；

综上，若 $C<\dfrac{\pi}{2}$，$a+\lambda b$ 一定能取到最大值 $2R\sqrt{\lambda^2+2\lambda\cos C+1}$；若 $C>\dfrac{\pi}{2}$，当 $-\cos C<\lambda<-\dfrac{1}{\cos C}$ 时，$a+\lambda b$ 才能取到最大值 $2R\sqrt{\lambda^2+2\lambda\cos C+1}$.

【例 10】（2019•佛山质检）在△ABC 中，角 A、B、C、所对的边分别是 a、b、c，且 $a=1$，$A=\dfrac{2\pi}{3}$. 当 b、c 变化时，$b+\lambda c$ 存在最大值，则正数 λ 的取值范围是__________.

【解析】根据万能辅助角公式，$b+\lambda c=2R(\sin B+\lambda\sin C)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}[\sin(A+C)+\lambda\sin C]$

定比分线为定值的万能辅助角模型



倍长定比分线，构造三角形用万能辅助角，如图，若 P 在边 BC 上，且满足 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{BP}$，$|AP|=m$，则延长 AP 至 D，使 $\overrightarrow{PD}=\lambda\overrightarrow{AP}$，连接 CD，易知 AB // DC，且 $DC=\lambda c$，则关于 $b+\lambda c=2R\sin(\theta+\varphi)$ 来解决求最大值，或者求值问题；由于 $2R=\dfrac{|AD|}{\sin\angle ACD}=\dfrac{(1+\lambda)|AP|}{\sin\angle BAC}$，根据万能辅助角公式可得：

$$b+\lambda c=\frac{(1+\lambda)|AP|}{\sin\angle BAC}2\cos\frac{\angle ACD}{2}\sin\left(\theta+\frac{\angle ACD}{2}\right)\le\frac{(1+\lambda)|AP|}{\cos\frac{\angle BAC}{2}}$$（只是模型，无需记忆此公式）

请大家思考，如果是 $b+m\lambda c$ 呢？答案是 $b+m\lambda c=2R\sqrt{m^2-2m\cos\angle BAC+1}\sin(\theta+\varphi)$.

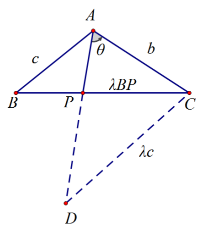
$=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{(\lambda+\cos C)^2+\sin^2 C}\sin(B+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\dfrac{\sin A}{\lambda+\cos A}$，由于 $0<B<\dfrac{\pi}{3}$，故 $\varphi>\dfrac{\pi}{6}$，根据题意有 $\tan\varphi=\dfrac{\sin A}{\lambda+\cos A}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\lambda-1}>\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\dfrac{1}{2}<\lambda<2.$

注意：这就是一个结论性的问题，$A=\dfrac{2\pi}{3}>\dfrac{\pi}{2}$，当 $-\cos A<\lambda<-\dfrac{1}{\cos A}$ 时才能取得最大值. 以后此类型题目会不断出现.

第四讲 定比分线为定值的万能辅助角模型

倍长定比分线，构造三角形用万能辅助角，如图，若 P 在边 BC 上，且满足 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{BP}$，$|AP|=m$，则延长 AP 至 D，使 $\overrightarrow{PD}=\lambda\overrightarrow{AP}$，连接 CD，易知 AB // DC，且 $DC=\lambda c$，则关于 $b+\lambda c=2R\sin(\theta+\varphi)$ 来解决求最大值，或者求值问题；由于 $2R=\dfrac{|AD|}{\sin\angle ACD}=\dfrac{(1+\lambda)|AP|}{\sin\angle BAC}$，根据万能辅助角公式可得：

$$b+\lambda c=\frac{(1+\lambda)|AP|}{\sin\angle BAC}2\cos\frac{\angle ACD}{2}\sin\left(\theta+\frac{\angle ACD}{2}\right)\le\frac{(1+\lambda)|AP|}{\cos\frac{\angle BAC}{2}}$$（只是模型，无需记忆此公式）



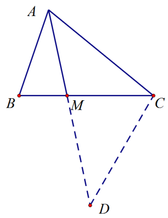
请大家思考，如果是 $b+m\lambda c$ 呢？答案是：$b+m\lambda c=2R\sqrt{m^2-2m\cos\angle BAC+1}\sin(\theta+\varphi)$.

【例 20】(2018•景德镇期中)在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，$AB=2$，$AC=1$，$D$是$BC$上一点，且$DC=2BD$，则$AD$的值为(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{13}}{3}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$　　D. $\sqrt{7}$

【解析】如图所示，作AD延长线，使$DE=2AD$，显然$|CE|=2|AB|=4$，$\angle ACE=60°$，故根据余弦定理，可知$|AE|^2=|AC|^2+|EC|^2-2|AC|\cdot|EC|\cdot\cos\angle ACE=13$，故$|AD|=\dfrac{|AE|}{3}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$，故选$B$.

【例 21】(2019•石家庄模拟)在$\triangle ABC$中，a、b、c分别是角A、B、C的对边，若$c\cos B+b\cos C=2a\cos A$，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，且$AM=1$，则$b+2c$的最大值是________.



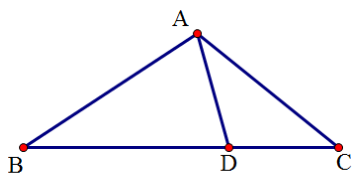
【解析】根据射影定理可得：$c\cos B+b\cos C=2a\cos A=a\Rightarrow\cos A=\dfrac{1}{2}\Rightarrow A=60°$，过$C$作$AB$的平行线，交$AM$延长线于$D$，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{BM}\Rightarrow|CD|=2c$，且$\angle ACD=120°$，在$\triangle ACD$中，$2R=\dfrac{|AD|}{\sin 120°}=2\sqrt{3}$，根据万能辅助角$b+2c=2R\cdot 2\cos 60°\sin(\angle CAD+60°)=2\sqrt{3}\sin(\angle CAD+60°)\le 2\sqrt{3}$，当$\angle CAD=30°$时等号成立，故答案为$2\sqrt{3}$.

达标训练

1. (2019•安徽模拟)在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别是a，b，c，若$\cos A=\dfrac{3}{5}$，$a=4$，则ΔABC的面积的最大值为(　　)

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

2. (2019•龙凤期中)如图，在$\triangle ABC$中，点D在边BC上，且$BD=2DC$，$\angle DAC=30°$，$AD=2$，$\triangle ABC$的面积为$3\sqrt{3}$，则线段AB的长度为(　　)



A. 3　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{2}$

3. (2019•沭阳期中)在锐角$\triangle ABC$中，a，b，c分别为内角A，B，C所对的边，若$a=\sqrt{3},A=\dfrac{\pi}{3}$，则$b+c$的取值范围是(　　)

A. $(\sqrt{3},2\sqrt{3}]$　　B. $[\sqrt{3}，2\sqrt{3}]$　　C. $[3,2\sqrt{3}]$　　D. $(3，2\sqrt{3}]$

4. (2018•芜湖期末)锐角三角形ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$2a\sin C=\sqrt{3}c$，$a=1$，则$\triangle ABC$周长的最大值为(　　)

A. $\sqrt{3}+1$　　B. $\sqrt{2}+1$　　C. 3　　D. 4

5.（2019•河南模拟）已知$\triangle ABC$的三边长分别为a，b，c，面积为S，且$a^2+b^2-c^2=4\sqrt{3}S$，$c=1$，则$\sqrt{3}b-a$的最大值为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．2　　C．3　　D．$\sqrt{2}$

6.（2019•东莞一模）在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$C=\dfrac{\pi}{6}$，则$AC+\sqrt{3}BC$的最大值为（　　）

A．$\sqrt{7}$　　B．$2\sqrt{7}$　　C．$3\sqrt{7}$　　D．$4\sqrt{7}$

7.（2018•东湖月考）在锐角$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，$a^2+c^2-b^2=\sqrt{2}ac$，$b=\sqrt{2}$，则$\sqrt{2}a+c$的取值范围是__________.

8.（2019•雅安模拟）$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边长分别为a，b，c，设S为$\triangle ABC$的面积，满足$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$，$b=\sqrt{3}$，则$(\sqrt{3}-1)a+2c$的取值范围是__________.

9.（2019•马鞍山二模）在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=60°$，点D在线段BC上，且$BC=3BD$，$AD=2$，则$\triangle ABC$面积的最大值为__________.

10.（2019•烟台一模）在$\triangle ABC$中，a，b，c分别为内角A，B，C的对边，若$a=2, a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$，则$\triangle ABC$周长的最大值为__________.

11.（2019•新课标I）$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c．设$(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$．

（1）求A；

（2）若$\sqrt{2}a+b=2c$，求$\sin C$．

12.（2019•深圳期末）已知$\triangle ABC$中，三个内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，满足$a>b\geqslant c$，且$a=2$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

（1）若$b=\sqrt{3}$，求三角形ABC的面积；

（2）求$b-c$的范围．

13.（2019•山东模拟）$\triangle ABC$中，a，b，c分别是内角A，B，C所对的边，且满足$a=\sqrt{2}b\sin(C+\dfrac{\pi}{4})$．

（1）求角B

（2）求$\sqrt{2}\sin A-\sin C$的取值范围．

14.（老唐原创题）若$\triangle ABC$的内角满足$\sin A+\lambda\sin B=2\sin C\left(\lambda>0\right)$．

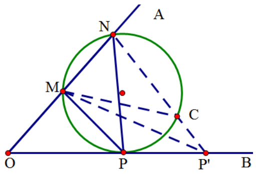
（1）当$\lambda=\sqrt{2}$时，则$\cos C$的最小值是_______；

（2）若$\forall\ C\in(0,\pi)$，一定$\exists A,B$使得$\sin A+\lambda\sin B=2\sin C\left(\lambda>0\right)$成立，则$\lambda$的取值范围是_________.

专题 4　三板斧之米勒定理

第一讲 三板斧之米勒定理

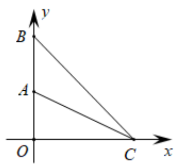
米勒定理：已知点M，N是$\angle AOB$的边OA上的两个定点，点P是边OB上的一动点，则当且仅当三角形MPN的外接圆与边OB相切于点P时，$\angle MPN$最大.



证明：如图，设P'是边OB上不同于点P的任意一点，连结$P'M,P'N$，$P'N'$交圆于点C，因为$\angle MP'N$是圆外角，$\angle MPN$是圆周角，易证$\angle MP'N<\angle MCN=\angle MPN$，故$\angle MPN$最大.

根据切割线定理得，$OP^2=OM\cdot ON$，即$OP=\sqrt{OM\cdot ON}$，于是我们有：$\angle MPN$最大等价于三角形MPN的外接圆与边OB相切于点$P\Rightarrow OP^2=OM\cdot ON$等价于$OP=\sqrt{OM\cdot ON}$.

【例 1】(1986•高考）如图，在平面直角坐标系中，在y轴的正半轴上给定两定点A、B，试在x轴的正半轴上求一点C，使$\angle ACB$取得最大值.



【解析】设点A的坐标为$(0,\ a)$，点B的坐标为$(0,\ b)$，$0<a<b$，又设所求点C的坐标为$(x,\ 0)$则

$$\tan\angle ACB=\tan(\angle BCO-\angle ACO)=\frac{\tan\angle BCO-\tan\angle ACO}{1+\tan\angle BCO\tan\angle ACO}=\frac{\frac{b}{x}-\frac{a}{x}}{1+\frac{b}{x}\cdot\frac{a}{x}}=\frac{b-a}{x+\frac{ab}{x}}\leq\frac{b-a}{2\sqrt{ab}},$$

因此，当且仅当 $x=\frac{ab}{x}$ 即$x=\sqrt{ab}$时等号成立.因为在$(0,\frac{\pi}{2})$内$y=\tan x$是增函数，所以当$x=\sqrt{ab}$时，$\angle ACB$取最大值$\arctan\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$，故所求点$C$的坐标为$(\sqrt{ab},\ 0)$.

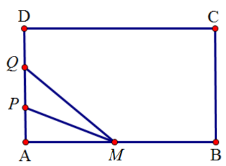
如运用米勒定理则可知当且仅当过点A,B的圆与x轴的正半轴相切于点C时，即当$|OC|=\sqrt{|OA|\cdot|OB|}=\sqrt{ab}$时，$\angle ACB$最大，故点$C$的坐标为$\left(\sqrt{ab},0\right)$.

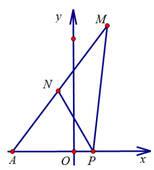
【例2】如图2，足球场长 100 米，宽 60 米，球门长 7.2 米，有一位左边锋欲射门，应在边AB的何处才使射门角度最大？

【解析】运用米勒定理则可知当且仅当过点P，Q的圆与AB相切于点M时，即当$|AM|=\sqrt{|OP|\cdot|OQ|}$ $=\sqrt{(30-3.6)(30+3.6)}\approx 29.78$米时，$\angle PMQ$最大.

【例 3】(2004•全国试题）在直角坐标系中，给定两点，$M(1,4)$，$N(-1,2)$在x轴的正半轴上求一点P，使$\angle MPN$最大，则点P的坐标为__________.

图2



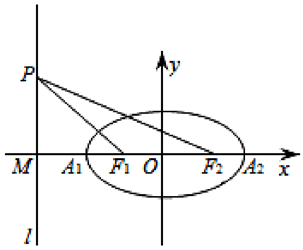


【解析】设直线MN与x轴交于点A，根据米勒定理可知，当且仅当过点M,N的圆与x轴相切于点P时，即当$|AP|=\sqrt{|AM|\cdot|AN|}$时，$\angle MPN$最大，$MN$的直线方程易求得是$x-y+3=0$，$A$的坐标是$(-3,0)$，$|AN|=2\sqrt{2}$，$|AM|=4\sqrt{2}$，$|AP|=\sqrt{|AM|\cdot|AN|}=4$故点 P 坐标为（1，0）.

【例 4】(2005•浙江文)如图，已知椭圆的中心在坐标原点，焦点 F_1、F_2 在 x 轴上，长轴 A_1A_2 的长为 4，左准线 l 与 x 轴的交点为 M，$|MA_1|:|A_1F_1|=2:1$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 若点 P 在直线 l 上运动，求 $\angle F_1PF_2$ 的最大值.



【解析】(1) 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，半焦距为 c，则 $|MA_1|=\frac{a^2}{c}-a$，$|A_1F_1|=a-c$ 由题意，

得 $\begin{cases}\frac{a^2}{c}-a=2(a-c)\\2a=4\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$，$\therefore a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$，故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 法一：设 $P(-4,y_0)$，$y_0\neq 0$ 设直线 PF_1 的斜率 $k_1=-\frac{y_0}{3}$，直线 PF_2 的斜率 $k_2=-\frac{y_0}{5}$，

$\because 0<\angle F_1PF_2<\angle PF_1M<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \angle F_1PF_2$ 为锐角，$\therefore \tan\angle F_1PF_2=|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}|=\frac{2|y_0|}{y_0^2+15}\leqslant\frac{2|y_0|}{2\sqrt{15}|y_0|}=\frac{\sqrt{15}}{15}$. 当 $|y_0|=\sqrt{15}$，即 $y_0=\pm\sqrt{15}$ 时，$\tan\angle F_1PF_2$ 取到最大值，此时 $\angle F_1PF_2$ 最大，故 $\angle F_1PF_2$ 的最大值为 $\arctan\frac{\sqrt{15}}{15}$.

法二：由米勒定理可得：当 $\angle F_1PF_2$ 取得最大值时，$|MP|^2=|MF_1|\cdot|MF_2|\Rightarrow|MP|=\sqrt{15}$，

$\tan\angle F_1PF_2=\frac{2|y_0|}{y_0^2+15}=\frac{\sqrt{15}}{15}$.

达标训练

1.(2017•新课标II) $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$，则 $B=$________.

2.(2014•广东) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对应的边分别为 a，b，c，已知 $b\cos C+c\cos B=2b$，则 $\frac{a}{b}=$________.

3.(2016•四川) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，且 $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}=\frac{\sin C}{c}$.

(1) 证明：$\sin A\sin B=\sin C$;

(2) 若 $b^2+c^2-a^2=\frac{6}{5}bc$，求 $\tan B$.

4.(2016•新课标I) $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$.

(1) 求 C;

(2) 若 $c=\sqrt{7}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

5.(2012•新课标) 已知 a，b，c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A，B，C 的对边，$a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$

(1) 求 A;

(2) 若 $a=2$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$；求 b，c.

6.（2011•江西）在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边是a，b，c，已知$3a\cos A=c\cos B+b\cos C$

（1）求$\cos A$的值；

（2）若$a=1$，$\cos B+\cos C=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，求边$c$的值．

7.（2011•山东）已知在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c．且$\frac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\frac{2c-a}{b}$．

（1）求$\frac{\sin C}{\sin A}$的值；

（2）若$\cos B=\frac{1}{4}$，$b=2$，求$\triangle ABC$的面积S．

8.（2018•新课标III）$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c．若$S_{\triangle ABC}=\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$，则$C=$（　　）

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{6}$

9.（2014•江西）在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$c^2=(a-b)^2+6$，$C=\frac{\pi}{3}$，则$\triangle ABC$的面积为（　　）

A．3　　B．$\frac{9\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D．$3\sqrt{3}$

10.（2011•重庆）$\triangle ABC$的角A，B，C所对的边a，b，c满足$(a+b)^2-c^2=4$，且$C=60^\circ$，则ab的值为（　　）

A．$\frac{4}{3}$　　B．$8-4\sqrt{3}$　　C．1　　D．$\frac{2}{3}$

11.（2018•石家庄模拟）在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$C=\frac{\pi}{6}$，则$AC+\sqrt{3}BC$的最大值为（　　）

A．$\sqrt{7}$　　B．$2\sqrt{7}$　　C．$3\sqrt{7}$　　D．$4\sqrt{7}$

12.（2012•湖北）设$\triangle ABC$的内角A，B，C，所对的边分别是a，b，c．若$(a+b-c)(a+b+c)=ab$，则角$C=$________．

13.（2018•北京）若$\triangle ABC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$，且$\angle C$为钝角，则$\angle B=$________；$\frac{c}{a}$的取值范围是________．

14.（2015•天津）在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c．已知$\triangle ABC$的面积为$3\sqrt{15}$，$b-c=2$，$\cos A=-\frac{1}{4}$，则a的值为________．

15.（2014•江苏）若$\triangle ABC$的内角满足$\sin A+\sqrt{2}\sin B=2\sin C$，则$\cos C$的最小值是________．

16.（2018•沈阳期中）在$\triangle ABC$中，设角A，B，C所对的边分别为a，b，c，若$a+b\geq 2c$，则C的取值范围是________．

17.（2018•重庆期末）设$\triangle ABC$的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$B=\frac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{3}$，则$3a+c$的最大值为________．

18.（2018•道里一模）钝角$\triangle ABC$中，若$A=\frac{3\pi}{4}$，$|BC|=1$，则$2\sqrt{2}|AB|+3|AC|$的最大值为________．

19.（2018•常州期末）在$\triangle ABC$中，已知$AC=6$，$A=60^\circ$，点D满足$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，且$AD=2\sqrt{7}$，则$AB$边的长为________．

20.（2019•衡水金卷）在$\triangle ABC$中，D在AC边上，若$CD=3AD$，$\cos\frac{\angle ABC}{2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$的中点，且$BD=\sqrt{2}$，则$3AB+BC$的最大值是________．

21.（2017•新课标II）$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin(A+C)=8\sin^2\dfrac{B}{2}$．

（1）求 $\cos B$；

（2）若 $a+c=6$，$\triangle ABC$ 的面积为 2，求 b．

22.（2016•北京）在 $\triangle ABC$ 中，$a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac$．

（1）求 $\angle B$ 的大小；

（2）求 $\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 的最大值．

23.（2013•江西）在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $\cos C+(\cos A-\sqrt{3}\sin A)\cos B=0$．

（1）求角 B 的大小；

（2）若 $a+c=1$，求 b 的取值范围．

24.（2013•新课标II）$\triangle ABC$ 在内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $a=b\cos C+c\sin B$．

（1）求 B；

（2）若 $b=2$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值．

25.（2018•铜山期中）已知 a、b、c 分别是 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 对的边，$b=\sqrt{3}$．

（1）若 $C=\dfrac{5\pi}{6}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求 c；

（2）若 $B=\dfrac{\pi}{3}$，求 $2a-c$ 的取值范围．

26．设 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $a^2+b^2=c^2+ab$，$c=1$．

（1）求角 C 的大小；

（2）求 $\dfrac{1}{2}b+a$ 的最大值．

27.（2019•泉州一模）$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $b=5$，$(a+b)\sin A=2b\sin(A+C)$．

（1）证明：$\triangle ABC$ 为等腰三角形；

（2）点 D 在边 AB 上，$AD=2BD$，$CD=\sqrt{17}$，求 AB．

28.（2018•商丘期末）在 $\triangle ABC$ 中，内角 A、B、C 的对边分别为 a，b，c，且 $(2b-c)\cos A=a\cos C$．

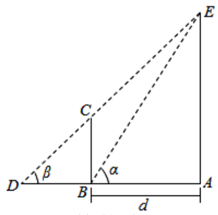
（1）求角 A 的大小；

（2）若点 D 满足 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$，且 $BD=3$，求 $2b+c$ 的取值范围．

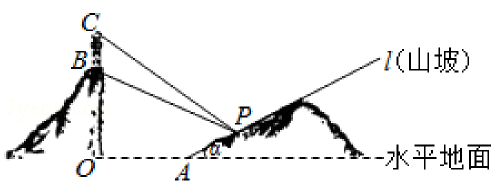
29.（2010•江苏）某兴趣小组测量电视塔 AE 的高度 H（单位：m），如示意图，垂直放置的标杆 BC 的高度 $h=4m$，仰角 $\angle ABE=\alpha$，$\angle ADE=\beta$．

（1）该小组已经测得一组 α、β 的值，$\tan\alpha=1.24$，$\tan\beta=1.20$，请据此算出 H 的值；

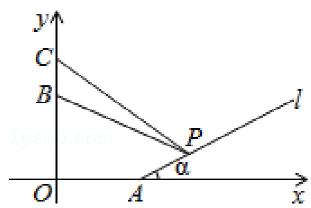
（2）该小组分析若干测得的数据后，认为适当调整标杆到电视塔的距离 d（单位：m），使 α 与 β 之差较大，可以提高测量精确度．若电视塔的实际高度为 $125m$，试问 d 为多少时，$\alpha-\beta$ 最大？



29题图



30 题图 1



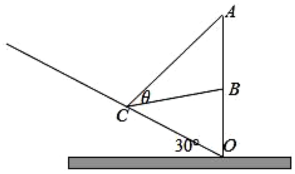
30 题图 2

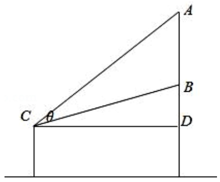
30.（2005•天津）某人在一山坡 P 处观看对面山项上的一座铁塔，如图所示，塔及所在的山崖可视为图中的竖线 OC，塔高 $BC=80$（米），山高 $OB=220$（米），$OA=200$（米），图中所示的山坡可视为直线 l 且点 P 在直线 l 上，l 与水平地面的夹角为 α，$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$．试问，此人距山崖的水平地面多高时，观看塔的视角 $\angle BPC$ 最大（不计此人的身高）？

31.（2016•灌云县期中）如图，有一壁画，最高点 A 处离地面 $AO=4m$，最低点 B 处离地面 $BO=2m$，观赏它的 C 点在过墙角 O 点与地面成 $30°$ 角的射线上．

（1）设点 C 到墙的距离为 x，当 $x=\sqrt{3}m$ 时，求 $\tan\theta$ 的值；

（2）问 C 点离墙多远时，视角 θ 最大？

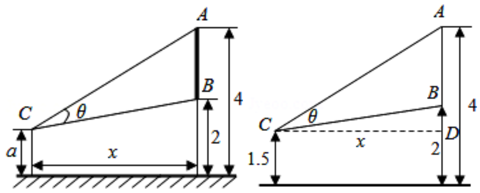




32.（2016•遂宁期末）如图，墙上有一壁画，最高点 A 离地面 4 米，最低点 B 离地面 2 米．观察者从距离墙 $x(x>1)$ 米，离地面高 $a(1\leqslant a\leqslant 2)$ 米的 C 处观赏该壁画，设观赏视角 $\angle ACB=\theta$．

（1）若 $a=1.5$，问：观察者离墙多远时，视角 θ 最大？

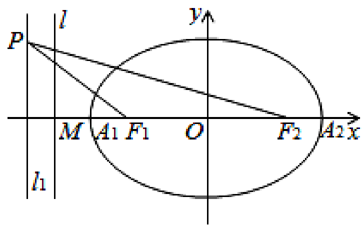
（2）若 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$，当 a 变化时，求 x 的取值范围．



33.（2005•浙江理科）如图，已知椭圆的中心在坐标原点，焦点 F_1，F_2 在 x 轴上，长轴 A_1A_2 的长为 4，左准线 l 与 x 轴的交点为 M，$|MA_1|:|A_1F_1|=2:1$．

（1）求椭圆的方程；

（2）若直线 $l_1: x=m(|m|>1)$，P 为 l_1 上的动点，使 $\angle F_1PF_2$ 最大的点 P 记为 Q，求点 Q 的坐标（用 m 表示）．

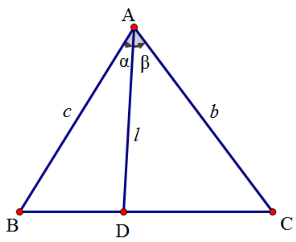


专题 5　新三板斧之角平分线相关的定理

在“三板斧”里面，我们解决了解三角形中简单的边角关系，周长与面积以及简单的定比分线计算问题．那么在三角形内部增加一条线，外部拓展到四边形等情况，将会在新三板斧里面进行阐述，增加的线可以为角平分线，也可以为任意张角线，也可以为中线，三等分线等等，针对此类型，我们找了几个常用的方法和套路来解决此问题，构成三角形内部解三角形的“新三板斧”．

第一讲　张角定理

如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 边上的一点，连接 AD，设 $AD=l$，$\angle BAD=\alpha$，$\angle CAD=\beta$，则一定有 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{l}=\dfrac{\sin\alpha}{b}+\dfrac{\sin\beta}{c}$．



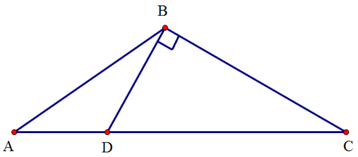
证明：$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，$\therefore \dfrac{1}{2}bc\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}cl\sin\alpha+\dfrac{1}{2}bl\sin\beta$，

同除以 $\dfrac{1}{2}bcl$ 得：$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{l}=\dfrac{\sin\alpha}{b}+\dfrac{\sin\beta}{c}$．

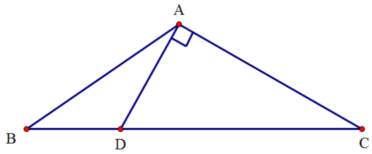
【例 1】（2019•深圳模拟）在中 $\triangle ABC$，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$\angle ABC=120°$，$BD\perp BC$ 交 AC 于点 D，且 $BD=1$，则 $2a+c$ 的最小值为__________．

【解析】如图，$\angle ABD=\alpha=30°$，$\angle CBD=90°$，根据张角定理，$\dfrac{\sin120°}{1}=\dfrac{\sin30°}{a}+\dfrac{\sin90°}{c}$，故 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

根据柯西不等式，可得 $(2a+c)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{c}\right)\ge\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}\right)^2=4$，故 $2a+c\ge\frac{8\sqrt{3}}{3}$，当仅当 $c=2a$ 时等号成立.



例 1 图



例 2 图

【例 2】(2013•福建)如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知点 D 在 BC 边上，$AD\perp AC$，$\sin\angle BAC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$AB=3\sqrt{2}$，$AD=3$，则 CD 的长为____________.

【解析】$\sin\angle BAD=\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$，$\angle DAC=90°$，根据张角定理，$\frac{\sin\angle BAC}{AD}=\frac{\sin\angle BAD}{b}+\frac{\sin 90°}{c}$，

故 $\frac{1}{3b}+\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{9}$，$b=3\sqrt{2}$，故 $|CD|=\sqrt{AD^2+AC^2}=3\sqrt{3}$.

【例 3】（2015•新课标II）$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上的点，AD 平分 $\angle BAC$，$\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍.

（1）求 $\frac{\sin B}{\sin C}$；

（2）若 $AD=1$，$DC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 BD 和 AC 的长.

【解析】(1) 如图，过 A 作 $AE\perp BC$ 于 E，$\because\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{\frac{1}{2}BD\times AE}{\frac{1}{2}DC\times AE}=2$，$\therefore BD=2DC$，$\because AD$ 平分 $\angle BAC$

$\therefore\angle BAD=\angle DAC$，$\triangle ABD$ 中，$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AD}{\sin\angle B}$，$\therefore\sin\angle B=\frac{AD\times\sin\angle BAD}{BD}$，$\triangle ADC$ 中，

$\frac{DC}{\sin\angle DAC}=\frac{AD}{\sin\angle C}$，$\therefore\sin\angle C=\frac{AD\times\sin\angle DAC}{DC}$；$\therefore\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}=\frac{DC}{BD}=\frac{1}{2}$.

(2) 由 (1) 知，$BD=2DC=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$. 过 D 作 $DM\perp AB$ 于 M，作 $DN\perp AC$ 于 N，$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，

$\therefore DM=DN$，$\therefore\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{\frac{1}{2}AB\times DM}{\frac{1}{2}AC\times DN}=2$，$\therefore AB=2AC$，令 $AC=x$，则 $AB=2x$，$\because\angle BAD=\angle DAC=\alpha$，

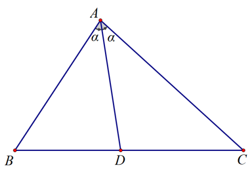
$\therefore\cos\angle BAD=\cos\angle DAC$，$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，$\therefore\frac{1}{2}bc\sin 2\alpha=\frac{1}{2}c|AD|\sin\alpha+\frac{1}{2}b|AD|\sin\alpha$，

$\therefore\cos\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{|AD|}{2x}+\frac{|AD|}{x}\right)=\frac{3}{4x}$，$\therefore$ 由余弦定理可得：$\frac{(2x)^2+1^2-(\sqrt{2})^2}{2\times 2x\times 1}=\frac{3}{4x}$，$\therefore x=1$，$\therefore AC=1$，$\therefore BD$ 的长为 $\sqrt{2}$，AC 的长为 1.

第二讲　角平分线张角定理

根据张角定理：①当 $\alpha=\beta$ 时，$\cos\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{AD}{b}+\frac{AD}{c}\right)$（角平分线张角定理）

② $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AD\cdot(b+c)\sin\alpha\ge AD^2\tan\alpha$（角平分线面积问题）



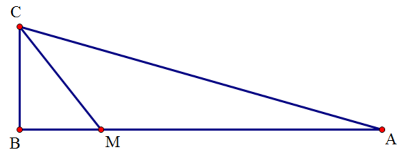
证明：①根据张角定理可得：$\frac{\sin 2\alpha}{AD}=\frac{\sin\alpha}{b}+\frac{\sin\alpha}{c}$，$\therefore\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{AD}=\frac{\sin\alpha}{b}+\frac{\sin\alpha}{c}$，$\therefore\cos\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{AD}{b}+\frac{AD}{c}\right)$

② $S=\frac{1}{2}bc\sin 2\alpha=\frac{1}{2}\cdot bc\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdot AD\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot(b+c)\sin\alpha\ge AD\sqrt{bc}\sin\alpha=AD\sqrt{\frac{2S\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}}$

$= AD\sqrt{S\tan\alpha}$，$\therefore S \geq AD^2\tan\alpha$，当仅当 $b=c$ 时等号成立.

【例 4】(2018•安阳二模）如图，在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$b\cos C = a$，点 M 在线段 AB 上，且 $\angle ACM = \angle BCM$．若 $b = 6CM = 6$，则 $\cos\angle BCM =$（　　）

A. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$



【解析】如图所示，令 $\angle ACM = \angle BCM = \alpha$，则 $\frac{\sin 2\alpha}{CM} = \frac{\sin\alpha}{b} + \frac{\sin\alpha}{a} \Rightarrow \frac{2\cos\alpha}{1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{a}$，由于 $b\cos C = a$，故 $\angle B = 90°$，$\therefore a = |CM|\cos\alpha = \cos\alpha$，$\therefore 2\cos\alpha = \frac{1}{6} + \frac{1}{\cos\alpha}$，解得：$\cos\alpha = -\frac{2}{3}$（舍），$\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

【例 5】(2019•江苏模拟）在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$，$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D，$BD = 1$，则 $a+c$ 的最小值为__________.

【解析】由题意得 $\frac{1}{2}ac\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}a\sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}c\sin\frac{\pi}{3}$，即 $ac = a+c$，所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1$，又 $a+c = (a+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right) = 2 + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}} = 2+2 = 4$，当且仅当 $a=c$ 时取等号，故答案为 4.

【例 6】(2019•云南一模）在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 对的边分别为 a，b，c，$\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$，$BD$ 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D，$BD = 2$，则 $\triangle ABC$ 的面积的最小值为（　　）

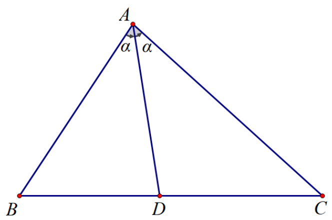
A. $3\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $5\sqrt{3}$　　D. $6\sqrt{3}$

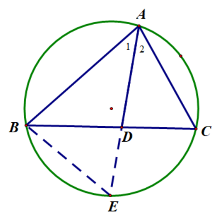
【解析】根据角平分线张角定理可得：

$\cos a = \frac{1}{2}\left(\frac{BD}{a} + \frac{BD}{c}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow ac = 2(a+c) \geq 4\sqrt{ac} \Rightarrow ac \geq 16$，当且仅当 $a=c$ 时等号成立，故 $S = \frac{1}{2}ac\sin B \geq 4\sqrt{3}$，故选 B.

第三讲　角平分线之斯库顿定理

如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，则 $AD^2 = AB\cdot AC - BD\cdot CD$.就其位置关系而言，可记忆：中方=上积一下积.





已知：在 $\triangle ABC$ 中，$AD^2 + BD\cdot DC = AB\cdot AC$ 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，求证：$AD^2 + BD\cdot DC = AB\cdot AC$

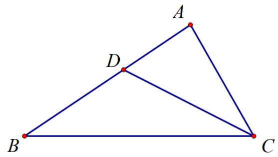
【证明】作的外接圆，延长 AD 交圆于 E，连 BE，如图 $\because \angle E = \angle C$、$\angle 1 = \angle 2 \therefore \triangle ABE \backsim \triangle ADC$　$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$.

注意：角平分线张角定理强调的是角度，斯库顿定理强调的是长度，斯库顿定理可以绕过求张角而直接求出三角形的各边长，通常和内角平分线定理合在一起出考题.

【例 7】(2019•赣榆期中）在 $\triangle ABC$ 中，$AB = 5$，$AC = 7$，$BC = 6$，$\angle A$ 的平分线 AD 交边 BC 于点 D，则 $AD =$__________.

【解析】利用角平分线定理 $\begin{cases} BD+DC=6 \\ \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow BD=\dfrac{5}{2}$，$CD=\dfrac{7}{2}$，根据斯库顿定理 $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$，代入数据得 $AD=\dfrac{\sqrt{105}}{2}$，故答案为 $\dfrac{\sqrt{105}}{2}$.

【例8】如图，在△ABC 中，$\angle C=2\angle B$，$AC=3$，$BC=5$，求 AB 之长.



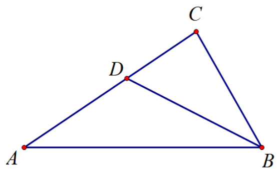
【解析】作 $\angle ACB$ 的平分线 CD 交于 D，因为 $\angle ACB=2\angle B$，所以 $\angle DCB=\angle B$，所以 $BD=CD$，由斯库顿定理的：$CD^2=AC\cdot BC-AD\cdot DB$，而 CD 是 $\angle ACB$ 的角平分线，所以 $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{3}{5}$，即 $AD=\dfrac{3}{5}BD$，所以 $BD^2=3\times5-\dfrac{3}{5}BD^2$，即 $8BD^2=75$，所以 $BD=\dfrac{5}{4}\sqrt{6}$，故 $AB=2\sqrt{6}$.

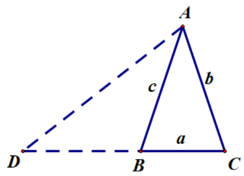
第四讲　角平分线之倍角定理

$b^2=a(a+c)\Leftrightarrow B=2A$

$c^2=b(b+a)\Leftrightarrow C=2B$，这样的三角形称为“倍角三角形”.

$a^2=c(c+b)\Leftrightarrow A=2C$





【例9】（2012•天津）在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c. 已知 $8b=5c$，$C=2B$，则 $\cos C=$（　　）

A. $\dfrac{7}{25}$　　B. $-\dfrac{7}{25}$　　C. $\pm\dfrac{7}{25}$　　D. $\dfrac{24}{25}$

【解析】倍角定理，令 $b=5$，$c=8$，则 $c^2=b(b+c)\Rightarrow a=\dfrac{39}{5}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a-b}{2b}=\dfrac{7}{25}$，故选 A.

【例10】（2019•开福月考）设锐角△ABC 的三个内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $c=1$，$A=2C$，则△ABC 周长的取值范围为（　　）

A. $(0,2+\sqrt{2})$　　B. $(0,3+\sqrt{3})$　　C. $(2+\sqrt{2}$，$3+\sqrt{3})$ D. $(2+\sqrt{2}$，$3+\sqrt{3}]$

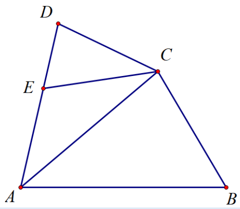
【解析】倍角定理，$A=2C\Rightarrow a^2=c(c+b)\Rightarrow a^2=1+b$，由于 ΔABC 为锐角三角形，故 $b^2+c^2-a^2>0$，即 $(a^2-1)^2+1-a^2\Rightarrow a^2>2$ 或 $a^2<1$（与 $a>c$ 矛盾，舍去），$b=a^2-1>1$，故 $a+b+c>2+\sqrt{2}$；又由于 $a^2+c^2-b^2>0$，则有 $a^2<3$，此时 $b<2$，$a+b+c<3+\sqrt{3}$，故选 C.

【例11】(2019•宁德期中)在$\triangle ABC$中,角A、B、C对边分别为a、b、c,若$a^2=b^2+bc$,且$A\in(60°,90°)$,则$\dfrac{a}{b}$取值范围是_________.

【解析】 由$a^2=b(b+c)\Rightarrow A=2B\Rightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=2\cos\dfrac{A}{2}\in\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$,故答案为$\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$.

【例12】(2019•东莞期末)如图,四边形$ABCD$中,CE平分$\angle ACD$,$AE=CE=2\sqrt{3}$,$DE=\sqrt{3}$,若$\angle ABC=\angle ACD$,则四边形$ABCD$周长的最大值为( )

A. 24 B. $12+3\sqrt{3}$ C. $18\sqrt{3}$ D. $3(5+\sqrt{3})$



【解析】易知$\angle DCA=2\angle DAC$,故由倍角定理(斯库顿定理也行)可得:

$AD^2=CD\left(CD+AC\right)=3CD^2\Rightarrow CD=3$,$AC=6$,根据角平分线张角定理可得:

$\cos\dfrac{B}{2}=\cos\angle ACE=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{CE}{AC}+\dfrac{CE}{CD}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow B=60°$,根据万能辅助角公式

$AB+BC=\dfrac{AC}{\sin b}\left(\sin\angle BAC+\sin\angle BCA\right)=4\sqrt{3}\left(\sin\angle BAC+\sin\left(\angle BAC+30°\right)\right)\le 12$,所以$ABCD$四边形周长$AB+BC+CD+DA=3\sqrt{3}+3+AB+BC\le 3\sqrt{3}+3+12=3\left(5+\sqrt{3}\right)$,当仅当$\angle BAC=60°$时等号成立,故选D.

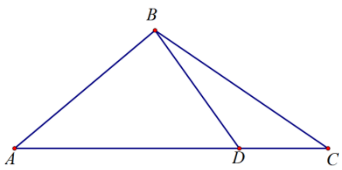
达标训练

1. 已知$\triangle ABC$的边AB,AC的长分别为2,3,$\angle BAC=120°$,则$\angle BAC$的角平分线AD的长为( )

A. $\dfrac{3}{5}\sqrt{3}$ B. $\dfrac{3}{5}$ C. $\dfrac{6}{5}\sqrt{3}$ D. $\dfrac{6}{5}$

2. (2019•武汉期中)已知$AB\perp BD$,$\angle A=30°$,$\angle C=45°$,$CD=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$,$\sin\angle CBD=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,则$AB$的值为( )

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$



3. (2019•滨州二模)在$\triangle ABC$中,内角A,B,C所对应的边分别为a,b,c,$\angle ABC=60°$,$\angle ABC$的平分线交AC于点D,且$BD=\sqrt{3}$,则$a+2c$的最小值为( )

A. 4 B. 5 C. $2+2\sqrt{2}$ D. $3+2\sqrt{2}$

4. (2019•梅州二模)在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边分别为a,b,C,$\angle ABC=120°$,$\angle ABC$的平分线交AC于点D,且$BD=2$,则$4a+c$的最小值为____________.

5. (2019•武汉期中)已知$\triangle ABC$的面积为S,$\angle BAC=2\alpha$,AD是$\triangle ABC$的角平分线,则AD长度的最大值为( )

A. $\sqrt{S\cdot\sin\alpha}$ B. $\sqrt{\dfrac{S}{\sin\alpha}}$ C. $\sqrt{S\cdot\tan\alpha}$ D. $\sqrt{\dfrac{S}{\tan\alpha}}$

6.（2018•长春期末）在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=120^{\circ}$，AD为$\angle BAC$的平分线，$AB=2AC$，则（　　）

A．$AB=2AD$　　B．$AB=3AD$

C．$AB=2AD$或$AB=3AD$　　D．$AB=5AD$

7.（2019•全国二模）设$\triangle ABC$的内角A，BC的对边分别为a，b，c，且$b=6$，$c=4$，$A=2B$，则$a=$________.

8.（2018•红塔期末）在$\triangle ABC$中，若$a=\dfrac{\sqrt{5}}{2}b$，$A=2B$，则$\cos B$等于（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{4}$　　C．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{6}$

9.（2019•衡水二模）在斜$\triangle ABC$中，设角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$a\sin A+b\sin B-c\sin C=4b\sin B\cos C$，$CD$是角$C$的角平分线，且$CD=b$，则$\cos C=$（　　）

A．$\dfrac{3}{4}$　　B．$\dfrac{1}{8}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{1}{6}$

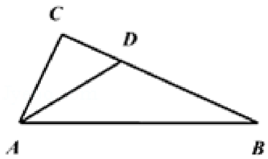
10.（2018•绍兴期末）在$\triangle ABC$中，$AB=2AC$，内角A的平分线与BC交于D，且$AC=tAD$，则t的取值范围是（　　）

A．$(0,\dfrac{3}{4})$　　B．$(\dfrac{3}{4}，1)$　　C．$(1,\dfrac{4}{3})$　　D．$(\dfrac{3}{4}，+\infty)$

11.（2019•博望模拟）已知$\triangle ABC$中，角A，B，C对应的边分别为a，b，c，AD平分$\angle BAC$与BC边交于D点，若$a=7$，$b=5$，$c=3$，则线段AD的长为（　　）

A．$\dfrac{25}{8}$　　B．$\dfrac{21}{8}$　　C．$\dfrac{15}{8}$　　D．$\dfrac{9}{8}$

12.（2019•浙江期中）如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^{\circ}$，内角A的平分线AD的长为7，且$\sin B=\dfrac{7}{18}$，则$\cos\angle CAD=$________；AB的长是__________.



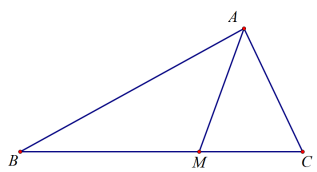
13.（2019•徐州期中）在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，若$\triangle ABC$为锐角三角形，且满足$b^2-a^2=ac$，则$\dfrac{1}{\tan A}-\dfrac{1}{\tan B}$的取值范围是（　　）

A．$(1,\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$　　B．$(1,\sqrt{2})$　　C．$(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}，\sqrt{2})$　　D．$(1,+\infty)$

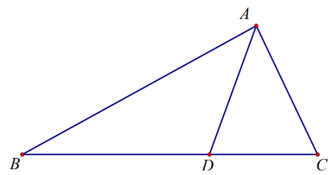
14.（2019•淮南模拟）在锐角$\triangle ABC$中，$\angle A=2\angle B$，$\angle B$、$\angle C$的对边长分别是b、c，则$\dfrac{b}{b+c}$的取值范围是（　　）

A．$(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3})$　　B．$(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2})$　　C．$(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3})$　　D．$(\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4})$

15.（2019•上虞模拟）如图，在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，$BC=2\sqrt{3}$，$A=60^{\circ}$，$\triangle ABC$的面积等于$2\sqrt{3}$，则$\sin B=$__________，角平分线AM的长等于__________.



15 题图



16 题图

16.（2019•迎泽月考）在$\triangle ABC$中，若$\angle A:\angle B=1:2$，且$\angle ACB$的平分线CD把$\triangle ABC$分成面积比为$5:3$的两部分，则$\cos A=$__________.

17.（2019•金安月考）如图，在$\triangle ABC$中，$BD\cdot\sin B=CD\cdot\sin C$，$BD=2DC=2\sqrt{2}$，$AD=2$，则$\triangle ABC$的面积为（　　）

A．$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　B．$\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$　　C．$3\sqrt{3}$　　D．$3\sqrt{7}$

18.（2019•烟台二模）在$\triangle ABC$中，角A的平分线交BC于点D，$BD=2CD=2$，则$\triangle ABC$面积最大值为__________.

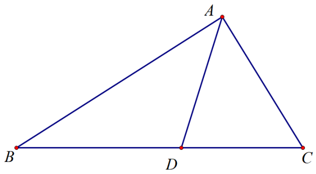
19.（2018•安阳一模）已知在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且满足$a+2a\cos B=c$.

（1）求证：$B=2A$；

（2）若$\triangle ABC$为锐角三角形，且$c=2$，求a的取值范围.

专题6　新三板斧之斯特瓦尔特定理到极化恒等式

第一讲 二板斧斯特瓦尔特定理到极化恒等式



$$AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD=BD\cdot DC\cdot BC+AD^2\cdot BC$$

重要形式：$AD^2=\dfrac{AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD}{BC}-BD\cdot DC$（将斯库顿定理的$AB\cdot AC$换成$\dfrac{AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD}{BC}$，有一点对面女孩看过来的那种形式）

证明：根据余弦定理，$\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}$，消去$\cos B$得：

$AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD=BD\cdot DC\cdot BC+AD^2\cdot BC$，整理可得$AD^2=\dfrac{AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD}{BD+CD}-BD\cdot DC$

推论1：若$AB=AC$，则一定有$AD^2=AB^2-BD\cdot DC$(等腰三角形斯特瓦尔特定理)

特例之极化恒等式：当D为BC中点时，有$AD^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}$

在$\triangle ABC$中，若AD是$\triangle ABC$的BC边中线，有以下两个重要的向量关系：$\begin{cases}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)\\\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\end{cases}$

平行四边形两条对角线的平方和等于两条邻边平方和的两倍.以此类推到三角形中线定理，若AD是$\triangle ABC$的中线，则$AB^2+AC^2=2\left(AD^2+BD^2\right)$.

（极化恒等式的三角形模式）在$\triangle ABC$中，若D是BC的中点，则有$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}^2-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{BD}^2$.

极化恒等式在本书向量章节已经阐述其向量的计算法则，在这里我们更多强调解三角形的避免二次余弦定理计算，从而达到简化的效果.

【例1】(2019•高考模拟) 在$\triangle ABC$中，D为AC边上一点，若$BD=3$，$CD=4$，$AD=5$，$AB=7$，则$BC=$（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{13}$　　C．$2\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{37}$

【解析】由斯特瓦尔特定理得$BD^2=9=\dfrac{AB^2\cdot DC+BC^2\cdot AD}{AC}-AD\cdot DC=\dfrac{49\times4+5BC^2}{9}-20\Rightarrow BC=\sqrt{13}$，故选B.

【例2】(2019•聊城二模) 已知ΔABC中，$AB=AC$，D是边BC上一点，若$BD=1$，$AD=2$，$DC=3$，则ΔABC的面积为（　　）

A．2　　B．$2\sqrt{3}$　　C．4　　D．$4\sqrt{3}$

【解析】由斯特瓦尔特定理得$AD^2=4=\dfrac{x^2\cdot DC+x^2\cdot BD}{BC}-BD\cdot DC=x^2-3\Rightarrow x=\sqrt{7}$，再利用海伦公式，令$p=\dfrac{a+b+c}{2}=\sqrt{7}+2$，则$S=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}=2\sqrt{3}$，故选B.

【例3】(2019•揭阳一模)已知$\triangle ABC$中，$AB=AC=3$，$\sin\angle ABC=2\sin A$，延长AB到D使得$BD=AB$，连结CD，则CD的长为（　　）

A．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{3\sqrt{10}}{2}$　　C．$\frac{3\sqrt{6}}{2}$　　D．$3\sqrt{6}$

【解析】由于$AB=BD$，故可采用中线定理，$AC^2+CD^2=2\left(BC^2+AB^2\right)\Rightarrow CD^2=2BC^2+AB^2=\frac{3}{2}AB^2=\frac{27}{2}$，所以$CD=\sqrt{\frac{27}{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$，故选C.

【例4】(2019•广东模拟)在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=120°$，$AB=8$，$AC=4$，点D在边BC上，且$DC=3BD$，则$AD=$__________.

【解析】在ΔABC中，根据余弦定理得$BC^2=8^2+4^3-2\times8\times4\times\cos120°=112$，所以$BC=4\sqrt{7}$，又$DC=3BD$，所以$BD=\sqrt{7}$，$CD=3\sqrt{7}$；根据斯特瓦尔特定理，$AD^2=\frac{AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD}{BC}-BD\cdot DC=31$，所以$AD=\sqrt{31}$，故答案为$\sqrt{31}$.

【例5】(2019•马鞍山二模)在ΔABC中，$\angle BAC=60°$，点D在线段BC上，且$BC=3BD$，$AD=2$，则$\triangle ABC$面积的最大值为__________.

【解析】斯特瓦尔特定理+余弦定理：由$AD^2=\frac{c^2\cdot CD+b^2\cdot BD}{BC}-BD\cdot DC\Rightarrow\frac{2}{3}c^2+\frac{1}{3}b^2-\frac{2}{9}a_2=4$，再根据余弦定理，$c^2+b^2-a^2=2bc\cos A=bc$，两式联立消去$a^2$得$2c^2+\frac{1}{2}b^2+bc=18\geq3bc$，当且仅当$b=2c$时取等号成立，所以$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leq\frac{2\sqrt{3}}{2}$.

得出结论：所有的有定比分线的问题，可以倍长来处理，也可以用斯特瓦尔特定理来简化，一旦记不住斯特瓦尔特定理，倍长定比分线也可以救场！

【例6】(2018•安徽二模)在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对边分别为a，b，c．D是BC边的中点，且$AD=\frac{\sqrt{10}}{2}$，$8a\sin B=3\sqrt{15}c$，$\cos A=-\frac{1}{4}$，则$\triangle ABC$面积为__________.

【解析】在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对边分别为a，b，c．D是BC边的中点，且$AD=\frac{\sqrt{10}}{2}$，$8a\sin B=3\sqrt{15}c$，$\cos A=-\frac{1}{4}$，则：$\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$，所以：$8\sin A\sin B=3\sqrt{15}\sin C$，解得：$2b=3c$，

根据极化恒等式：$\begin{cases}\overrightarrow{bc}=bc\cos A=|AD|^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\\ b^2+c^2=2\left(|AD|^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\end{cases}$设：$b=3x$，$c=2x$，$\begin{cases}-\frac{3}{2}x^2=\frac{5}{2}-\left(\frac{a}{2}\right)^2\\ 13x^2=2\left(\frac{5}{2}+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\end{cases}$解得：$x=1$，

所以：$b=3$，$c=2$，故：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$，故答案为：$\frac{3\sqrt{15}}{4}$

【例7】(2019•安徽模拟)在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，已知$BC$边上的中线$AD=3$，则$\triangle ABC$面积的最大值为_________.

【解析】极化恒等式+中线$\geq$高，由于AD为中线，故$AD\geq h$恒成立，当且仅当$AB=AC$时等号成立，此时有$AB^2+AC^2=2\left(AD^2+BD^2\right)$，且$AD=AB\cos\angle BAD=\frac{AB}{2}\Rightarrow AB=6$，所以$BD=3\sqrt{3}$，$\Delta ABC$

面积最大值为$\dfrac{6\sqrt{3}\times 3}{2}=9\sqrt{3}$，故答案为$9\sqrt{3}$．

【例 8】（2012•安徽）设$\triangle ABC$的内角A、B、C所对边的长分别为a、b、c，且有$2\sin B\cos A=\sin A\cos C+\cos A\sin C$．

（1）　求角A的大小；

（2）　若$b=2$，$c=1$，D为BC的中点，　求AD的长　．

【解析】　（1）$\because 2\sin B\cos A=\sin A\cos C+\cos A\sin C\ \therefore 2\sin B\cos A=\sin(A+C)$

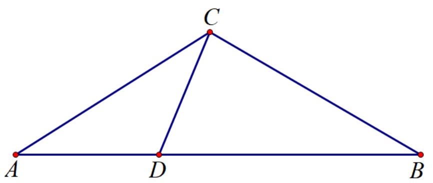
$\because A+C=\pi-B\ \therefore \sin(A+C)=\sin B>0$，$\therefore 2\sin B\cos A=\sin B$，$\therefore \cos A=\dfrac{1}{2}$，$\because A\in(0,\ \pi)\ \therefore A=\dfrac{\pi}{3}$；

（2）$\because b=2$，$c=1$，$A=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore \begin{cases} b^2+c^2=2\left(|AD|^2+\dfrac{a^2}{4}\right)=5 \\ \vec{b}\vec{c}=bc\cos A=|AD|^2-\dfrac{a^2}{4}=1 \end{cases}$，$\therefore AD=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$．

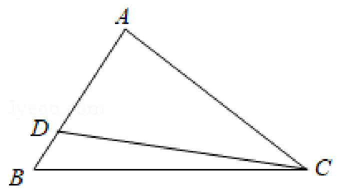
达标训练

1.（2018•宝安期中）如图，在$\triangle ABC$中，点D在边AB上，$CD\perp BC$，$AC=5\sqrt{3}$，$CD=5$，$BD=2AD$，则AD的长为（　　）

A．4　　　　B．5　　　　C．6　　　　D．7



第 1 题图



第 2 题图

2.（2018•沙坪坝月考）在$\triangle ABC$中，$\angle A=\dfrac{\pi}{4}$，BC边上的中线AD长为$\sqrt{2}$，则$\triangle ABC$的面积S的最大值为（　　）

A．$2-\sqrt{2}$　　　　B．$2\sqrt{2}-2$　　　　C．$2\sqrt{2}$　　　　D．$4\sqrt{2}$

3.（2019•毛坦厂月考）如图，在$\triangle ABC$中，D是AB边上的点，且满足$AD=3BD$，$AD+AC=BD+BC=2$，$CD=\sqrt{2}$，则$\cos A=$（　　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　　　C．$\dfrac{1}{4}$　　　　D．0

4.（2019•河北模拟）在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别是a，b，c，$b\sin C+a\sin A=b\sin B+c\sin C$，$c+2b=4$，点$D$在线段$BC$上，且$BD=2DC$，则$AD$的最小值为__________．

5.（2019•嘉兴期末）在$\triangle ABC$中，AD是BC边上的中线，$\angle ABD=\dfrac{\pi}{6}$，$AC=2AD=2$，则$\Delta ABC$的面积为__________．

6.（2019•秦淮月考）已知在$\triangle ABC$中，D是AC边上的点，且$AB=AD$，$BD=\dfrac{\sqrt{6}}{2}AD$，$BC=2AD$，则$\sin C$的值为__________．

7.（2019•黄州月考）在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别是a，b，c，且向量$\vec{m}=(2a-c,b)$与向量$\vec{n}=(\cos C,\cos B)$共线．

（1）求B；（2）若$b=3\sqrt{7}$，$a=3$，且$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC}$，求$BD$的长度．

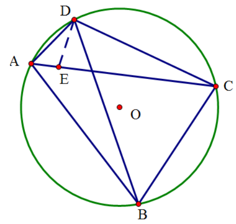
8.（2019•全国一模）在$\triangle ABC$中，$AB=6$，$AC=4\sqrt{2}$．

（1）若$\sin B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，求$\triangle ABC$的面积；（2）若$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，$AD=3\sqrt{2}$，求$BC$的长．

专题 7　新三板斧之托勒密定理

第一讲 新三板斧之托勒密定理

托勒密定理：在圆内接四边形中，两条对角线的乘积等于两组对边乘积之和.



如图上，设四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，则有 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$，

证明：不妨在 AC 上取一点 E，使 $\angle ADE=\angle BDC$，

由 $\angle DAE=\angle DBC$，得 $\triangle AED\backsim\triangle BCD$，所以 $\dfrac{AE}{BC}=\dfrac{AD}{BD}$，

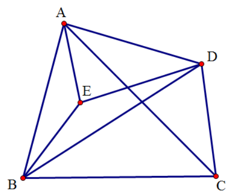
即 $AE\cdot BD=AD\cdot BC$ ①

又由 $\angle ADB=\angle EDC$，$\angle ADB=\angle ECD$，

$\Delta ABD\backsim\Delta ECD$，所以 $\dfrac{AB}{EC}=\dfrac{BD}{CD}$，即 $EC\cdot BD=AB\cdot CD$ ②

两式相加得 $AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$.

广义托勒密定理：在四边形 $ABCD$ 中，有 $AB\cdot CD+AD\cdot BC\geq AC\cdot BD$，当且仅当四边形 $ABCD$ 四点共圆时，等号成立.



证明：在四边形 $ABCD$ 内取一点 E 使 $\angle ABE=\angle ACD$，$\angle BAE=\angle CAD$，

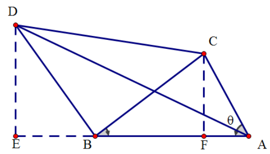
则 $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$

$\therefore\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{CD}\Rightarrow AB\cdot CD=AC\cdot BE$，又 $\because\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AE}{AD}$，且 $\angle BAC=\angle EAD$，$\therefore\triangle ABC\backsim\triangle AED$，

$\therefore\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{ED}{AD}\Rightarrow AD\cdot BC=AC\cdot ED$；由①+②得 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot(BE+ED)$，

$\therefore AB\cdot CD+AD\cdot BC\geq AC\cdot BD$，等号当且仅当点 E 在 BD 上，即 A，B，C，D 四点共圆时成立.

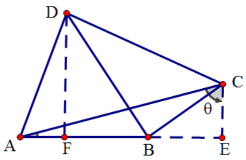
【例 1】(2018•德州二模）$\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{2}$，$AC=1$，以 B 为直角顶点作等腰直角 $\triangle BCD(A$，D 在 BC 两侧)，当 $\angle BAC$ 变化时，线段 AD 的长度最大值为_________.



【解析】法一：如图所示，$\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{2}$，$AC=1$，$\angle BAC=\theta$，作 $DE\perp AB$ 交 AB 延长线于 E，$CF\perp AB$ 于 F，$DE=BF=\sqrt{2}-\cos\theta$，$EB=CF=\sin\theta$，$\therefore|AD|=\sqrt{\left(\sqrt{2}-\cos\theta\right)^2+\left(\sqrt{2}+\sin\theta\right)^2}$，化简得 $|AD|=\sqrt{5+2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)}$，$\therefore$ 当 $\angle BAC=135^\circ$ 时 $|AD|$ 最大为 9，AD 最大值为 3，故答案为 3.

法二：由广义的托勒密定理可得四边形 $ABCD$ 中，$AD\cdot BC\leqslant AB\cdot CD+AC\cdot BD$，当且仅当四边形 $ABDC$ 为圆内接四边形，取得等号．设 $BC=BD=t$，$BD\perp BC$，$CD=\sqrt{2}t$，则 $AD\cdot t\leqslant\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}t+t$，可得 $AD\leq3$，当且仅当四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形，AD 取得最大值 3 .

【例 2】(2018•宁城模拟）在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AC=\sqrt{5}$，$BD\perp BC$，$BD=2BC$，则 AD 的最小值为_________.



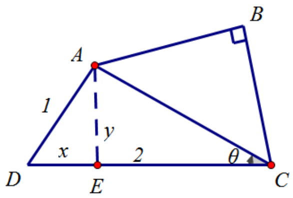
【解析】如图，作 $CE \perp BE$ 交 AB 延长线于 E，$DF \perp AB$ 交 AB 于 F，设 $\angle ACE = \theta$，则 $CE = \sqrt{5}\cos\theta$，

$AE = \sqrt{5}\sin\theta$，$DF = 2\sqrt{5}\sin\theta - 2$，$BF = 2\sqrt{5}\cos\theta$，

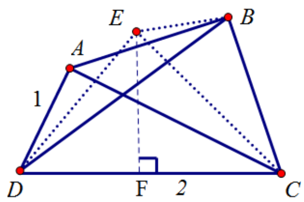
$BE = \sqrt{5}\sin\theta - 1$ $|AD|^2 = \left(2\sqrt{5}\sin\theta - 2\right)^2 + \left(1 - 2\sqrt{5}\cos\theta\right)^2 = 25 - 20\sin(\theta + \varphi) \geq 5$ 则 AD 的最小值为 $\sqrt{5}$，故答案为 $\sqrt{5}$.

【秒杀解法】由广义托勒密定理可得四边形 $ABCD$ 中，$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC$，当且仅当四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形，取得等号．设 $BC = t$，$BD = 2t$，$BD \perp BC$，可得 $CD = \sqrt{5}t$，则 $2\sqrt{5}t \leqslant \sqrt{5}t + ADt$，可得 $AD \geqslant \sqrt{5}$，当且仅当四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形，AD 取得最小值 $\sqrt{5}$．故答案为 $\sqrt{5}$.

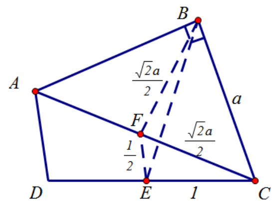
【例 3】(衡水金卷)已知 $\triangle ABC$ 是以 AC 为斜边的等腰直角三角形，D 为 $\triangle ABC$ 外的一点，且 $CD = 2$，$AD = 2$，则 $\triangle BCD$ 面积的最大值为________.



例 3 图 1



例 3 图 2



例 3 图 3

【解析】法一：如图 1，作 $AE \perp CD$ 交 CD 于 E，令 $AE = y$，$DE = x$，$\angle ACD = \theta$，则

$S_{\triangle BCD} = \dfrac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |BC| \sin(\theta + 45°)$，$|CA| = \sqrt{2}|CB| \Rightarrow S_{\triangle BCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}|CA|\sin(\theta + 45°)$.

$\dfrac{|CA|}{2}(\sin\theta + \cos\theta) = \dfrac{1}{2}(y + 2 - x) = 1 + \dfrac{1}{2}(y - x)$，由于 $x^2 + y^2 = 1$，故令 $\angle ADC = \alpha$，

$y - x = \sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha - 45°) \leq \sqrt{2}$，当仅当 $\alpha = 135°$ 时等号成立，则 $S_{\triangle BCD} \leq 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

法二：旋转构造高，如图 2，以 CD 为底边构造等腰 $Rt\triangle EDC$，连接 BE，并作 $EF \perp DC$ 交于 F，可知 $EF = 1$，根据相似三角形知识可得 $\triangle ADC \backsim \triangle BEC$，且 $AD = \sqrt{2}BE \Rightarrow BE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故当仅当 B、E、F 三点共线时，$\triangle BDC$ 的高取得最大值 $1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，此时 $S_{\triangle BCD} = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

【秒杀解法】这里要介绍一个初中的面积知识，就是在底边确定的情况下，一定有三角形一条边上的中线大于等于这条边上的高，故在求高的最大值时候往往可以转化为求中线的最大值.

如图 3，取 AC、CD 中点 F、E，在四边形 $EFBC$ 中，根据托勒密定理 $BF \cdot EC + EF \cdot BC \geq BE \cdot CF$，令 $BC = a$，则有 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a + \dfrac{1}{2}a \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}a \cdot BE \Rightarrow h \leq BE \leq 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{\triangle BCD} \leq 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

达标训练

1. (2018•唐山三模）设 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$c = 2b = 4$，角 A 的内角平分线交 BC 于点 D，且 $AD = \sqrt{2}$，则 $\cos A =$（　　）

A. $-\dfrac{7}{16}$　　B. $-\dfrac{7}{8}$　　C. $-\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$　　D. $-\dfrac{9}{16}$

2.（2018•江苏）在△ABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$\angle ABC=120°$，$\angle ABC$的平分线交AC于点D，且$BD=1$，则$4a+c$的最小值为_________.

3.（2018•唐山三模）△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，角A的内角平分线交BC于点D，若$a=1$，$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$，则$AD$的取值范围是_________.

4.（2018•长春二模）在△ABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若其面积$S=b^2\sin A$，角A的平分线AD交BC于D，$AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$a=\sqrt{3}$，则$b=$_________.

5.（2019•深圳一模）在△ABC中，$\angle ABC=150°$，D是线段AC上的点，$\angle DBC=30°$，若△ABC的面积为$\sqrt{3}$，当BD取到最大值时，$AC=$_________.

6.（2019•黄山三模）设ΔABC的内角A，B，C所对边的长分别是a，b，c，且$b=3$，$c=1$，$A=2B$，则a的值为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

7.（2019•南京期中）在ΔABC中，已知$A=\frac{\pi}{3}$，$a=2\sqrt{3}$，角A的平分线交边BC于点D，ΔABC的面积为$2\sqrt{3}$，则AD的长为_________.

8.（2019•拉萨二模）ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$b=2$，$c=3$，$C=2B$，则ΔABC的面积为_________.

9.（2019•浙江期中）已知ΔABC中，$\angle A$的平分线交对边BC于点D，$AB=3AC$，且$AD=kAC$，则实数k的取值范围是_________.

10.（2019•高邮期中）在锐角ΔABC中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，若$b^2=c^2+ac$，则$\frac{b}{c}$的取值范围是（　　）

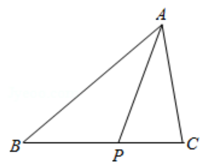
A. $(\sqrt{2}, 2)$　　B. $(1,2)$　　C. $(\sqrt{3}, 2)$　　D. $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

11.（2018•龙岩期末）已知在△ABC中，$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，点$P$在边$BC$上，且$AP\perp AB$，$AP=\sqrt{3}$.

（1）若$PC=\sqrt{7}$，求PB；

（2）求$\frac{2}{PB}+\frac{1}{PC}$的取值范围.

12.（2018•山东模拟）如图所示，在△ABC中，$BC=7$，$2AB=3AC$，P在BC上，且$\angle BAP=\angle PAC=30°$. 求线段$AP$的长.



13.（2019•沈阳一模）在△ABC中，$a=3$，$b=2\sqrt{6}$，$B=2A$.

（1）求$\cos A$的值；

（2）试比较$\angle B$与$\angle C$的大小.

14.（2019•上饶模拟）已知a，b，c分别为△ABC三个内角A，B，C的对边，S为ΔABC的面积，$\sin(B+C)=\frac{2S}{a^2-c^2}$.

（1）证明：$A=2C$；

（2）若$b=2$，且△ABC为锐角三角形，求S的取值范围.

15.（2019•沈阳期中）在△ABC中，$AB=6$，$AC=7$，M是BC边上一点，且$BM=2MC$，$AM=4$，则BC等于（　　）

A. $\sqrt{129}$　　B. $2\sqrt{33}$　　C. $5\sqrt{6}$　　D. $\sqrt{154}$

16.（2018•石家庄期末）在$\triangle ABC$中，D为边BC的中点，$AB=2$，$AC=4$，$AD=\sqrt{7}$，则$\angle BAC$为（　　）

A．$30°$　　B．$60°$　　C．$120°$　　D．$150°$

17.（2018•河南期中）在$\triangle ABC$中，若$AB\cdot BC\cdot\cos B=4$，$|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}|=3\sqrt{2}$，则$\triangle ABC$面积的最大值为_________.

18.（2018•温州模拟）在$\triangle ABC$中，AD为BC上的中线，$AB=1$，$AD=5$，$\angle ABC=45°$，则$\sin\angle ADC=$______，$AC=$________.

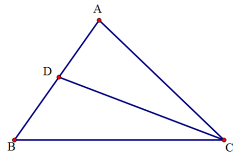
19.（2018•汕头一模）在$\triangle ABC$中，$A=\dfrac{\pi}{6}$且$\dfrac{1}{2}\sin B=\cos^2\dfrac{C}{2}$，$BC$边上的中线长为$\sqrt{7}$，则$\triangle ABC$的面积是_________.

20.（2018•张家口期末）在锐角$\triangle ABC$中，$AC=2$，$AB=2\sqrt{2}$，D在BC边上，并且$BD=2DC$，$\angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$，则$\Delta ABC$的面积为___________.

21.（2018•广平县月考）在$\triangle ABC$中，角A、B、C所对的边分别为a，b，c，$B=45°$，$AC=\sqrt{5}$，$\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

求（1）求BC的长；

（2）若点D是AB的中点，求中线CD的长度.

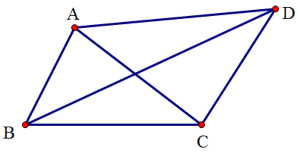


22.（2015•无锡月考）在$\triangle ABC$中，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，$BC=3$，点D在BC边上.

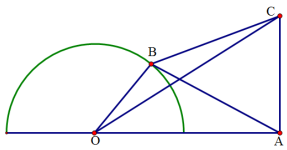
（1）若AD为$\angle A$的平分线，且BD=1，求$\triangle ABC$的面积；

（2）若AD为$\triangle ABC$的中线，且$AD=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，求证：$\triangle ABC$为等边三角形.

23.（2016•深圳二模）如图，在凸四边形$ABCD$中，$AB=1$，$BC=\sqrt{3}$，$AC\perp CD$，$AC=CD$，当$\angle ABC$变化时，对角线BD的最大值为_________.



23 题图



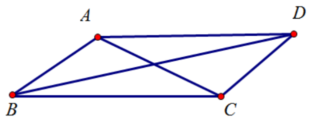
24 题图

24.（2017•连云港期末）如图，半圆O的半径为1，A为直径延长线上一点，$OA=2$，B为半圆上任意一点，以AB为一边作等边$\triangle ABC$，设$\angle AOB=\theta$．线段OC长度的最大值为_________，此时θ的值为_________.

25.如图，在凸四边形$ABCD$中，$AB=1$，$BC=\sqrt{3}$，$AC\perp DC$，$CD=\sqrt{3}AC$．设$\angle ABC=\theta$．

（1）若$\theta=30°$，求AD的长；

（2）当θ变化时，求BD的最大值.



26.（2018•湖北联考）已知$\triangle ABC$是等边三角形，D为$\triangle ABC$外的一点，且，$CD=2AD=4$，则$\triangle BCD$面积的最大值为_________.

27.（老唐原创题）平面四边形$ABCD$中，$AB=BC=\dfrac{5}{6}AC$，$DC=\sqrt{3}AD=2\sqrt{3}$，则$\triangle BCD$面积的最大值为_________.

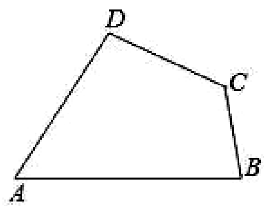
28.如图，A，B，C，D为平面四边形$ABCD$的四个内角.

（1）证明：$\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{1-\cos A}{\sin A}$；

（2）已知$AB=6$，$BC=3$，$CD=4$，$AD=5$.

①若$A+C=180°$，求$\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{D}{2}$的值；

②求四边形$ABCD$面积的最大值．



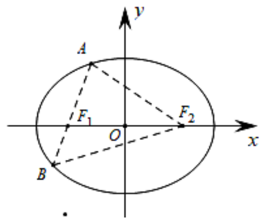
专题1　焦长与焦比体系

第一讲 椭圆焦长以及焦比问题

4a 体:过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点 F_1 的弦 AB 与右焦点 F_2 围成的三角形 $\triangle ABF_2$ 的周长是 $4a$；

焦长公式：A 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点，F_1、F_2 是左、右焦点，$\angle AF_1F_2$ 为 α，AB 过 F_1，c 是椭圆半焦距，则（1）$|AF_1|=\frac{b^2}{a-c\cos\alpha}$；（2）$|BF_1|=\frac{b^2}{a+c\cos\alpha}$；（3）$|AB|=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}=\frac{2ab^2}{b^2+c^2\sin^2\alpha}$.

4a 体面积：$S_{\triangle ABF_2}=\frac{|AB|h}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}\cdot 2c\sin\alpha=\frac{2ab^2c\sin\alpha}{b^2+c^2\sin^2\alpha}$，$S_{\triangle AOB}=\frac{|AB|h_2}{2}=\frac{ab^2c\sin\alpha}{b^2+c^2\sin^2\alpha}$.



证明：（1）如图所示，$|AF_1|+|AF_2|=2a;|BF_1|+|BF_2|=2a$，故 $|AB|+|AF_2|+|BF_2|=4a$；

（2）设 $|AF_1|=m$；$|BF_1|=n$；$|AF_2|=2a-m$；$|BF_2|=2a-n$；由余弦定理得

$m^2+(2c)^2-(2a-m)^2=2m\cdot(2c)\cos\alpha$；整理得 $|AF_1|=\frac{b^2}{a-c\cos\alpha}$ ①

同理：$n^2+(2c)^2-(2a-n)^2=2n\cdot(2c)\cos\left(180^\circ-\alpha\right)$；整理得 $|BF_1|=\frac{b^2}{a+c\cos\alpha}$ ②

①+②得，则过焦点的弦长：$|AB|=m+n=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}=\frac{2ab^2}{b^2+c^2\sin^2\alpha}$ ③

焦比定理：过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左焦点 F_1 的弦 $|AF_1|=\frac{b^2}{a-c\cos\alpha}$，$|BF_1|=\frac{b^2}{a+c\cos\alpha}$，令 $|AF_1|=\lambda|F_1B|$，即 $\frac{b^2}{a-c\cos\alpha}=\frac{\lambda b^2}{a+c\cos\alpha}\Rightarrow e\cos\alpha=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$ ④，代入焦长公式①可得 $|AF_1|=\frac{(\lambda+1)b^2}{2a}$ ⑤.

注意：焦长和焦比体系当中，一切源于焦长公式的推导，所以掌握焦长公式成为了重中之重，在解答题中要有必要的证明过程，除了本文给到的余弦定理外，还可以用圆锥曲线的极坐标方程快速证明，这个问题大家可以自己去掌握，由于极坐标方程在未来高考中的不确定性，本文不给出详细证明过程.

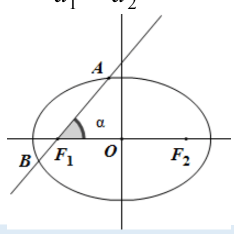
【例 1】过椭圆 $4x^2+2y^2=1$ 的一个焦点 F_1 的弦 AB 与另一个焦点 F_2 围成的三角形 $\triangle ABF_2$ 的周长是__________.

【解析】椭圆 $4x^2+2y^2=1$ 整理得 $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$；三角形 ΔABF_2 的周长是 $4a=4\sqrt{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$.

【例 2】过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点 F 作弦 AB，若 $|AF|=d_1$，$|BF|=d_2$，则 $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}$ 的数值为（　　）

A. $\frac{2b}{a^2}$　　　　B. $\frac{2a}{b^2}$

C. $\frac{a+b}{a^2}$　　　　D. 与 a、b 斜率有关



【解析】$|AF_1|=d_1=\frac{b^2}{a-c\cos\alpha}$；$|BF_1|=d_2=\frac{b^2}{a+c\cos\alpha}$；故 $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{a-c\cos\alpha}{b^2}+\frac{a+c\cos\alpha}{b^2}=\frac{2a}{b^2}$.

【例 3】设直线 $l: y = x+1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交于 A、B 两个不同的点，与 x 轴相交于点 F.

（1）证明：$a^2+b^2>1$；

（2）若 F 是椭圆的一个焦点，且 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，求椭圆的方程.

【解析】（1）$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=x+1\end{cases}\Rightarrow\left(a^2+b^2\right)x^2+2a^2x+a^2-a^2b^2=0$，因为直线与椭圆有两个交点，故 $\Delta>0$，带入数据得 $\Delta=4a^2b^2\left(a^2+b^2-1\right)>0\Rightarrow a^2+b^2>1$；（2）$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}\Rightarrow\frac{b^2}{a-c\cos\alpha}=2\frac{b^2}{a+c\cos\alpha}$，又 F 是椭圆的一个焦点，故 $c=1$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$；代入可得：$a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$b=\frac{\sqrt{14}}{2}$；故椭圆的方程 $\frac{2x^2}{9}+\frac{2y^2}{7}=1$.

【例 4】设椭圆中心在坐标原点，焦点在 x 轴上，一个顶点 $(2,0)$，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆的方程;

（2）若椭圆左焦点为 F_1，右焦点 F_2，过 F_1 且斜率为 1 的直线交椭圆于 A、B，求 $\triangle ABF_2$ 的面积.

【解析】（1）根据题意 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow c=\sqrt{3},b=1$，故椭圆方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）$S_{\triangle ABF_2}=\frac{|AB|h}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}\cdot 2c\sin\alpha=\frac{2ab^2c\sin\alpha}{a^2-c^2\cos^2\alpha}=\frac{2\times2\times1\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{4-3\times\frac{1}{2}}=\frac{4\sqrt{6}}{5}$.

【例 5】已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左右顶点为 A，B，点 P 为椭圆 C 上不同于 A，B，的一点，且直线 PA，PB 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$；

（1）求椭圆的离心率;

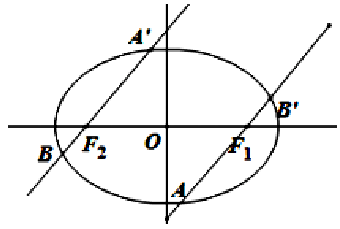
（2）设 $F(-1,0)$ 为椭圆 C 的左焦点，直线 l 过点 F 与椭圆 C 交与不同的两点 M，N，且 $\overrightarrow{MF}=3\overrightarrow{FN}$ 求直线 l 的斜率.

【解析】（1）设点 P 的坐标为 (x,y)，$\because k_{AP}\cdot k_{BP}=-\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{y}{x-a}\cdot\frac{y}{x+a}=-\frac{1}{2}$ 整理,得 $x^2+2y^2=a^2(x\neq0)$，即 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{2y^2}{a^2}=1$，故 $2b^2=a^2\Rightarrow e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{2}}{2}$；（2）$F(-1,0)$ 为椭圆 C 的左焦点，则椭圆方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，又由于 $\overrightarrow{MF}=3\overrightarrow{FN}$，故根据焦长公式得：$\frac{1}{\sqrt{2}-\cos\alpha}=\frac{3}{\sqrt{2}+\cos\alpha}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha=\frac{1}{2}$；或者 $\frac{3}{\sqrt{2}-\cos\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}+\cos\alpha}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，故直线 l 的斜率为 $k=\tan\alpha=\pm1$.

【例 6】（2014•安徽）设 F_1，F_2 分别是椭圆 E：$x^2+\frac{y^2}{b^2}=1\left(0<b<1\right)$ 的左、右焦点，过点 F_1 的直线交椭圆 E 于 A、B 两点，若 $|AF_1|=3|F_1B|$，$AF_2\perp x$ 轴，则椭圆 E 的方程为____________.

【解析】由于 $\overrightarrow{AF_1}=3\overrightarrow{F_1B}$，故根据焦长公式得：$\frac{1}{1-c\cos\alpha}=\frac{3}{1+c\cos\alpha}\Rightarrow c\cos\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow|AF_1|=2b^2$；又 $AF_2\perp x$ 轴，故 $|AF_2|=b^2$，即 $2a=3b^2=2,b^2=\frac{2}{3}$，则椭圆 E 的方程为 $x^2+\frac{3y^2}{2}=1$.

【例 7】（2011•浙江）设 F_1，F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 的焦点，点 A，B 在椭圆上，若 $\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{F_2B}$,则点 A 的坐标是__________.



【解析】由于 $\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{F_2B}$，如图根据椭圆的对称性质可得：$\overrightarrow{AF_1}=5\overrightarrow{F_1B'}$

由焦长公式得：$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\cos\alpha}=\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow|AF_1|=\sqrt{3}$，根据焦半径公式，$|AF_1|=a\pm ex\Rightarrow x=0$，故 $y=\pm1$；则点 A 的坐标是 $(0,1),(0,-1)$.或者根据 $|AF_1|\sin\alpha=|y|\Rightarrow y=\pm1\Rightarrow x=0$.

【例 8】（2014•安徽）设 F_1，F_2 分别是椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点，过点 F_1 的直线交椭圆 E 于 A，B 两点，$|AF_1|=3|F_1B|$.

（1）若 $|AB|=4$，$\triangle ABF_2$ 的周长为16，求 $|AF_2|$；

（2）若 $\cos\angle AF_2B=\frac{3}{5}$，求椭圆 E 的离心率.

【解析】（1）由于 $\triangle ABF_2$ 的周长为 16，$4a=16$，$|AF_1|=|AB|\cdot\frac{3}{4}=3$，$|AF_2|=2a-|AF_1|=5$；

（2）令 $|\overrightarrow{BF_1}|=m\Rightarrow|\overrightarrow{AF_1}|=3m\Rightarrow|\overrightarrow{AF_2}|=2a-3m,|\overrightarrow{BF_2}|=2a-m$，$\cos\angle AF_2B=\frac{3}{5}$，则根据余弦定理，$|AF_2|^2+|BF_2|^2-|AB|^2=2|AF_2||BF_2|\cos\angle AF_2B$，代入数据得，$(a-3m)(a+m)=0\Rightarrow m=\frac{a}{3}$，由焦长公式得：$\frac{b^2}{a-c\cos\alpha}=\frac{3b^2}{a+c\cos\alpha}\Rightarrow e\cos\alpha=\frac{1}{2}$；又 $|\overrightarrow{AF_1}|=3m=a\Rightarrow a=\frac{(\lambda+1)b^2}{2a}\Rightarrow a=\sqrt{2}b$，$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

同步训练

1. F_1,F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=1$ 的左右两个焦点，A 为椭圆上一点，且 $\angle AF_1F_2=45°$，则 $\triangle AF_1F_2$ 的面积为（　　）

A. 7　　B. $\frac{7}{4}$　　C. $\frac{7}{2}$　　D. $\frac{7\sqrt{5}}{2}$

2. 过椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 的右焦点作一条斜率为 2 的直线与椭圆交于 A，B 两点，O 为坐标原点，则 $\triangle OAB$ 的面积为__________.

3. 已知 F_1 为椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左焦点，直线 $l:y=x-1$ 与椭圆 C 交于 A、B 两点，那么 $|F_1A|+|F_1B|$ 的值为__________.

4. 过椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左焦点 F 作倾斜角为 $60°$ 的直线 l 与椭圆交于 A，B 两点，则 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=$（　　）

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{5}{3}$

5. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$．设 L 为过椭圆右焦点 F 的直线，交椭圆于 M、N 两点，且 L 的倾斜角为 $60°$．则 $\frac{|MF|}{|NF|}=$__________.

6. 已知 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$ 是椭圆 C 的两个焦点，A、B 为过 F_1 的直线与椭圆的交点，且 $\triangle F_2AB$ 的周长为 $4\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

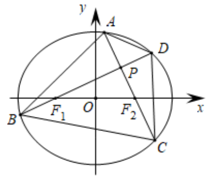
（2）判断 $\frac{1}{|F_1A|}+\frac{1}{|F_1B|}$ 是否为定值，若是求出这个值，若不是说明理由.

7. 已知中心在原点，对称轴为坐标轴的椭圆，左焦点 $F_1(-1,0)$，一个顶点坐标为(0,1).

（1）求椭圆方程；

（2）直线 l 过椭圆的右焦点 F_2 交椭圆于 A、B 两点,当 $\triangle AOB$ 面积最大时，求直线 l 方程.

8．已知椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，过 F_1 的直线交椭圆于 B、D 两点，过 F_2 的直线交椭圆于 A、C 两点，且 $AC\perp BD$，垂足为 P.

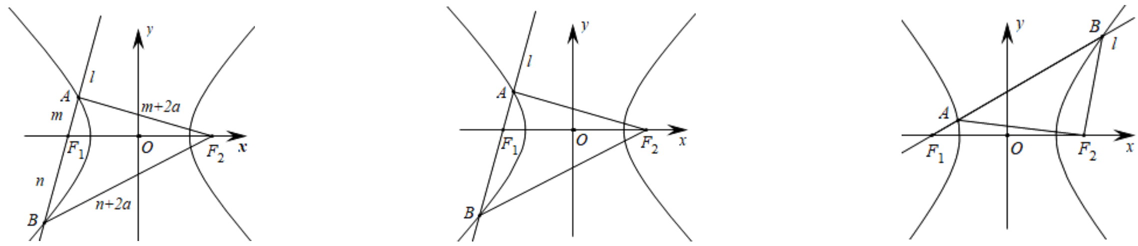


（1）设 P 点的坐标为 $(x_0,\ y_0)$，证明：$\dfrac{{x_0}^2}{3}+\dfrac{{y_0}^2}{2}<1$.

（2）求四边形 $ABCD$ 的面积的最小值.

第二讲　双曲线的焦点三角形问题

周长问题：双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的两个焦点为 F_1、F_2，弦 AB 过左焦点 F_1（A、B 都在左支上），$|AB|=l$，则 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a+2l$（如下图左）



焦长公式：（1）当 AB 交双曲线于一支时，$|AB|=\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}$，$a^2-c^2\cos^2\alpha>0\Rightarrow 1<e<\dfrac{1}{\cos\alpha}$（图中）

（2）当 AB 交双曲线于两支时，$|AB|=\dfrac{2ab^2}{c^2\cos^2\alpha-a^2}$，$a^2-c^2\cos^2\alpha<0\Rightarrow e>\dfrac{1}{\cos\alpha}$（图右）

双曲线焦比定理和椭圆的焦比定理一致：

令 $|AF_1|=\lambda|F_1B|$，即 $\dfrac{b^2}{a-c\cos\alpha}=\dfrac{\lambda b^2}{a+c\cos\alpha}\Rightarrow e\cos\alpha=\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}(\lambda>1)$，代入弦长公式可得 $|AF_1|=\dfrac{(\lambda+1)b^2}{2a}$.

若交于两支时，$\dfrac{b^2}{c\cos\alpha-a}=\dfrac{\lambda b^2}{a+c\cos\alpha}\Rightarrow e\cos\alpha=\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}(\lambda>1)$，代入弦长公式可得 $|AF_1|=\dfrac{(\lambda-1)b^2}{2a}$.

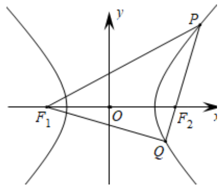
【例 9】已知双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 的直线与该双曲线的右支交于 A、B 两点，若 $|AB|=5$，则 $\triangle ABF_1$ 的周长为________.

【解析】$|AB|=5$，$\triangle ABF_1$ 的周长为 $4a+2l=16+10=26$.

【例 10】过双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左焦点 F_1 作倾斜角为 $\dfrac{\pi}{6}$ 的直线 l 交双曲线于 A、B 两点，则 $|AB|=$________.

【解析】$a^2-c^2\cos^2\alpha=1-4\times\dfrac{3}{4}=-2<0$，故直线 l 交双曲线于两支；$|AB|=\dfrac{2ab^2}{c^2\cos^2\alpha-a^2}=\dfrac{6}{3-1}=3$.

【例 11】已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2．过 F_2 的直线与双曲线 C 的右支相交于 P，Q 两点，若 $\overrightarrow{PF_2}=3\overrightarrow{F_2Q}$，若 $\triangle PQF_1$ 是以 Q 为顶角的等腰三角形，则双曲线的离心率 e 为（　　）



A．3　　　　B．2

C．$\sqrt{2}$　　　　D．$\sqrt{3}$

【解析】设 $|QF_2|=m$，则 $|PF_2|=3m$，$\triangle PQF_1$ 是以 Q 为顶角的等腰三角形，$\therefore|QF_1|=4m$，由 $|QF_1|-|QF_2|=2a$，$\therefore 3m=2a$，$\therefore m=\dfrac{2}{3}a$，根据焦比定理 $|PF_2|=\dfrac{(\lambda+1)}{2}\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{2b^2}{a}=3m=2a$，$\therefore a=b$，$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$．故选 C.

9．过双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$左焦点$F_1$的直线交双曲线的左支于$M$、$N$两点，$F_2$为其右焦点，则$|MF_2|+|NF_2|-|MN|$的值为（　　）

A．6　　B．8　　C．10　　D．16

10．如果F_1，F_2分别是双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的左、右焦点，$AB$是双曲线左支上过点$F_1$的弦，且$|AB|=6$，则$\triangle ABF_2$的周长是____________.

11．过双曲线$x^2-4y^2=4$的焦点F_1且在双曲线一支上的弦AB的长度为5，F_2为另一焦点，则$\triangle ABF_2$的周长为____________.

12．斜率为2的直线l过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$($a>0,b>0$)的右焦点,且与双曲线的左右两支分别相交，则双曲线的离心率e的取值范围是（　　）

A．$e<\sqrt{2}$　　B．$1<e<\sqrt{3}$　　C．$1<e<\sqrt{5}$　　D．$e>\sqrt{5}$

13．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的右焦点为$F$,若过点$F$且倾斜角为$60°$的直线与双曲线的右支有且仅有一个交点,则此双曲线离心率的范围是（　　）

A．$(1,2]$　　B．$(1,2)$　　C．$[2,+\infty)$　　D．$(2,+\infty)$

14．过双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的左焦点$F_1$作倾斜角为$\alpha=\frac{\pi}{4}$的直线与双曲线交于$A$，$B$两点，求$|AB|$.

15．经过双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$的右焦点F_2作倾斜角为$30°$的弦AB，求：

（1）$|AB|$；

（2）$\triangle F_1AB$的周长（F_1是双曲线的左焦点）.

16．过双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$的$F_2$作倾斜角为$\frac{5\pi}{6}$的直线，交双曲线于$P$、$Q$两点，求$|FP|\cdot|FQ|$的值.

17．直线$y=x+1$与双曲线$C:\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$恒有公共点.

（1）求双曲线C的离心率e的取值范围；

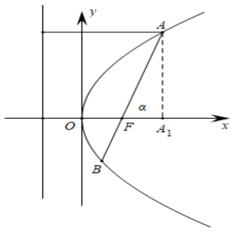
（2）若直线$l:y=x+m(m\in R)$过双曲线C的右焦点F，与双曲线交于P、Q两点，并且满足$\overrightarrow{FP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{FQ}$，求双曲线$C$的方程.

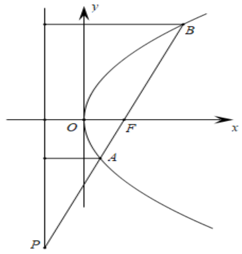
18．已知双曲线的左右焦点F_1、F_2与椭圆$\frac{x^2}{5}+y^2=1$的焦点相同，且以椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$离心率的倒数为离心率.

（1）求双曲线的方程；

（2）若经过焦点F_2且互相垂直的两条直线与双曲线相交于A、B、C、D．求四边形$ACBD$的面积的最大值.

第三讲 抛物线焦长公式及性质





1. $|AF|=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}$　$|BF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}$.　　2. $|AB|=x_1+x_2+p=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$.

3. $S_{\triangle AOB}=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}$.　　4. 设$\dfrac{|AF|}{|BF|}=\lambda$,则$\cos\alpha=\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}$;$|AF|=\dfrac{\lambda+1}{2}p$.

5. 设 AB 交准线于点 P，则 $\dfrac{|AF|}{|PA|}=\cos\alpha$；$\dfrac{|BF|}{|PB|}=\cos\alpha$.

证明：1. $|AF|=x_A+\dfrac{p}{2},\cos\alpha=\dfrac{|FA_1|}{|AF|}$　$\therefore\cos\alpha=\dfrac{x_A-\frac{p}{2}}{x_A+\frac{p}{2}}=1-\dfrac{p}{x_A+\frac{p}{2}}=1-\dfrac{p}{|AF|}$　$\therefore|AF|=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}$，同理$|BF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}$.

2. $|AB|=|AF|+|BF|=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}+\dfrac{p}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$.

3. 设 O 到 AB 的距离为 d，则 $d=\dfrac{p}{2}\sin\alpha$，故 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|AB|d=\dfrac{1}{2}\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}\dfrac{p}{2}\sin\alpha=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}$.

4. $\dfrac{|AF|}{|BF|}=\lambda\Rightarrow\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\lambda\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}$，　$\therefore|AF|=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}=\dfrac{\lambda+1}{2}p$.

5. $|AF|=x_A+\dfrac{p}{2}$，$|BF|=x_B+\dfrac{p}{2}$，$\dfrac{|AF|}{|PA|}=\cos\alpha$，$\dfrac{|BF|}{|PB|}=\cos\alpha$.

关于抛物线 $x^2=2py$ 的焦长公式及定理（A 为直线与抛物线右交点，B 为左交点，$\alpha<90^\circ$ 为 AB 倾斜角）

1. $|AF|=\dfrac{p}{1-\sin\alpha}$；$|BF|=\dfrac{p}{1+\sin\alpha}$　　2. $|AB|=y_1+y_2+p=\dfrac{2p}{\cos^2\alpha}$

3. $S_{\triangle AOB}=\dfrac{p^2}{2\cos\alpha}$　　4. 设$\dfrac{|AF|}{|BF|}=\lambda$，则$\sin\alpha=\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}$；$|AF|=\dfrac{\lambda+1}{2}p$

5. 设 AB 交准线于点 P，$\dfrac{|AF|}{|PA|}=\sin\alpha$；$\dfrac{|BF|}{|PB|}=\sin\alpha$.

【例 12】已知抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 $y=\sqrt{3}(x-1)$ 与 C 交于 A，B（A 在 x 轴上方）两点，若 $\overrightarrow{AF}=m\overrightarrow{FB}$，则 m 的值为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．2　　D．3

【解析】抛物线焦点为 $F(1,0)$，且直线 AB 的倾斜角为 60°，故 $\dfrac{|AF|}{|BF|}=m\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{m-1}{m+1}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow m=3$，选 D.

【例 13】已知抛物线的方程为 $y^2=4x$，过其焦点 F 的直线与抛物线交于 A、B 两点，且 $|AF|=3$，O 为坐标原点，则 $\triangle AOF$ 的面积和 $\triangle BOF$ 的面积之比为（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【解析】$|AF|=3\Rightarrow\dfrac{p}{1-\cos\alpha}=3\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$;$|BF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\dfrac{S_{\Delta AOF}}{S_{\Delta BOF}}=\dfrac{|AF|}{|BF|}=2$，故选 D.

【例 14】过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的直线 l 交抛物线于点 A、B，交其准线于点 C，若 $|BC|=2|BF|$，且 $|AF|=3$ 则此抛物线的方程为（　　）

A. $y^2=\sqrt{3}x$　　B. $y^2=3x$　　C. $y^2=6x$　　D. $y^2=9x$

【解析】$\frac{|BF|}{|BC|}=\frac{d}{|BC|}=\cos\alpha=\frac{1}{2};|AF|=\frac{p}{1-\cos\alpha}=3\Rightarrow p=\frac{3}{2}$，故此抛物线的方程为 $y^2=3x$.

19. 已知过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 焦点 F 且倾斜角为 60° 的直线 l 交抛物线于 A,B 两点，若 $|AF|=3$，则此抛物线方程为（　　）

A. $y^2=3x$　　B. $y^2=6x$　　C. $y^2=\frac{3}{2}x$　　D. $y^2=2x$

20. 设 AB 为过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点的弦，则 $|AB|$ 的最小值为（　　）

A. $\frac{p}{2}$　　B. p　　C. $2p$　　D. 无法确定

21. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A,B 两点，若 $|AF|=5$，则 $|BF|=$（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. 1　　C. $\frac{5}{4}$　　D. 2

22. 设 O 是坐标原点，F 是抛物线 $y=x^2$ 的焦点，A 是抛物线上的一点，FA 与 x 轴正向的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，则 $|\overrightarrow{AF}|=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. 1　　D. $2+\sqrt{3}$

23. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，经过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与抛物线在 x 轴上方的部分相交于点 A，$AK\perp l$，垂足为 K，则 $\triangle AKF$ 的面积是（　　）

A. 4　　B. $3\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. 8

24. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，l 与 x 轴相交于点 E，过 F 且倾斜角等于 60° 的直线与抛物线在 x 轴上方的部分相交于点 A，$AB\perp l$，垂足为 B，则四边形 $ABEF$ 的面积等于（　　）

A. $3\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $6\sqrt{3}$　　D. $8\sqrt{3}$

25. 直线 l 过抛物线 $y^2=x$ 的焦点 F，交抛物线于 A,B 两点，且点 A 在 x 轴上方，若直线 l 的倾斜角 $\theta\geq\frac{\pi}{4}$，则 $|FA|$ 的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　C. $\left(\frac{1}{4},1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　D. $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

26. 设 O 是坐标原点，F 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，A 是抛物线上的一点，$\overrightarrow{FA}$ 与 x 轴正向的夹角为 60°，则 $|\overrightarrow{OA}|$ 为（　　）

A. $\frac{21p}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{21}p}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{13}}{6}p$　　D. $\frac{13}{36}p$

27. 已知抛物线 $y^2=8x$，过点 $A(2,\ 0)$ 作倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线 l，若 l 与抛物线交于 B、C 两点，弦 BC 的中点 P 到 y 轴的距离为（　　）

A. $\frac{10}{3}$　　B. $\frac{16}{3}$　　C. $\frac{32}{3}$　　D. $8\sqrt{3}$

28. 过抛物线 $y=4x^2$ 的焦点 F，引倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线，交抛物线于 A，B 两点，O 是坐标原点，求 $\triangle ABC$ 的面积为_________.

29. 已知抛物线 $C:x^2=8y$ 的焦点为 F，准线为 l，P 是 l 上一点，Q 是直线 PF 与 C 的一个交点，若 $\overrightarrow{PF}=2\overrightarrow{FQ}$，则 $|QF|=$（　　）

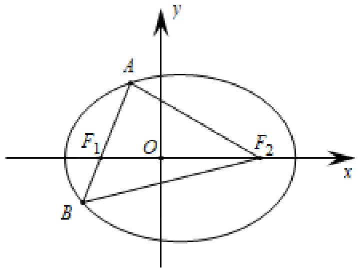
A. 6　　B. 3　　C. $\frac{8}{3}$　　D. $\frac{4}{3}$

30. 已知抛物线 $C:y^2=4x$，那么过抛物线 C 的焦点，长度为整数且不超过 2015 的弦的条数是（　　）

A. 4024　　B. 4023　　C. 2012　　D. 2015

第四讲 关于焦长系列的一些重点关注问题

1．$4a$ 体面积最值问题

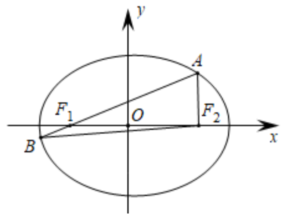


$S_{\triangle ABF_2}=\dfrac{|AB|h}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}\cdot 2c\sin\alpha=\dfrac{2ab^2c\sin\alpha}{b^2+c^2\sin^2\alpha}=\dfrac{2ab^2c}{\dfrac{b^2}{\sin\alpha}+c^2\sin\alpha}$ 分母属于一个对勾函数模型，取得最值得条件在于 b 与 c 的大小比较，或者说离心率范围．

①当 $c\ge b$，即 $e\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\dfrac{b^2}{\sin\alpha}+c^2\sin\alpha\ge 2bc$，当仅当 $\sin\alpha=\dfrac{b}{c}$ 时等号成立，此时 $S_{\triangle ABF_2\max}=\dfrac{2ab^2c}{2bc}=ab$．

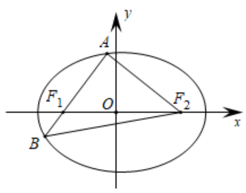
②当 $c<b$，即 $e<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\dfrac{b^2}{\sin\alpha}+c^2\sin\alpha\ge b^2+c^2=a^2$，当 $\sin\alpha=1$ 时等号成立，此时 $S_{\triangle ABF_2\max}=\dfrac{2b^2c}{a}$．

2．$4a$ 通径体计算问题



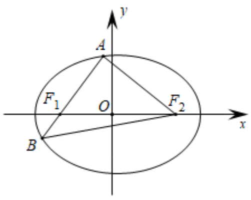
如图，若 $AF_2\perp F_1F_2$，易知 $|AF_2|=\dfrac{b^2}{a}$，若 $\overrightarrow{AF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1B}(\lambda>1)$，则一定有 $|AF_1|=\dfrac{\lambda+1}{2}\cdot\dfrac{b^2}{a}$，根据 $|AF_1|+|AF_2|=2a$ 可得 $\dfrac{\lambda+3}{2}\cdot\dfrac{b^2}{a}=2a$，即 $\dfrac{\lambda+3}{4}\cdot(1-e^2)=1\Rightarrow e=\sqrt{\dfrac{\lambda-1}{\lambda+3}}$；

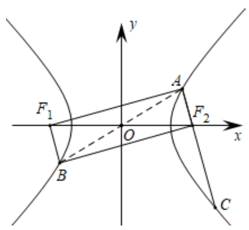
3．$4a$ 等腰体计算问题



如图，若 $|AB|=|AF_2|$，且 $\overrightarrow{AF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1B}(\lambda>1)$，令 $|AB|=|AF_2|=m$，则 $|AF_1|=2a-m$，$|BF_1|=2m-2a$，$|BF_2|=4a-2m$，根据 $|AF_1|=2a-m=\lambda|BF_1|=\lambda(2m-2a)$ 求出 m，也可以根据 $\triangle ABF_2$ 的某种特殊三角形属性来建立另一个方程，从而解出椭圆的方程或者离心率．

4．椭圆和双曲线的直角三角形与离心率问题





Ⅰ．如左图，若 $AF_2\perp AB$，AB 过原点，且 $\overrightarrow{AF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1B}$，可得 $|AF_1|=\dfrac{\lambda+1}{2}\cdot\dfrac{b^2}{a}$，$|AF_2|=2a-\dfrac{\lambda+1}{2}\cdot\dfrac{b^2}{a}$，再利用勾股定理 $AF_1^2+AF_2^2=4c^2$ 来搞定离心率，当然也可以根据 $|AB|=\dfrac{\lambda+1}{2}\cdot\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{\lambda+1}{2\lambda}\cdot\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}\cdot\dfrac{b^2}{a}$，$|BF_2|=2a-|BF_1|=2a-\dfrac{\lambda+1}{2\lambda}\cdot\dfrac{b^2}{a}$，$AF_2^2+AB^2=BF_2{}^2$ 来计算离心率．

II．若 $\angle B$ 为已知，λ 未知，可以根据焦点三角形面积公式 $\lambda=\dfrac{S_{\triangle AF_1F_2}}{S_{\triangle BF_1F_2}}=\dfrac{b^2\tan 45^\circ}{b^2\tan\dfrac{B}{2}}\Rightarrow\lambda\tan\dfrac{B}{2}=1$，再利用勾股定理 $AF_1^2+AF_2^2=4c^2$ 来计算离心率．

如右图，若 $BF_2\perp AC$，AB 过原点，且 $\overrightarrow{CF_2}=\lambda\overrightarrow{F_2A}$，通过补全矩形，可得 $AF_1\perp AC$，$|CF_2|=\dfrac{\lambda+1}{2}\cdot\dfrac{b^2}{a}$，$|AF_2|=\dfrac{\lambda+1}{2\lambda}\cdot\dfrac{b^2}{a}$，$|AF_1|=2a+\dfrac{\lambda+1}{2\lambda}\cdot\dfrac{b^2}{a}$，再利用勾股定理 $AF_1^2+AF_2^2=4c^2$ 来搞定离心率，当然也可以根据 $|AC|=\dfrac{\lambda+1}{2}\cdot\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{\lambda+1}{2\lambda}\cdot\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{(\lambda+1)^2}{2\lambda}\cdot\dfrac{b^2}{a}$，$|CF_1|=2a+|CF_2|=2a+\dfrac{\lambda+1}{2}\cdot\dfrac{b^2}{a}$，$AF_1^2+AC^2=CF_1{}^2$ 来计算离心率．

【例 15】（2019•新课标I）已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过 F_2 的直线与 C 交于 A，B 两点．若 $|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则 C 的方程为（　　）

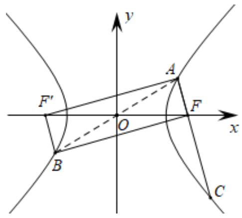
A．$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$　　B．$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　C．$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　D．$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$

解析　解法一　因为 $|AF_2|=2|BF_2|$，所以 $|AB|=3|BF_2|$，又因为 $|AB|=|BF_1|$，则 $|BF_1|=3|BF_2|$，又 $|BF_1|+|BF_2|=2a$，所以 $|BF_2|=\dfrac{a}{2}$，即 $|AF_2|=a$，$|BF_1|=\dfrac{3}{2}a$．在 $Rt\Delta AF_1F_2$ 中，$\cos\angle AF_2O=\dfrac{1}{a}$，在 ΔBF_1F_2 中，由余弦定理可得 $\cos\angle BF_2F_1=\dfrac{4+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}a\right)^2}{2\times2\times\dfrac{a}{2}}$，根据 $\cos\angle AF_2O+\cos\angle BF_2F_1=0$，可得 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4-2a^2}{2a}=0$，解得 $a^2=3$，所以 $a=\sqrt{3}$，$b^2=a^2-c^2=3-1=2$，所以椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$，故选 B．

解法二　由 $|AF_2|=2|BF_2|\Rightarrow|AF_2|=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{b^2}{a}$，$|BF_2|=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{b^2}{a}$，$|AB|=|BF_1|\Rightarrow|BF_2|=\dfrac{9}{4}\cdot\dfrac{b^2}{a}$，$|BF_1|=\dfrac{3}{2}a|BF_2|$，$|BF_1|+|BF_2|=2a$，即 $\dfrac{3b^2}{a}=2a$，所以椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$，故选 B．

【例 16】（2019•重庆月考）已知 A，B，C 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上的三个点，直线 AB 经过原点 O，AC 经过右焦点 F，若 $BF\perp AC$，且 $3AF=CF$，则该双曲线的离心率为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　B．$\dfrac{5}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{10}}{3}$　　D．$\dfrac{2}{3}$



【解析】设双曲线的左焦点为 F'，由 $3AF=CF$，可设 $AF=t$，$CF=3t$，由双曲线的定义可得 $CF'=2a+3t$，$AF'=2a+t$，$BF\perp AC$，可得 $AFBF'$ 四边形为矩形，可得 $\Delta AF'C$ 为直角三角形，即有 $AF'^2+AC^2=CF'^2$，即 $(2a+t)^2+16t^2=(2a+3t)^2$，，解得 $a=t$，即有 $AF=a$，$AF'=3a$，$FF'=2c$，可得 $AF^2+AF'^2=FF'^2$，可得 $a^2+9a^2=4c^2$，即 $10a^2=4c^2$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，故选 A．

【例 17】（2019•浙江模拟）已知 F_1、F_2 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过左焦点 F_1 的直线交椭圆于 M、N 两点，若 $MF_2\perp x$ 轴，且 $\overrightarrow{MN}=-4\overrightarrow{NF_1}$，则椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【解析】 ΔMNF_2 为 $4a$ 通经体，且 $\overrightarrow{MF_1}=3\overrightarrow{F_1N}$，所以 $\frac{3+1}{2}\cdot\frac{b^2}{a}+\frac{b^2}{a}=2a\Rightarrow 2a^2=3b^2$，即 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故选 C.

【例 18】（2019•济南一模）设 F_1，F_2 分别是椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过 F_2 的直线交椭圆于 A，B 两点，且 $\overrightarrow{AF_1}\bullet\overrightarrow{AF_2}=0$，$\overrightarrow{AF_2}=2\overrightarrow{F_2B}$，则椭圆 E 的离心率为（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

【解析】解法一 设 $|AB|=3m$，$|AF_2|=2|F_2B|$，则 $|AF_2|=2m$，$|F_2B|=m$，所以 $|AF_1|=2a-2m$，$|BF_1|=2a-m$．因为 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$，则 $AB\perp AF_1$，所以 $4c^2=(2m)^2+(2a-2m)^2$，$(2a-2m)^2=(3m)^2+(2a-2m)^2$，即 $m=\frac{1}{3}a$，所以 $4c^2=\frac{4}{9}a^2+\frac{16}{9}a^2$，即 $9c^2=5a^2$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，故选 C.

解法二 因为 $|AF_2|=2|F_2B|$，所以 $|AF_2|=\frac{3}{2}\cdot\frac{b^2}{a}$，$|AF_1|=\frac{4a^2-3b^2}{2a}$，又因为 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$，所以 $\left(\frac{3b^2}{2a}\right)^2+\left(\frac{4a^2-3b^2}{2a}\right)=(2c)^2$，即 $\left(\frac{3a^2-3c^2}{2ac}\right)^2+\left(\frac{a^2+3c^2}{2ac}\right)^2=\left(\frac{3}{2e}-\frac{3e}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2e}+\frac{3e^2}{2}\right)=4$，所以 $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$，故选 C.

【例 19】（2019•深圳一模）已知 F_1，F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左，右焦点，过 F_2 的直线与椭圆交于 P，Q 两点，$PQ\perp PF_1$，且 $|QF_1|=2|PF_1|$，则△PF_1F_2 与△QF_1F_2 的面积之比为（　　）

A. $2-\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}-1$　　C. $\sqrt{2}+1$　　D. $2+\sqrt{3}$

【解析】 解法一 设 $|PF_1|=t$，$|QF_1|=2|PF_1|=2t$，由椭圆定义可得 $|PF_2|=2a-t$，$|QF_2|=2a-2t$，$|PQ|=4a-3t$，由 $|PQ|^2+|PF_1|^2=|QF_1|^2$，即 $(4a-3t)^2+t^2=4t^2$，即有 $4a-3t=\sqrt{3}t$，解得 $t=\frac{4}{3+\sqrt{3}}a$，则△PF_1F_2 与△QF_1F_2 的面积之比为

$$\frac{\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|}{\frac{1}{2}|QF_1|\cdot|QF_2|\cdot\sin 30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3+\sqrt{3}}a\cdot\frac{2+2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}a}{\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3+\sqrt{3}}a\cdot\frac{2\sqrt{3}-2}{3+\sqrt{3}}a\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$$，故选 D.

解法二 因为 $PQ\perp PF_1$，且 $|QF_1|=2|PF_1|$，所以 $\angle Q=30^\circ$，所以 $\tan\frac{Q}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}+2}$，则

$\lambda=\frac{S_{PF_1F_2}}{S_{QF_1F_2}}=\frac{b^2\tan 45^\circ}{b^2\tan\frac{Q}{2}}\Rightarrow\lambda\tan\frac{Q}{2}=1$，故 $\lambda=\sqrt{3}+2$，故选 D.

【例 20】（2019•东湖月考）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 $F_1(-1,0)$、$F_2(1,0)$，经过 F_2 的直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点，且△F_1AB 的周长为 8.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）记△ F_1AB 的面积为 S，求 S 的最大值.

【解析】（1）略

（2）根据焦长公式（省略了余弦定理或者极坐标方法简单证明过程，请读者在考试中自己完成证明）得：

$$S_{\Delta ABF_1}=\frac{|AB|h}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2 a}\cdot 2c\sin a=\frac{2ab^2c\sin a}{b^2+c^2\sin^2 a}=\frac{2ab^2c}{\frac{b^2}{\sin a}+c^2\sin a}=\frac{12}{\frac{3}{\sin a}+\sin a}\leq\frac{12}{4}=3,$$

当仅当 $\sin a=1$ 时等号成立.

31.（2019•齐齐哈尔二模）已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左，右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 作垂直 x 轴的直线交椭圆 E 于 A，B 两点，点 A 在 x 轴上方．若 $|AB|=3$，$\triangle ABF_2$ 的内切圆的面积为 $\frac{9\pi}{16}$，则直线 AF_2 的方程是（　　）

A. $3x+2y-3=0$　　B. $2x+3y-2=0$　　C. $4x+3y-4$　　D. $3x+4y-3=0$

32.（2019•雨花模拟）设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 的直线与双曲线的右支交于两点 A，B，若 $|AF_1|:|AB|=3:4$，$|BF_2|=3|AF_2|$，则双曲线 C 的离心率是（　　）

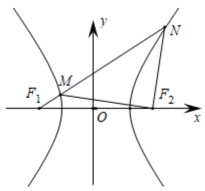
A. $\frac{\sqrt5}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 5

33.（2019•莲都月考）已知 F_1，F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点，过 F_1 的直线交双曲线左支于 P，Q 两点，若 $|PF_2|=|F_1F_2|$，且 $5|PF_1|=4|QF_1|$，则双曲线离心率为（　　）

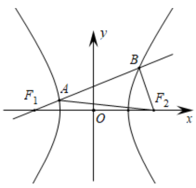
A. $\frac{11}{9}$　　B. $\frac{9}{7}$　　C. $\sqrt2$　　D. $\frac{\sqrt5+1}{2}$

34.（2019•赫山月考）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过点 F_1 的直线交双曲线的左支于点 M，交双曲线的右支于点 N，且 $MF_2\perp NF_2$，$|MF_2|=|NF_2|$，则该双曲线的离心率是（　　）

A. $\sqrt3$　　B. $\sqrt2$　　C. $\sqrt5$　　D. $\sqrt2+1$



34 题图



35 题图

35.（2019•湖北一模）已知 F_1，F_2 分别为双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左右焦点，过点 F_1 的直线 l 与双曲线 C 的左右两支分别交于 A，B 两点，若 $AB\perp BF_2$，$\cos\angle F_1AF_2=-\frac{4}{5}$，则双曲线的离心率为（　　）

A. 2　　B. $\sqrt5$　　C. $\sqrt{13}$　　D. $\sqrt{15}$

36.（2019•南通期末）已知椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 的直线与椭圆相交于 P，Q 两点，若 $PQ\perp PF_1$，且 $4PF_1=3PQ$，则椭圆的离心率 $e=$________.

37.（2019•信阳期末）已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 右支上非顶点的一点 A 关于原点 O 的对称点为 B，

F 为其右焦点，若 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BF}=0$，设 $\angle BAF=\theta$，且 $\theta\in(\frac{\pi}{4}，\frac{5\pi}{12})$，则双曲线 C 离心率的取值范围是（　　）

A．$(\sqrt{2}，2]$　　B．$[\sqrt{2}，+\infty)$　　C．$(\sqrt{2}，+\infty)$　　D．$(2,+\infty)$

38．（2018•潍坊一模）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，O 为坐标原点，A 为椭圆上一点，$\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{2}$，连接 AF_2 交 y 轴于 M 点，若 $3|OM|=|OF_2|$，则该椭圆的离心率为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{5}{8}$　　D．$\frac{\sqrt{10}}{4}$

39．（2018•广州二模）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F_1，直线 $y=\sqrt{3}x$ 与 C 相交于 A，B 两点，且 $AF_1\perp BF_1$，则 C 的离心率为（　　）

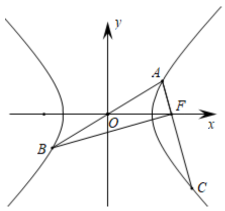
A．$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　B．$\sqrt{2}-1$　　C．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　D．$\sqrt{3}-1$

40．（2018•石家庄二模）已知 F_1，F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，点 P 是椭圆上位于第一象限内的点，延长 PF_2 交椭圆于点 Q，若 $PF_1\perp PQ$ 且 $|PF_1|=|PQ|$，则椭圆的离心率为（　　）

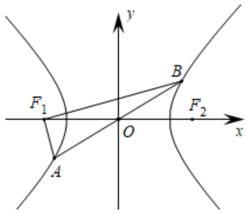
A．$2-\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}-\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{2}-1$　　D．$\sqrt{6}-\sqrt{3}$

41．（2019•武昌月考）已知 A，B，C 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上的三个点，AB 经过原点 O，AC 经过右焦点 F，若 $BF\perp AC$ 且 $2|AF|=|CF|$，则该双曲线的离心率是（　　）

A．$\frac{5}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{17}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{17}}{2}$　　D．$\frac{9}{4}$



41 题图



43 题图

42．（2019•惠州期末）设 F_1，F_2 分别是椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过点 $F_1(-c,0)$ 的直线交椭圆 E 于 A，B 两点，若 $|AF_1|=3|F_1B|$，且 $AB\perp AF_2$，则椭圆 E 的离心率是（　　）

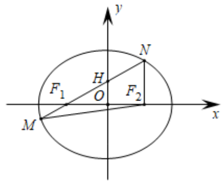
A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

43．（2019•佛山期末）如图，已知 F_1、F_2 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，A、B 为双曲线上关于原点对称的两点，且满足 $AF_1\perp BF_1,\angle ABF_1=\frac{\pi}{12}$，则双曲线的离心率为（　　）

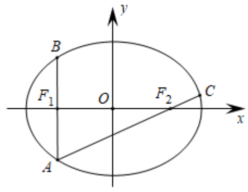
A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{6}$　　D．$\frac{4}{3}\sqrt{2}$

44．（2018•黄石模拟）如图，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 F_1，F_2，过 F_1 的直线交椭圆于 M，N 两点，交 y 轴于点 H．若 F_1，H 是线段 MN 的三等分点，则△ F_2MN 的周长为（　　）

A．20　　B．10　　C．$2\sqrt{5}$　　D．$4\sqrt{5}$



44 题图



45 题图

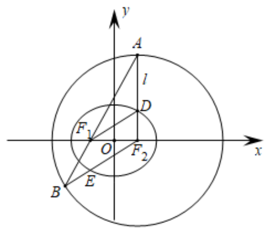
45. （2019•嘉兴期中）已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 且与 x 轴垂直的直线交椭圆于 A，B 两点，直线 AF_2 与椭圆的另一个交点为 C，若 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{F_2C}$，则椭圆的离心率为______.

46. （2017•泰州期末）已知椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 A，B 在椭圆 Γ 上，$\overrightarrow{AF_1}\bullet\overrightarrow{F_1F_2}=0$ 且 $\overrightarrow{AF_2}=\lambda\overrightarrow{F_2B}$，则当 $\lambda\in[2，3]$ 时，椭圆的离心率的取值范围为________.

47. （2019•江苏）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$．过 F_2 作 x 轴的垂线 l，在 x 轴的上方，l 与圆 $F_2:(x-1)^2+y^2=4a^2$ 交于点 A，与椭圆 C 交于点 D．连结 AF_1 并延长交圆 F_2 于点 B，连结 BF_2 交椭圆 C 于点 E，连结 DF_1．已知 $DF_1=\frac{5}{2}$．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）求点 E 的坐标.



48. （2019•玉山期中）已知 F_1，F_2 为椭圆 E 的左右焦点，点 $P(-1,\frac{3}{2})$ 为其上一点，且有 $|PF_1|+|PF_2|=4$．

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）过 F_2 的直线 l 与椭圆 E 交于 A，B 两点，求 $\triangle OAB$ 的面积 S 的最大值.

49. （2019•安庆二模）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $(2,\sqrt{2})$．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）设 A、B 为椭圆 C 的左、右顶点，过 C 的右焦点 F 作直线 l 交椭圆于 M，N 两点，分别记 $\triangle ABM$，$\triangle ABN$ 的面积为 S_1，S_2，求 $|S_1-S_2|$ 的最大值.

50. （2019•天河二模）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，左顶点为 A，上顶点为 B，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\triangle ABF_1$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$．

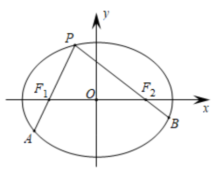
（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）过 F_1 的直线 l 与椭圆 C 相交于不同的两点 M，N，求 $\triangle MNF_2$ 内切圆半径的最大值.

51. （2018•金华期末）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，右焦点 $F_2(2,0)$，点 $(\sqrt{3}，1)$ 在椭图上

（1）求椭圆的方程；

（2）设 $P(x_0，y_0)(y_0>0)$ 为椭圆 C 上一点，过焦点 F_1，F_2 的弦分别为 PA，PB，设 $\overrightarrow{PF_1}=\lambda_1\overrightarrow{F_1A}$，$\overrightarrow{PF_2}=\lambda_2\overrightarrow{F_2B}$，若 $\lambda_1=2$，求 λ_2 的值.

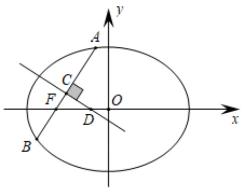


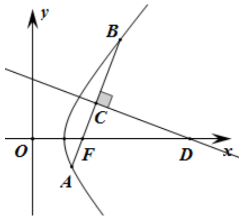
第五讲 过焦点的弦与其中垂线的性质

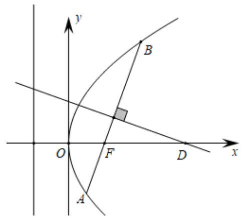
1．设椭圆焦点弦 AB 的中垂线与长轴的交点为 D，则 $|FD|$ 与 $|AB|$ 之比是离心率的一半（如图）

2．设双曲线焦点弦 AB 的中垂线与焦点所在轴的交点为 D，则 $|FD|$ 与 $|AB|$ 之比是离心率的一半（如图）

3．设抛物线焦点弦 AB 的中垂线与对称轴的交点为 D，则 $|FD|$ 与 $|AB|$ 之比是离心率的一半（如图）







1．证明：根据椭圆焦长公式：$|BF|=\dfrac{b^2}{a-c\cos\alpha}$，$|AF|=\dfrac{b^2}{a+c\cos\alpha}$，$|AB|=\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}$，

$$|CF|=\frac{|AB|}{2}-|AF|=\frac{|AF|+|BF|}{2}-|AF|=\frac{|BF|-|AF|}{2}=\frac{\dfrac{b^2}{a-c\cos\alpha}-\dfrac{b^2}{a+c\cos\alpha}}{2}=\frac{b^2c\cos\alpha}{a^2-c^2\cos^2\alpha}$$

$$|DF|=\frac{|CF|}{\cos\alpha}=\frac{b^2c}{a^2-c^2\cos^2\alpha}，故\frac{|DF|}{|AB|}=\frac{b^2c}{2ab^2}=\frac{c}{2a}=\frac{e}{2}.$$

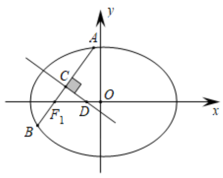
2．证明：当直线 AB 与双曲线交于一支时，证明过程同椭圆一致；当直线 AB 与双曲线交于两支时，

$|BF|=\dfrac{b^2}{c\cos\alpha-a}$，$|AF|=\dfrac{b^2}{c\cos\alpha+a}$，$|AB|=\dfrac{2ab^2}{c^2\cos^2\alpha-a^2}$，$|CF|=\dfrac{b^2c\cos\alpha}{c^2\cos^2\alpha-a^2}$，其余过程与椭圆一致．

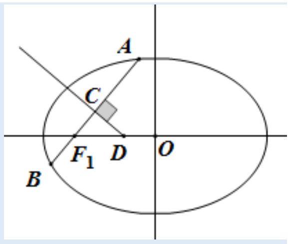
3．证明：抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 焦点弦公式：$|AF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}$；$|BF|=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}$；$|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$．

$$|CF|=\frac{|AB|}{2}-|AF|=\frac{|AF|+|BF|}{2}-|AF|=\frac{|BF|-|AF|}{2}=\frac{p\cos\alpha}{\sin^2\alpha}，|DF|=\frac{|CF|}{\cos\alpha}=\frac{p}{\sin^2\alpha}，故\frac{|DF|}{|AB|}=\frac{1}{2}.$$

【例 21】已知椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，$F_1$ 为椭圆的左焦点，过点 F_1 的直线交椭圆于 A，B 两点，AB 中垂线交 x 轴于点 D，是否存在实常数 λ，使 $|\overline{AB}|=\lambda|\overline{F_1D}|$ 恒成立．



【解析】设 $|AF_1|=m;|BF_1|=n;|AF_2|=4-m;|BF_2|=4-n,AB$ 倾斜角为 α，



由余弦定理：$m^2+(2)^2-(4-m)^2=2m\cdot2\cos\alpha$；整理得 $|AF_1|=\dfrac{3}{2-\cos\alpha}$；

$n^2+(2)^2-(4-n)^2=2n\cdot(2)\cos(180^\circ-\alpha)$；整理得 $|BF_1|=\dfrac{3}{2+\cos\alpha}$；

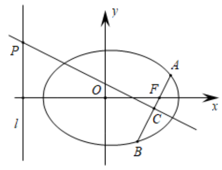
则 $|AB|=m+n=\dfrac{12}{4-\cos^2\alpha}$ $|CF_1|=\dfrac{|AB|}{2}-|BF_1|=\dfrac{|AF_1|-|BF_1|}{2}=\dfrac{\dfrac{3}{2-\cos\alpha}-\dfrac{3}{2+\cos\alpha}}{2}=\dfrac{3\cos\alpha}{4-\cos^2\alpha}$

$|DF_1|=\dfrac{|CF_1|}{\cos\alpha}=\dfrac{3}{4-\cos^2\alpha}$，故 $\lambda=\dfrac{|AB|}{|DF_1|}=4$．

【例 22】（2015•江苏卷）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且右焦点 F 到左准线 l 的距离为 3.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）过 F 的直线与椭圆交于 A，B 两点，线段 AB 的垂直平分线分别交直线 l 和 AB 于点 P，C，若 $|PC|=2|AB|$，求直线 AB 的方程.



【解析】（1）由题意可得，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且 $c+\dfrac{a^2}{c}=3$，解得 $c=1$，$a=\sqrt{2}$，

则 $b=1$，即有椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$；

（2）如图所示，设直线 AB 倾斜角为 θ，将 F 设为极坐标的极点，右焦点到右准线的距离设为 $p=\dfrac{b^2}{c}=1$，

根据椭圆的第二定义 $ep=\rho(1+e\cos\theta)$，即 $|AF|=\rho=\dfrac{ep}{1+e\cos\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}$，则 $|BF|=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta}$，

$|AB|=\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sin^2\theta}$ ①，

令 CP 交 x 轴于 Q，则 $|CF|=\dfrac{|AB|}{2}-|AF|=\dfrac{|BF|-|AF|}{2}=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+\cos\theta}}{2}=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin^2\theta}$

$|QF|=\dfrac{|CF|}{\cos\theta}=\dfrac{1}{1+\sin^2\theta}$，故 $|QF|=\dfrac{\sqrt{2}}{4}|AB|$ ②；$|PC|=2|AB|\Rightarrow|PQ|+|CQ|=\dfrac{3-|FQ|}{\sin\theta}+|FQ|\sin\theta=2|AB|$，将①和②代入得：$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，此时 AB 的方程为 $y=x-1$ 或 $y=-x+1$.

注意：在圆锥曲线的焦点弦和与 y 轴平行线（准线居多）上一点构成的特殊等腰三角形，比如等腰直角三角形，等边三角形，都需要用到焦点弦中垂线的性质.

52.（2019•山西月考）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$，过右焦点 F 作不垂直于 x 轴的弦交椭圆于 A，B 两点，AB 的垂直平分线交 x 轴于 N，则 $|NF|:|AB|$ 等于（　　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{2}{3}$

53.（2019•苏州模拟）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\dfrac{1}{2}$，P 是椭圆 C 上的一个动点，且 $\triangle PFF_2$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

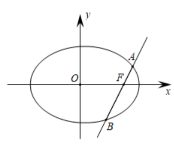
（2）设斜率不为零的直线 PF_2 与椭圆 C 的另一个交点为 Q，且 PQ 的垂直平分线交 y 轴于点 $T(0,\dfrac{1}{8})$，求直线 PQ 的斜率.

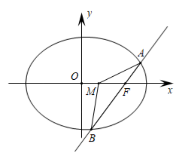
54.（2019•南开月考）已知椭圆的焦点在 x 轴上，一个顶点为 $(0,1)$，离心率为 $e=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，过椭圆的右焦点 F 的直线 l 与坐标轴不垂直，且交椭圆于 A，B 两点.

（1）求椭圆的方程；

（2）设点 C 是点 A 关于 x 轴的对称点，在 x 轴上是否存在一个定点 N，使得 C，B，N 三点共线？若存在，求出定点的坐标；若不存在，说明理由；

（3）设 $M(m,0)$ 是线段 OF（O 为坐标原点）上的一个动点，且 $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\perp\overrightarrow{AB}$，求 m 的取值范围.





达标训练

1. （2017•新课标I）已知 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，过 F 作两条互相垂直的直线 l_1，l_2，直线 l_1 与 C 交于 A、B 两点，直线 l_2 与 C 交于 D、E 两点，则 $|AB|+|DE|$ 的最小值为（　　）

A．16　　B．14　　C．12　　D．

2. （2014•新课标II）设 F 为抛物线 $C:y^2=3x$ 的焦点，过 F 且倾斜角为 $30°$ 的直线交 C 于 A，B 两点，O 为坐标原点，则 $\triangle OAB$ 的面积为（　　）

A．$\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B．$\frac{9\sqrt{3}}{8}$　　C．$\frac{63}{32}$　　D．$\frac{9}{4}$

3. （2014•新课标I）已知抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 是 l 上一点，Q 是直线 PF 与 C 的一个交点，若 $\overline{FP}=4\overline{FQ}$，则 $|QF|=$（　　）

A．$\frac{7}{2}$　　B．3　　C．$\frac{5}{2}$　　D．2

4. （2012•安徽）过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交该抛物线于 A，B 两点，O 为坐标原点．若 $|AF|=3$，则 $\triangle OAB$ 的面积为（　　）

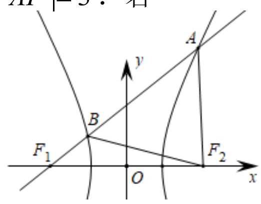
A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

5. （2019•湖南一模）已知抛物线 $E:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，其准线与 y 轴交于点 D，过点 F 作直线交抛物线 E 于 A、B 两点，若 $AB\perp AD$，且 $|BF|=|AF|+4$，则 p 的值为（　　）

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

6. （2019•长沙一模）已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 $A(\frac{p}{4},a)(a>0)$ 在 C 上，$|AF|=3$．若直线 AF 与 C 交于另一点 B，则 $|AB|$ 的值是（　　）

A．12　　B．10　　C．9　　D．4．5



7. （2017•湘潭二模）如图，F_1，F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过 F_1 的直线 l 与双曲线分别交于点 A，B，且 $A(1,\sqrt{3})$，若 $\triangle ABF_2$ 为等边三角形，则 $\triangle BF_1F_2$ 的面积为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$

C．$\sqrt{3}$　　D．2

8. （2018•株洲一模）已知抛物线 $C_1:y^2=4x$ 和圆 $C_2:(x-1)^2+y^2=1$，直线 $y=k(x-1)$ 与 C_1,C_2 依次相交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$ 四点（其中 $x_1<x_2<x_3<x_4$），则 $|AB|\cdot|CD|$ 的值为（　　）

A．1　　B．2　　C．$\frac{k^2}{4}$　　D．k^2

9. （2018•石家庄模拟）过抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A、B 两点，点 C 在直线 $y=-1$ 上，若 $\triangle ABC$ 为等边三角形，则其边长为（　　）

A．11　　B．12　　C．13　　D．14

10. （2012•重庆）过抛物线 $y^2=2x$ 的焦点 F 作直线交抛物线于 A,B 两点，若 $|AB|=\frac{25}{12}$，$|AF|<|BF|$，则 $|AF|=$_________．

11. （2018•全国II卷）设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 且斜率为 $k(k>0)$ 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，$|AB|=8$．

（1）求 l 的方程；

（2）求过点 A，B 且与 C 的准线相切的圆的方程

12. （2014•新课标II）设 F_1,F_2 分别是 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左，右焦点，M 是 C 上一点且 MF_2 与 x 轴垂直，直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N．

（1）若直线 MN 的斜率为 $\frac{3}{4}$，求 C 的离心率；

（2）若直线 MN 在 y 轴上的截距为 2，且 $|MN|=5|F_1N|$，求 a，b．

13.（2015•湖南）已知抛物线 $C_1:x^2=4y$ 的焦点 F 也是椭圆 $C_2:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点，C_1 与 C_2 的公共弦的长为 $2\sqrt{6}$，过点 F 的直线 l 与 C_1 相交于 A，B 两点，与 C_2 相交于 C，D 两点，且 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 同向．

（1）求 C_2 的方程；

（2）若 $|AC|=|BD|$，求直线 l 的斜率．

14.（2016•上海）双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，直线 l 过 F_2 且与双曲线交于 A，B 两点．

（1）直线 l 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$，$\triangle F_1AB$ 是等边三角形，求双曲线的渐近线方程；

（2）设 $b=\sqrt{3}$，若 l 的斜率存在，且 $(\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B})\cdot\overrightarrow{AB}=0$，求 l 的斜率．

15.（2013•湖南）已知 F_1，F_2 分别是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$ 的左、右焦点 F_1，F_2 关于直线 $x+y-2=0$ 的对称点是圆 C 的一条直径的两个端点．

（1）求圆 C 的方程；

（2）设过点 F_2 的直线 l 被椭圆 E 和圆 C 所截得的弦长分别为 a，b．当 ab 最大时，求直线 l 的方程．

16.（2011•天津）设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2．点 $P(a,b)$ 满足 $|PF_2|=|F_1F_2|$．

（1）求椭圆的离心率 e；

（2）设直线 PF_2 与椭圆相交于 A，B 两点，若直线 PF_2 与圆 $(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2=16$ 相交于 M，N 两点，且 $|MN|=\dfrac{5}{8}|AB|$，求椭圆的方程．

17.（2018•吉林期末）已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点与短轴的一个端点是等边三角形的三个顶点．且长轴长为 4．

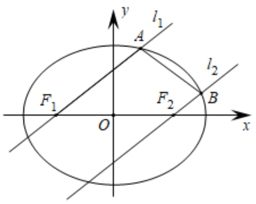
（1）求椭圆 E 的方程；

（2）若 A 是椭圆 E 的左顶点，经过左焦点 F 的直线 1 与椭圆 E 交于 C，D 两点，求 $\triangle OAD$ 与 $\triangle OAC$ 的面积之差的绝对值的最大值．（O 为坐标原点）

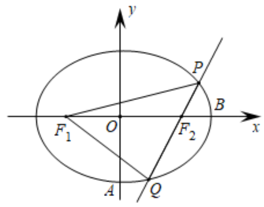
18.（2018•衡阳一模）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，离心率为 $\dfrac{1}{2}$，直线 $y=1$ 与 C 的两个交点间的距离为 $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）分别过 F_1、F_2 作 l_1、l_2 满足 $l_1 // l_2$，设 l_1、l_2 与 C 的上半部分分别交于 A、B 两点，求四边形 ABF_2F_1 面积的最大值．



18题图



19题图

19.（2018•河南模拟）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，过点 $A(0,-b)$ 和 $B(a,0)$ 的直线与原点的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

（1）求椭圆的方程；

（2）设 F_1、F_2 为椭圆的左、右焦点，过 F_2 作直线交椭圆于 P、Q 两点，求 $\triangle PQF_1$ 的内切圆半径 r 的最大值．

20.（2019•汕头一模）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，离心率为 $\dfrac{1}{2}$，点 A 在椭圆 C 上，$|AF_1|=2$，$\angle F_1AF_2=60^\circ$，过 F_2 与坐标轴不垂直的直线 l 与椭圆 C 交于 P，Q 两点．

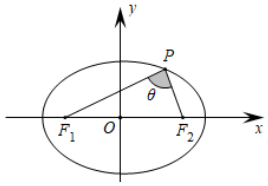
（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若 P，Q 的中点为 N，在线段 OF_2 上是否存在点 $M(m,0)$，使得 $MN\perp PQ$？若存在，求实数 m 的取值范围；若不存在，说明理由．

专题2 焦点三角形问题

第一讲 椭圆焦点三角形的性质

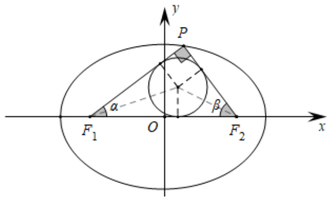
椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 焦点为 F_1， F_2，P 为椭圆上的点， $\angle F_1PF_2=\theta$，则 $S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=b^2\tan\frac{\theta}{2}$；



证明：设 $PF_1=m,PF_2=n$

$$\begin{cases} m+n=2a(1) \\ (2c)^2=m^2+n^2-2mn\cos\theta(2) \\ S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}mn\sin\theta(3) \end{cases}\quad (1)^2-(2)\text{：}mn=\frac{2b^2}{1+\cos\theta}\ \therefore S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=b^2\cdot\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=b^2\tan\frac{\theta}{2}$$

推论与应用：（注意：r 为内切圆半径）



（1）直角三角等面积法：如右图，当 $PF_1\perp PF_2$ 时，有 $S_{\triangle F_1PF_2}=b^2=\frac{2c|y_p|}{2}\Rightarrow|y_p|=\frac{b^2}{c}$；

$S_{\triangle F_1PF_2}=b^2=\frac{mn}{2}\Rightarrow mn=2b^2$；$r=a-c$， $e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|+|PF_2|}=\frac{|F_1F_2|}{|F_1F_2|(\sin\alpha+\sin\beta)}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\alpha+45^\circ)}$.

（2）任意角度的等面积法： $S_{\triangle F_1PF_2}=c|y_p|=b^2\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}\tan\theta=(a+c)r$.

（3）最大面积、最大夹角问题：当点 P 位于椭圆的短轴顶点时， $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{2c|y_p|}{2}=c|y_p|=bc$ 取最大值，根据等面积原理，此时 $S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}=bc\Rightarrow\tan\frac{\theta}{2}=\frac{c}{b}$.

（4）直角顶点的讨论：当 $S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}=bc$ 时， α 取得最大值，若 $\theta>90^\circ$，则 $\frac{\theta}{2}>45^\circ$， $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{c}{b}>1$；同理，若 $\theta=90^\circ$，则 $\frac{\theta}{2}=45^\circ$， $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{c}{b}=1$；若 $\theta<90^\circ$，则 $\frac{\theta}{2}<45^\circ$， $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{c}{b}<1$． 在分析直角顶点个数时，当 $c>b$ 时，$PF_1\perp PF_2$ 有四个点 P 存在；当 $c=b$ 时，$PF_1\perp PF_2$ 有两个点 P 存在；当 $c<b$ 时，$PF_1\perp PF_2$ 无点 P 存在.（注意： $PF_1\perp PF_2$ 与 $Rt\triangle PF_1F_2$ 的区别）

（5）已知 θ 的度数，求椭圆离心率的取值范围：假设 θ 为椭圆的最大角，则 $1>e\geq\sin\frac{\theta}{2}$.

【例 1】已知椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$， F_1、F_2 为焦点，点 P 为椭圆上一点， $\angle F_1PF_2=30^\circ$，求 $S_{\triangle PF_1F_2}$.

【解析】设 $PF_1=m,PF_2=n$. $\begin{cases} m+n=10(1) \\ 6^2=m^2+n^2-2mn\cos30^\circ(2) \\ S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}mn\sin30^\circ(3) \end{cases}$ $mn=\frac{2\times16}{1+\cos30^\circ}$ $S_{\triangle F_1PF_2}=32-16\sqrt{3}$.

【秒杀解法】 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}mn\sin30^\circ=\frac{1}{2}\frac{\left[(m+n)^2-6^2\right]\sin30^\circ}{2+2\cos30^\circ}=\frac{1}{4}\frac{(10^2-6^2)\sin30^\circ}{1+\cos30^\circ}=32-16\sqrt{3}$.

【例 2】已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点， F_1、F_2 是椭圆的两个焦点，若 $\angle PF_1F_2=60^\circ,\angle PF_2F_1=30^\circ$，则该椭圆的离心率为（　　）

A. $\sqrt{3}-1$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $2(\sqrt{3}-1)$　　D. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

【解析】 $\angle PF_1F_2=60^\circ,\angle PF_2F_1=30^\circ$ 可知： $e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{|F_1F_2|\sin30^\circ+|F_1F_2|\sin60^\circ}=\sqrt{3}-1$.

【例 3】已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上的一点，F_1、F_2 是该椭圆的两个焦点,若 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 $\frac{1}{2}$，则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的值为（　　）

A．$\frac{3}{2}$　　B．$\frac{9}{4}$　　C．$-\frac{9}{4}$　　D．0

【解析】利用等面积法：$S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}\tan\theta=(a+c)r\Rightarrow 3\tan\frac{\theta}{2}=(2+1)\times\frac{1}{2}\Rightarrow\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$；

$\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{4}{3}$；$S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}\cdot\frac{4}{3}\Rightarrow\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\frac{9}{4}$．

【例 4】椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的焦点分别为 F_1、F_2，P 是椭圆上位于第一象限的点，若△PF_1F_2 的内切圆半径为 $\frac{4}{3}$，则点 P 的纵坐标为（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．$2\sqrt{3}$

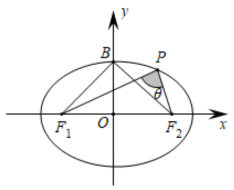
【解析】利用等面积法：$S_{\triangle F_1PF_2}=c|y_P|=(a+c)r\Rightarrow|y_P|=3$．

【例 5】若椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的两个焦点 F_1、F_2，试问：椭圆上是否存在点 P，使 $\angle F_1PF_2=90°$？存在，求出点 P 的纵坐标；否则说明理由．

性质：当点 P 从右至左运动时，$\angle F_1PF_2$ 由锐角变成直角，又变成钝角，过了 Y 轴之后，对称地由钝角变成直角再变成锐角，并且发现当点 P 与短轴端点重合时，$\angle F_1PF_2$ 达到最大．

【解析】$c^2<b^2$，$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{c}{b}<1$，则 $\frac{\theta}{2}<45°$，$PF_1\perp PF_2$ 无点 P 存在．

【例 6】椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 F_1、F_2，点 P 为其上动点，当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时，点 P 横坐标的取值范围是_________．



【解析】根据上题的性质，当 $PF_1\perp PF_2$ 时，有 $S_{\triangle F_1PF_2}=b^2=\frac{2c|y_P|}{2}\Rightarrow|y_P|=\frac{b^2}{c}$，$|y_P|>\frac{b^2}{c}=\frac{4}{\sqrt{5}}$ 时，$\angle F_1PF_2$ 为钝角，故 $x\in\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$．

【例 7】（2019•新课标 II）已知 F_1，F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点，P 为 C 上的点，O 为坐标原点．

（1）若 ΔPOF_2 为等边三角形，求 C 的离心率；

（2）如果存在点 P，使得 $PF_1\perp PF_2$，且△ F_1PF_2 的面积等于 16，求 b 的值和 a 的取值范围．

【解析】（1）略 ••• $e=\sqrt{3}-1$

（2）$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则

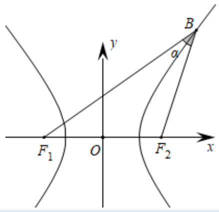
$m^2+n^2=4c^2\Rightarrow(m+n)^2=m^2+n^2+2mn=4c^2+4S_{F1}PF_2=4a^2\Rightarrow S_{\Delta F_1PF_2}=b^2$，故 $b=4$，由于

$S_{\Delta F_1PF_2}=16=c|y_p|\Rightarrow|y_p|=\frac{16}{c}\le 4\Rightarrow c\ge 4$，从而 $a^2=b^2+c^2\ge 2b^2=32$，故 $a\ge 4\sqrt{2}$，所以 $b=4$，

的取值范围为 $\left[4\sqrt{2},+\infty\right]$．

第二讲 双曲线焦点三角形性质

双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 焦点为 F_1、F_2，B 为双曲线上的点，$\angle F_1BF_2=\alpha$，则 $S_{\triangle F_1BF_2}=b^2\cdot\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos a}=\dfrac{b^2}{\tan\dfrac{\alpha}{2}}$．



证明：$\begin{cases}|m-n|=2a(1)\\(2c)^2=m^2+n^2-2mn\cos\alpha(2)\\S_{\Delta F_1BF_2}=\dfrac{1}{2}mn\sin\alpha(3)\end{cases}$　　$(1)^2-(2)$得：$mn=\dfrac{2b^2}{1-\cos\alpha}$

代入（3），得：$S_{\triangle F_1BF_2}=b^2\cdot\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=b^2\cdot\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{b^2}{\tan\dfrac{\alpha}{2}}$．

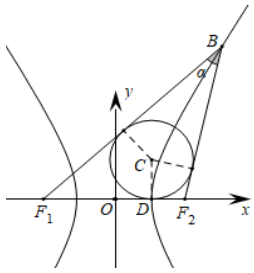
推论与应用：

（1）直角三角等面积法：当 $BF_1\perp BF_2$ 时，有 $S_{\Delta F_1BF_2}=b^2=\dfrac{2c|y_B|}{2}\Rightarrow|y_B|=\dfrac{b^2}{c}$；$b^2=\dfrac{mn}{2}\Rightarrow mn=2b^2$；

$$e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{\big||BF_1|-|BF_2|\big|}=\frac{|F_1F_2|}{|F_1F_2|\cos\angle BF_1F_2-|F_1F_2|\cos\angle BF_1F_2}=\frac{1}{\sqrt{2}\left|\sin(\angle BF_1F_2-45^\circ)\right|}$$

（2）任意角度的等面积法：；$S_{\triangle F_1BF_2}=c|y_B|=\dfrac{b^2}{\tan\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}\tan\alpha$

（3）内切圆的圆心横坐标一定等于 $|a|$；证：如图，$|F_1D|-|F_2D|=|F_1B|-|F_2B|=2a=(c+x_D)-(c-x_D)$；



（4）椭圆双曲线共焦点三角形的问题：如图，椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 和双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 共焦点，由于两个式子 a,b 不同，将椭圆写成 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1(m>0,n>0)$，双曲线写成 $\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=1(p>0,q>0)$ 可以知道

$S_{\triangle F_1PF_2}=n\cdot\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=q\cdot\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\Rightarrow\dfrac{n}{1+\cos\alpha}=\dfrac{q}{1-\cos\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{n-q}{n+q}$，$|PF_1|\cdot|PF_2|=n+q$

①当 $PF_1\perp PF_2$ 时，椭圆和双曲线的离心率 $e_{椭}=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{|F_1F_2|}{|PF_1|+|PF_2|}$；$e_{双}=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{|F_1F_2|}{\big||PF_1|-|PF_2|\big|}$；

$$\frac{1}{e_{椭}{}^2}+\frac{1}{e_{双}{}^2}=\frac{(|PF_1|+|PF_2|)^2}{|F_1F_2|^2}+\frac{(|PF_1|-|PF_2|)^2}{|F_1F_2|^2}=\frac{2\left(|PF_1|^2+|PF_2|^2\right)}{|F_1F_2|^2}=2$$

②当 $\angle F_1PF_2=\alpha$ 时，一定有 $\dfrac{1\text{-}\cos\alpha}{e_{椭}^2}+\dfrac{1+\cos\alpha}{e_{双}^2}=2\Rightarrow\dfrac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{e_{椭}^2}+\dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{e_{双}^2}=1$．

证明：$\dfrac{a_{椭}^2-c^2}{1+\cos\alpha}=\dfrac{c^2-a_{双}^2}{1-\cos\alpha}\Rightarrow\dfrac{\dfrac{1}{e_{椭}^2}-1}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\dfrac{1}{e_{双}^2}}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}\Rightarrow\dfrac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{e_{椭}^2}+\dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{e_{双}^2}=1$．

【例 8】已知 F_1、F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点，椭圆上一点 P 使 $\angle F_1PF_2=90°$，求椭圆离心率 e 的取值范围.

【解析】利用焦点三角形性质，设短轴一端点为 B 则 $S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\tan 45°=b^2$ $\le S_{\Delta F_1BF_2}=\frac{1}{2}\times 2c\times b=bc\Rightarrow b\le c\quad\Rightarrow b^2\le c^2\quad\Rightarrow a^2-c^2\le c^2\Rightarrow e^2=\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{1}{2}$，故 $\frac{\sqrt{2}}{2}\le e<1$.

【例 9】已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在椭圆上，若 P、F_1、F_2 是一个直角三角形的三个项点，$|PF_1|>|PF_2|$，则 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的值是________.

【解析】若 F_1 或 F_2 是直角顶点，则点 P 到 x 轴的距离为半通径的长 $\frac{b^2}{a}=\frac{4}{3}$，$|PF_1|=2a-|PF_2|=\frac{14}{3}$ $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{7}{2}$；$\tan\frac{\theta}{2}_{\max}=\frac{c}{b}>1$ 则 $\frac{\theta}{2}_{\max}>45°$，则当 P 是直角顶点时，则 $S_{\triangle F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}=4\tan 45°=4=\frac{|PF_1||PF_2|}{2}$，又 $|PF_1|+|PF_2|=2a=6$，故 $|PF_1|=4$；$|PF_2|=2$；$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=2$.

【例 10】已知 P 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 上的一点，F_1、F_2 是两焦点,且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为(　　)

A. 6　　B. 4　　C. 2　　D. 1

【解析】$S_{\triangle F_1PF_2}=b^2=1$.

【例 11】设 P 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 右支上的一个动点，F_1、F_2 为左右两个焦点,在 $\triangle PF_1F_2$ 中,令 $\angle PF_1F_2=\alpha$，$\angle PF_2F_1=\beta$，则 $\tan\frac{\alpha}{2}\div\tan\frac{\beta}{2}$ 的值为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $3-2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. 与 P 的位置有关

【解析】根据题意可得 $\angle PF_1F_2=\alpha$，$\angle PF_2F_1=\beta$，则 $\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}$ 交点一定为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心．如图 2，$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{CD}{F_1D}$；$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{CD}{F_2D}$；$\tan\frac{\alpha}{2}\div\tan\frac{\beta}{2}=\frac{r}{a+c}\cdot\frac{c-a}{r}=\frac{c-a}{c+a}=\frac{1}{3}$.

【例 12】设 F_1、F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点，若双曲线上存在点 A，使 $\angle F_1AF_2=90°$，且 $|AF_1|=3|AF_2|$，则双曲线离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{15}}{2}$　　D. $\sqrt{5}$

【解析】$\because\angle F_1AF_2=90°$，且 $|AF_1|=3|AF_2|$ $\therefore\cos\angle PF_1F_2=\frac{3}{\sqrt{10}}$；$\sin\angle PF_1F_2=\frac{1}{\sqrt{10}}$；

故 $e=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{||AF_1|-|AF_2||}=\frac{|F_1F_2|}{||F_1F_2|\cos\angle PF_1F_2-|PF_2|\sin\angle PF_1F_2|}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

【例 13】双曲线 $\frac{x^2}{8}-y^2=1$ 的焦点为 F_1、F_2，点 P 为双曲线上的动点，当 $\overrightarrow{PF_2}\cdot\overrightarrow{PF_1}<0$ 时，点 P 的横坐标的取值范围是（　　）

A. $(-\frac{4\sqrt{5}}{3},\frac{4\sqrt{5}}{3})$

B. $(-\frac{4\sqrt{5}}{3},-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},\frac{4\sqrt{5}}{3})$

C. $(-\frac{4\sqrt{35}}{7},\frac{4\sqrt{35}}{7})$

D. $(-\frac{4\sqrt{35}}{7},-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},\frac{4\sqrt{35}}{7})$

【解析】$\because\overrightarrow{PF_2}\cdot\overrightarrow{PF_1}<0\ \therefore\angle F_1AF_2>90°\ \therefore$ 故 $a\le|x_p|<\frac{4\sqrt{5}}{3}$，选 B.

【例 14】已知椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 共焦点，两个公共焦点分别为 F_1、F_2，点 P 为两曲线的一个交点，那么 $\cos\angle F_1PF_2=$________；$|PF_1|\cdot|PF_2|=$________.

【解析】$S_{\triangle F_1PF_2}=2\cdot\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=1\cdot\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\Rightarrow\frac{2}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{1-\cos\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$，

$|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{2b_{椭}^2}{1+\cos\alpha}=\frac{2\times2}{1+\frac{1}{3}}=3$（或 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{2b_{双}^2}{1-\cos\alpha}=\frac{2\times1}{1+\frac{1}{3}}=3$）.

【例 15】已知 F_1，F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点，P 是它们的一个公共点．且 $\angle F_1PF_2=30°$，则椭圆和双曲线的离心率的平方和的最小值为（　　）

A．2　　B．1　　C．$\frac{3}{2}$　　D．$\frac{4}{3}$

【解析】根据 $S_{\triangle PF_1F_2}=b_{椭}^2\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{b_{双}^2}{\tan\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow\left(\frac{1}{e_{椭}^2}-1\right)\tan^2\frac{\alpha}{2}=1-\frac{1}{e_{双}^2}\Rightarrow\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{e_{椭}^2}+\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{e_{双}^2}=1$，故根据柯西不等式，$\left(e_{椭}^2+e_{双}^2\right)\left(\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{e_{椭}^2}+\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{e_{双}^2}\right)\geq\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\sin(15°+45°)\right)^2=\frac{3}{2}$.

第三讲　双曲线焦点到渐近线距离为b

定理一：双曲线 C：的焦点到两条渐近线的距离为常数 b；顶点到两条渐近线的距离为常数 $\frac{ab}{c}$

定理二：双曲线 C：上的任意点 P 到双曲线 C 的两条渐近线的距离的乘积是一个常数 $\frac{a^2b^2}{c^2}$；

证明：设 $P(x_1, y_1)$是双曲线上任意一点，该双曲线的两条渐近线方程分别是 $ax-by=0$ 和 $ax+by=0$，点 $P(x_1, y_1)$到两条渐近线的距离分别是 $\frac{|bx_1-ay_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$、$\frac{|bx_1+ay_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，乘积 $\frac{|bx_1-ay_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|bx_1+ay_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a^2b^2}{c^2}$.

【例 16】若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦点到渐近线的距离等于实轴长，则双曲线的离心率为________.

【解析】焦点到渐近线的距离等于实轴长，故 $b=2a$，$e^2=\frac{c^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2}=5$，所以 $e=\sqrt{5}$.

【例 17】已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为 F，若过点 F 且倾斜角为 60°的直线与双曲线的右支有且只有一个交点，则此双曲线离心率的取值范围是________.

【解析】双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，若过点 F 且倾斜角为 60° 的直线与双曲线的右支有一个交点，则该直线的斜率的绝对值小于等于渐近线的斜率 $\frac{b}{a}$，$\frac{b}{a}\geq3$，离心率 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}\geq4$，$\therefore e\geq2$.

【例 18】已知双曲线 C：$\frac{x^2}{4}-y^2=1$，P 是 C 上的任意点．求证：点 P 到双曲线 C 的两条渐近线的距离的乘积是一个常数．

【证明】设 $P(x_1, y_1)$是双曲线上任意一点，该双曲线的两条渐近线方程分别是 $x-2y=0$ 和 $x+2y=0$，点 $P(x_1, y_1)$到两条渐近线的距离分别是 $\frac{|x_1-2y_1|}{\sqrt{5}}$和$\frac{|x_1+2y_1|}{\sqrt{5}}$. 它们的乘积是 $\frac{|x_1-2y_1|}{\sqrt{5}}\cdot\frac{|x_1+2y_1|}{\sqrt{5}}=\frac{|x_1^2-4y_1^2|}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$.

∴点 P 到双曲线 C 的两条渐近线的距离的乘积是一个常数．

达标训练

1. 设 P 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 上一点，F_1,F_2 为焦点，如果 $\angle PF_1F_2=75^\circ$，$\angle PF_2F_1=15^\circ$，则椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

2. 已知 F_1、F_2 是椭圆的两个焦点，满足 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$ 的点 M 总在椭圆内部，则椭圆离心率的取值范围(　　)

A. $(0,1)$　　B. $(0,\frac{1}{2}]$　　C. $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$　　D. $[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

3. （2019•郑州一模）椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的焦点为 F_1，F_2，P 为椭圆上一点，若 $\angle F_1PF_2=60^\circ$，则△ F_1PF_2 的面积是（　　）

A. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{32\sqrt{3}}{3}$　　C. $16\sqrt{3}$　　D. $32\sqrt{3}$

4. 椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左右焦点为 F_1、F_2，P 是椭圆上一点，当△ F_1PF_2 的面积为1时，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的值为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. 6

5. 椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左右焦点为 F_1、F_2，P 是椭圆上一点，当△ F_1PF_2 的面积最大时，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的值为（　　）

A. 0　　B. 2　　C. 4　　D. -2

6. P 为双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$ 上一点，F_1，F_2 为左右焦点．若 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积是（　　）

A. 9　　B. 8　　C. $4\sqrt{7}$　　D. 以上都不是

7. P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 左支上的一点，F_1、F_2 分别是左、右焦点，且焦距为 $2c$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心的横坐标为（　　）

A. $-a$　　B. $-b$　　C. $-c$　　D. $a+b-c$

8. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1(a>0)$ 的左、右焦点为 F_1、F_2，若该双曲线上有一点 M 到点 F_2 的距离为18，且 $\triangle MF_1F_2$ 的内切圆圆心 I 的横坐标为 -4，则该双曲线的离心率为（　　）

A. $\frac{5}{4}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\sqrt{2}$

9. 已知 F_1、F_2 是两个定点，点 P 是以 F_1 和 F_2 为公共焦点的椭圆和双曲线的一个交点，并且 $PF_1\perp PF_2$，e_1 和 e_2 分别是上述椭圆和双曲线的离心率，则有（　　）

A. $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=4$　　B. $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=2$　　C. $e_1^2+e_2^2=4$　　D. $e_1^2+e_2^2=2$

10. 已知点 P 是以 F_1,F_2 为左、右焦点的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右支上一点，且满足 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，$\tan\angle PF_1F_2=\frac{1}{3}$，则此双曲线的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　D. $\sqrt{5}$

11. 若椭圆 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1(m>0,n>0)$ 和双曲线 $\frac{x^2}{r}-\frac{y^2}{q}=1(r>q>0)$ 有相同的焦点 F_1 和 F_2，P 是两曲线的一个交点，则 $|PF_2|\cdot|PF_2|$ 的值等于（　　）

A. m^2-r^2　　B. $\frac{1}{2}(m-r)$　　C. $m-r$　　D. $\sqrt{m}-\sqrt{r}$

12. 双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的两个焦点为F_1、F_2，点P在双曲线上，$S_{\triangle PF_1F_2}=\sqrt{3}$，则$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$等于（　　）

A．2　　B．$\sqrt{3}$　　C．-2　　D．$-\sqrt{3}$

13. 椭圆$\frac{x^2}{2m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$与双曲线$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{2n^2}=1$有公共焦点，则椭圆的离心率是（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{15}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{30}}{6}$

14. 已知F_1，F_2是椭圆C的两个焦点，P是C上的一点，若$PF_1\perp PF_2$，且$\angle PF_2F_1=60^\circ$，则C的离心率为（　　）

A．$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$2-\sqrt{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　D．$\sqrt{3}-1$

15.（2018•新课标III）已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{2}$，则点$(4,0)$到$C$的渐近线的距离为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

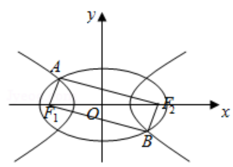
16.（2015•新课标I）已知$M(x_0,y_0)$是双曲线$C:\frac{x^2}{2}-y^2=1$上的一点，F_1，F_2是C的左、右两个焦点，若$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}<0$，则$y_0$的取值范围是（　　）

A．$(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$　　B．$(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6})$　　C．$(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3})$　　D．$(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$

17.（2014•湖北）已知F_1，F_2是椭圆和双曲线的公共焦点，P是它们的一个公共点．且$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，则椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为（　　）

A．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．3　　D．2

18.（2013•浙江）如图F_1、F_2是椭圆$C_1:\frac{x^2}{4}+y^2=1$与双曲线C_2的公共焦点，A,B分别是C_1、C_2在第二、四象限的公共点，若四边形AF_1BF_2为矩形，则C_2的离心率是（　　）



A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$

C．$\frac{3}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{6}}{2}$

19.（2018•鹰潭期末）已知椭圆和双曲线有共同的焦点F_1,F_2，P是它们的一个交点，且$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，记椭圆和双曲线的离心率分别为$e_1$，$e_2$，则$e_1\cdot e_2$的最小值为（　　）

A．3　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

20.（2019•保山一模）设F_1，F_2是双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，$O$是坐标原点，点$P$在双曲线$C$的右支上且$|F_1F_2|=2|OP|$，$\triangle PF_1F_2$的面积为$a^2$，则双曲线$C$的离心率为（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．4　　D．2

21.（2019•深圳一模）已知F_1，F_2是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左，右焦点，过$F_2$的直线与椭圆交于$P$，$Q$两点，$PQ\perp PF_1$，且$|QF_1|=2|PF_1|$，则$\triangle PF_1F_2$与$\triangle QF_1F_2$的面积之比为（　　）

A．$2-\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{2}-1$　　C．$\sqrt{2}+1$　　D．$2+\sqrt{3}$

22.（2018•南开期末）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦点到渐近线的距离是其顶点到渐近线距离的3倍，则双曲线的渐近线方程是（　　）

A．$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}x$　　B．$y=\pm\sqrt{2}x$　　C．$y=\pm2\sqrt{2}x$　　D．$y=\pm3x$

23.（2018•铜官月考）已知F_1，F_2分别为椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的左右焦点，点P在椭圆上，当时$\angle F_1PF_2>60^\circ$，

则点 P 横坐标的取值范围是（　　）

A．$(-2,-\frac{4\sqrt{2}}{3})\cup(\frac{4\sqrt{2}}{3},2)$　　B．$(-\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3})$

C．$(-\frac{4\sqrt{2}}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3})$　　D．$[-2,-\frac{2\sqrt{6}}{3})\cup(\frac{2\sqrt{6}}{3},2]$

24．已知 F_1、F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0b>0)$ 的两个焦点，p 为椭圆 C 上的一点，且 $\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$.若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9，则 $b=$________.

25．已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两焦点分别为 F_1,F_2，若椭圆上存在一点 P，使得 $\angle F_1PF_2=120^0$，则椭圆的离心率 e 的取值范围为________.

26．已知椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在椭圆上，若 P、F_1、F_2 是一个直角三角形三个顶点，则点 P 到 x 轴的距离为________.

27．已知椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的两个焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在椭圆上，若 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{1}{2}$，则 $\cos\angle F_1PF_2=$________.

28．已知 F_1、F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0且a\neq b)$ 的两个焦点，P 为双曲线右支上异于顶点的任意一点，O 为坐标原点．下面四个命题：① $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心必在直线 $x=a$ 上；② $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心必在直线 $x=b$ 上；③ $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心必在直线 OP 上；④ $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心必通过点 $(a,0)$．其中真命题的代号是________.

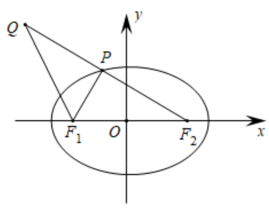
29．（2018•江苏）在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 $F(c,0)$ 到一条渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$，则其离心率的值为________.

30．（2016•浙江）设双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，若点 P 在双曲线上，且 $\triangle PF_1F_2$ 为锐角三角形，则 $|PF_1|+|PF_2|$ 的取值范围是________.

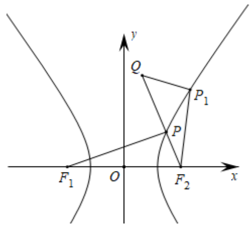
专题3　最值之声东击西

第一讲　声东击西求最值

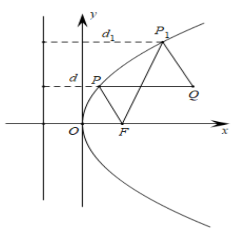
椭圆最值问题：求 $|PQ|-|PF_1|$ 最值，则构造 $|PQ|+2a-|PF_1|-2a=|PQ|+|PF_2|-2a$，利用三点共线求最值（如图 1 所示），此类型的题目叫做声东击西，即问左焦点，则连接右焦点，问右焦点则连左焦点，三点共线是关键．



如图1



如图2



如图3

双曲线最值问题：求 $|PQ|+|PF_1|$ 最值，则构造 $|PQ|+2a+|PF_2|-2a=|PQ|+|PF_2|+2a$，利用三点共线求最值（如图 2 所示）．

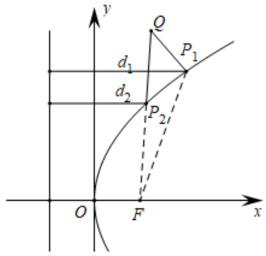
注意：由于椭圆和双曲线的第二定义已经不在高考范围内，关于问焦点则连接准线的类型题目只适合抛物线，这里不做详述．

抛物线最值问题：根据两点之间线段最短定理，可以知道 P 为抛物线上一点：

（1）当 $Q(x_Q,y_Q)$ 为抛物线内任意一点，则存在 $|PF|+|PQ|$ 的最小值，当 P、Q 两点的纵坐标相等时，即 $|PF|+|PQ|_{\min}=|EQ|=x_Q+\frac{p}{2}$（参考图 3，内部连准线）

（2）当 Q（x_Q,y_Q）为抛物线外任意一点，存在 $d+|PQ|$ 最小值，当 Q、P、F 三点共线时，

$(d+|PQ|)_{\min}=|FQ|=\sqrt{\left(x_Q-\frac{p}{2}\right)^2+y_Q{}^2}$（参考图 4，外部连焦点）



考图4

由此类比抛物线 $x^2=2py$ 的最值问题，把握内连准线，外找焦点.

【例 1】已知点 P 在抛物线 $y^2=4x$ 上，那么点 P 到点 $Q(2,-1)$ 的距离与点 P 到抛物线焦点距离之和的最小值为_________.

【解析】过点 P 作准线的垂线 l 交准线于点 R，由抛物线的定义知，$PQ+PF=PQ+PR$，当 P 点为抛物线与垂线 l 的交点时，$PQ+PR$ 取得最小值，最小值为点 Q 到准线的距离，因准线方程为 $x=-1$，故最小值为 3.

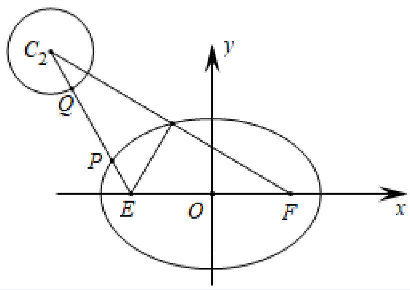
【例 2】已知点 P 是抛物线 $y^2=2x$ 上的动点，点 P 在 y 轴上的射影是 M，点 A 的坐标是 $A(\frac{7}{2},4)$，则 $|PA|+|PM|$ 的最小值是（　　）

A. $\frac{7}{2}$　　B. 4　　C. $\frac{9}{2}$　　D. 5

【解析】$(|PM|+|PA|)_{\min}=\left(d-\frac{p}{2}+|PA|\right)_{\min}=|AF|-\frac{P}{2}=\sqrt{\left(x_A-\frac{p}{2}\right)^2+y_A{}^2}-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$，选 C.

【例 3】（2018•深圳期末）点 P 在椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上，C_1 的右焦点为 F，点 Q 在圆 $C_2:x^2+y^2+6x-8y+21=0$ 上，则 $|PQ|-|PF|$ 的最小值为（　　）

A. $4\sqrt{2}-4$　　B. $4-4\sqrt{2}$　　C. $6-2\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{5}-6$



【解析】点 P 在椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上，如图：圆 $C_2:x^2+y^2+6x-8y+21=0$ 上，可得：$(x+3)^2+(y-4)^2=4$，圆心坐标 $(-3,4)$，半径为 2．由椭圆的定义可得：$|PE|+|PF|=2a=4$，$|PF|=4-|PE|$，则 $|PQ|-|PF|=|PQ|+|PE|-4$

由题意可得：$|PQ|-|PF|=|PQ|+|PE|-4=|C_2E|-2-4=2\sqrt{5}-6$，故选：$D$.

达标训练

1.（2018•城北期末）已知点 $A(4,-2)$，F 为抛物线 $y^2=8x$ 的焦点，点 M 在抛物线上移动，当 $|MA|+|MF|$ 取最小值时，点 M 的坐标为（　　）

A. $(0,0)$　　B. $(1,-2\sqrt{2})$　　C. $(2,-4)$　　D. $(\frac{1}{2}，-2)$

2.（2019•济宁一模）已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，实轴长为 4，渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，$|MF_1|-|MF_2|=4$，点 N 在圆 $x^2+y^2-4y=0$ 上，则 $|MN|+|MF_1|$ 的最小值为（　　）

A．$2+\sqrt{7}$　　B．5　　C．6　　D．7

3．（2018•宜宾期末）P 是双曲线 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ 的右支上一点，M，N 分别是圆 $(x+10)^2+y^2=1$ 和 $(x-10)^2+y^2=4$ 上的点，则 $|PM|-|PN|$ 的最大值为（　　）

A．12　　B．13　　C．14　　D．15

4．（2019•奎文月考）已知 F 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左焦点，定点 $A(1,4)$，P 是双曲线右支上的动点，若 $|PF|+|PA|$ 的最小值是 9，则双曲线的离心率为（　　）

A．$\frac{5}{4}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

5．（2018•东安区期末）已知点 P 是抛物线 $y^2=2x$ 上的动点，F 为抛物线的焦点，$A(\frac{7}{2}，4)$，则 $|PF|+|PA|$ 的最小值是（　　）

A．$\frac{7}{2}$　　B．5　　C．$\frac{9}{2}$　　D．4

6．（2018•龙岗期末）已知 P 是抛物线 $y^2=8x$ 上的一个动点，Q 是圆 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ 上的一个动点，$N(2,0)$ 是一个定点，则 $|PQ|+|PN|$ 的最小值为（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．$\sqrt{2}+1$

7．（2018•定远期末）已知 P 为抛物线 $y^2=4x$ 上的任意一点，记点 P 到 y 轴的距离为 d，对于给定点 $A(4,5)$，则 $|PA|+d$ 的最小值为（　　）

A．$\sqrt{34}$　　B．$\sqrt{34}-1$　　C．$\sqrt{34}-2$　　D．$\sqrt{34}-4$

8．（2018•南关期末）设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上一点，M、N 分别是两圆：$(x+4)^2+y^2=1$ 和 $(x-4)^2+y^2=1$ 上的点，则 $|PM|+|PN|$ 的最小值、最大值的分别为（　　）

A．9，12　　B．8，11　　C．8，12　　D．10，12

9．（2018•九龙坡期末）设 F_1，F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{33}=1$ 的左、右焦点，P 为椭圆上任一点，点 M 的坐标为 $(8,5)$，则 $|PM|+|PF_1|$ 的最大值为_________.

10．（2018•德州期末）抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，点 $A(2,1)$，M 为抛物线上一点，且 M 不在直线 AF 上，则 $\triangle MAF$ 周长的最小值为_________.

11．（2018•嘉兴期末）已知点 P 是抛物线 $y^2=4x$ 上的一点，过 P 作直线 $x=-2$ 的垂线，垂足为 H，直线 l 经过原点，由 l 上的一点 Q 向圆 $C:(x+5)^2+(y-3)^2=2$ 引两条切线，分别切圆 C 于 M，N 两点，且 $\triangle MQN$ 为直角三角形，则 $|PQ|+|PH|$ 的最小值是_________.

12．（2018•宁波期末）已知 $P(x,y)$ 是抛物线 $y^2=8x$ 上的点，则 $\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}-x$ 的最大值是_________.

13．（2018•宜春期末）已知抛物线 $y^2=8x$ 的焦点 F 和 $A(1,2)$，点 P 为抛物线上的动点，则 $\triangle PAF$ 的周长取到最小值时点 P 的坐标为_________.

14．（2018•荆门月考）F 是双曲线 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$ 的左焦点，$A(1,4)$，P 是双曲线右支上的动点，则 $|PF|+|PA|$ 的最小值为_________.

15．（2019•汕头一模）设双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{6}=1$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线 l 交双曲线左支于 A，B 两点，则 $|AF_2|+|BF_2|$ 的最小值等于_________.

专题 4 椭圆双曲线设点设线基础

第一讲 椭圆联立与设点设线

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与直线$l:y=kx+m$相交于$AB$两点，求$AB$的弦长.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$则$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx+m\end{cases}$,得$(b^2+k^2a^2)x^2+2a^2kmx+a^2m^2-a^2b^2=0\therefore\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{2a^2km}{b^2+k^2a^2}\\ x_1\cdot x_2=\frac{a^2m^2-a^2b^2}{b^2+k^2a^2}\end{cases}$（常规设点设线）

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{|x_2-x_1|^2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\frac{2ab\sqrt{b^2+k^2a^2-m^2}}{b^2+a^2k^2}$.

椭圆与直线交点的判别式：$\Delta=4a^2b^2(b^2+k^2a^2-m^2)$用来判断是否有交点问题.

面积问题：椭圆与直线$l:y=kx+m$相交与两点，$C(x_0,y_0)$为AB外任意一点，求$S_{\triangle ABC}$.设C到l的距离为d，则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}|AB|\frac{|kx_0-y_0+m|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|kx_0-y_0+m|\cdot ab\sqrt{b^2+k^2a^2-m^2}}{b^2+k^2a^2}$.

若椭圆中出现$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>0)$，或者椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$与过定点$(m,0)$的直线$l$，则直线设为$x=ky+m$，如此消去$x$，保留$y$，构造的方程如下：

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ x=ky+m\end{cases}$,得$(a^2+k^2b^2)y^2+2b^2kmy+b^2m^2-a^2b^2=0\Rightarrow\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{2^2km}{a^2+k^2b^2}\\ x_1\cdot x_2=\frac{b^2m^2-a^2b^2}{a^2+k^2b^2}\end{cases}$（就是将$x\rightleftharpoons y,a\rightleftharpoons b$）

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{|x_2-x_1|^2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+k^2}\frac{2ab\sqrt{a^2+k^2b^2-m^2}}{a^2+b^2k^2}$.

椭圆与直线交点的判别式：$\Delta=4a^2b^2(a^2+k^2b^2-m^2)$用来判断是否有交点问题.

【例 1】已知椭圆方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$与直线方程$l:y=x+\frac{1}{2}$相交于A、B两点，求AB的弦长.

【解析】设：$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$则$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{|x_2-x_1|^2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

将$y=x+\frac{1}{2}$代入$\frac{x^2}{2}+y^2=1$得：$3x^2+2x-\frac{3}{2}=0\therefore\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{2}{3}\\ x_1\cdot x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$ $\therefore|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{|x_2-x_1|^2}=\frac{2\sqrt{11}}{3}$.

【例 2】(2012•北京卷)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个顶点为$A(2,0)$,离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.直线$y=k(x-1)$与椭圆$C$交于不同的两点$M$、$N$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）当$\triangle AMN$得面积为$\frac{\sqrt{10}}{3}$时，求k的值.

【解析】(1) $a=2;e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow c=\sqrt{2},b=\sqrt{2}$；故椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$；(II) $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}|MN|d$，设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$则$|MN|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$；将$y=kx-k$代入

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 得：$(4k^2+2)x^2-8k^2x-4k^2-8=0\therefore\begin{cases}x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+2}\\x_1\cdot x_2=\frac{-4k^2-8}{4k^2+2}\end{cases}$；$d=\frac{|2k-0-k|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$；

$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}|MN|d=\frac{|k|\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+4k^2-k^2}}{2+4k^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}\Rightarrow7k^4-2k^2-5=0$，即 $(7k^2+5)(k^2-1)=0\Rightarrow k=\pm1$.

方法二：令 $k=\frac{1}{t}\Rightarrow x=ty+1$，联立得 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\\x=ty+1\end{cases}\Rightarrow(t^2+2)y^2+2ty-3=0\Rightarrow\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-2t}{t^2+2}\\y_1\cdot y_2=\frac{-3}{t^2+2}\end{cases}$

$d=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$，$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}|MN|d=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4+2t^2-1}}{2+t^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}\Rightarrow t^2=1$.

显然，方法二的设点设线更加方便快捷，双曲线的设点设线和椭圆是一致的，也是同样的判别规律.

【例 3】（2014•新课标I）已知点 $A(0,-2)$，椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，F 是椭圆的右焦点，直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，O 为坐标原点.

（1）求 E 的方程；

（2）设过点 A 的直线 l 与 E 相交于 P，Q 两点，当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时，求 l 的方程.

【解析】（1）由条件知 $\frac{2}{c}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，得 $c=\sqrt{3}$ 又 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $a=2$，$b^2=a^2-c^2=1$，故 E 的方程 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）法一：依题意当 $l\perp x$ 轴不合题意，故设直线 $l:y=kx-2$，设 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$

将 $y=kx-2$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，得 $(1+4k^2)x^2-16kx+12=0$，当 $\Delta=16(4k^2-3)>0$，即 $k^2>\frac{3}{4}$ 时，从而

$|PQ|=\sqrt{k^2+1}|x_1-x_2|=\frac{4\sqrt{k^2+1}\bullet\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$，又点 O 到直线 PQ 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$，所以 $\triangle OPQ$ 的面积

$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}d|PQ|=\frac{4\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$，设 $\sqrt{4k^2-3}=t$，则 $t>0$，$S_{\triangle OPQ}=\frac{4t}{t^2+4}=\frac{4}{t+\frac{4}{t}}\leqslant1$，当且仅当 $t=2$，$k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

等号成立，且满足 $\Delta>0$，所以当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时，l 的方程为：$y=\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$ 或 $y=-\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$.

法二：由于 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 中 $b=1$，故直线 $l:x=k(y+2)$，设 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$

将 $x=k(y+2)$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，得 $(4+k^2)y^2+4k^2y+4k^2-4=0$，当 $\Delta=16(4-3k^2)>0$，即 $k^2<\frac{4}{3}$ 时，从而

$|PQ|=\sqrt{k^2+1}|y_1-y_2|$，点 O 到 PQ 的距 $d=\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}$，所以

$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}d|PQ|=\frac{4|k|\sqrt{4-3k^2}}{4+k^2}=\sqrt{\frac{16k^2(4-3k^2)}{(4+k^2)^2}}$，设 $4+k^2=t$，则 $\frac{16}{3}>t>4$，$S_{\triangle OPQ}=4\sqrt{-\frac{64}{t^2}+\frac{28}{t}-3}$，当且仅当 $t=\frac{32}{7}$，$k=\pm\frac{2}{\sqrt{7}}$ 等号成立，且满足 $\Delta>0$，所以当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时，l 的方程为：$y=\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$ 或 $y=-\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$.

注意：构造函数求最值一般要换元，一般以取判别式（$t=\sqrt{k^2a^2+b^2-m^2}$ 或者 $t=\sqrt{k^2b^2+a^2-m^2}$）以及分母（$t=\sqrt{k^2a^2+b^2}$ 或者 $t=\sqrt{k^2b^2+a^2}$）作为主元，之后进行对勾函数或者二次函数的构造求出最值.

第二讲 双曲线的弦长公式与面积（不过焦点的弦）

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与直线 $l:y=kx+m$ 相交于 AB 两点，求 AB 的弦长.

设则 $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

将 $y=kx+m$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 得：$(b^2-k^2a^2)x^2-2a^2kmx-a^2m^2-a^2b^2=0\therefore\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{2a^2km}{b^2-k^2a^2}\\x_1\cdot x_2=\frac{-a^2m^2-a^2b^2}{b^2-k^2a^2}\end{cases}$

$\therefore|AB|==\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\frac{2ab\sqrt{b^2-k^2a^2+m^2}}{|b^2-a^2k^2|}$

双曲线与直线交点的判别式：$\Delta=4a^2b^2(b^2-k^2a^2+m^2)$ 用来判断是否有两个交点问题.

面积问题：双曲线与直线 $l:y=kx+m$ 相交与两点，$C(x_0,y_0)$ 为 AB 外任意一点，求 $S_{\triangle ABC}$。设 C 到 l 的距离为 d，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}|AB|\frac{|kx_0-y_0+m|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|kx_0-y_0+m|\cdot ab\sqrt{b^2-k^2a^2+m^2}}{|b^2-k^2a^2|}$

直线与双曲线交点问题：

（1）直线 $y=kx+m$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 有两个交点时，$\Delta=4a^2b^2(b^2-k^2a^2+m^2)>0$；$\Delta=4a^2b^2(b^2-k^2a^2+m^2)=0$，有仅有一个交点；$\Delta=4a^2b^2(b^2-k^2a^2+m^2)<0$，没有交点；

（2）过点 $P(x_0,y_0)$ 的直线与双曲线有一个交点情况需要分类讨论：

①当 $\frac{y_0}{x_0}=\pm\frac{b}{a}$ 时，点 P 在渐近线上，当 $x_0=\pm a$ 时，有两条直线（一条切线，一条与另一条渐近线平行的直线）；②当 $x_0\neq\pm a$ 时，且在双曲线外部，有三条直线（两条切线，一条与另一条渐近线平行的直线）；

③当 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}>1(a>0,b>0)$ 时（点 P 在双曲线内部），一定有交点，当直线斜率 $k=\pm\frac{b}{a}$ 时，有一交点，当直线斜率 $k\neq\pm\frac{b}{a}$ 时，有两个交点.

【例 4】已知直线 $y=x+1$ 与双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 交于 A、B 两点，求 AB 的弦长.

【解析】设：$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 则 $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

将 $y=x+1$ 代入 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 得：　$3x^2-2x-5=0\therefore\begin{cases}x_1+x_2=\frac{2}{3}\\x_1\cdot x_2=-\frac{5}{3}\end{cases}\therefore|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{|x_2-x_1|^2}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

【例 5】动点 P 到 $A(-1,0)$ 及 $B(1,0)$ 连线的斜率之积为 $m(m>0)$ 且 P 的轨迹 E 的离心率为 $\sqrt{2}\,m$.

（1）求 E 的方程；

（2）设直线 l: $\sqrt{3}x+y=2$ 交曲线 E 于 M、N，求△AMN 的面积.

（3）【解析】(1)设点 $P(x,y)$　$\frac{y-0}{x+1}\cdot\frac{y-0}{x-1}=m\Rightarrow mx^2-y^2=m(m>0)$；故动点轨迹为双曲线，且离心率为 $\sqrt{2}\,m$，即 $x^2-\frac{y^2}{m}=1$　$\frac{c^2}{a^2}=\frac{1+m}{1}=2m^2\Rightarrow m=1$；$E$ 的方程为 $x^2-y^2=1(x\neq\pm1)$

（4）(2) $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}|MN|d$，设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$ 则 $|MN|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$；将 $y=-\sqrt{3}x+2$ 代入 $x^2-y^2=1$ 得：$(-3+1)x^2+4\sqrt{3}x-5=0\therefore\begin{cases}x_1+x_2=2\sqrt{3}\\x_1\cdot x_2=\frac{5}{2}\end{cases}$；$d=\frac{|\sqrt{3}x_A+y_A-2|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|-\sqrt{3}-2|}{\sqrt{1+3}}$；

（5）$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}|MN|d=\frac{\sqrt{6}+4}{2}$.

【例 6】过双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 的右焦点 F 且斜率是 $\frac{3}{2}$ 的直线与双曲线的交点个数是（ ）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【解析】由于焦点位于双曲线内部，且 $k=\frac{b}{a}$，则直线与双曲线渐近线平行，故有仅有一个交点.

第三讲 过原点的向量乘积问题

椭圆与双曲线与直线 $y=kx+m$ 相交于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两点，O 为坐标原点，求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

解：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

将 $y=kx+m$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 得：

$$(b^2+k^2a^2)x^2+2a^2kmx+a^2m^2-a^2b^2=0$$

$$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-2a^2km}{b^2+k^2a^2}(1)\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{a^2(m^2-b^2)}{b^2+k^2a^2}(2)\end{cases}$$

将 $y=kx+m$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 得：

$$(b^2-k^2a^2)x^2-2a^2kmx-a^2m^2-a^2b^2=0$$

$$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{2a^2km}{b^2-k^2a^2}(1)\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{a^2(-m^2-b^2)}{b^2-k^2a^2}(2)\end{cases}$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2(3)$$

将（1）（2）分别代入（3）得：

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{(b^2+a^2)m^2-b^2a^2(1+k^2)}{b^2+k^2a^2}\text{椭圆}$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{(b^2-a^2)m^2-b^2a^2(1+k^2)}{b^2-k^2a^2}\text{双曲线}$$

【例 7】经过椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的一个焦点作倾斜角为 $45°$ 的直线，交椭圆于 A、B 两点.设 O 为坐标原点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 等于__________.

【解析】$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=x-1\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{(b^2+a^2)m^2-b^2a^2(1+k^2)}{b^2+k^2a^2}=\frac{(1+2)\times1-1\times2(1+1)}{1+2}=-\frac{1}{3}$.

【例 8】过双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 的右焦点 F 且斜率是 $\frac{3}{2}$ 的直线与双曲线的交点个数是（ ）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【解析】由于焦点位于双曲线内部，且 $k=\frac{b}{a}$，则直线与双曲线渐近线平行，故有仅有一个交点。

【例 9】经过椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的一个焦点作倾斜角为 $45°$ 的直线，交椭圆于 A,B 两点.设 O 为坐标原点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 等于__________.

【解析】$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=x-1\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{(b^2+a^2)m^2-b^2a^2(1+k^2)}{b^2+k^2a^2}=\frac{(1+2)\times1-1\times2(1+1)}{1+2}=-\frac{1}{3}$.

注意：椭圆与双曲线与直线 $l:y=kx+m$ 相交于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两点，O 为坐标原点，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，设原点到直线的距离为 d，则 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$.

$(b^2+a^2)m^2-b^2a^2(1+k^2)=0$ 椭圆　　$(b^2-a^2)m^2-b^2a^2(1+k^2)=0$ 双曲线

（1）$d^2=\frac{m^2}{1+k^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$（椭圆）　　$d^2=\frac{m^2}{1+k^2}=\frac{a^2b^2}{-a^2+b^2}$（双曲线）

（2）以 AB 线段为直径的圆过坐标原点 $O\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

【例 12】椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 与直线 $x+y=1$ 交于 P,Q 两点，且 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}$，求 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 的值.

【思路】$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{\left(b^2+a^2\right)m^2-b^2a^2\left(1+k^2\right)}{b^2+k^2a^2}=\frac{\left(b^2+a^2\right)\times1-b^2a^2\left(1+1\right)}{b^2+k^2a^2}=0\Rightarrow b^2+a^2=2b^2a^2\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=2$.

【例 13】已知椭圆中心在原点,焦点在 x 轴上，离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，过椭圆的右焦点且垂直于长轴的弦长为 $\sqrt{2}$.

（1）求椭圆的标准方程;

（2）已知直线 l 与椭圆相交于 P、Q 两点，O 为原点,且 $OP\perp OQ$.试探究点 O 到直线 l 的距离是否为定值?若是，求出这个定值；若不是，说明理由.

【思路】（1）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；（2）$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0\Rightarrow\left(b^2+a^2\right)m^2-b^2a^2\left(1+k^2\right)=0\Rightarrow d^2=\frac{m^2}{1+k^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

第四讲　圆锥曲线中非原点向量乘积的问题

任意长轴上定点向量乘积问题：设定点 $P(n,0)$

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x_1x_2+y_1y_2-n(x_1+x_2)+n^2=\frac{(a^2+b^2)m^2-a^2b^2(1+k^2)}{k^2a^2+b^2}+\frac{2a^2kmn}{k^2a^2+b^2}+n^2$$

通常求定值的问题，若 AB 过定点 $(x_0,0)$，则 $m=-kx_0$ 只需满足

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{(a^2+b^2)k^2x_0^2-a^2b^2(1+k^2)}{k^2a^2+b^2}-\frac{2a^2k^2x_0n}{k^2a^2+b^2}+n^2=\frac{k^2\left[(a^2+b^2)x_0^2-2a^2nx_0-a^2b^2\right]-a^2b^2}{k^2a^2+b^2}+n^2$$

则当仅当 $(2-e^2)x_0^2-2nx_0+c^2=0$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=n^2-a^2$（定值）

【例 14】（2019•濮阳一模）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点与上、下顶点构成直角三角形，以椭圆 C 的长轴长为直径的圆与直线 $x+y-2=0$ 相切.

（1）求椭圆 C 的标准方程;

（2）设过椭圆右焦点且不平行于 x 轴的动直线与椭圆 C 相交于 A、B 两点，探究在 x 轴上是否存在定点 E，使得 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$ 为定值？若存在，试求出定值和点 E 的坐标；若不存在，请说明理由.

【解析】（1）由题意知，$\begin{cases}b=c\\ a=\frac{|0+0-2|}{\sqrt{2}}\\ b^2+c^2=a^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=1\\ c=1\end{cases}$，则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）当直线的斜率存在时，设直线 $y=k(x-1)(k\neq0)$，联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，

$\Delta=8k^2+8>0$，$\therefore x_A+x_B=\frac{4k^2}{1+2k^2},x_Ax_B=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$. 假设 x 轴上存在定点 $E(x_0,0)$，使得 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$ 为定值，

$\therefore\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=(x_A-x_0,y_A)\cdot(x_B-x_0,y_B)=x_Ax_B-x_0(x_A+x_B)+x_0{}^2+y_Ay_B$

$=x_Ax_B-x_0(x_A+x_B)+x_0{}^2+k^2(x_A-1)(x_B-1)=(1+k^2)x_Ax_B-(x_0+k^2)(x_A+x_B)+x_0{}^2+k^2$

$=\frac{(2x_0{}^2-4x_0+1)k^2+(x_0{}^2-2)}{1+2k^2}$. 要使 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$ 为定值，则 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$ 的值与 k 无关，$\therefore 2x_0{}^2-4x_0+1=2(x_0{}^2-2)$，

解得 $x_0=\frac{5}{4}$，此时 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=-\frac{7}{16}$ 为定值，定点为 $(\frac{5}{4},0)$. 当直线的斜率不存在时，也满足条件.

注意：此题利用 $\left(2-e^2\right)\cdot1^2-2x_E\cdot1+c^2=\frac{3}{2}-2x_0+1=0\Rightarrow x_0=\frac{5}{4}$

【例 15】（2018•定州期末）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，过右焦点且垂直于 x 轴的直线 l_1 与椭圆 C 交于 A，B 两点，且 $|AB|=2$，直线 $l_2:y=k(x-m)(m\in R,m>\frac{3}{4})$ 与椭圆 C 交于 M，N 两点.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）已知点 $R(\frac{5}{4},0)$，若 $\overrightarrow{RM}\cdot\overrightarrow{RN}$ 是一个与 k 无关的常数，求实数 m 的值.

【解析】（1）联立 $\begin{cases}x=c\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$ 解得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，故 $\frac{2b^2}{a}=\sqrt{2}$，又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，联立三式，解得 $a=\sqrt{2}$，$b=1$，$c=1$，故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

（2）设 $M(x_1,\ y_1)N(x_2,\ y_2)$，联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=k(x-m)\end{cases}$，消元得 $(1+2k^2)x^2-4mk^2x+2k^2m^2-2=0$，

$\Delta=16m^2k^4-4(1+2k^2)(2k^2m^2-2)=8(2k^2-m^2k^2+1)$，$\therefore x_1+x_2=\frac{4mk^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2k^2-2}{1+2k^2}$，

$\overrightarrow{RM}\cdot\overrightarrow{RN}=(x_1-\frac{5}{4})(x_2-\frac{5}{4})+y_1y_2=x_1x_2-\frac{5}{4}(x_1+x_2)+\frac{25}{16}+k^2(x_1-m)(x_2-m)$

$=(1+k^2)x_1x_2-(\frac{5}{4}+mk^2)(x_1+x_2)+\frac{25}{16}+k^2m^2=\frac{(3m^2-5m-2)k^2-2}{1+2k^2}+\frac{25}{16}$

又 $\overrightarrow{RM}\cdot\overrightarrow{RN}$ 是一个与 k 无关的常数，$\therefore 3m^2-5m-2=-4$，即 $3m^2-5m+2=0$，$\therefore m_1=1$，$m_2=\frac{2}{3}$. $\because m>\frac{3}{4}$，

$\therefore m=1$，当 $m=1$ 时，$\Delta>0$，直线 l_2 与椭圆 C 交于两点，满足题意

注意：此题利用 $\left(2-e^2\right)\cdot m^2-2x_R\cdot m+c^2=\frac{3}{2}m^2-\frac{5}{2}m+1=0\Rightarrow m=\frac{2}{3},m=1$

半成品的结论可以记忆，也可以不记忆，此类型题，记忆了考试算起来就可以避免计算错误，不记忆结论也要记住一些套路，在圆锥曲线和直线的联立中，每一种联立的结论都是有必要记忆的，尤其在求弦长面积，向量乘积的运算过程中，可以达到事半功倍的效果.

达标训练

1.（2014•福建）设 P，Q 分别为圆 $x^2+(y-6)^2=2$ 和椭圆 $\frac{x^2}{10}+y^2=1$ 上的点，则 P，Q 两点间的最大距离是（　　）

A. $5\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{46}+\sqrt{2}$　　C. $7+\sqrt{2}$　　D. $6\sqrt{2}$

2.（2018•道里区月考）对任意的实数 m，直线 $y=mx+b$ 与椭圆 $x^2+4y^2=1$ 恒有公共点，则 b 的取值范围是（　　）

A. $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$　　B. $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$　　C. $[-2,2]$　　D. $(-2,2)$

3.（2018•闵行期末）直线 $y=kx-2$ 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 有且仅有一个公共点，则 $k=$________.

4.（2017•大连期末）直线 $y=x-1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 相交于 A，B 两点，则 $|AB|=$________.

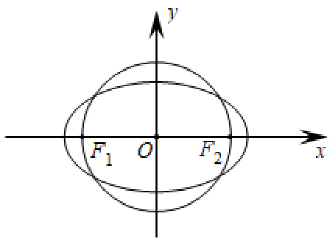
5.（2018•江苏）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 过点 $(\sqrt{3},\frac{1}{2})$，焦点 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，圆 O 的直径为 F_1F_2.

（1）求椭圆 C 及圆 O 的方程；

（2）设直线 l 与圆 O 相切于第一象限内的点 P.

①若直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点，求点 P 的坐标；

②直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点．若 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{6}}{7}$，求直线 l 的方程.



6.（2008•辽宁）在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 到两点 $(0,-\sqrt{3})$，$(0,\sqrt{3})$ 的距离之和等于 4，设点 P 的轨迹为 C.

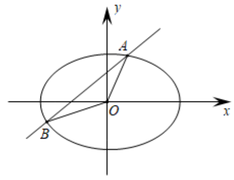
（1）写出 C 的方程；

（2）设直线 $y=kx+1$ 与 C 交于 A，B 两点．k 为何值时 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$？此时 $|\overrightarrow{AB}|$ 的值是多少？

7.（2007•浙江）如图，直线 $y=kx+b$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 交于 A，B 两点，记△AOB 的面积为 S.

（1）求在 $k=0$，$0<b<1$ 的条件下，S 的最大值；

（2）当 $|AB|=2$，$S=1$ 时，求直线 AB 的方程．



8.（2007•陕西）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，短轴一个端点到右焦点的距离为 $\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点，坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求△AOB 面积的最大值．

9.（2019•龙岩一模）已知椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$，点 A 为长轴的右端点．B，C 为椭圆 E 上关于原点对称的两点．直线 AB 与直线 AC 的斜率 k_{AB} 和 k_{AC} 满足：$k_{AB}\cdot k_{AC}=-\dfrac{1}{2}$.

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）若直线 $l:y=kx+t$ 与圆 $x^2+y^2=\dfrac{2}{3}$ 相切，且与椭圆 E 相交于 M，N 两点，求证：以线段 MN 为直径的圆恒过原点．

10.（2018•浉河期末）已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(2,0)$，且其中一个焦点的坐标为 $(1,0)$.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）若直线 $l:x=my+1(m\in R)$ 与椭圆交于两点 A，B，在 x 轴上是否存在点 M，使得 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 为定值？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由．

11.（2019•松江区一模）已知曲线 Γ 上的任意一点到两定点 $F_1(-1,0)$、$F_2(1,0)$ 的距离之和为 $2\sqrt{2}$，直线 l 交曲线 Γ 于 A、B 两点，O 为坐标原点．

（1）求曲线 Γ 的方程；

（2）若 l 不过 O 点且不平行于坐标轴，记线段 AB 的中点为 M，求证：直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值；

（3）若 $OA\perp OB$，求△AOB 面积的取值范围．

12.（2019•榆林一模）设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，左顶点 M 到直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 的距离 $d=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，O 为坐标原点．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设直线 l 与椭圆 C 相交于 A，B 两点，若以 AB 为直径的圆经过坐标原点，证明：点 O 到直线 AB 的距离为定值；

（3）在（2）的条件下，试求△AOB 的面积 S 的最小值．

13.（2019•贵阳一模）在平面直角坐标系 xOy 中，已知定点 $A(-2,0)$、$B(2,0)$，M 是动点，且直线 MA 与直线 MB 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{4}$，设动点 M 的轨迹为曲线 C.

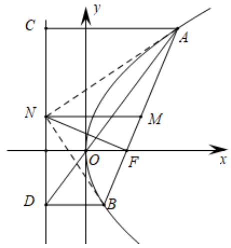
（1）求曲线 C 的方程；

（2）过定点 $T(-1,0)$ 的动直线 l 与曲线 C 交于 P，Q 两点，若 $S(-\dfrac{17}{8},0)$，证明：$\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SQ}$ 为定值．

专题 5　抛物线设点设线基础

第一讲 抛物线的设线问题

如图 1，已知 AB 是过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 焦点 F 的弦，M 是 AB 的中点，l 是抛物线的准线，$MN\perp l$，N 为垂足．则：



（1）以 AB 为直径的圆与准线 l 相切．

（2）$FN\perp AB$

（3）$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，则 $y_1y_2=-p^2,x_1x_2=\frac{1}{4}p^2$（重点）

（4）设 $BD\perp l$，D 为垂足，则 A、O、D 三点在一条直线上（重点）与抛物线 $y^2=2px$ 联立的直线只能是 $x=ky+m$，故可得 $\begin{cases}y_1+y_2=2pk\\y_1y_2=-2pm\end{cases}$ 两种直线与抛物线的联立形式

定理：已知 AB 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的弦，则令 AB 方程为 $x=ky+m$，故 $y^2=2p(ky+m)$（k 为直线 AB 斜率的倒数）$y_1+y_2=2pk,y_1y_2=-2pm,x_1x_2=m^2$

（5）$y_1+y_2=2pk\Rightarrow y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=pk$（中点弦问题）（$k$ 为直线 AB 斜率的倒数）

（6）$x-x_0=-\frac{1}{k}(y-y_0)\Rightarrow 0-pk=-k(x-x_0)\Rightarrow x=x_0+p$（图 2）故抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的弦 AB 中点 $M(x_0,y_0)$，则 AB 中垂线过定点 $(x_0+p,0)$

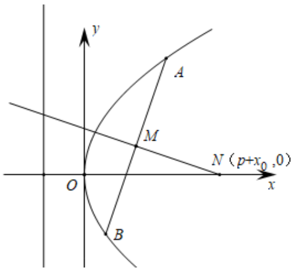


图 2

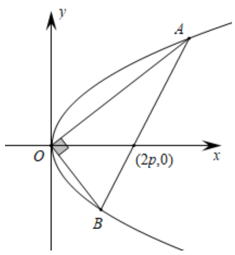


图 3

（7）$OA\perp OB\Leftrightarrow$ 直线过定点 $(2p,0)$(图 3)

$x_1x_2+y_1y_2=\frac{{y_1}^2{y_2}^2}{4p^2}+y_1y_2=m^2-2pm\Rightarrow m=2p$ 时，$OA\perp OB$（垂直问题）

已知 AB 是抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 弦，则令 AB 方程为 $y=kx+m$，故 $x^2=2p(kx+m)$（k 为直线 AB 斜率）

（8）$x_1+x_2=2pk\Rightarrow x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=pk$（中点弦问题）（$k$ 为直线 AB 斜率）

（9）$y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0)\Rightarrow y-y_0=-\frac{1}{k}(0-pk)\Rightarrow y=y_0+p$（中垂线过定点问题）

故抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的弦 AB 中点 $M(x_0,y_0)$，则 AB 中垂线过定点 $(0,y_0+p)$

（10）$OA\perp OB\Leftrightarrow$ 直线过定点 $(0,2p)$

【例 1】求直线 $y=x-1$ 被抛物线 $y^2=4x$ 截得线段的中点坐标．

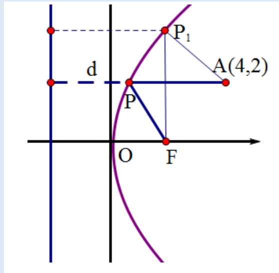
【解析】$y=x-1\Rightarrow x=y+1$，代入抛物线方程得：$y^2=4(y+1)\Rightarrow y_1+y_2=4\Rightarrow y^2-4y-4=0$，故 $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=2$，$x_0=y_0+1=3$，即中点坐标为 $(3,2)$．

【例 2】F 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点，点 $A(4,2)$ 为抛物线内一定点，点 P 是抛物线上一动点．已知 $|PA|+|PF|$ 的最小值为 8.

（1）求抛物线方程;

（2）若 O 为坐标原点，问是否存在点 M，使过点 M 得动直线与抛物线交于 B、C 两点，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，若存在，求出点 M 的坐标;若不存在，说明理由．

【解析】(1) 如图，令 P 到准线的距离为 d，根据几何性质



$|PA|+|PF|=|PA|+d>|P_1A|+|P_1F|$，

故 $(|PA|+|PF|)_{\min}=x_A+\frac{p}{2}=4+\frac{p}{2}=8\Rightarrow p=8$，故抛物线方程为 $y^2=16x$；

(2) 令 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，AB 方程为 $x=ky+m$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$，

直线与抛物线联立得：$y^2=16(ky+m)\Rightarrow y^2-16ky-16m=0$；$y_1y_2=-16m$；

$x_1x_2+y_1y_2=\frac{y_1^{\ 2}y_2^{\ 2}}{16^2}+y_1y_2=m^2-16m\Rightarrow m=16$，故 M 点坐标为 $(16,0)$

【例 3】已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 l 过点 $M(4,0)$.

(1) 若点 F 到直线 l 的距离为 $\sqrt{3}$，求直线 l 的斜率;

(2) 设 A,B 为抛物线上两点,且 AB 不与 x 轴重合,若线段 AB 的垂直平分线恰过点 M，求证:线段 AB 中点的横坐标为定值.

【解析】(1) 设直线 l 的方程为 $x=ky+4$，抛物线焦点坐标为 $F(1,0)$，点 F 到直线 l 的距离为 $\frac{|-3|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{3}$ 故 $k=\pm\sqrt{2}$，故直线 l 斜率为 $\frac{1}{k}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 令抛物线 $y^2=4x$ 的弦 AB 中点 $M(x_0,y_0)$，AB 方程为 $x=ky+m$，故 $y^2=4(ky+m)$ $y_1+y_2=4k\Rightarrow y_0=2k$，$AB$ 中垂线方程为 $y-y_0=-k(x-x_0)$，将点 $M(4,0)$ 代入方程得：$-y_0=-k(4-x_0)\Rightarrow -2k=-k(4-x_0)\Rightarrow x_0=2$.

【例 4】已知直线 $y=2\sqrt{2}(x-1)$ 与抛物线 $C:y^2=4x$ 交于 A，B 两点，点 $M(-1,m)$，若 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，则 m=（　　）

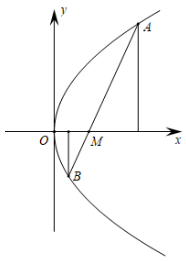
A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 0

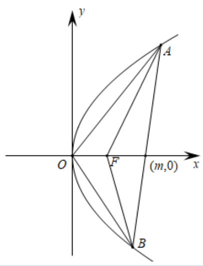
【解析】易知直线过焦点，点 M 在准线上，根据性质：以焦点弦 AB 为直径的圆切于准线，切点纵坐标与弦 AB 中点纵坐标相等可知：$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\Rightarrow y_M=m=\frac{y_1+y_2}{2}=y_0=pk=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$（$k$ 为斜率倒数），故选 B.

【例 5】已知抛物线 $C:y^2=4x$，点 $M(m,0)$ 在 x 轴的正半轴上,过 M 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点,O 为坐标原点.

(1) 若 m=1,且直线 l 的斜率为 1,求以 AB 为直径的圆的方程;

(2) 问是否存在定点 M，不论直线 l 绕点 M 如何转动，使得 $\frac{1}{|AM|^2}+\frac{1}{|BM|^2}$ 恒为定值.





【解析】(1) AB 的直线方程为 $x=y+1$，代入抛物线方程 $y^2=4x$ 得，$y^2-4y-4=0$，

$y_A+y_B=4\Rightarrow y_0=\frac{y_A+y_B}{2}=2$，$x_0=y_0+1=3$，半径 $r=\frac{x_A+x_B+2}{2}=4$，以 AB 为直径的圆的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=16$；

（2）法一如图，$\frac{1}{|AM|^2}+\frac{1}{|BM|^2}=\frac{1}{\left(\frac{y_A}{\sin\alpha}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{y_B}{\sin\alpha}\right)^2}=\frac{\sin^2\alpha}{y_A{}^2}+\frac{\sin^2\alpha}{y_B{}^2}=\frac{\sin^2\alpha\left(y_A{}^2+y_B{}^2\right)}{y_A{}^2y_B{}^2}$

令 AB 的直线方程为 $x=ky+m$，代入抛物线方程 $y^2=4x$ 得，$y^2-4ky-4m=0$，

$y_A+y_B=4k, y_A\cdot y_B=-4m\Rightarrow y_A{}^2+y_B{}^2=\left(y_A+y_B\right)^2-2y_A\cdot y_B=16k^2+8m$，$k=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$\frac{\sin^2\alpha\left(y_A{}^2+y_B{}^2\right)}{y_A{}^2y_B{}^2}=\frac{\sin^2\alpha\left(16k^2+8m\right)}{16m^2}=\frac{\sin^2\alpha\left(2k^2+m\right)}{2m^2}=\frac{\sin^2\alpha\left(2\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+m\right)}{2m^2}$$

$=\frac{2\cos^2\alpha+m\sin^2\alpha}{2m^2}=\frac{2+(m-2)\sin^2\alpha}{2m^2}$，故当 $m=2$ 时，$\frac{1}{|AM|^2}+\frac{1}{|BM|^2}$ 恒为定值 $\frac{1}{4}$。

法二：涉及到将一条弦长分成两部分，用参数方程法简单快捷，如下：

令 $M(m,0)$，AB 的参数方程为 $\begin{cases}x=m+t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$，代入抛物线方程得：$t^2\sin^2\alpha=4(t\cos\alpha+m)$，故

$t_1+t_2=\frac{4\cos\alpha}{\sin^2\alpha};t_1t_2=\frac{-4m}{\sin^2\alpha}$，$\frac{1}{t_1{}^2}+\frac{1}{t_2{}^2}=\frac{t_1{}^2+t_2{}^2}{t_1{}^2t_2{}^2}=\frac{\cos^2\alpha}{m^2}+\frac{\sin^2\alpha}{2m}$ 为定值时，必有 $m^2=2m=2$ 时成立。

第二讲　面积问题找坐标 y_1 和 $\frac{-2pm}{y_1}$

已知 AB 为抛物线 $y^2=2px$ 的一条弦，且 AB 过点 $D(m,0)$，F 为抛物线焦点，O 为坐标原点

则令 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，其中 $y_1>0$，面积用到了水平宽 $\times$ 铅垂高 $\times\frac{1}{2}$

则 $S_{\triangle ADF}=\left|m-\frac{p}{2}\right|\frac{y_1}{2}$；$S_{\triangle BDF}=\left|m-\frac{p}{2}\right|\frac{pm}{y_1}$；

$S_{\triangle AFB}=\left|m-\frac{p}{2}\right|\left(\frac{y_1}{2}+\frac{pm}{y_1}\right)$；$S_{\triangle AOB}=m\left(\frac{y_1}{2}+\frac{pm}{y_1}\right)$；涉及求最值就要用到基本不等式

【例 6】（2014•四川）已知 F 为抛物线 $y^2=x$ 的焦点，点 A、B 在该抛物线上且位于 x 轴的两侧，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$（其中 O 为坐标原点），则△AFO 与△BFO 面积之和的最小值是（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{8}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\sqrt{2}$

【解析】令 AB 直线方程为：$x=ky+m(m>0)$，则 $y_Ay_B=-m$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=y_1{}^2y_2{}^2+y_1y_2=2$

$m^2-m=2\Rightarrow m=2$ 或 $m=-1$（舍），故 $y_1y_2=-2$，则 $y_2=-\frac{2}{y_1}$，$S_{\triangle AOF}+S_{\triangle BOF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}|y_1|+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}|y_2|$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left|y_1+\frac{2}{y_1}\right|\geq\frac{\sqrt{2}}{4}$ 故选 B.

【例 7】(2019•襄阳模拟)已知 F 为抛物线 $y^2=x$ 的焦点，点 A，B 在该抛物线上且位于 x 轴的两侧，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=6$（其中 O 为坐标原点），则△ABO 与△AFO 面积之和的最小值是（　　）

A. $\frac{17\sqrt{2}}{8}$　　B. 3　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$　　D. $\frac{3\sqrt{13}}{2}$

【解析】令 AB 直线方程为：$x=ky+m(m>0)$，则 $y_Ay_B=-m$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=y_1{}^2y_2{}^2+y_1y_2=6$

$m^2-m=6\Rightarrow m=3$ 或 $m=-2$（舍），故 $y_1y_2=-3$，$y_2=\frac{-3}{y_1}$，令 $A(x_1,y_1)$（$y_1>0$），$S_{\triangle AOF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}y_1$，

$S_{\triangle AOB}=\frac{3}{2}\left(y_1+\frac{3}{y_1}\right)=\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2y_1}$，$S_{\triangle AOF}+S_{\triangle AOB}=\frac{13}{8}y_1+\frac{9}{2y_1}\geq\frac{3\sqrt{13}}{2}$ 故选 D.

第三讲 抛物线角平分线定理

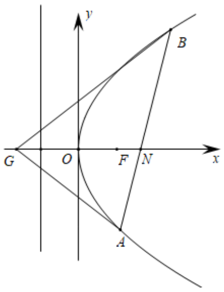
抛物线 $y^2=2px$ 与直线 $l:x=ky+m$ 相交于 A,B 两点，联立得 $\begin{cases}y^2=2px\\x=ky+m\end{cases}$ 消去 x 得：

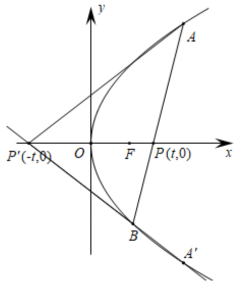
$y^2-2pky-2pm=0$；即 $y_1y_2=-2pm \Leftrightarrow m=\dfrac{y_1y_2}{-2p}$ ※；由此推出三大定理.

定理 1：抛物线准线与坐标轴的交点 G 与焦半径端点 A、B 连线 AG、BG 所成角 $\angle AGB$ 被坐标轴轴平分

定理 2：过对称轴上任意一定点 $N(t,0)$ 的一条弦 AB，端点与对应点 $G(-t,0)$ 的连线所成角 $\angle AGB$ 被对称轴（NG 所在直线）平分.

定理 3：过点 $P(t,0)$ 的任一直线交抛物线于 AB 两点，点 A 关于 x 轴的对称点 A',则点 A'，B，$P'(-t,0)$ 三点共线.（对称之点，三点共线）



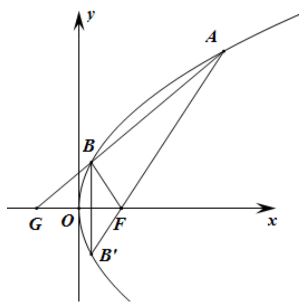


【例 8】已知直线 $y=k(x+2)(k>0)$ 与抛物线 C: $y^2=8x$ 相交 A、B 两点，F 为 C 的焦点. 若 $|FA|=2|FB|$，则 $k=$（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　　　C. $\dfrac{2}{3}$　　　　D. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【解析】如图，直线过准线与 x 轴的交点 G，故连接 AF 并延长交抛物线于点 B'，易知 B 与 B' 关于 x 轴对称，$|FA|=2|FB'|\Rightarrow \dfrac{p}{1-\cos\alpha}=2\dfrac{p}{1+\cos\alpha}\Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{1}{3}$（$\alpha$ 为 AF 倾斜角），$|AF|=\dfrac{3}{2}p=6=x_A+2\Rightarrow x_A=4; y_A{}^2=8x_A\Rightarrow y_A=4\sqrt{2}$，

故 $k=\dfrac{y_A-0}{x_A+2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{6}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，选 D.



【例 9】已知抛物线 $y^2=4x$，点 $M(1,0)$ 关于 y 轴的对称点为 N，直线 l 过点 M 交抛物线于 A，B 两点.

（1）证明:直线 NA,NB 的斜率互为相反数；

（2）求 $\triangle ANB$ 面积的最小值；

（3）当点 M 的坐标为 $(m,0)(m>0$，且 $m\neq1)$，根据（1）（2）推测并回答下列问题(不必说明理由):

① 直线 NA,NB 的斜率是否互为相反数？

②$\triangle ANB$ 面积的最小值是多少？

【解析】（1）如图，直线 $AB:x=ky+1$ 过焦点 M，代入方程 $y^2=4x$ 得：$y^2-4ky-4=0$

$y_Ay_B=-4$，设直线 $AN:x=k'y-1$，代入方程 $y^2=4x$ 得：$y^2-4k'y+4=0$ 即

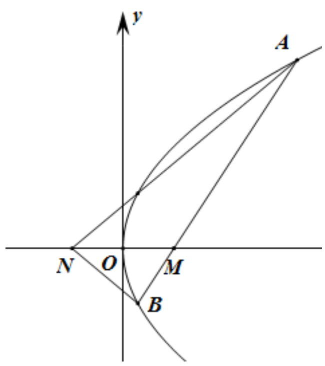
$y_Ay_2=4\Rightarrow y_2=\dfrac{4}{y_A}=-y_B$，根据抛物线的对称性可知，直线 AN 过点 $(x_B,-y_B)$，

故直线 AN 与 BN 关于 x 轴对称，即 NA,NB 的斜率互为相反数；

(2) $S_{\triangle ANB}=\dfrac{1}{2}\cdot|MN||y_A-y_B|=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot\left|y_A+\dfrac{4}{y_A}\right|\geq4$，

（3）直线 NA,NB 的斜率互为相反数，参考定理 2 证明；

$S_{\triangle ANB}=\dfrac{1}{2}\cdot|MN||y_A-y_B|=\dfrac{1}{2}\cdot2m\cdot\left|y_A+\dfrac{4m}{y_A}\right|\geq4m\sqrt{m}$.



达标训练

1.（2019•吉林一模）已知抛物线 $C: y^2=6x$，直线 l 过点 $P(2,2)$，且与抛物线 C 交于 M，N 两点，若线段 MN 的中点恰好为点 P，则直线 l 的斜率为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{5}{4}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．$\frac{1}{4}$

2.（2019•河南模拟）已知 $\triangle ABF$ 的顶点 A，B 在抛物线 $y^2=4x$ 上，顶点 F 是该抛物线的焦点，则满足条件的等边 ΔABF 的个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3.（2018•龙岩期末）已知过抛物线 $y^2=x$ 的焦点的直线交抛物线于 A，B 两点，若 O 为坐标原点，则 $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=$（　　）

A．$-\frac{3}{16}$　　B．$\frac{3}{16}$　　C．0　　D．-1

4.（2018•吉安期末）已知直线 $l: \sqrt{3}-y-\sqrt{3}=0$ 过抛物线 $C: y^2=2px$ 的焦点 F，且与抛物线 C 交于点 A、B 两点，过 A、B 两点分别作抛物线准线的垂线，垂足分别为 M、N，则下列说法错误的是（　　）

A．抛物线的方程为 $y^2=4x$　　B．线段 AB 的长度为 $\frac{16}{3}$

C．$\angle MFN=90^\circ$　　D．线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 $\frac{8}{3}$

5.（2018•吉安期末）设抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 $l: x=-\frac{1}{2}$，若过焦点 F 的直线与抛物线 C 相交于 A、B 两点，则以线段 AB 为直径的圆与直线 l 的位置关系为（　　）

A．相交　　B．相切

C．相离　　D．以上三个答案均有可能

6.（2019•绵阳模拟）已知斜率为 2 的直线 l 过抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F，且与抛物线交于 A，B 两点，若线段 AB 的中点 M 的纵坐标为 1，则 $p=$（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．4

7.（2018•深圳期末）已知抛物线 $y^2=4x$，以 $(1,1)$ 为中点作抛物线的弦，则这条弦所在直线的方程为（　　）

A．$x-2y+1=0$　　B．$2x-y-1=0$　　C．$2x+y-3=0$　　D．$2x+y-3=0$

8.（2018•宽城期末）已知直线与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 交于 A，B 两点，且 $OA\perp OB$，$OD\perp AB$ 交 AB 于 D，点 D 的坐标为 $(2,1)$，则 p 的值为（　　）

A．$\frac{5}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{5}{4}$　　D．$\frac{3}{2}$

9.（2018•湖北模拟）已知点 A、B 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的两动点，O 为抛物线的顶点，且 $OA\perp OB$，抛物线的焦点为 F，若 $\triangle ABF$ 面积的最小值为 12，则 $p=$（　　）

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．3

10.（2018•齐齐哈尔三模）抛物线 $C: y^2=5x$ 的焦点为 F，过点 F 的直线与 C 交于 A、B 两点，过 A、B 作 C 的准线的垂线，垂足分别为 D、E，O 是坐标原点，若 $\triangle ODE$ 的面积为 $\frac{25\sqrt{2}}{8}$，则 $|AB|=$（　　）

A．16　　B．14　　C．12　　D．10

11.（2018•静海模拟）设抛物线 $y^2=2x$ 的焦点为 F，过点 $M(\sqrt{3},0)$ 的直线与抛物线相交于 A，B 两点，与抛物线的准线相交于点 C，$|BF|=2$，则 $\triangle BCF$ 与 $\triangle ACF$ 的面积之比 $\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}=$（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{4}{5}$　　C．$\frac{4}{7}$　　D．$\frac{1}{2}$

12.（2018•宁波二模）设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，过点 $P(5,0)$ 的直线与抛物线相交于 A，B 两点，与抛物线的准线相交于 C，若 $|BF|=5$，则 $\triangle BCF$ 与 $\triangle ACF$ 的面积之比 $\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}=$（　　）

A．$\frac{5}{6}$　　B．$\frac{20}{33}$　　C．$\frac{15}{31}$　　D．$\frac{20}{29}$

13．（2018•潍坊二模）直线 $y=k(x+2)(k>0)$ 与抛物线 $C:y^2=8x$ 交于 A，B 两点，F 为 C 的焦点，若 $\sin\angle ABF=2\sin\angle BAF$，则 k 的值是（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　B．$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　C．1　　D．$\sqrt{2}$

14．（2017•东营期末）已知抛物线 $y^2=4x$ 与直线 $2x-y-3=0$ 相交于 A、B 两点，O 为坐标原点，设 OA，OB 的斜率为 k_1，k_2，则 $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}$ 的值为（　　）

A．$-\dfrac{1}{4}$　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

15．（2017•道里期末）已知抛物线 $y^2=x$，过 $(1,0)$ 的直线与抛物线交于 A，B 两点，则 $\triangle ABO$（其中 O 为坐标原点）面积的最小值是（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．1　　C．2　　D．4

16．（2016•濮阳期末）已知抛物线 $y=x^2$ 上有一定点 $A(-1,1)$ 和两动点 P、Q，当 $PA\perp PQ$ 时，点 Q 的横坐标取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-3]$　　B．$[1,+\infty)$　　C．$[-3,1]$　　D．$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

17．（2016•江岸期中）已知抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 F，准线 l 与 x 轴的交点为 M，点 P 在抛物线上，且 $|PM|=\sqrt{2}|PF|$，则 $\triangle PMF$ 的面积为（　　）

A．4　　B．8　　C．16　　D．32

18．（2016•湘赣联考）已知直线 $y=k(x+2)$ 与抛物线 $y^2=8x$ 交于 A、B 两点，F 为抛物线的焦点，则直线 FA 与直线 FB 的斜率之和等于（　　）

A．-4　　B．4　　C．0　　D．2

19．（2019•漳州一模）已知动圆 P 过点 $F(0,\dfrac{1}{8})$ 且与直线 $y=-\dfrac{1}{8}$ 相切，圆心 P 的轨迹为曲线 C．

（1）求曲线 C 的方程；

（2）若 A，B 是曲线 C 上的两个点且直线 AB 过 $\triangle OAB$ 的外心，其中 O 为坐标原点，求证：直线 AB 过定点．

20．（2019•福州一模）已知抛物线 $C_1:x^2=2py(p>0)$ 和圆 $C_2:(x+1)^2+y^2=2$，倾斜角为 $45°$ 的直线 l_1 过 C_1 的焦点且与 C_2 相切．

（1）求 p 的值；

（2）点 M 在 C_1 的准线上，动点 A 在 C_1 上，C_1 在 A 点处的切线 l_2 交 y 轴于点 B，设 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$，求证：点 N 在定直线上，并求该定直线的方程．

21．（2018•潍坊期末）已知 $A(-2,2)$，$B(2,2)$，直线 AD 与直线 BD 相交于点 D，直线 BD 的斜率减去直线 AD 的斜率的差是 2，设 D 点的轨迹为曲线 C．

（1）求曲线 C 的方程；

（2）已知直线 l 过点 $T(0,2)$，且与曲线 C 交于 P，Q 两点（P，Q 异于 A，B），问在 y 轴上是否存在定点 G，使得 $\angle PCT=\angle QCT$？若存在，求出点 G 的坐标；若不存在，请说明理由．

22．（2016•荆州模拟）已知抛物线 C 的标准方程为 $y^2=2px(p>0)$，M 为抛物线 C 上一动点，$A(a，0)(a\neq 0)$ 为其对称轴上一点，直线 MA 与抛物线 C 的另一个交点为 N．当 A 为抛物线 C 的焦点且直线 MA 与其对称轴垂直时，$\triangle MON$ 的面积为 18．

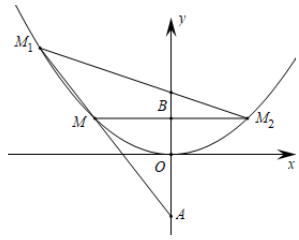
（1）求抛物线 C 的标准方程；

（2）记 $t=\dfrac{1}{|AM|}+\dfrac{1}{|AN|}$，若 t 值与 M 点位置无关，则称此时的点 A 为"稳定点"，试求出所有"稳定点"，若没有，请说明理由．

23.（2018•衢州期中）已知 M 是抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 上异于原点 O 的动点，$A(0,-2)$，$B(0,1)$ 是平面上两个定点．当 M 的纵坐标为 $\frac{3}{4}$ 时，点 M 到抛物线焦点 F 的距离为 1．

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）直线 MA 交 C 于另一点 M_1，直线 MB 交 C 于另一点 M_2，记直线 M_1M_2 的斜率为 k_1，直线 OM 的斜率为 k_2．求证：$k_1\cdot k_2$ 为定值，并求出该定值．



24.（2018•四川模拟）已知点 $M(1,2)$ 在抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上，过点 $N(5,-2)$ 作不与坐标轴垂直的直线 l 交抛物线 C 于 A，B 两点．

（1）若 $MN\perp AB$，求直线 l 的方程；

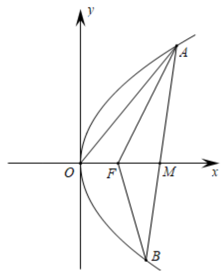
（2）求证：点 M 在以 AB 为直径的圆上．

25.（2016•虹口期中）已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，焦点 $F(\frac{p}{2}，0)$，如果存在过点 $M(x_0，0)(x_0>\frac{p}{2})$ 的直线 l 与抛物线 C 交于不同的两点 A、B，使得 $S_{\triangle AOM}=\lambda\cdot S_{\triangle FAB}$，则称点 M 为抛物线 C 的"λ 分点"．

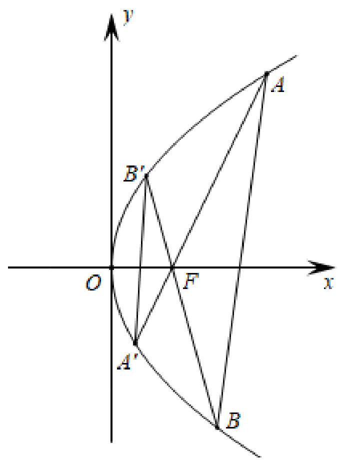
（1）如果 $M(p,0)$，直线 $l:x=p$，求 λ 的值；

（2）如果 $M(p,0)$ 为抛物线 C 的"$\frac{4}{3}$ 分点"，求直线 l 的方程；

（3）（普通中学做）命题甲：证明点 $M(p,0)$ 不是抛物线 C 的"2 分点"；（重点中学做）命题乙：如果 $M(x_0，0)(x_0>\frac{p}{2})$ 是抛物线的"2 分点"，求 x_0 的取值范围．



26.（2019•长沙模拟）如图，已知抛物线 $y^2=4x$，$A'A$ 和 BB' 为过焦点的两条弦，且 $k_{A'B'}=2k_{AB}$，求证：$A'B'$ 和 AB 均过定点．



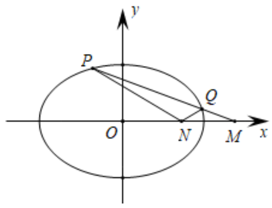
专题6　设点设线进阶之角度问题

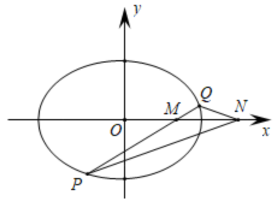
第一讲 圆锥曲线对称轴为角平分线性质（直线两点式破解法）

已知点 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的点，A,B 是椭圆上关于长轴对称的两点，直线 PA、PB 分别交 x 轴于 M,N 两点，则 $x_M\cdot x_N=a^2$

已知点 P 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上的点，A,B 是双曲线上关于实轴对称的两点，直线 PA、PB 分别交 x 轴于 M,N 两点，则 $x_M\cdot x_N=a^2$

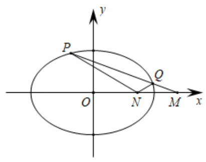
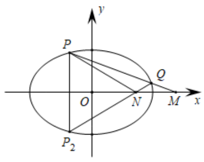
性质一：已知点 P，Q 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的点，过点 P，Q 的直线交 x 轴于 $M(m,0)(|m|>a)$(如图)，则在 x 轴必存在一定点 $N\left(\dfrac{a^2}{m},0\right)$，使得 $\angle MNP+\angle MNQ=180°$



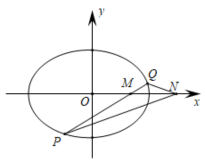
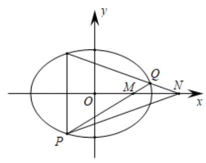


性质二：已知点 P，Q 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的点，过点 P，Q 的直线交 x 轴于 $M(m,0)(|m|<a)$(如图)，则在 x 轴必存在一定点 $N\left(\dfrac{a^2}{m},0\right)$，使得 $\angle MNP=\angle MNQ$

性质一的证明参考此图的变化：

性质二的证明参考此图的变化：

性质三：已知点 P，Q 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 一支上的点，过点 P，Q 的直线交 x 轴于 $M(m,0)(0<|m|<a)$，则在 x 轴必存在一定点 $N\left(\dfrac{a^2}{m},0\right)$，使得 $\angle MNP+\angle MNQ=180°$.

性质四：已知点 P，Q 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 一支上的点，过点 P，Q 的直线交 x 轴于 $M(m,0)(|m|>a)$，则在 x 轴必存在一定点 $N\left(\dfrac{a^2}{m},0\right)$，使得 $\angle MNP=\angle MNQ$.

已知点 P 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的点，A,B 是抛物线上关于 x 轴对称的两点，直线 PA、PB 分别交 x 轴于 M,N 两点，若 $x_M=m$ 则 $x_N=-m$ （上一讲已说明，这里就归纳一下性质）.

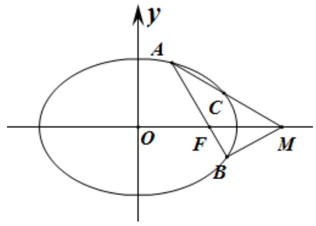
性质五：已知点 P，Q 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的点，过点 P，Q 的直线交 x 轴于 $M(m,0)(m<0)$，则在 x 轴必存在一定点 $N(-m,0)$，使得 $\angle MNP+\angle MNQ=180°$.

性质六：已知点 P，Q 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的点，过点 P，Q 的直线交 x 轴于 $M(m,0)(m>0)$，则在 x 轴必存在一定点 $N(-m,0)$，使得 $\angle MNP=\angle MNQ$.

【例 1】（2018•新课标I）设椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，点 M 的坐标为 $(2,0)$．

（1）当 l 与 x 轴垂直时，求直线 AM 的方程；

（2）设 O 为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$



【解析】（1）$c=\sqrt{2-1}=1$，$\therefore F(1,0)$，$\because l$ 与 x 轴垂直，$\therefore x=1$，

由 $\begin{cases}x=1\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$，

$\therefore A(1.\frac{\sqrt{2}}{2})$，或 $(1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\therefore$ 直线 AM 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$，$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}$，

（2）证明：（2）当 l 与 x 轴重合时，$\angle OMA=\angle OMB=0^\circ$，

当 l 与 x 轴垂直时，OM 为 AB 的垂直平分线，$\therefore \angle OMA=\angle OMB$，

当 l 与 x 轴不重合也不垂直时，设 l 的方程为 $x=ky+1$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$C(x_2,-y_2)$，AC 直线方程为 $\frac{y-y_1}{-y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ 令 $y=0$ 得 $x=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\frac{(ky_1+1)y_2+(ky_2+1)y_1}{y_1+y_2}=\frac{2ky_1y_2}{y_1+y_2}+1$ 由 $\begin{cases}x=ky+1\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$ 得 $(2+k^2)y^2+2ky-1=0$ $\therefore\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-2k}{2+k^2}\\ y_1\cdot y_2=\frac{-1}{2+k^2}\end{cases}$，故直线 AC 与 x 轴的交点 $x=\frac{2ky_1y_2}{y_1+y_2}+1=2$，即为点 M，故 MA，MB 的倾斜角互补，$\therefore\angle OMA=\angle OMB$，综上 $\angle OMA=\angle OMB$．

第二讲　中点问题找点差，直径问题问点差

中点弦问题：若椭圆(双曲线)与直线 l 交于 AB 两点，M 为 AB 中点，则可以采用点差法

定理 1：$k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$（椭圆）；$k_{AB}\cdot k_{OM}=\frac{b^2}{a^2}$（双曲线）

中垂线问题：若 A、B 关于直线 $MN:y=kx+m$ 或者 $x=ky+n$ 对称，可以知道线段 AB 被直线垂直平分，设 N 为 MN 与坐标轴交点，则能得出以下定理：

定理 2：$m=-\frac{y_0c^2}{b^2}$(椭圆)，$m=\frac{y_0c^2}{b^2}$（双曲线）；$n=\frac{x_0c^2}{a^2}$(椭圆)，$n=\frac{x_0c^2}{a^2}$（双曲线）

直径问题：若 AB 过原点，则 AB 为椭圆（双曲线）直径，P 为椭圆（双曲线）上异于 AB 任意一点，

定理 3：$k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{b^2}{a^2}$（椭圆）；$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2}{a^2}$（双曲线）

定理一证明：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x_0,y_0)$，则

椭圆：$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1(1)\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1(2)\\ \frac{x_1+x_2}{2}=x_0(3)\\ \frac{y_1+y_2}{2}=y_0(4)\\ k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(5)\end{cases}$　　双曲线：$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1(1)\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1(2)\\ \frac{x_1+x_2}{2}=x_0(3)\\ \frac{y_1+y_2}{2}=y_0(4)\\ k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(5)\end{cases}$

$(1)-(2)$,并将（3）（4）（5）代入得：

$k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$　　　　$k_{AB}\cdot k_{OM}=\frac{b^2}{a^2}$

定理二证明：

$$\begin{cases} y_0 = kx_0 + m \\ k_{AB} = -\dfrac{1}{k} = \dfrac{x_0 b^2}{y_0 a^2} \end{cases} \Rightarrow y_0 = \frac{y_0 a^2}{x_0 b^2} x_0 + m = \frac{y_0 a^2}{b^2} + m \Rightarrow m = \frac{b^2 y_0}{b^2} - \frac{y_0 a^2}{b^2} = -\frac{y_0 c^2}{b^2}\text{(椭圆)}$$

$$\begin{cases} y_0 = kx_0 + m \\ k_{AB} = -\dfrac{1}{k} = -\dfrac{y_0 a^2}{x_0 b^2} \end{cases} \Rightarrow y_0 = -\frac{y_0 a^2}{x_0 b^2} x_0 + m \Rightarrow m = \frac{b^2 y_0}{b^2} + \frac{y_0 a^2}{b^2} = \frac{y_0 c^2}{b^2}\text{（双曲线）}$$

同理，直线在 x 轴上的截距也可以用 n 来表示，且 $n = \dfrac{c^2 x_0}{a^2}$（椭圆和双曲线均一致）

定理三证明：设 $P(x_0, y_0)$，$A(x_1, y_1)$，因为 AB 是椭圆的直径，所以点 B 的坐标为 $B(-x_1, -y_1)$，所以

$k_{PA} \cdot k_{PB} = \dfrac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot \dfrac{y_0 + y_1}{x_0 + x_1} = \dfrac{{y_0}^2 - {y_1}^2}{{x_0}^2 - {x_1}^2}$.又因为点 $P(x_0, y_0), A(x_1, y_1)$ 在椭圆上，所以有 $\begin{cases} \dfrac{{x_0}^2}{a^2} + \dfrac{{y_0}^2}{b^2} = 1(1) \\ \dfrac{{x_1}^2}{a^2} + \dfrac{{y_1}^2}{b^2} = 1(2) \end{cases}$.

两式相减得 $\dfrac{{y_0}^2 - {y_1}^2}{{x_0}^2 - {x_1}^2} = -\dfrac{b^2}{a^2}$，所以 $k_{PA} \cdot k_{PB} = -\dfrac{b^2}{a^2}$.

【例 2】斜率为 $k_1 (k_1 \neq 0)$ 的直线 l 与椭圆 $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 交于 P_1、P_2 两点，线段 P_1P_2 的中点为 P，直线 OP 斜率为 k_2，则 $k_1 \cdot k_2$ 的值等于__________.

【解析】$k_1 \cdot k_2 = -\dfrac{b^2}{a^2} = -\dfrac{1}{2}$.

【例 3】椭圆 $E: \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$，求此椭圆被点 $M(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{3})$ 所平分弦所在的直线方程.

【解析】点差法过程部分直接省略，即 $k_{AB} \cdot k_{OM} = -\dfrac{9}{25} \Rightarrow k_{AB} = -\dfrac{3}{5} \Rightarrow y - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{3}{5}\left(x - \dfrac{5}{2}\right)$.

【例 4】已知焦点为 $F(0, \sqrt{50})$ 的椭圆被直线 $l: y = 3x - 2$ 截得的弦的中点的横坐标为 $\dfrac{1}{2}$，求椭圆的方程.

【解析】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$，（中间步骤省略）；此题由于是长轴在 y 轴上椭圆，故

$k_{AB} \cdot k_{OM} = -\dfrac{a^2}{b^2} \Rightarrow 3 = -\dfrac{x_0 a^2}{y_0 b^2} = -\dfrac{\frac{1}{2} a^2}{-\frac{1}{2}(a^2 - 50)} \Rightarrow a^2 = 3(a^2 - 50)$　$a^2 = 75 \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{75} = 1$.

【例 5】椭圆 E：$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$，直线 l：$2x + 3y - n = 0$，存在 A、$B \in E$，且 A、B 关于直线 l 对称，求 n 的取值范围.

【解析】设 AB 中点为 $M(x_0, y_0)$，直线 l：$2x + 3y - n = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{n}{3}$，易知直线 l 是线段 AB 的垂直平分线，则会有方程 $\begin{cases} y_0 = -\dfrac{2}{3}x_0 + \dfrac{n}{3} \\ \dfrac{3}{2} = -\dfrac{3x_0}{4y_0} \end{cases} \Rightarrow y_0 = \dfrac{4y_0}{3x_0}x_0 + \dfrac{n}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2n \\ y_0 = -n \end{cases}$，若要存在 A、$B \in E$，则直线 AB 与椭圆一定要有两个交点，即 $\begin{cases} y - y_0 = \dfrac{3}{2}(x - x_0) \\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x - 4n \\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 4a^2b^2(k^2a^2 + b^2 - m^2) > 0$ 代入数据得：

$\Delta = 4 \times 16 \times 12\left(\dfrac{9}{4} \times 16 + 12 - 16n^2\right) > 0 \Rightarrow n^2 < 3 \Rightarrow -\sqrt{3} < n < \sqrt{3}$.

【例 6】已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 过点 $(1, \dfrac{3}{2})$，且离心率 $e = \dfrac{1}{2}$.

（1）求椭圆方程；

（2）若直线 $l: y = kx + m(k \neq 0)$ 与椭圆交于两点 M、N，线段 MN 的垂直平分线过点 $G(\dfrac{1}{8}, 0)$，求 k 的取值范围.

【解析】（1）设椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=\lambda$，并将点 $(1,\frac{3}{2})$ 代入得 $\lambda=1$，故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（2）设 MN 中点为点 $P(x_0,y_0)$，线段 MN 的垂直平分线过点 $G(\frac{1}{8},0)$，可列出方程 $\begin{cases}y_0=-\frac{1}{k}\left(x_0-\frac{1}{8}\right)\\ k=-\frac{3x_0}{4y_0}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\frac{1}{2}\\ y_0=-\frac{3}{8k}\end{cases}$ 若直线 $l:y=kx+m(k\neq0)$ 与椭圆有两个交点，即

$$\begin{cases}y-y_0=k(x-x_0)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=kx-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{8k}\right)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}\Rightarrow\Delta>0$$

$$\Delta=4\times4\times3\left[4k^2+3-\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{8k}\right)^2\right]=48\left[4k^2+3-\left(\frac{4k^2+3}{8k}\right)^2\right]>0\Rightarrow(4k^2+3)\left(1-\frac{4k^2+3}{64k^2}\right)>0$$

$\therefore k>\frac{\sqrt{5}}{10}$ 或 $k<-\frac{\sqrt{5}}{10}$.

【例 7】双曲线的中心在原点，并与椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{13}=1$ 共焦点，中心到抛物线 $y^2=-2\sqrt{3}x$ 准线的距离等于其实半轴的平方与半焦距之比.

（1）求双曲线 M 的方程；

（2）设直线 l：$y=kx+3$ 与双曲线 M 交于 A、B 两点，是否存在实数 k，使两点 A、B 关于直线 $y=mx+12$ 对称？若存在，求 k 的值；若不存在，说明理由.

【解析】（1）双曲线 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$；（2）设 AB 中点 $P(x_0,y_0)$，

则 $\begin{cases}y_0=kx_0+3\\ y_0=-\frac{1}{k}x_0+12\\ k=\frac{3x_0}{y_0}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\pm3\sqrt{2}\\ y_0=9\\ k=\pm\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\pm\sqrt{2}x+3\\ \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1\end{cases}\Rightarrow\Delta=4\times3\times9(9-6+9)>0$，故存在 $k=\pm\sqrt{2}$.

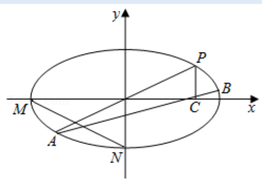
【例 8】（2011•江苏）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，M、N 分别是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 的顶点，过坐标原点的直线交椭圆于 P，A 两点，其中点 P 在第一象限，过 P 作 x 轴的垂线，垂足为 C，连接 AC，并延长交椭圆于点 B，设直线 PA 的斜率为 k

（1）若直线 PA 平分线段 MN，求 k 的值；

（2）当 $k=2$ 时，求点 P 到直线 AB 的距离 d；

（3）对任意 $k>0$，求证：$PA\perp PB$.

【解析】（1）由题设知，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，故 $M(-2,0)$，$N(0,-\sqrt{2})$，所以线段 MN 中点坐标为 $(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$.
由于直线 PA 平分线段 MN，故直线 PA 过线段 MN 的中点，又直线 PA 过原点，所以 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



（2）直线 PA 的方程为 $y=2x$，代入椭圆方程得 $\frac{x^2}{4}+\frac{4x^2}{2}=1$，解得 $x=\pm\frac{2}{3}$，因此 $P(\frac{2}{3}，\frac{4}{3})$，$A(-\frac{2}{3}，-\frac{4}{3})$，于是 $C(\frac{2}{3}，0)$，直线 AC 的斜率为 1，故直线 AB 的方程为 $x-y-\frac{2}{3}=0$. 因此，$d=\frac{\left|\frac{2}{3}-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

（3）设 $P(x_1，y_1)$，$B(x_0,y_0)$，则 $x_1>0$，$x_2>0$，$x_1\neq x_2$，
$A(-x_1，-y_1)$，$C(x_1，0)$. 设直线 PB，AB 的斜率分别为 k_{PB},k_{AB}

因为 C 在直线 AB 上，所以 $k_{AB}=\frac{0-(-y_1)}{x_1-(-x_1)}=\frac{k}{2}$，由于 $k_{BA}\cdot k_{BP}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}=\frac{y_0{}^2-y_1{}^2}{x_0{}^2-x_1{}^2}$.

$\begin{cases}\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1(1)\\ \frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{2}=1(2)\end{cases}$.两式相减得 $\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=-\frac{1}{2}$，所 $k_{BA}\cdot k_{BP}=-\frac{1}{2}$.因此 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$，所以 $PA\perp PB$.

第三讲 圆锥曲线斜率和与积问题平移构造齐次式

已知点 $P(x_0,y_0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的一个定点，A,B 是椭圆上的两个动点.

（1）若直线 $k_{PA}+k_{PB}=\lambda$，则直线 AB 过定点；当 $\lambda=0$ 时，k_{AB} 为定值 $\frac{x_0b^2}{y_0a^2}$；

（2）若 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\lambda$，则直线 AB 过定点；当 $\lambda=\frac{b^2}{a^2}$ 时，k_{AB} 为定值 $-\frac{y_0}{x_0}$；

因为 C 在直线 AB 上，所以 $k_{AB}=\frac{0-(-y_1)}{x_1-(-x_1)}=\frac{k}{2}$，由于 $k_{BA}\cdot k_{BP}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}=\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}$.

$\begin{cases}\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1(1)\\ \frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{2}=1(2)\end{cases}$.两式相减得 $\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=-\frac{1}{2}$，所 $k_{BA}\cdot k_{BP}=-\frac{1}{2}$.因此 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$，所以 $PA\perp PB$.

【例 9】（2017•新课标I）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，四点 $P_1(1,1)$，$P_2(0,1)$，$P_3(-1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$P_4(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

（1）求 C 的方程；

（2）设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A，B 两点．若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1，证明：l 过定点.

【解析】（1）根据椭圆的对称性，$P_3(-1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$P_4(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 两点必在椭圆 C 上，又 P_4 的横坐标为 1，$\therefore$ 椭圆必不过 $P_1(1,1)$，$\therefore P_2(0,1)$，$P_3(-1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$P_4(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 三点在椭圆 C 上．把 $P_2(0,1)$，$P_3(-1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 代入椭圆 C，得：

$\begin{cases}\frac{1}{b^2}=1\\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1\end{cases}$，解得 $a^2=4$，$b^2=1$，$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

证明：（2）将椭圆 C 按照向量 $(0,-1)$ 平移，则得到方程 $\frac{x^2}{4}+(y+1)^2=1\Rightarrow\frac{x^2}{4}+y^2+2y=0$，平移后 $A\to A'$，$B\to B'$,设 $A'B'$ 方程为 $mx+ny=1$，即 $\frac{x^2}{4}+y^2+2y=\frac{x^2}{4}+y^2+2y(mx+ny)=0$（构造齐次式），同除以 x^2 得，$(1+2n)\frac{y^2}{x^2}+2m\frac{y}{x}+\frac{1}{4}=0$，因为点 A',B' 的坐标满足这个方程，所以 $k_{OA'},k_{OB'}$ 是这个关于 $\frac{y}{x}$ 的方程的两个根。$\therefore k_{OA'}+k_{OB'}=k_{PA}+k_{PB}=-\frac{2m}{1+2n}=-1\Rightarrow 2m-2n=1$，故 $A'B'$ 过定点 $(2,-2)$，平移回去可得 AB 过定点 $(2,-1)$ $\therefore l$ 过定点 $(2,-1)$.

【例 10】（2019•郑州一模）设 M 点为圆 $C:x^2+y^2=4$ 上的动点，点 M 在 x 轴上的投影为 N．动点 P 满足 $2\overrightarrow{PN}=\sqrt{3}\overrightarrow{MN}$，动点 P 的轨迹为 E.

（1）求 E 的方程；

（2）设 E 的左顶点为 D，若直线 $l:y=kx+m$ 与曲线 E 交于两点 A，$B(A$，B 不是左右顶点)，且满足 $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}|$，求证：直线 l 恒过定点，并求出该定点的坐标.

【解析】（1）设 $P(x,y)$，$M(x_0,\ y_0)$，则 $N(x_0,\ 0)$，$\therefore\overrightarrow{PN}=(x_0-x,-y)$，$\overrightarrow{MN}=(0,-y_0)$，$\because 2\overrightarrow{PN}=\sqrt{3}\overrightarrow{MN}$，$\therefore x_0=x$，$y_0=\frac{2\sqrt{3}}{3}y$，代入圆的方程得，$x^2+\frac{4}{3}y^2=4$，故动点 P 的轨迹为 E 的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（2）证明：由（Ⅰ）知，$D(-2,0)$，$\because|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}|$，$\therefore DA\perp DB$，将椭圆 C 按照向量 $(2,0)$ 平移，

则得到方程 $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-x=0$，平移后 $A\to A'$，$B\to B'$，设 $A'B'$ 方程为 $mx+ny=1$，即 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-x=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-x(mx+ny)=0$（构造齐次式），同除以 x^2 得，$\frac{1}{3}\frac{y^2}{x^2}-n\frac{y}{x}+\frac{1}{4}-m=0$，因为点 A',B' 的坐标满足这个方程，所以 $k_{OA'},k_{OB'}$ 是这个关于 $\frac{y}{x}$ 的方程的两个根。$\therefore k_{OA'}k_{OB'}=k_{DA}k_{DB}=\frac{\frac{1}{4}-m}{\frac{1}{3}}=-1\Rightarrow m=\frac{7}{12}$，故 $A'B'$ 过定点 $\left(\frac{12}{7},0\right)$，故 AB 过定点 $\left(-\frac{2}{7},0\right)$.

第四讲　双曲线抛物线如法炮制

双曲线斜率和与积的问题一般式推广（知道即可，方法和椭圆一样）

已知点 $P(x_0,y_0)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上的一个定点，A,B 是椭圆上的两个动点.

（3）若 $k_{PA}+k_{PB}=\lambda$，则直线 AB 过定点 $\left(x_0-\frac{2y_0}{\lambda},-y_0+\frac{2x_0b^2}{\lambda a^2}\right)$；　当 $\lambda=0$ 时，k_{AB} 为定值 $-\frac{x_0b^2}{y_0a^2}$.

（4）若 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\lambda$，则直线 AB 过定点 $\left(\frac{\lambda a^2-b^2}{\lambda a^2+b^2}x_0,-\frac{\lambda a^2-b^2}{\lambda a^2+b^2}y_0\right)$；当 $\lambda=-\frac{b^2}{a^2}$ 时，k_{AB} 为定值 $-\frac{y_0}{x_0}$.

抛物线斜率和与积的问题一般式推广（大致还是那样，文科卷考得多）

已知点 $P(x_0,y_0)$ 是抛物线 $y^2=2px$ 上的一个定点，A,B 是抛物线上的两个动点.

（1）若 $k_{PA}+k_{PB}=\lambda$，则直线 AB 过定点 $\left(x_0-\frac{2y_0}{\lambda},-y_0+\frac{2p}{\lambda}\right)$；　当 $\lambda=0$ 时，k_{AB} 为定值 $-\frac{p}{y_0}$.

（2）若 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\lambda$，则直线 AB 过定点 $\left(x_0-\frac{2p}{\lambda},-y_0\right)$.

【例 11】（2017•新课标）设 A，B 为曲线 $C:y=\frac{x^2}{4}$ 上两点，A 与 B 的横坐标之和为 4.

（1）求直线 AB 的斜率；

（2）设 M 为曲线 C 上一点，C 在 M 处的切线与直线 AB 平行，且 $AM\perp BM$，求直线 AB 的方程.

【解析】（1）设 $A(x_1,\frac{x_1^2}{4})$，$B(x_2,\frac{x_2^2}{4})$ 为曲线 $C:y=\frac{x^2}{4}$ 上两点，则 $k_{AB}=\frac{\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}}{x_1-x_2}=\frac{1}{4}(x_1+x_2)=\frac{1}{4}\times4=1$；

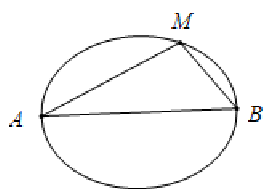
（2）再由 $y=\frac{x^2}{4}$ 的导数为 $y'=\frac{1}{2}x$，设 $M(m,\frac{m^2}{4})$，可得 M 处切线的斜率为 $\frac{1}{2}m$，由 C 在 M 处的切线与直线 AB 平行，可得 $\frac{1}{2}m=1$，解得 $m=2$，即 $M(2,1)$，将 $y=\frac{x^2}{4}$ 按照向量 $\overline{MO}(-2,-1)$ 平移得：平移后 $A\to A'$，$B\to B'$，设 $A'B'$ 方程为 $mx-my=1$，$y+1=\frac{(x+2)^2}{4}$，即 $x^2+4(x-y)=0\Rightarrow x^2+4(x-y)(mx-my)=0$

同除以 x^2 得，$4m\frac{y^2}{x^2}-8m\frac{y}{x}+4m+1=0$ 由 $AM\perp BM$ 可得，$k_{AM}\cdot k_{BM}=-1$，即为 $\frac{4m+1}{4m}=-1\Rightarrow m=-\frac{1}{8}$，

$\therefore A'B'$ 方程为 $x-y+8=0$，平移回去得：$(x-2)-(y-1)+8=0$ 则直线 AB 的方程为 $y=x+7$.

达标训练

1.（2018•龙岩期末）如图，AB 是椭圆 C 长轴长的两个顶点，M 是 C 上一点，$\tan\angle AMB=-1$，$\tan\angle MAB=\frac{1}{3}$，则椭圆的离心率为（　　）



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{30}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{42}}{6}$

2.（2018•南阳期末）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 点 A，B 为长轴的两个端点，若在椭圆上存在点 P，

使 $k_{AP}\cdot k_{BP}\in(-\frac{1}{3}$，$0)$，则离心率 e 的取值范围为（　　）

A．$(\frac{\sqrt{2}}{2}$，$1)$　　B．$(0,\frac{\sqrt{6}}{3})$　　C．$(\frac{\sqrt{6}}{3}$，$1)$　　D．$(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$

3．（2015•全国）直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{18}=1$ 相交于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 $(2,1)$，则 l 的斜率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$-\sqrt{2}$　　C．1　　D．-1

4．（2013•大纲版）椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 A_1、A_2，点 P 在 C 上且直线 PA_2 斜率的取值范围是 $[-2$，$-1]$，那么直线 PA_1 斜率的取值范围是（　　）

A．$[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$　　B．$[\frac{3}{8},\frac{3}{4}]$　　C．$[\frac{1}{2},1]$　　D．$[\frac{3}{4},1]$

5．（2013•新课标Ⅰ）已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(3,0)$，过点 F 的直线交椭圆 E 于 A、B 两点．若 AB 的中点坐标为 $(1,-1)$，则 E 的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$　　B．$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$　　C．$\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}=1$　　D．$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

6．已知双曲线方程为 $3x^2-y^2=3$，求以定点 $A(2,1)$ 为中点的弦所在的直线方程．

7．双曲线方程为 $3x^2-y^2=3$．问：以定点 $B(1,1)$ 为中点的弦存在吗？若存在，求出其所在直线的方程；若不存在，请说明理由．

8．（2019•乌鲁木齐一模）椭圆 C 的中心在坐标原点，焦点在坐标轴上，过 C 的长轴，短轴端点的一条直线方程是 $x+\sqrt{2}y-2=0$．

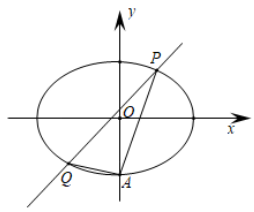
（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 $P(0,2)$ 作直线交椭圆 C 于 A，B 两点，若点 B 关于 y 轴的对称点为 B'，证明直线 AB' 过定点．

9．（2019•四川模拟）已知，椭圆 C 过点 $A(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$，两个焦点为 $(0,2)$，$(0,-2)$，E，F 是椭圆 C 上的两个动点，如果直线 AE 的斜率与 AF 的斜率互为相反数，直线 EF 的斜率为 k_1，直线 l 与椭圆 C 相切于点 A，斜率为 k_2．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）求 k_1+k_2 的值．



10．（2015•陕西）如图，椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $A(0,-1)$，且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$．

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）经过点 $(1,1)$，且斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 P，Q（均异于点 A），证明：直线 AP 与 AQ 斜率之和为 2．

11．（2012•湖北）设 A 是单位圆 $x^2+y^2=1$ 上的任意一点，l 是过点 A 与 x 轴垂直的直线，D 是直线 l 与 x 轴的交点，点 M 在直线 l 上，且满足 $|DM|=m|DA|(m>0,m\neq1)$．当点 A 在圆上运动时，记点 M 的轨迹为曲线 C．

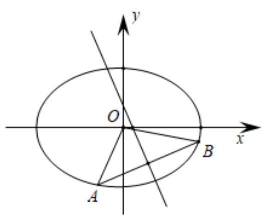
（1）求曲线 C 的方程，判断曲线 C 为何种圆锥曲线，并求焦点坐标；

（2）过原点且斜率为 k 的直线交曲线 C 于 P、Q 两点，其中 P 在第一象限，它在 y 轴上的射影为点 N，直线 QN 交曲线 C 于另一点 H，是否存在 m，使得对任意的 $k>0$，都有 $PQ\perp PH$？若存在，求 m 的值；若不存在，请说明理由．

12．（2015•浙江）已知椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上两个不同的点 A，B 关于直线 $y=mx+\frac{1}{2}$ 对称．

（1）求实数 m 的取值范围；

（2）求 $\triangle AOB$ 面积的最大值（O 为坐标原点）．



专题 7　定比点差法破解极点极线

第一讲 定比点差法原理

定比分点：若 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，则称点 M 为 AB 的定比分点，若 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $M:\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$

若 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$ 且 $\overrightarrow{AN}=-\lambda\overrightarrow{NB}$，则称 M，N 调和分割 A，B，根据定义，那么 A，B 也调和分割 M，N.

定理：在椭圆或双曲线中，设 A, B 为椭圆或双曲线上的两点．若存在 P, Q 两点，满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{AQ}=-\lambda\overrightarrow{QB}$，一定有 $\dfrac{x_Px_Q}{a^2}\pm\dfrac{y_Py_Q}{b^2}=1$

证明：若 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，则 $P:\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$

$\overrightarrow{AQ}=-\lambda\overrightarrow{QB}$ 则 $Q:\left(\dfrac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda},\dfrac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}\right)$，有 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}\pm\dfrac{y_1^2}{b^2}=1 & ①\\[2mm] \dfrac{\lambda^2x_2^2}{a^2}\pm\dfrac{\lambda^2y_2^2}{b^2}=\lambda^2 & ②\end{cases}$ ①—② 得：

$$\frac{(x_1+\lambda x_2)(x_1-\lambda x_2)}{a^2}\pm\frac{(y_1+\lambda y_2)(y_1-\lambda y_2)}{b^2}=1-\lambda^2$$

即 $\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\cdot\dfrac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}\pm\dfrac{1}{b^2}\cdot\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\cdot\dfrac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}=1\Rightarrow\dfrac{x_Px_Q}{a^2}\pm\dfrac{y_Py_Q}{b^2}=1$

定比点差的原理谜题解开，就是两个互相调和的定比分点坐标满足有心曲线（椭圆和双曲线有对称中心，故称为有心曲线）的特征方程：$\dfrac{x_Px_Q}{a^2}\pm\dfrac{y_Py_Q}{b^2}=1$．

第二讲　适用范围分析

考点一　求弦长被坐标轴分界的两段的比值范围，这个最好懂

【例 1】已知椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，过定点 $P(0,3)$ 的直线与椭圆交于两点 A，B（可重合），求 $\dfrac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}}$ 的取值范围.

【解析】设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$ 则 $\dfrac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}}=-\lambda$. $P:\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)=(0,3)$.

$\therefore x_1+\lambda x_2=0.y_1+\lambda y_2=3(1+\lambda)$ 即 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{9}+\dfrac{y_1^2}{4}=1 & ①\\[2mm] \dfrac{\lambda^2x_2^2}{9}+\dfrac{\lambda^2y_2^2}{4}=\lambda^2 & ②\end{cases}$

①—② 得：$\dfrac{(x_1+\lambda x_2)(x_1-\lambda x_2)}{9}+\dfrac{(y_1+\lambda y_2)(y_1-\lambda y_2)}{4}=1-\lambda^2$ 即 $y_1-\lambda y_2=\dfrac{4}{3}(1-\lambda)$

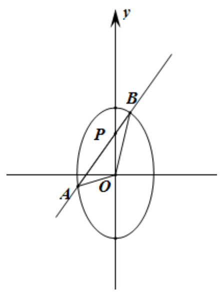
$\therefore y_1=\dfrac{3}{2}(1+\lambda)+\dfrac{2}{3}(1-\lambda)=\dfrac{13}{6}+\dfrac{5}{6}\lambda\in[-2,2]$　$\therefore\lambda\in\left[-5,-\dfrac{1}{5}\right]$　$\therefore\dfrac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}}\in\left[\dfrac{1}{5},5\right]$.

注意：根据两个调和定比分点的联立，将坐标求出与比值的关系式。两个分点式子齐上场才能解决问题，这是定比点差法的核心。

【例 2】已知椭圆 $C:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(b>a>0)$ 的上下两个焦点分别为 F_1、F_2，过点 F_1 与 y 轴垂直的直线交椭圆 C 于 M，N 两点，$\triangle MNF_2$ 的面积为 $\sqrt{3}$，椭圆 C 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）已知 O 为坐标原点，直线 $L:y=kx+m$ 与 y 轴交于点 P，与椭圆 C 交于 A，B 两个不同的点，若存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OP}$，求 m 的取值范围.



【解析】(I) $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$．(II) 当 $m=0$ 时，$\lambda=-1$，显然成立；当 $m\neq0$ 时，

$\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OP}\Rightarrow\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\lambda}{4}\overrightarrow{OB}$，$\because A,P,B$ 三点共线，$\therefore\lambda=3$；

$\therefore\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$P:\left(\dfrac{x_1+3x_2}{1+3},\dfrac{y_1+3y_2}{1+3}\right)$. $\therefore y_1+3y_2=4m$，

$$\begin{cases} x_1^2+\dfrac{y_1^2}{4}=1 & ① \\ 9x_2^2+\dfrac{9y_2^2}{4}=9 & ② \end{cases}$$

①—②得：$(x_1+3x_2)(x_1-3x_2)+\dfrac{(y_1+3y_2)(y_1-3y_2)}{4}=-8$ ，即 $y_1-3y_2=-\dfrac{8}{m}$，

如图，由于 B 更加靠近椭圆边界，故取其作为参照点，$\therefore y_2=\dfrac{2}{3}m+\dfrac{4}{3m}\in(-2,2)$ $\therefore m+\dfrac{2}{m}\in(-3,3)$ 解得 $m\in(-2,-1)\cup(1,2)$ 综上，m 的取值范围为 $(-2,-1)\cup(1,2)\cup\{0\}$.

考点二　求证定比分点和调和分点的坐标乘积满足椭圆和双曲线的特征方程，这个在 2008 年安徽高考题出现了，并且这些年在不断重复．也是定比点差法的本质探究．

【例 3】（2008 安徽）设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，过点 $M(\sqrt{2},1)$，左焦点为 $F_1(-\sqrt{2},0)$．

（1）求椭圆 C 的方程.

（2）当过点 $P(4,1)$ 的有直线 l 与椭圆 C 相交于 A，B. 在线段上取点 Q 满足 $|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{AQ}|\cdot|\overrightarrow{PB}|$．证明：点 Q 在某定直线上.

【解析】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$．

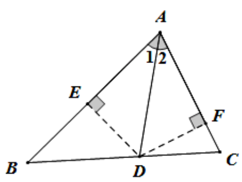
（2）$\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=-\dfrac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}}$，故令 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$　$\overrightarrow{AQ}=-\lambda\overrightarrow{QB}$；故 $\begin{cases}\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=4\\ \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=1\end{cases}$，$\begin{cases}\dfrac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}=x_Q\\ \dfrac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}=y_Q\end{cases}$

由于 A,B 在椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上，故 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{2}=1 & ①\\ \dfrac{\lambda^2x_2^2}{4}+\dfrac{\lambda^2y_2^2}{2}=\lambda^2 & ②\end{cases}$

①—②得：$\dfrac{(x_1-\lambda x_2)(x_1+\lambda x_2)}{4(1-\lambda)(1+\lambda)}+\dfrac{(y_1-\lambda y_2)(y_1+\lambda y_2)}{2(1-\lambda)(1+\lambda)}=1$　即 $\dfrac{4x_Q}{4}+\dfrac{y_Q}{2}=1$　即 $2x+y-2=0$．

考点三　坐标轴为角平分线的题型，如 2018 年高考全国一卷

三角形的内角平分线定理：在 ΔABC 中，若 AD 是 $\angle A$ 的平分线，则有 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$

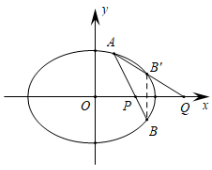


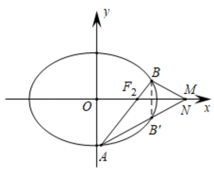
证明：作 $DE\perp AB$ 交 AB 于 E，$DF\perp AC$ 交 AC 于 F，设 BC 边上的高为 h，

易知 $DE=DF$，$\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\dfrac{AB\cdot DE}{AC\cdot DF}=\dfrac{BD\cdot h}{DC\cdot h}\Rightarrow\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$

定理：已知 AB 交椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 长轴（短轴）于点 P，B,B' 是椭圆上关于长轴（短轴）对称的两点，直线 AB' 交长轴（短轴）于 Q，则 $\dfrac{x_P\cdot x_Q}{a^2}=1\left(\text{或}\dfrac{y_P\cdot y_Q}{b^2}=1\right)$.

【例 4】（2018•全国卷I）设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，点 M 的坐标为 $(2,0)$．





（1）当 l 与 x 轴垂直时，求直线 AM 的方程；

（2）设 O 为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$．

【解析】（1）由已知得 $F(1,0)$，l 的方程为 $x=1$.由已知可得

点 A 的坐标为 $(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $(1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$．

所以 AM 的方程为 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$ 或 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}$．

(2)当 l 与 x 轴重合时，$\angle OMA=\angle OMB=0°$.当 l 与 x 轴垂直时，OM 为 AB 的垂直平分线，所以 $\angle OMA=\angle OMB$.当 l 与 x 轴不重合也不垂直时，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，点 B 关于 x 轴对称的点 $B'(x_2,-y_2)$，根据几何性质可得：令 ON 为 $\angle ANB$ 的角平分线，AB 与 x 轴交点为 F_2，下面通过证明 N 与 M 重合来证明 $\angle OMA=\angle OMB$，根据角平分线定理有：$\frac{AF_2}{F_2B}=\frac{AN}{NB'}=\frac{AN}{NB}$，

令 $\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{NB'}$，则 $N:\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},0\right)$ 则，$\overrightarrow{AF_2}=-\lambda\overrightarrow{F_2B}\Leftrightarrow\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}=1$，如图

$$\begin{cases}\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1 & ①\\ \frac{\lambda^2x_2^2}{2}+\lambda^2y_2^2=\lambda^2 & ②\end{cases}$$ ①—②得：$\frac{(x_1+\lambda x_1)(x_1-\lambda x_2)}{2}+(y_1+\lambda y_2)(y_1-\lambda y_2)=1-\lambda^2$.

即 $\frac{1}{2}\cdot\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\cdot\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}+0\cdot\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}=1\Rightarrow\frac{x_{F_2}x_N}{2}=1\Rightarrow N(2,0)$

即 N 与 M 重合，所以 $\angle OMA=\angle OMB$.综上，$\angle OMA=\angle OMB$.

考点四　相交弦问题的定点定值，在2018年高考北京卷，特点是两弦的交点通常在坐标轴上，若 AB 过定点（一般在两调和分点的中点），则 CD 的斜率与 AB 比值为定值.

定比点差转换定理：

在椭圆或双曲线中，设 A,B 为椭圆或双曲线上的两点．若存在 P,Q 两点，满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{AQ}=-\lambda\overrightarrow{QB}$，

若 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 一定有 $\begin{cases}x_1=\frac{x_P+x_Q}{2}+\frac{x_P-x_Q}{2}\cdot\lambda\\ x_2=\frac{x_P+x_Q}{2}+\frac{x_P-x_Q}{2\lambda}\end{cases}$ **（重点中的重点!!!）**

【例5】(2018•北京文）已知椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，焦距为 $2\sqrt{2}$．斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A、B.

（1）求椭圆 M 的方程；

（2）若 $k=1$，求 $|AB|$ 的最大值；

（3）设 $P(-2,0)$，直线 PA 与椭圆 M 的另一个交点为 C，直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 D．若 C，D 和点 $Q(-\frac{7}{4},\frac{1}{4})$ 共线，求 k.

【解析】(1)由题意得 $2c=2\sqrt{2}$，所以 $c=\sqrt{2}$，又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $a=\sqrt{3}$，所以 $b^2=a^2-c^2=1$，

所以椭圆 M 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

(2)设直线 AB 的方程为 $y=x+m$，由 $\begin{cases}y=x+m\\ \frac{x^2}{3}+y^2=1\end{cases}$ 消去 y 可得 $4x^2+6mx+3m^2-3=0$，

则 $\varDelta=36m^2-4\times4(3m^2-3)=48-12m^2>0$，即 $m^2<4$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{3m}{2}$，$x_1x_2=\frac{3m^2-3}{4}$，

则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{4-m^2}}{2}$，

易得当 $m^2=0$ 时，$|AB|_{\max}=\sqrt{6}$，故 $|AB|$ 的最大值为 $\sqrt{6}$.

（3）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PC}$，$P:\left(\frac{x_1+\lambda x_3}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_3}{1+\lambda}\right)=(-2,0)$，$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{PD}$，$P:\left(\frac{x_2+\mu x_4}{1+\mu},\frac{y_2+\mu y_4}{1+\mu}\right)=(-2,0)$

有 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{3}+y_1^2=1 & ①\\ \dfrac{\lambda^2x_3^2}{3}+\lambda^2y_3^2=\lambda^2 & ②\end{cases}$ ①—② 得：$\dfrac{(x_1+\lambda x_3)(x_1-\lambda x_3)}{3(1-\lambda^2)}+\dfrac{(y_1+\lambda y_3)(y_1-\lambda y_3)}{1-\lambda^2}=1$. 即 $\dfrac{(-2)(x_1-\lambda x_3)}{3(1-\lambda)}=1$. $\begin{cases}\dfrac{x_1-\lambda x_3}{1-\lambda}=-\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{x_1+\lambda x_3}{1+\lambda}=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{4}\lambda-\dfrac{7}{4}\\ x_3=-\dfrac{1}{4\lambda}-\dfrac{7}{4}\end{cases}$③，同理 $\begin{cases}\dfrac{x_2-\mu x_4}{1-\mu}=-\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{x_2+\mu x_4}{1+\mu}=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=-\dfrac{1}{4}\mu-\dfrac{7}{4}\\ x_4=-\dfrac{1}{4\mu}-\dfrac{7}{4}\end{cases}$④，

故 $x_1-x_2=-\dfrac{1}{4}(\lambda-\mu)$⑤ 同时 $\begin{cases}y_3=\dfrac{y_1}{-\lambda}\\ y_4=\dfrac{y_2}{-\mu}\end{cases}$，由于 CD 过定点 $Q\left(-\dfrac{7}{4},\dfrac{1}{4}\right)$，故

$\dfrac{y_3-\frac{1}{4}}{x_3+\frac{7}{4}}=\dfrac{y_4-\frac{1}{4}}{x_4+\frac{7}{4}}\Rightarrow\dfrac{\frac{y_1}{-\lambda}-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4\lambda}}=\dfrac{\frac{y_2}{-\mu}-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4\mu}}\Rightarrow y_1-y_2=-\dfrac{1}{4}(\lambda-\mu)$⑥ 结合⑤⑥可得 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$，即 $k=1$.

【例 6】已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{2}{3}$，半焦距为 $c(c>0)$，且 $a-c=1$. 经过椭圆的左焦点 F，斜率为 $k_1(k_1\neq 0)$ 的直线与椭圆交于 A、B 两点，O 为坐标原点.

（1）求椭圆 Γ 的标准方程；

（2）当 $k_1=1$ 时，求 $S_{\triangle AOB}$ 的值；

（3）设 $R(1,0)$，延长 AR，BR 分别与椭圆交于 C、D 两点，直线 CD 的斜率为 k_2，求证：$\dfrac{k_1}{k_2}$ 为定值.

【解析】（1）由题意，得 $\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}\\ a-c=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3\\ c=2\end{cases}$ $\therefore b^2=a^2-c^2=5$，故椭圆 Γ 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

（2）由（I），知 $F(-2,0)$，$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $y=x+2$，由 $\begin{cases}y=x+2\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1\end{cases}$，$14x^2+36x-9=0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{18}{7}$，$x_1x_2=-\dfrac{9}{14}$，$\therefore|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{30}{7}$. 设 O 点到直线 AB 的距离为 d，则 $d=\dfrac{|0-0+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. $\therefore S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{30}{7}\times\sqrt{2}=\dfrac{15\sqrt{2}}{7}$.

（3）设 AB 直线方程：$y=k(x+2)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，$\overrightarrow{AR}=\lambda\overrightarrow{RC}$，$\overrightarrow{BR}=\mu\overrightarrow{RD}$，

$\begin{cases}\dfrac{x_1-\lambda x_3}{1-\lambda}=9\\ \dfrac{x_1+\lambda x_3}{1+\lambda}=1\\ y_1+\lambda y_3=0\end{cases}$（调和分点），同理 $\begin{cases}\dfrac{x_2-\mu x_4}{1-\mu}=9\\ \dfrac{x_2+\mu x_4}{1+\mu}=1\\ y_2+\mu y_4=0\end{cases}$（调和分点），$\therefore\begin{cases}x_1=5-4\lambda\\ x_3=5-\dfrac{4}{\lambda}\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=5-4\mu\\ x_4=5-\dfrac{4}{\mu}\end{cases}$

$$\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\frac{\frac{-y_1}{\lambda}-\frac{-y_2}{\mu}}{(5-\frac{4}{\lambda})-(5-\frac{4}{\mu})}=\frac{-\frac{kx_1+2k}{\lambda}+\frac{kx_2+2k}{\mu}}{-\frac{4}{\lambda}+\frac{4}{\mu}}=\frac{-\frac{k(5-4\lambda)+2k}{\lambda}+\frac{k(5-4\mu)+2k}{\mu}}{-\frac{4}{\lambda}+\frac{4}{\mu}}=\frac{-7(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu})k}{-4(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu})}=\frac{7}{4}k.$$

综合可知，若出现相交弦共点在坐标轴上的时候，常规联立非常繁琐，那么将坐标变换成比值，达到事半功倍的效果，其结果就是几步秒杀.

达标训练

1. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $M(\sqrt{3},\frac{1}{2})$，且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设点 M 在 x 轴上的射影为点 N，过点 N 的直线 l 与椭圆 R 相交于 A、B 两点，且 $\overline{NB}+3\overline{NA}=0$ 求直线 l 的方程.

2.（2015•四川卷改编）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，左、右焦点分别为圆 F_1、F_2，M 是 C 上一点，$|MF_1|=2$，且 $|\overline{MF_1}||\overline{MF_2}|=2\overline{MF_1}\cdot\overline{MF_2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）当过点 $P(4,1)$ 的动直线 l 与椭圆 C 相交于不同两点 A、B 时，线段 AB 上取点 Q，且 Q 满足 $|\overline{AP}||\overline{QB}|=|\overline{AQ}||\overline{PB}|$，证明点 Q 总在某定直线上，并求出该定直线的方程.

3.（2018•浙江）已知点 $P(0,1)$，椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=m(m>1)$ 上两点 A、B 满足 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，则当 $m=$______时，点 B 横坐标的绝对值最大.

4. 已知椭圆的中心在原点，焦点在 x 轴上，F_1、F_2 分别为左、右焦点，椭圆的一个顶点与两焦点构成等边三角形，且 $|\overrightarrow{F_1F_2}|=2$.

（1）求椭圆方程；

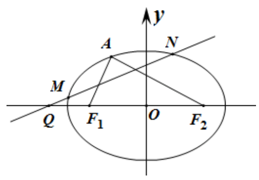
（2）对于轴上的某一点 T，过 T 作不与坐标轴平行的直线交椭圆于 P、Q 两点，若存在 x 轴上的点 S，使得对符合条件的 l 恒有 $\angle PST=\angle QST$ 成立，我们称 S 为 T 的一个配对点，当 T 为左焦点时，求 T 的配对点的坐标；

（3）在（2）条件下讨论当 T 在何处时，存在有配对点？

5. 如图，已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，点 A 是椭圆上任一点，$\triangle AF_1F_2$ 的周长为 $4+2\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 $Q(-4,0)$ 任作一动直线 l 交椭圆 C 于 M，N 两点，记，$\overrightarrow{MQ}=\lambda\overrightarrow{QN}$ 若在线段 MN 上取一点 R，使得 $\overrightarrow{MR}=-\lambda\overrightarrow{RN}$，则当直线 l 转动时，点 R 在某一定直线上运动，求该定直线的方程.



6. 平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，过点 F 且垂直于长轴的弦长为 $\sqrt{2}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）设点 A，B 分别是椭圆的左、右顶点，若过点 $P(-2,0)$ 的直线与椭圆相交于不同两点 M，N.（i）求证：$\angle AFM=\angle BFN$；（ii）求△MNF 面积的最大值.

7. 若椭圆 $E_1:\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$ 与椭圆 $E_2:\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1$ 满足 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=m(m>0)$，则称这两个椭圆相似，$m$ 叫相似比．若椭圆 M_1 与椭圆 $M_2:x^2+2y^2=1$ 相似且过 $(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 点.

（1）求椭圆 M_1 的标准方程；

（2）过点 $P(-2,0)$ 作斜率不为零的直线 l 与椭圆 M_1 交于不同两点 A、B，F 为椭圆 M_1 的右焦点，直线 AF、BF 分别交椭圆 M_1 于点 G、H，设 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FG}$，$\overrightarrow{BF}=\mu\overrightarrow{FH}(\lambda,\mu\in R)$，求 $\lambda+\mu$ 的取值范围.

8. 已知 F_1、F_2 分别是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，A 为椭圆的上顶点，O 为坐标原点，$N(-2,0)$，并且满足 $\overrightarrow{F_1F_2}=2\overrightarrow{NF_1}$，$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AF}=3$

（1）求此椭圆的方程；

（2）若过点 N 的直线 l 与椭圆交于不同的两点 E、$F(E在N，F之间)$，$\overrightarrow{NE}=\lambda\overrightarrow{NF}$，试求实数 λ 的取值范围．

9. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的左右两个顶点是 A_1，A_2，曲线 C 上的动点 P、Q 关于 x 轴对称，直线 A_1P 与 A_2Q 交于点 M．

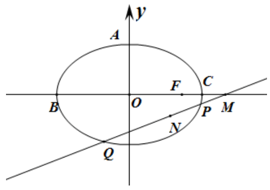
（1）求动点 M 的轨迹 D 的方程；

（2）点 $E(0,2)$，轨迹 D 上的点 A、B 满足 $\overrightarrow{EA}=\lambda\overrightarrow{EB}$，求实数 λ 的取值范围．

10. 如图，已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点为 A，左右顶点为 B、C，右焦点为 F，$|AF|=3$，且 $\triangle ABC$ 的周长为 14．

（1）求椭圆的离心率；

（2）过点 $M(4,0)$ 的直线 l 与椭圆相交于不同两点 P、Q，点 N 在线段 PQ 上，设 $\lambda=\dfrac{|MP|}{|PN|}=\dfrac{|MQ|}{|QN|}$，试判断点 N 是否在一条定直线上，并求实数 λ 的取值范围．



11. 已知椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，焦距为 $2\sqrt{2}$．斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A、B．

（1）求椭圆 M 的方程；

（2）若 $k=1$，求 $|AB|$ 的最大值；

（3）设 $P(-2,0)$，直线 PA 与椭圆 M 的另一个交点为 C，直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 D．若 C，D 和点 $Q(-\dfrac{7}{4},\dfrac{1}{2})$ 共线，求 k．

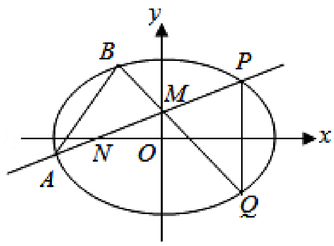
12. （2016•山东）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 4，焦距为 $2\sqrt{2}$．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过动点 $M(0,m)(m>0)$ 的直线交 x 轴与点 N，交 C 于点 A，P（P 在第一象限），且 M 是线段 PN 的中点．过点 P 作 x 轴的垂线交 C 于另一点 Q，延长 QM 交 C 于点 B．

（i）设直线 PM，QM 的斜率分别为 k_1，k_2，证明 $\dfrac{k_2}{k_1}$ 为定值；

（ii）求直线 AB 的斜率的最小值．

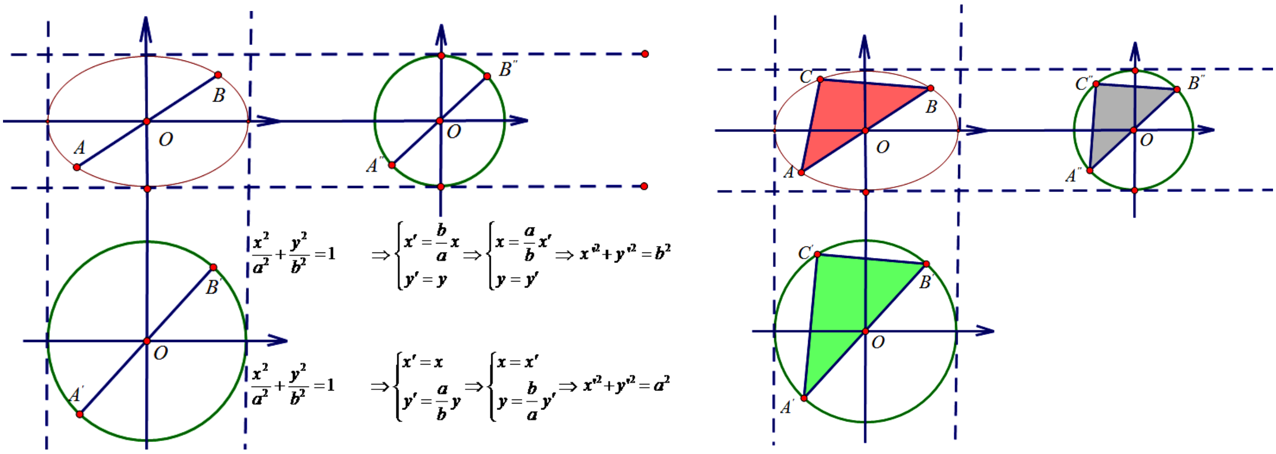


专题 8　仿射大法大破天机

第一讲　仿射大法：将坐标进行伸缩变换，实现化椭为圆

仿射大法定理一：若经过椭圆的对称中心的直线构成的直径三角形，则两条弦的斜率乘积 $k_{AC}\cdot k_{BC}=-\dfrac{b^2}{a^2}$

仿射大法定理二：$\dfrac{S'}{S}=\dfrac{a}{b}$（拉伸短轴）；$\dfrac{S''}{S}=\dfrac{b}{a}$（压缩长轴）



拉长短轴后点的坐标变化：$A(x_0,y_0)\to A'(x_0,\dfrac{a}{b}y_0)$,横坐标不变，纵坐标拉伸 $\dfrac{a}{b}$ 倍.

斜率的变化：如图纵坐标拉 伸了 $\dfrac{a}{b}$ 倍，故 $k'=\dfrac{a}{b}k$，由于 $k_{A'C'}\cdot k_{B'C'}=-1$.

$k_{AC}\cdot k_{BC}=\dfrac{b}{a}k_{A'C'}\cdot\dfrac{b}{a}k_{B'C'}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{b}{a}S_{\triangle A'B'C'}$（水平宽不变，铅锤高缩小）

压缩长轴后点的坐标变化：$A(x_0,y_0)\to A'(\dfrac{b}{a}x_0,y_0)$,纵坐标不变，横坐标缩小 $\dfrac{b}{a}$ 倍.

斜率的变化：如图横坐标缩小了 $\dfrac{b}{a}$ 倍，故 $k'=\dfrac{a}{b}k$，由于 $k_{A'C'}\cdot k_{B'C'}=-1$.

$k_{AC}\cdot k_{BC}=\dfrac{b}{a}k_{A'C'}\cdot\dfrac{b}{a}k_{B'C'}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{a}{b}S_{\triangle A'B'C'}$（水平宽扩大，铅垂高不变）

【例 1】（2013•新课标）椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 A_1、A_2，点 P 在 C 上且直线 PA_2 斜率的取值范围是 $[-2,-1]$，那么直线 PA_1 斜率的取值范围是（　　）

A. $[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}]$　　B. $[\dfrac{3}{8},\dfrac{3}{4}]$　　C. $[\dfrac{1}{2},1]$　　D. $[\dfrac{3}{4},1]$

【解析】由椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 可知 $k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{3}{4}$，$\because -2\leqslant k_{PA_2}\leqslant -1$，$\therefore -2\leqslant -\dfrac{3}{4k_{PA_1}}\leqslant -1$，解得 $\dfrac{3}{8}\leqslant k_{PA_1}\leqslant\dfrac{3}{4}$．故选 B．

【例 2】（2016•北京）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(2,0)$，$B(0,1)$ 两点.

（1）求椭圆 C 的方程及离心率；

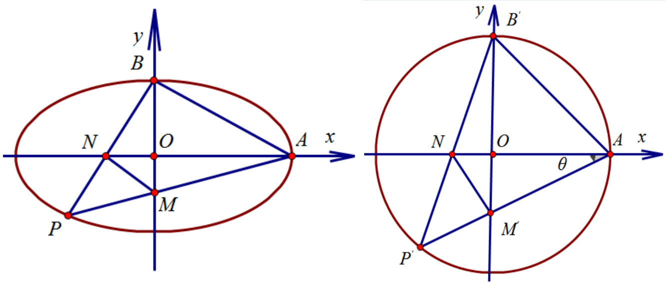
（2）设 P 为第三象限内一点且在椭圆 C 上，直线 PA 与 y 轴交于点 M，直线 PB 与 x 轴交于点 N，求证：四边形 $ABNM$ 的面积为定值.

【解析】（1）$\because$ 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(2,0)$，$B(0,1)$ 两点，$\therefore a=2$，$b=1$，

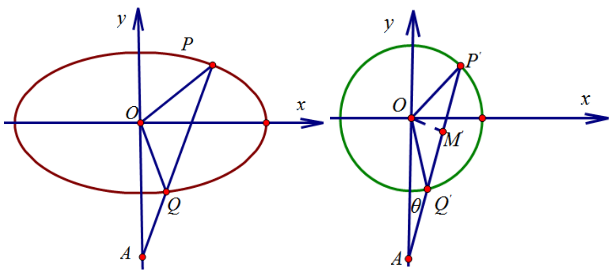
则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，离心率为 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

【解析】(1) 由已知得 $F(1,0)$，l 的方程为 $x=1$. 由已知可得，点 A 的坐标为 $(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $(1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

令 $\angle P'AO=\theta$，$S_{ABNM}=\frac{1}{2}S_{AB'NM'}=\frac{1}{4}|AN|\cdot|B'M'|=\frac{1}{4}\left(2+2\tan\left(45^\circ-\theta\right)\right)\left(2+2\tan\theta\right)=2$.



例 2 图



例 3 图

【例 3】(2014•新课标I) 已知点 $A(0,-2)$，椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，F 是椭圆的右焦点，直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，O 为坐标原点.

(1) 求 E 的方程;

(2) 设过点 A 的直线 l 与 E 相交于 P、Q 两点，当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时，求 l 的方程.

【解析】(1) 由题意 $\frac{2}{c}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，得 $c=\sqrt{3}$ 又 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $a=2$，$b^2=a^2-c^2=1$，故 E 的方程 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) 如图，作 $\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x\\ y'=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2x'\\ y=y'\end{cases}\Rightarrow x'^2+y'^2=1$，取 $P'Q'$ 中点 M'，令 $\angle P'AO=\theta$，则 $|OM'|=2\sin\theta$，$|P'M'|=\sqrt{1-|OM'|^2}=\sqrt{1-4\sin^2\theta}$，

$S_{OPQ}=2S_{OP'Q'}=4\sin\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta}\le 2\cdot\frac{\left(2\sin\theta\right)^2+1-4\sin^2\theta}{2}=1$ 当仅当 $\left(2\sin\theta\right)^2=1-4\sin^2\theta$,

即 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时等号成立此时 $k_{PQ}=\frac{1}{2}k'_{P'Q'}=\frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$，则 l：$y=\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$ 或 $y=-\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$.

第二讲　椭圆的角平分线定理

仿射大法定理三：若点 A、B 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的点，AB 与椭圆长轴交点为 N，在长轴上一定存在一个点 M，当仅当则 $x_M\cdot x_N=a^2$ 时，$\angle AMN=\angle BMN$，即长轴为角平分线；

若点 A、B 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的点，AB 与椭圆短轴交点为 N，在短轴上一定存在一个点 M，当仅当则 $y_M\cdot y_N=b^2$ 时，$\angle AMN=\angle BMN$，即短轴为角平分线；

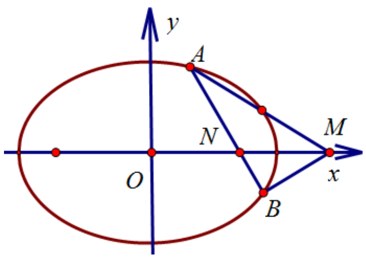
【例 4】(2018•全国卷 1) 设椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，点 M 的坐标为 $(2,0)$.

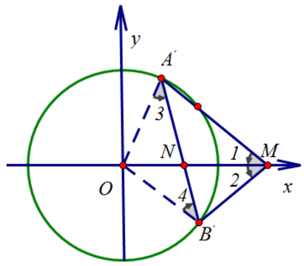
(1) 当 l 与 x 轴垂直时，求直线 AM 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$.

【解析】(1) 由已知得 $F(1,0)$，l 的方程为 $x=1$. 由已知可得，点 A 的坐标为 $(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $(1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

所以 AM 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$ 或 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}$.





（2）如图，作$\begin{cases}x'=x\\ y'=\sqrt{2}y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'\end{cases}\Rightarrow x'^2+y'^2=2$ 连结 OA',OB' $k'_{A'M}=\sqrt{2}k_{AM},k'_{B'M}=\sqrt{2}k_{BM}$

由于 $|OA'|^2=|OB'|^2=|OM|\cdot|OF|=2$，根据相似三角形性质，$\triangle OA'F\backsim\triangle OMA',\triangle OB'F\backsim\triangle OMB'$ 故 $\angle1=\angle3$，$\angle2=\angle4$，，所以 $\angle1=\angle2=\angle3=\angle4$，即 $\angle A'MO=\angle B'MO$，$k_{MA'}+k_{MB'}=0$ $\therefore\sqrt{2}k_{MA}+\sqrt{2}k_{MB}=0$ $\therefore\angle AMO=\angle BMO$.

第三讲 仿射后圆心角为直角问题

仿射大法定理四：若以椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的对称中心引出两条直线交椭圆于 *A*、*B* 两点，且 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，则经过仿射变换后 $k_{OA'}\cdot k_{OB'}=-1$，所以 $S_{\triangle AOB}$ 为定值。

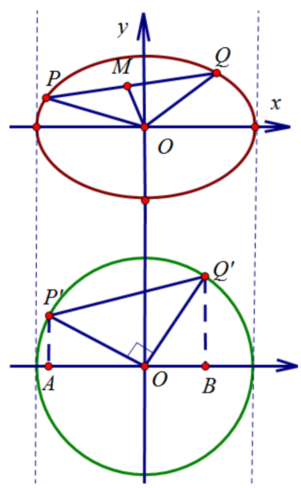
仿射大法定理五：若椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上三点 *A*，*B*，*M*，满足① $k_{OA}\cdot k_{OB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$ ② $S_{\triangle AOB}=\dfrac{ab}{2}$ ③ $\overrightarrow{OM}=\sin\alpha\overrightarrow{OA}+\cos\alpha\overrightarrow{OB}\left(\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$，三者等价

【例 5】（2011•山东）已知直线 l 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 交于 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 两不同点，且 $\triangle OPQ$ 的面积 $S_{\triangle OPQ}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，其中 O 为坐标原点.

（1）证明 $x_1^2+x_2^2$ 和 $y_1^2+y_2^2$ 均为定值；

（2）设线段 PQ 的中点为 M，求 $|OM|\cdot|PQ|$ 的最大值；

（3）椭圆 C 上是否存在点 D，E，G，使得 $S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$？若存在，判断 $\triangle DEG$ 的形状；若不存在，请说明理由.



【解析】（I）作$\begin{cases}x'=x\\ y'=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y'\end{cases}\Rightarrow x'^2+y'^2=3$

$S_{\triangle OPQ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}S_{\triangle OP'Q'}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\Rightarrow S_{\triangle OP'Q'}=\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}|OP'||OQ'|\sin\angle P'OQ'$ $\therefore\angle P'OQ'=90°$，根据三角形全等的判定定理 $\triangle P'AO\cong\triangle OBQ'$，$\therefore|x_1|=|y_2'|,|x_2|=|y_1'|$，

$\because x_1^2+y_1'^2=x_2^2+y_2'^2=3$ $\therefore x_1^2+x_2^2=y_1'^2+y_2'^2=3$，$\therefore y_1^2+y_2^2=\dfrac{2}{3}\left(y_1'^2+y_2'^2\right)=2$

（II）根据极化恒等式 $\left(\dfrac{\vec a+\vec b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\vec a-\vec b}{2}\right)^2=\dfrac{\vec a^2+\vec b^2}{2}$，故 $|OM|^2+|PM|^2=\dfrac{|OP|^2+|OQ|^2}{2}=\dfrac{5}{2}\ge2|OM||PM|=|OM||PQ|$ 当仅当 $|OM|=|PM|$ 时等号成立；

（III）若 $S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，则 $S_{\triangle OD'E'}=S_{\triangle OD'G'}=S_{\triangle OE'G'}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\angle D'OE'=\angle D'OG'=\angle G'OE'=90°$，矛盾，显然不存在三点.

【例6】（2016•浙江二模）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $\left(\frac{6}{5},\frac{4}{5}\right)$，其离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，设 A、B、M 是椭圆 C 上的三点，且满足 $\overrightarrow{OM}=\cos\alpha\overrightarrow{OA}+\sin\alpha\overrightarrow{OB}\left(\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$，其中 O 为坐标原点．

（1）求椭圆的标准方程；

（2）证明：$\triangle OAB$ 的面积是一个常数．

【解析】（1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ （2）将 $\begin{cases}x'=x\\y'=2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'\\y=\frac{1}{2}y'\end{cases}\Rightarrow C':x'^2+y'^2=4$，$\overrightarrow{OM}'=\cos\alpha\overrightarrow{OA}'+\sin\alpha\overrightarrow{OB}'$，

$\left|\overrightarrow{OM}'\right|^2=4=\cos^2\alpha\left|\overrightarrow{OA}\right|'^2+\sin^2\alpha\left|\overrightarrow{OB}\right|'^2+2\cos\alpha\sin\alpha\overrightarrow{OA}'\overrightarrow{OB}'=4+\overrightarrow{OA}'\overrightarrow{OB}'\sin2\alpha\Rightarrow\overrightarrow{OA}'\overrightarrow{OB}'=0$，

$S_{\triangle A'OB'}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sin90^\circ=2=2S_{\triangle AOB}\Rightarrow S_{\triangle AOB}=1$.

第四讲　中点弦与中垂线问题（无需点差法也可证明）

仿射大法定理六：中点弦问题，$k_{OP}\cdot k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2}$，中垂线问题 $\frac{k_{OP}}{k_{MP}}=\frac{b^2}{a^2}$，且 $x_M=\frac{c^2x_0}{a^2}$　$y_N=-\frac{c^2y_0}{b^2}$，

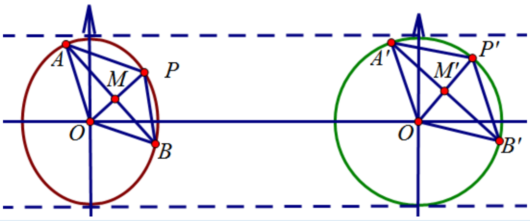
拓展1：椭圆内接 $\triangle ABC$ 中，若原点 O 为重心，则仿射后一定得到 $\triangle OB'C'$ 为 120° 的等腰三角形；$\triangle A'B'C'$ 为等边三角形；

拓展2：椭圆内接的平行四边形 $OAPB(A、P、B)$ 在椭圆上，则仿射后一定得到菱形 $OA'P'B'$

【例7】（2015•新课标II）已知椭圆 $C:9x^2+y^2=m^2(m>0)$，直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A，B，线段 AB 的中点为 M.

（1）证明：直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值；

（2）若 l 过点 $(\frac{m}{3},m)$，延长线段 OM 与 C 交于点 P，四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形？若能，求此时 l 的斜率；若不能，说明理由.



【解析】(1) 作 $\begin{cases}x'=3x\\y'=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{x'}{3}\\y=y'\end{cases}\Rightarrow x'^2+y'^2=m^2$，$k_{AB}=3k_{A'B'},k_{OM}=3k_{OM'}$，由于 $k_{A'B'}k_{OP'}=-1$，故 $k_{OM}\cdot k_{AB}=-9$

(2) 四边形 $OAPB$ 能为平行四边形．且直线 l 过点 $(\frac{m}{3},m)$，故四边形 $OA'P'B'$ 能为菱形．且直线 l' 过点 (m,m)，

设 $A'B'$ 方程为 $y-m=k'(x-m)$，圆心到直线 $A'B'$ 距离为 $\frac{m}{2}=\frac{|(1-k')m|}{\sqrt{1+k'^2}}$，故 $k'=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$，则 $k=4\pm\sqrt{7}$

【例8】（2015•浙江）已知椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上两个不同的点 A、B 关于直线 $y=mx+\frac{1}{2}$ 对称.

（1）求实数 m 的取值范围；

（2）求 $\triangle AOB$ 面积的最大值（O 为坐标原点）.

【解析】取 AB 中点 $P(x_0,y_0)$，AB 中垂线交 y 轴于 N，作 $\begin{cases}x'=\frac{\sqrt{2}}{2}x\\y'=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}x'\\y=y'\end{cases}\Rightarrow x'^2+y'^2=1$

$\begin{cases}k_{OP}=\frac{\sqrt{2}}{2}k_{OP'},k_{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}k_{A'B'}\end{cases}\Rightarrow k_{OP}k_{AB}=-\frac{1}{2}$；$\begin{cases}k_{NP}\cdot k_{AB}=-1\\k_{OP}\cdot k_{AB}=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{k_{OP}}{k_{NP}}=\frac{1}{2}$

$k_{OP}=\frac{1}{2}k_{NP}\Rightarrow\frac{y_0}{x_0}=\frac{1}{2}\frac{y_0-\frac{1}{2}}{x_0}$，故 $y_0=-\frac{1}{2}$；由于 $P\left(x_0,-\frac{1}{2}\right)$ 在椭圆内，故 $-\frac{\sqrt{6}}{2}<x_0<\frac{\sqrt{6}}{2}$，则

$m=2k_{OP}=2\frac{y_0}{x_0}=-\frac{1}{x_0}\in\left(-\infty,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{6}}{3},+\infty\right)$；

【解析】取 AB 中点 $P(x_0,y_0)$，AB 中垂线交 y 轴于 N，作 $\begin{cases} x'=\frac{\sqrt{2}}{2}x \\ y'=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2}x' \\ y=y' \end{cases} \Rightarrow x'^2+y'^2=1$

$\begin{cases} k_{OP}=\frac{\sqrt{2}}{2}k_{OP'},k_{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}k_{A'B'} \\ k_{OP'}\cdot k_{A'B'}=-1 \end{cases} \Rightarrow k_{OP}k_{AB}=-\frac{1}{2}$；$\begin{cases} k_{NP}\cdot k_{AB}=-1 \\ k_{OP}\cdot k_{AB}=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{k_{OP}}{k_{NP}}=\frac{1}{2}$

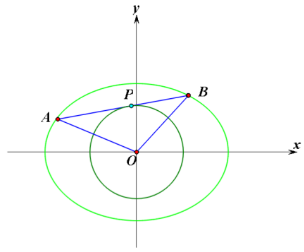
$k_{OP}=\frac{1}{2}k_{NP} \Rightarrow \frac{y_0}{x_0}=\frac{1}{2}\frac{y_0-\frac{1}{2}}{x_0}$，故 $y_0=-\frac{1}{2}$；由于 $P\left(x_0,-\frac{1}{2}\right)$ 在椭圆内，故 $-\frac{\sqrt{6}}{2}<x_0<\frac{\sqrt{6}}{2}$，则 $m=2k_{OP}=2\frac{y_0}{x_0}=-\frac{1}{x_0}\in\left(-\infty,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{6}}{3},+\infty\right)$；

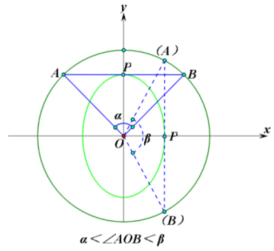
（1）根据仿射后的图，设 $A'B'$ 与 y 轴交点为 M，$\angle OMP'=\theta$，$|OP'|=\frac{1}{2\sin\theta},|A'P'|=\sqrt{1-\frac{1}{4\sin^2\theta}}$

$S_{\triangle OAB}=\sqrt{2}S_{\triangle OA'B'}=\sqrt{2}|OP'||A'P'|=\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{4\sin^2\theta}\left(1-\frac{1}{4\sin^2\theta}\right)}\le\sqrt{2}\cdot\frac{\frac{1}{4\sin^2\theta}+1-\frac{1}{4\sin^2\theta}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，当仅当 $\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立.

第五讲 利用仿射大法解决椭圆与圆结合面积问题

若椭圆内含有圆与直线相切，如图直线 AB 与圆相切于 P，交椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 于点 A,B 求 $S_{\triangle OAB}$ 的最大值，





首先进行仿射变换：$\begin{matrix} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ x^2+y^2=r^2 \end{matrix}$，令 $\begin{cases} x=x' \\ y=\frac{a}{b}y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'^2+y'^2=a^2 \\ x'^2+\frac{b^2y'^2}{a^2}=r^2 \end{cases}$，拉伸后可知，$S_{\triangle AOB}=\frac{b}{a}S_{\triangle A'OB'}$，

故当 $S_{\triangle A'OB'}=\frac{1}{2}a^2\sin\angle A'OB'$ 最大时，$\angle A'OB'=90^\circ$，关键在于看 $\angle A'OB'$ 的取值范围；

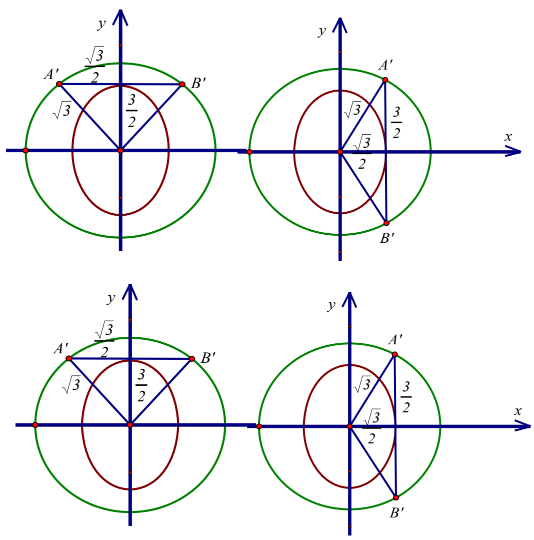
根据几何性质，$A'B'$ 平行于 x 轴时，$\angle A'OB'=\alpha$ 最小，$A'B'$ 平行于轴 y 时，$\angle A'OB'=\beta$ 最大.

【例 9】（2018•武汉模拟）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $(\sqrt{2},0)$，离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若直线 l 与椭圆 C 相交于 A，B 两点，且以 AB 为直径的圆经过原点 O，求证：点 O 到直线 AB 的距离为定值；

（3）在（2）的条件下，求△OAB 面积的最大值.



【解析】（1）椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$；

（2）证明：令 $\begin{cases} x_1=\rho_1\cos\theta \\ y_1=\rho_1\sin\theta \end{cases}$；$\begin{cases} x_2=\rho_2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\rho_2\sin\theta \\ y_2=\rho_2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\rho_2\cos\theta \end{cases}$，

$\dfrac{\rho^2\cos^2\theta}{3}+\rho^2\sin^2\theta=1\Rightarrow\dfrac{1}{\rho^2}=\dfrac{\cos^2\theta}{3}+\sin^2\theta\Rightarrow\dfrac{1}{\rho_1{}^2}+\dfrac{1}{\rho_2{}^2}=\dfrac{\rho_1{}^2+\rho_2{}^2}{\rho_1{}^2\rho_2{}^2}$

$=\dfrac{1}{d^2}=\dfrac{\cos^2\theta}{3}+\sin^2\theta+\dfrac{\sin^2\theta}{3}+\cos^2\theta=\dfrac{4}{3}\Rightarrow d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

（3）$\begin{matrix}\dfrac{x^2}{3}+y^2=1\\ x^2+y^2=\dfrac{3}{4}\end{matrix}$，令$\begin{cases}x=x'\\ \sqrt{3}y=y'\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}x'^2+y'^2=3\\ x'^2+\dfrac{y'^2}{3}=\dfrac{3}{4}\end{cases}$，

拉伸后可知，$S_{\Delta A'OB'}=\sqrt{3}S_{\Delta AOB}$，根据几何性质可知，当 $A'B'$ 平行于 x 轴时，$\angle A'OB'=60°$，当 $A`B`$ 平行于 y 轴时，$\angle A'OB'=120°$，故 $60°\le\angle A'OB'\le120°$，当 $\angle A'OB'=90°$ 时，$S_{\triangle A'OB'}=\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\sin 90°=\dfrac{3}{2}$，面积最大，$S_{\triangle AOB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}S_{\triangle A'OB'}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

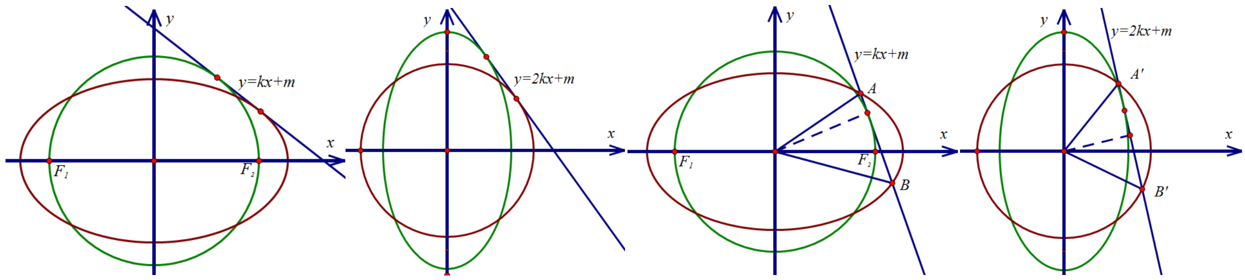
【例 10】（2018•江苏）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 过点 $(\sqrt{3},\dfrac{1}{2})$，焦点 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，圆的直径为 F_1F_2．

（1）求椭圆 C 及圆 O 的方程；

（2）设直线 l 与圆 O 相切于第一象限内的点 P．

①若直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点，求点 P 的坐标；

②直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点．若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$，求直线 l 的方程．



【解析】（1）由题意可设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，∵焦点 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，

$\therefore c=\sqrt{3}$．$\therefore\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}=1$，又 $a^2-b^2=c^2=3$，解得 $a=2$，$b=1$．

$\therefore$ 椭圆的方程为 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，圆的方程为：$O:x^2+y^2=3$．

（1）①可知直线 l 与圆 O 相切，也与椭圆 C，且切点在第一象限，因此 k 一定小于 0，

$\therefore$ 可设直线 l 的方程为 $y=kx+m,(k<0,m>0)$．由圆心 $(0,0)$ 到直线 l 的距离等于圆半径 $\sqrt{3}$，

可得 $\dfrac{m^2}{1+k^2}=3\Rightarrow m^2=3+3k^2$． $\begin{matrix}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ x^2+y^2=3\end{matrix}$，令$\begin{cases}\dfrac{1}{2}x=x'\\ y=y'\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}x'^2+y'^2=1\\ x'^2+\dfrac{y'^2}{4}=3\end{cases}$，

直线 l' 方程为：$y=2kx'+m$，圆心 $(0,0)$ 到直线 l' 的距离等于圆半径 1，可得 $\dfrac{m^2}{1+4k^2}=1\Rightarrow m^2=1+4k^2$

结合 $k<0$，$m>0$，解得 $k=-\sqrt{2}$，$m=3$．将 $k=-\sqrt{2}$，$m=3$ 代入$\begin{cases}x^2+y^2=3\\ y=kx+m\end{cases}$可得 $x^2-2\sqrt{2}x+2=0$，解得 $x=\sqrt{2}$，$y=1$，故点 P 的坐标为 $(\sqrt{2},1)$． ② $S_{\triangle OAB}=2S_{\triangle OA'B'}=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot R^2\sin\angle A'OB'\Rightarrow\sin\angle A'OB'=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$，

故 $\cos\dfrac{\angle A'OB'}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ 或 $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ 可知圆心 $(0,0)$ 到直线 l' 的距离等于 $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ 或 $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$，

由于 $m^2=3+3k^2$，$\cos\frac{\angle A'OB'}{2}=\frac{1}{\sqrt{7}}$ 时，$\frac{m^2}{1+4k^2}=\frac{1}{7}\Rightarrow m^2=\frac{1}{7}+\frac{4}{7}k^2\Rightarrow\begin{cases}m^2=3+3k^2\\m^2=\frac{1}{7}+\frac{4}{7}k^2\end{cases}$ 无解，只能 $\begin{cases}m^2=3+3k^2\\m^2=\frac{6}{7}+\frac{24}{7}k^2\end{cases}$ 即 $\begin{cases}k^2=5\\m^2=18\end{cases}$ 解得 $k=-\sqrt{5}$，（正值舍去），$m=3\sqrt{2}$．$\therefore y=-\sqrt{5}x+3\sqrt{2}$ 为所求．

第六讲　定比分点和弦长公式

仿射大法定理七：定比分点的比值不变性原理， $\lambda=\frac{AC}{CB}=\frac{A'C'}{C'B'}=\frac{A''C''}{C''B''}=\frac{x_C-x_A}{x_B-x_C}=\frac{y_C-y_A}{y_B-y_C}$；

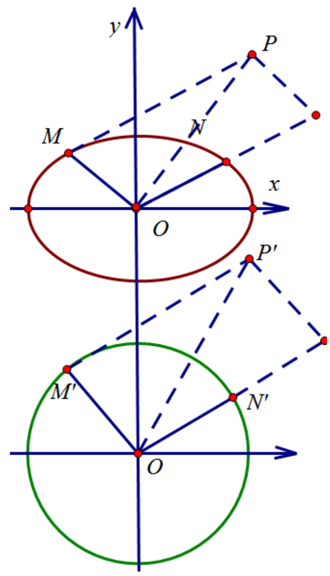
仿射大法定理八：弦长公式的转化，纵向拉伸并不改变横向的性质，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $AB=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|\Rightarrow A'B'=\sqrt{1+k'^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+(\frac{a}{b})^2k^2}|x_1-x_2|$，**即** $\frac{AB}{A'B'}=\frac{\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+(\frac{a}{b})^2k^2}}$．

【例 11】（2011•重庆）如图，椭圆 O 的中心为原点，离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，一条准线的方程是 $x=2\sqrt{2}$

（1）求椭圆的标准方程；

（2）设动点满足 P：$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}$，其中 M、N 是椭圆上的点，直线 OM 与 ON 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$，问：是否存在定点，使得 $|PF|$ 与点 P 到直线 $l:x=2\sqrt{10}$ 的距离之比为定值；若存在，求 F 的坐标，若不存在，说明理由．



【解析】(I) 由题意得 $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{a^2}{c^2}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=2\sqrt{2},\therefore a=2,b=\sqrt{2}$，

故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．

(II) 设动点 $P(x,y)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$．$\because$ 动点 P 满足：$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}$

作仿射变换，令 $x'=x$，$y'=\sqrt{2}y$，则椭圆 C 变为圆 $C':x'^2+y'^2=4$，设此时 P、M、N 对应的点分别为 P'、M'、N'，$k'_{OM'}\cdot k'_{ON'}=2k_{OM}k_{ON}=-1$，则 $OM'\perp ON'$，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}\Rightarrow|\overrightarrow{OP'}|=2\sqrt{5}$，故 P' 的轨迹方程为，$x'^2+y'^2=20$

仿射回去则有 $x^2+2y^2=20$，故点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{10}=1$ 上的点，焦点 $F(\sqrt{10},0)$，准线 $l:x=2\sqrt{10}$，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，根据椭圆的第二定义，$|PF|$ 与点 P 到直线 $l:x=2\sqrt{10}$ 的距离之比为定值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，故存在点 $F(\sqrt{10},0)$，满足 $|PF|$ 与点 P 到直线 $l:x=2\sqrt{10}$ 的距离之比为定值．

【例 12】（2016•四川）已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点与短轴的一个端点是直角三角形的 3 个顶点，直线 $l:y=-x+3$ 与椭圆有且只有一个公共点 T．

（1）求椭圆 E 的方程及点 T 的坐标；

（2）设 O 是坐标原点，直线 l' 平行于 OT，与椭圆 E 交于不同的两点 A、B，且与直线 l 交于点 P．证明：存在常数 λ，使得 $|PT|^2=\lambda|PA|\cdot|PB|$，并求 λ 的值．

【解析】(I) 设短轴一端点为 $C(0,b)$，左右焦点分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，其中 $c>0$，则 $c^2=b^2+a^2$；由题意，$\triangle F_1F_2C$ 为直角三角形，

$\therefore |F_1F_2|^2=|F_1C|^2+|F_2C|^2$，解得 $b=c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，$\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$；

代入直线 $l:y=-x+3$，可得 $3x^2-12x+18-2b^2=0$，

又直线 l 与椭圆 E 只有一个交点，则 $\Delta=12^2-4\times3(18-2b^2)=0$，解得 $b^2=3$，

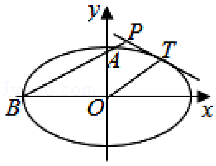
$\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$；由 $b^2=3$，解得 $x=2$，则 $y=-x+3=1$，所以点 T 的坐标为 $(2,1)$；

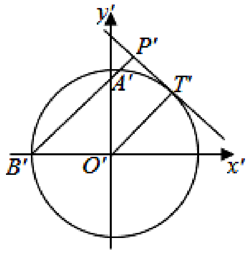
(II) 作伸缩变换，令 $x'=x$，$y'=\sqrt{2}y$，则椭圆 E 变为圆 $E':x'^2+y'^2=6$，

设此时 P、A、B、T 对应的点分别为 P'、A'、B'、T' 如图所示；

则 $\dfrac{|P'T'|^2}{|PT|^2}=\dfrac{1+2\times(-1)^2}{1+(-1)^2}=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{|P'A'|\cdot|P'B'|}{|PA|\cdot|PB|}=\dfrac{1+2\times(\frac{1}{2})^2}{1+(\frac{1}{2})^2}=\dfrac{6}{5}$，两式相比 $\dfrac{|P'T'|^2}{|PT|^2}:\dfrac{|P'A'|\cdot|P'B'|}{|PA|\cdot|PB|}=\dfrac{5}{4}$，

由圆幂定理得，$|P'T'|^2=|P'A'|\cdot|P'B'|$，所以 $\dfrac{|PT|^2}{|PA|\cdot|PB|}=\dfrac{4}{5}$，即 $\lambda=\dfrac{4}{5}$，原命题成立.





【例 13】(2016•重庆模拟) 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，作直线 l 交椭圆于 P,Q 两点．M 为线段 PQ 的中点，O 为坐标原点，设直线 l 的斜率为 k_1，直线 OM 的斜率为 k_2，$k_1k_2=-\dfrac{2}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的离心率；

(2) 设直线 l 与 x 轴交于点 $D(-5,0)$，且满足 $\overrightarrow{DP}=2\overrightarrow{DQ}$，当△$OPQ$ 的面积最大时，求椭圆 C 的方程.

【解析】(1) 由公式得 $k_1\cdot k_2=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{2}{3},e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2) 根据仿射原理 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\to\begin{cases}x=x'\\ y=\dfrac{a}{b}y'\end{cases}\to x'^2+y'^2=a^2$

拉伸之后不改变比值：$DP'=2DQ'$,过 O 点做 DP' 的垂线，垂足为 H，设 DP' 的倾斜角为 α

易知 $DH=5\cos\alpha$，由比值关系得：$O'P':D'H=6:1=O'P':5\cos\alpha$.故 $O'P'=30\cos\alpha$，$OH=5\sin\alpha$

$S=\dfrac{b}{a}S'=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{1}{2}\times30\cdot\cos\alpha\cdot5\sin\alpha=\dfrac{25}{2}\sqrt{6}\sin2\alpha$,当 $\alpha=45°$时值，面积最大，又因为

$HP':DH=1:3\Rightarrow HP'=15\cos\alpha=\dfrac{15}{2}\sqrt{2},OH=5\sin\alpha=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$　由　勾　　定　理

$a^2=(\dfrac{15\sqrt{2}}{2})^2+(\dfrac{5\sqrt{2}}{2})^2=125,b^2=\dfrac{2}{3}a^2=\dfrac{250}{3}$，椭圆的方程为：$\dfrac{x^2}{125}+\dfrac{3y^2}{250}=1$.

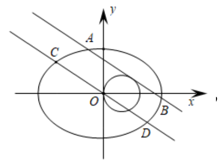
注意：在确定长轴或者短轴分弦长为 λ 时，仿射后得到最大的面积时，倾斜角通常是 45°，此题可以用化斜为直来做，也是通常解法，但仿射大法的优势就是计算量大大减少，几乎不需要联立，属于“高观点，低运算”的经典方法.

达标训练

1.（2018•三明期末）设椭圆 $M:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,且内切于圆 $x^2+y^2=4$.

（1）求椭圆 M 的方程;

（2）若直线 $y=\sqrt{2}x+m$ 交椭圆于两点,椭圆上一点 $P(1,\sqrt{2})$,求△PAB 面积的最大值.



2.（2018•龙海期末）已知点 $A(0,2)$，椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，F 是直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，O 是坐标原点.

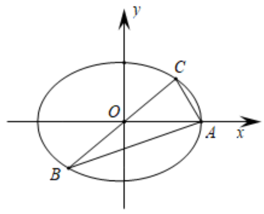
（1）求 E 的方程;

（2）设过点 A 的直线 l 与 E 相交于 P，Q 两点，当△OPQ 的面积最大时，求直线 l 的方程.

3.如图，已知 A、B、C 是长轴为 4 的椭圆上的三点，点 A 是长轴的右顶点，BC 过椭圆中心 O，且 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$|\overrightarrow{BC}|=2|\overrightarrow{AC}|$.

（1）求椭圆的标准方程;

（2）若过 C 关于 y 轴对称的点 D 作椭圆的切线 DE，则 AB 与 DE 有什么位置关系？证明你的结论.



4.（2016•佛山二模）已知点 M 是圆 C：$x^2+y^2=4$ 上一动点，点 D 是 M 在 x 轴上的投影，P 为线段 MD 上一点，且与点 Q 关于原点 O 对称，满足 $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OD}$.

（1）求动点 P 的轨迹 E 的方程;

（2）过点 P 做 E 的切线 l 与圆 C 相交于 A，B 两点，当△QAB 面积的最大值时，求 l 的方程.

5.(2018 株洲期末)椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的两点 A、B 关于直线 $2x-2y-3=0$ 对称,则弦 AB 的中点坐标为(　　)

A. $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},-1\right)$　　C. $\left(\frac{1}{2},2\right)$　　D. $\left(2,\frac{1}{2}\right)$

6.（2016 兰州模拟）已知椭圆 C 的焦点坐标是 $F_1(-1,0)$、$F_2(1,0)$，过点 F_2 垂直于长轴的直线 l 交椭圆 C 于 B、D 两点，且 $|BD|=3$.

（1）求椭圆 C 的方程;

（2)过定点 $P(0,2)$ 且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 相交于不同两点 M,N,试判断:在 x 轴上是否存在点 $A(m,0)$，使得以 AM，AN 为邻边的平行四边形为菱形？若存在，求出实数 m 的取值范围，若不存在，请说明理由.

7.（2018•抚顺模拟）已知离心率为 $\frac{1}{2}$ 的椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，右焦点到椭圆上的点的距离的最大值为 3.

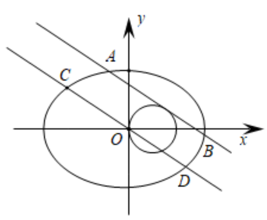
（1）求椭圆 C 的方程;

（2）设点 A,B 是椭圆 C 上的两个动点，直线 OA,OB 与椭圆的另一交点分别为 A_1,B_1，且直线 OA,OB 的斜率之积等于 $-\frac{3}{4}$，问四边形 ABA_1B_1 的面积 S 是否为定值？请说明理由.

8.（2017•淮北一模）已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，直线 $l_1:y=kx+m(m>0)$ 与圆 $C_2:(x-1)^2+y^2=1$ 相切且与椭圆 C_1 交于 A,B 两点.

（1）若线段 AB 中点的横坐标为 $\frac{4}{3}$，求 m 的值;

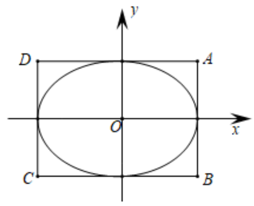
（2）过原点 O 作 l_1 的平行线 l_2 交椭圆于 C,D 两点，设 $|AB|=\lambda|CD|$，求 λ 的最小值.



9.（2012•山东）如图，椭圆的 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，直线 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$ 所围成的矩形 $ABCD$ 的面积为 8．

（1）求椭圆 M 的标准方程；

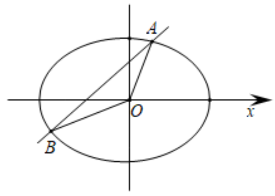
（2）设直线 $l:y=x+m(m\in R)$ 与椭圆 M 有两个不同的交点 P,Q,l 与矩形 $ABCD$ 有两个不同的交点 S,T．求 $\dfrac{|PQ|}{|ST|}$ 的最大值及取得最大值时 m 的值．



10.（2019•成都模拟）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且以坐标原点为圆心，椭圆的短半轴长为半径的圆与直线 $x-y+\sqrt{2}=0$ 相切．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

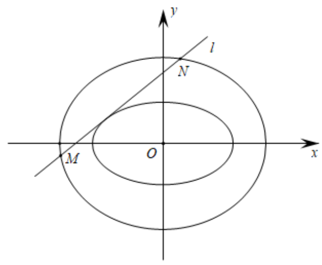
（2）若一条不过原点的直线 l 与椭圆相交于 A，B 两点，设直线 OA，l，OB 的斜率分别为 k_1，k，k_2，且 k_1，k，k_2 恰好构成等比数列．求 $|OA|^2+|OB|^2$ 的值．



11. 如图，已知椭圆 C 的中心在原点 O，左焦点为 $F_1(-1,0)$，左顶点为 A，且 F_1 为 AO 的中点．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若椭圆 C_1 方程为：$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1(m>n>0)$，椭圆 C_2 方程为：$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=\lambda(\lambda>0,且\lambda\neq 1)$，则称椭圆 C_2 是椭圆 C_1 的λ倍相似椭圆．已知 C_2 是椭圆 C 的 3 倍相似椭圆，若椭圆 C 的任意一条切线 l 交椭圆 C_2 于两点 M，N，试求弦长 $|MN|$ 的最大值．



12.（2016•宁波二模）已知 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$ 为椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，点 P 在椭圆 C 上，且△PF_1F_2 面积的最大值为 $\sqrt{3}$．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点．△OAB 的面积为 1，$\overline{OG}=s\overline{OA}+t\overline{OB}(s,t\in R)$，当点 G 在椭圆 C 上运动时，试问 s^2+t^2 是否为定值，若是定值，求出这个定值，若不是定值，求出 s^2+t^2 的取值范围．

专题 1　抽象函数的导函数构造

第一讲　抽象函数的构造

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=[f(x)g(x)]'$ 与 $\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'$

定理 1：$xf'(x)+f(x)>0 \Leftrightarrow [xf(x)]'>0$；$xf'(x)-f(x)>0 \Leftrightarrow \left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'>0$

证明：$\because xf'(x)+f(x)=[xf(x)]'$；$\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'$

$\therefore xf'(x)+f(x)>0$，则函数 $y=xf(x)$ 单调递增；$xf'(x)-f(x)>0$，则 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 单调递减.

定理 2：当 $x>0$ 时，$xf'(x)+nf(x)>0 \Leftrightarrow [x^nf(x)]'>0$；$xf'(x)-nf(x)>0 \Leftrightarrow \left[\dfrac{f(x)}{x^n}\right]'>0$

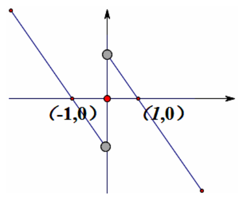
证明：$\because x^nf'(x)+nx^{n-1}f(x)=[x^nf(x)]'$；$\dfrac{x^nf'(x)-nx^{n-1}f(x)}{x^{2n}}=\left[\dfrac{f(x)}{x^n}\right]'$

$\therefore xf'(x)+nf(x)>0$，则函数 $y=x^nf(x)$ 单调递增；$xf'(x)-nf(x)>0$，则 $y=\dfrac{f(x)}{x^n}$ 单调递减.

【例 1】(2015•新课标 II）设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$（$x\in R$）的导函数，$f(-1)=0$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　B．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　C．$(-\infty,-1)\cup(-1,0)$　　D．$(0,1)\cup(1,+\infty)$

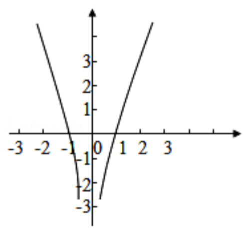
【解析】由于当 $x>0$ 时，$\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'<0$，则 $\dfrac{f(x)}{x}$ 为减函数；又 $f(-1)=0$，$f(x)$ 为奇函数，则 $f(1)=0$，当 $x>1$ 时，$f(x)<0$，当 $0<x<1$ 时，$f(x)>0$，根据奇函数的图像可得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$，故选 A.



【例 2】(2018•东莞市期末）已知奇函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且 $f(-1)=0$，当 $x>0$ 时 $f(x)+xf'(x)>0$ 恒成立，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围为（　　）

A．$(-1,0)\cup(0,1)$　　B．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　C．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　D．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

【解析】由题意可设 $g(x)=xf(x)$，则 $g'(x)=xf'(x)+f(x)$，$\because$ 当 $x>0$ 时，有 $xf'(x)+f(x)>0$，$\therefore$ 则当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，$\therefore$ 函数 $g(x)=xf(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，$\because$ 函数 $f(x)$ 是奇函数，$\therefore g(-x)=(-x)f(-x)=(-x)[-f(x)]=xf(x)=g(x)$，$\therefore$ 函数 $g(x)$ 为定义域上的偶函数，由 $f(-1)=0$ 得，$g(-1)=0$，函数 $g(x)$ 的图象大致如图：由函数的图象得，$-1<x<0$ 或 $x>1$，$\therefore$ 使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是：$(-1，0)\cup(1，+\infty)$，故选 C.



【例 3】(2018•福建期末）设函数 $y=f(x)$，$x\in(0,+\infty)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足 $xf'(x)<3f(x)$，则（　　）

A．$8f(2^{2018})<f(2^{2019})$　　B．$8f(2^{2018})>f(2^{2019})$

C．$8f(2^{2018})=f(2^{2019})$　　D．不能确定 $8f(2^{2018})$ 与 $f(2^{2019})$ 的大小

【解析】令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^3}$，则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot x^3-3x^2f(x)}{x^6}=\dfrac{xf'(x)-3f(x)}{x^4}$，$\because xf'(x)<3f(x)$，即 $xf'(x)-3f(x)<0$，$\therefore g'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，即 $\dfrac{f(2^{2018})}{(2^{2018})^3}>\dfrac{f(2^{2019})}{(2^{2019})^3}$，故 $8f(2^{2018})>f(2^{2019})$，故选 B.

【例 4】(2018•辽宁期末）函数 $f(x)$ 是定义在区间 $(0,+\infty)$ 上可导函数，其导函数为 $f'(x)$ 且满足 $xf'(x)+2f(x)>0$，则不等式 $\dfrac{(x+2019)f(x+2019)}{5}<\dfrac{5f(5)}{x+2019}$ 的解集为（　　）

A．$\{x\,|\,x>-2014\}$　　B．$\{x\,|\,-2019<x<-2014\}$

C．$\{x\,|\,0<x<2014\}$　　D．$\{x\,|\,x<-2014\}$

【解析】根据题意，设 $g(x)=x^2f(x)$，$g'(x)=x[2f(x)+xf'(x)]$；当 $x>0$ 时，$2f(x)+xf'(x)>0$，则有 $g'(x)>0$，即 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\dfrac{(x+2019)f(x+2019)}{5}<\dfrac{5f(5)}{x+2019}\Rightarrow(x+2019)^2f(x+2019)<25f$（5）$\Rightarrow g(x+2019)<g$（5），又由 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则有 $0<x+2019<5$，解可得：$-2019<x<-2014$，故选 B．

第二讲 关于 $f'(x)\pm f(x)$ 问题

定理 3：$f'(x)+f(x)>0\Leftrightarrow[e^xf(x)]'>0$；$f'(x)-f(x)>0\Leftrightarrow\left[\dfrac{f(x)}{e^x}\right]'>0$

证明：$\because\left[f(x)e^x\right]'=e^x\left[f'(x)+f(x)\right]$，$\left[\dfrac{f(x)}{e^x}\right]'=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，

$\therefore f'(x)+f(x)>0$，则 $y=f(x)e^x\uparrow$；反之 $y=f(x)e^x\downarrow$；$f'(x)>f(x)$，则 $y=\dfrac{f(x)}{e^x}\uparrow$；反之 $y=\dfrac{f(x)}{e^x}\downarrow$．

定理 4：由于 $f'(x)+f(x)>a\Leftrightarrow[e^x(f(x)-a)]'>0$；$f'(x)-f(x)>a\Leftrightarrow\left[\dfrac{(f(x)+a)}{e^x}\right]'>0$

证明：$\because f'(x)+f(x)-a=\dfrac{[e^x(f(x)-a)]'}{e^x}$；$f'(x)-f(x)-a=e^{2x}\left[\dfrac{(f(x)+a)}{e^x}\right]'$

$\therefore f'(x)+f(x)>a$，则 $y=e^x(f(x)-a)\uparrow$，反之$\downarrow$；若 $f'(x)-f(x)>a$，则 $y=\dfrac{f(x)+a}{e^x}\uparrow$，反之$\downarrow$．

【例 5】（2018•咸阳期末）已知 $f(x)$ 是可导函数，且 $f'(x)<f(x)$ 对于 $x\in R$ 恒成立，则（　　）

A．$\dfrac{f(1)}{e}<f(0),\dfrac{f(2018)}{e^{2018}}>f(0)$　　B．$\dfrac{f(1)}{e}>f(0)$，$\dfrac{f(2018)}{e^{2018}}>f(0)$

C．$\dfrac{f(1)}{e}>f(0)$，$\dfrac{f(2018)}{e^{2018}}<f(0)$　　D．$\dfrac{f(1)}{e}<f(0)$，$\dfrac{f(2018)}{e^{2018}}<f(0)$

【解析】由 $f'(x)<f(x)$，得 $f'(x)-f(x)<0$，令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，则 $g'(x)=\dfrac{e^xf'(x)-e^xf(x)}{e^{2x}}=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0$．$\therefore g(x)$ 在 R 上单调递减，即 $g(1)<g(0)$，$g(2018)<g(0)$ $\therefore\dfrac{f(1)}{e}<f(0)$，$\dfrac{f(2018)}{e^{2018}}<\dfrac{f(0)}{e^0}=f(0)$．故选：$D$．

【例 6】（2018•长沙期末）已知函数 $f(x)$ 在 R 上可导，其导函数为 $f'(x)$，若 $f(x)$ 满足：当 $x\neq1$ 时，$(x-1)[f'(x)+f(x)]>0$，$f(x)=e^{2-2x}f(2-x)$，则下列判断一定正确的是（　　）

A．$f(1)<f(0)$　　B．$e^4f(4)<f(0)$　　C．$ef(2)>f(0)$　　D．$e^3f(3)>f(0)$

【解析】令 $g(x)=e^xf(x)$，则 $g'(x)=e^x(f(x)+f'(x))$，$\because f(x)$ 满足：$(x-1)[f'(x)+f(x)]>0$，$\therefore$ 当 $x<1$ 时，$f'(x)<f(x)<0$．$\therefore g'(x)<0$，此时函数 $g(x)$ 单调递减．$\therefore g(-1)>g(0)$．即 $\dfrac{1}{e}f(-1)>f(0)$．$\because f(x)=e^{2-2x}\cdot f(2-x)$，$\therefore f$（3）$=f(-1)e^{-4}>ef(0)$，$\therefore e^3f$（3）$>f(0)$，故选 D．

【例 7】（2018•南昌期末）已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的增函数，$f(x)+2>f'(x)$，$f(0)=1$，则不等式 $ln[f(x)+2]>ln3+x$ 的解集为（　　）

A．$(-\infty,0)$　　B．$(0,+\infty)$　　C．$(-\infty,1)$　　D．$(1,+\infty)$

【解析】令 $g(x)=\dfrac{f(x)+2}{e^x}$，$g'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)-2}{e^x}$，又 $f(x)+2>f'(x)$，则有 $g'(x)<0$，则函数 $g(x)\downarrow$，$f(0)=1$，则 $g(0)=\dfrac{f(0)+2}{e^0}=3$，函数 $f(x)\uparrow$，$f(x)+2>f'(x)>0\Rightarrow f(x)+2>0$ 在 R 上恒成立；

$ln[f(x)+2]>ln3+x\Rightarrow ln\dfrac{f(x)+2}{3}>x\Rightarrow\dfrac{f(x)+2}{3}>e^x\Rightarrow\dfrac{f(x)+2}{e^x}>3\Rightarrow g(x)>g(0)$，故 $g(x)$ 为减函数，则有 $x<0$，故选 A．

【例 8】定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：$f(x)>1$ 且 $f(x)+f'(x)>1$，$f(0)=5$，其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，则不等式 $\ln[f(x)-1]>\ln4-x$ 的解集为（　　）

A．$(0,+\infty)$　　B．$(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$　　C．$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　　D．$(-\infty,0)$

【解析】$f(x)+f'(x)>1\Rightarrow\left[e^x\left(f(x)-1\right)\right]'\uparrow$，$\ln\left[f(x)-1\right]>\ln 4-x\Rightarrow e^{\ln[f(x)-1]}>\frac{e^{\ln 4}}{e^x}$，又 $f(0)-1=4\Rightarrow e^x\left[f(x)-1\right]>4=f(0)-1\Rightarrow e^x\left[f(x)-1\right]>e^0\left[f(0)-1\right]=4$，故 $x>0$，故选 A.

第三讲　关于 $\sin xf'(x)\pm\cos xf(x)$ 或 $\cos xf'(x)\pm\sin xf(x)$

定理5：正弦同号，余弦反号定理

$\sin xf'(x)+\cos xf(x)>0\Leftrightarrow[\sin xf(x)]'>0$；当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ $\tan xf'(x)+f(x)>0\Leftrightarrow[\sin xf(x)]'>0$

$\sin xf'(x)-\cos xf(x)>0\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{\sin x}\right]'>0$；当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan xf'(x)-f(x)>0\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{\sin x}\right]'>0$

$\cos xf'(x)-\sin xf(x)>0\Leftrightarrow[\cos xf(x)]'>0$；当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$f'(x)-\tan xf(x)>0\Leftrightarrow[\cos xf(x)]'>0$

$\cos xf'(x)+\sin xf(x)>0\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]'>0$；当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$f'(x)+\tan xf(x)>0\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]'>0$

记忆方法：看 $f'(x)\cdot\begin{cases}\sin x\to\text{同号：加是乘，减是除}\\\cos x\to\text{反号：加是除，减是乘}\end{cases}$，遇正切时化切为弦，请自己证明相关结论.

【例 9】（2018•玉林期末）已知 $f'(x)$ 为函数 $y=f(x)$ 的导函数，当 $x(x\in(0,\frac{\pi}{2}))$ 是斜率为 k 的直线的倾斜角时，若不等式 $f(x)-f'(x)\cdot k<0$ 恒成立，则（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}>\frac{f(\frac{\pi}{3})}{f(\frac{\pi}{4})}$　　B．$\frac{f(1)}{\sin 1}>2f(\frac{\pi}{6})$　　C．$\sqrt{2}f(\frac{\pi}{6})-f(\frac{\pi}{4})>0$　　D．$\sqrt{3}f(\frac{\pi}{6})-f(\frac{\pi}{3})>0$

【解析】$\because k=\tan x$，$f(x)-f'(x)\cdot k<0$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$ $\therefore\cos x\cdot f(x)-\sin x\cdot f'(x)<0$，典型的正弦同号模型，设 $g(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$，$\therefore g'(x)=\frac{\sin x\cdot f'(x)-\cos x\cdot f(x)}{sin^2x}$，$\because$ 不等式 $f(x)-f'(x)k<0$ 恒成立，$\therefore g(x)>0$ 恒成立，$\therefore g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})\uparrow$ $\therefore g(\frac{\pi}{3})>g(1)>g(\frac{\pi}{4})>g(\frac{\pi}{6})$，$\therefore\frac{f(\frac{\pi}{3})}{\sin\frac{\pi}{3}}>\frac{f(1)}{\sin 1}>\frac{f(\frac{\pi}{4})}{\sin\frac{\pi}{4}}>\frac{f(\frac{\pi}{6})}{\sin\frac{\pi}{6}}$，$\therefore\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3})>\sqrt{3}f(\frac{\pi}{4})$，$\frac{f(1)}{\sin 1}>2f(\frac{\pi}{6})$，$f(\frac{\pi}{4})>\sqrt{2}f(\frac{\pi}{6})$，$f(\frac{\pi}{3})>\sqrt{3}f(\frac{\pi}{6})$ $\therefore A$，C，D 错误，B 正确，故选 B.

【例 10】（2016•河南模拟）已知函数 $y=f(x)$ 对任意的 $x\in(-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2})$ 满足 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0$（其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数），则下列不等式成立的是（　　）

A．$\sqrt{2}f(-\frac{\pi}{3})<f(-\frac{\pi}{4})$　　B．$\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3})<f(\frac{\pi}{4})$

C．$f(0)>2f(\frac{\pi}{3})$　　D．$f(0)>\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})$

【解析】典型的余弦反号模型，构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$，$g'(x)=\frac{f'(x)\cos x-f(x)(\cos x)'}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}(f'(x)\cos x+f(x)\sin x)$，$\because$ 对任意的 $x\in(-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2})$ 满足 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0$，$\therefore g'(x)>0$，即函数 $g(x)$ 在 $x\in(-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2})$ 单调递增，则 $g(-\frac{\pi}{3})<g(-\frac{\pi}{4})$，即 $\frac{f(-\frac{\pi}{3})}{\cos(-\frac{\pi}{3})}<\frac{f(-\frac{\pi}{4})}{\cos(-\frac{\pi}{4})}$，$\therefore\frac{f(-\frac{\pi}{3})}{\frac{1}{2}}<\frac{f(-\frac{\pi}{4})}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，即 $\sqrt{2}f(-\frac{\pi}{3})<f(-\frac{\pi}{4})$，故 A 正确．$g(\frac{\pi}{3})>g(\frac{\pi}{4})$，即 $\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3})>f(\frac{\pi}{4})$，$B$ 错误；$g(0)<g(\frac{\pi}{3})$，即 $\frac{f(0)}{\cos 0}<\frac{f(\frac{\pi}{3})}{\cos\frac{\pi}{3}}$，$\therefore f(0)<2f(\frac{\pi}{3})$，$C$ 错误，$g(0)<g(\frac{\pi}{4})$，即 $\frac{f(0)}{\cos 0}<\frac{f(\frac{\pi}{4})}{\cos\frac{\pi}{4}}$，$\therefore f(0)<\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})$，$D$ 错误，故选 A.

第四讲　$xlnx$ 也来吆喝

定理 6：$f'(x)\cdot x\ln x+f(x)>0\Leftrightarrow[\ln xf(x)]'>0$；$f'(x)\cdot x\ln x-f(x)>0\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{\ln x}\right]'>0$

$f'(x)\cdot x\ln x+(1+\ln x)f(x)>0\Leftrightarrow[x\ln x\cdot f(x)]'>0$；$f'(x)\cdot x\ln x-(1+\ln x)f(x)>0\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{x\ln x}\right]'>0$

$f'(x)\cdot x\ln x+(1-\ln x)f(x)>0\Leftrightarrow\left[\frac{\ln x}{x}\cdot f(x)\right]'>0$；$f'(x)\cdot x\ln x-(1-\ln x)f(x)>0\Leftrightarrow\left[\frac{xf(x)}{\ln x}\right]'>0$

记忆方法：将式子全部转化为 $f'(x)\cdot x\ln x\pm f(x)\cdot(1\pm\ln x)$ 形式，首先满足导数构造中加乘减除符号不变性，若括号内无 $\ln x$ 则是 $[\ln xf(x)]'$ 或 $\left[\frac{f(x)}{\ln x}\right]'$；若括号内是 $1+\ln x$，则是 $[x\ln xf(x)]'$ 或 $\left[\frac{f(x)}{x\ln x}\right]'$；若括号内是 $1-\ln x$，则是 $\left[\frac{\ln x}{x}f(x)\right]'$ 或 $\left[\frac{xf(x)}{\ln x}\right]'$．证明过程略，请读者自己证明即可，此类型题目均为客观题．

【例 11】（2018•武汉月考）定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 都有 $f'(x)lnx<\frac{1-lnx}{x}f(x)$，则（　　）

A．$4f(e)>e^3\cdot f(e^4)>2e\cdot f(e^2)$　　B．$e^3\cdot f(e^4)>2e\cdot f(e^2)>4f(e)$

C．$e^3\cdot f(e^4)>4f(e)>2e\cdot f(e^2)$　　D．$4f(e)>2e\cdot f(e^2)>e^3\cdot f(e^4)$

【思路分析】先转化为 $f'(x)xlnx<(1-lnx)f(x)$，易知是减法 $\to$ 作商，括号内 $1-\ln x\to$ 构造导函数 $\left[\frac{xf(x)}{\ln x}\right]'$

【解析】$\because f'(x)lnx<\frac{1-lnx}{x}f(x)$，$\therefore\frac{xf'(x)}{lnx}<\frac{f(x)(1-lnx)}{ln^2x}$，$\therefore\frac{xf'(x)}{lnx}+\frac{(lnx-1)f(x)}{ln^2x}<0$，$\therefore[f(x)\bullet\frac{x}{lnx}]'<0$

设 $g(x)=f(x)\cdot\frac{x}{lnx}$，$\therefore g'(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 为减函数，$\therefore g(e^4)<g(e^2)<g$（e），$\therefore f(e^4)\frac{e^4}{lne^4}<f(e^2)\frac{e^2}{lne^2}<f$（e）$\frac{e}{lne}$，$\therefore\frac{1}{4}f(e^4)e^3<\frac{1}{2}f(e^2)e<f$（e），$\therefore f(e^4)e^3<2f(e^2)e<4f$（e），故选 D．

【例 12】（2019•九江一模）定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 都有 $f'(x)lnx>\frac{1+lnx}{x}f(x)$，则（　　）

A．$12f(2)>3f(4)>f(8)$　　B．$3f(4)>12f(2)>f(8)$

C．$f(8)>3f(4)>12f(2)$　　D．$f(8)>12f(2)>3f(4)$

【思路分析】先转化为 $f'(x)xlnx>(1+lnx)f(x)$，依然是减法 $\to$ 作商，括号内 $1+\ln x\to$ 构造导函数 $\left[\frac{f(x)}{x\ln x}\right]'$

【解析】由 $f'(x)lnx>\frac{1+lnx}{x}f(x)$ 得，$f'(x)xlnx>(1+lnx)f(x)$，即 $f'(x)xlnx-(1+lnx)f(x)>0$，令 $g(x)=\frac{f(x)}{xlnx}$，

则 $g'(x)=\frac{f'(x)xlnx-(1+lnx)f(x)}{(xlnx)^2}$，由 $f'(x)xlnx-(1+lnx)f(x)>0$，$\therefore x\in(0,1)$，$(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

$\therefore g(x)$ 在区间 (0.1) 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore g$（2）$<g$（4）$<g$（8），即 f（8）$>3f$（4）$>12f$（2），故选：C．

第五讲　非对称的构造

定理 7：平移模型：$(x+a)f'(x)+f(x)>0\Leftrightarrow[(x+a)f(x)]'>0;(x+a)f'(x)-f(x)>0\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{(x+a)}\right]'>0$

倍数模型：$f'(x)+nf(x)>0\Leftrightarrow[e^{nx}f(x)]'>0;f'(x)-nf(x)>0\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{e^{nx}}\right]'>0$

奇偶模型：$f(x)+f(-x)=g(x)\Rightarrow F(x)=f(x)-\frac{g(x)}{2}$ 为奇函数；

$f(x)-f(-x)=g(x)\Rightarrow F(x)=f(x)-\frac{g(x)}{2}$ 为偶函数（$g(x)$ 为奇函数）

【例 13】（2018•广州期末）定义在 R 上的可导函数 $f(x)$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)+f'(x)<xf'(x)$ 恒成立，$a=f(2)$，$b=\frac{1}{2}f(3)$，$c=(\sqrt{2}+1)f(\sqrt{2})$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

A. $c<a<b$　　B. $b<c<a$　　C. $a<c<a$　　D. $c<b<a$

【解析】$(x-1)f'(x)-f(x)>0\Rightarrow\frac{f(x)}{(x-1)}$ 在区间 $(1,,+\infty)\uparrow$，故 $\frac{f(\sqrt{2})}{(\sqrt{2}-1)}<\frac{f(2)}{(2-1)}<\frac{f(3)}{(3-1)}$，即 $c<a<b$，故选 A.

【例 14】（2018•广东模拟）若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)-2f(x)>0, f(0)=1$，则不等式 $f(x)>e^{2x}$ 的解集为__________.

【解析】$f'(x)-2f(x)>0\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{e^{2x}}\right]'>0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{e^{2x}}\uparrow$，故 $\frac{f(x)}{e^{2x}}>\frac{f(0)}{e^0}=1\Rightarrow f(x)>e^{2x}$，故答案为 $x>0$.

【例 15】（2018•成都期末）已知定义在 R 上的可导函数 $f(x)$，对于任意实数 x 都有 $f(-x)+f(x)=x^2$ 成立，且当 $x\in(0，+\infty)$ 时，都有 $f'(x)>x$ 成立，若 $f(1-a)\geq f(a)+\frac{1}{2}-a$，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　C. $(-\infty,2]$　　D. $[2,+\infty)$

【解析】法一：令 $F(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$，故 $F(-x)=-F(x)$，又因为 $f'(x)>x$，则 $F'(x)=f'(x)-x>0$，即 $F(x)\uparrow$ 在 R 上恒成立，当 $f(1-a)-\frac{1}{2}(1-a)^2\geq f(a)-\frac{1}{2}a^2$，即 $f(1-a)\geq f(a)-a+\frac{1}{2}$ 恒成立时，一定有 $1-a\geq a$

法二：令 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$，$f(1-a)\geq f(a)-a+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(1-a)^2+(1-a)\geq\frac{1}{2}a^2+a-a+\frac{1}{2}\Leftrightarrow a\leq\frac{1}{2}$，故选 A.

【例 16】（2018•太原期末）已知定义在 R 上的可导函数 $f(x)$，对于任意实数 x 都有 $f(-x)=f(x)-2x$ 成立，且当 $x\in(-\infty,0]$ 时，都有 $f'(x)<2x+1$ 成立，若 $f(2m)<f(m-1)+3m(m+1)$，则实数 m 的取值范围为（　　）

A. $(-1,\frac{1}{3})$　　B. $(-1,0)$　　C. $(-\infty,-1)$　　D. $(-\frac{1}{3},+\infty)$

【思路分析】构造 $g(x)=f(x)-x$，发现 $g(x)$ 为偶函数，但由于 $f'(x)<2x+1$，故构造 $g(x)=f(x)-x-x^2$

【解析】法一：令 $g(x)=f(x)-x^2-x$，则 $g(-x)-g(x)=f(-x)-x^2+x-f(x)+x^2+x=0$，$\therefore g(-x)=g(x)$，$\therefore$ 函数 $g(x)$ 为 R 上的偶函数．$\because$ 当 $x\in(-\infty，0]$ 时，都有 $f'(x)<2x+1$ 成立，$\therefore g'(x)=f'(x)-2x-1<0$，$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $x\in(-\infty，0]$ 上单调递减，在 $[0，+\infty)$ 上单调递增．即 $f(2m)-4m^2-2m<f(m-1)-(m-1)^2-(m-1)$，$\therefore g(2m)<g(m-1)\ \Rightarrow f(2m)<f(m-1)+3m(m+1)$，因此 $g(|2m|)<g(|m-1|)$，$\therefore|2m|<|m-1|$，解得 $-1<m<\frac{1}{3}$.

秒杀秘籍：第六讲 积分来凑 $F(x)'>g(x)\Leftrightarrow F(x)>\int g(x)dx\Leftrightarrow\left[F(x)-\int g(x)dx\right]\uparrow$

定理 8： $f'(x)+f(x)>a\Leftrightarrow\left[e^xf(x)\right]'>\left(ae^x\right)'\Leftrightarrow e^x\left[f(x)-a\right]\uparrow$

$$f'(x)-f(x)>a\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{e^x}\right]'>\left(-\frac{a}{e^x}\right)'\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)+a}{e^x}\right]\uparrow$$（参考定理 4）

$$xf'(x)+nf(x)>ax\Leftrightarrow\left[x^nf(x)\right]'>ax^n\Leftrightarrow x^nf(x)>\int ax^ndx=\frac{ax^{n+1}}{n+1}\Leftrightarrow\left[x^nf(x)-\frac{ax^{n+1}}{n+1}\right]\uparrow$$

$$xf'(x)-nf(x)>ax\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{x^n}\right]'>\frac{a}{x^n}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x^n}>\int\frac{a}{x^n}dx=\frac{ax^{1-n}}{1-n}\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{x^n}-\frac{ax}{(1-n)x^n}\right]\uparrow$$

【例 17】（2018•哈尔滨月考）设函数 $f(x)$ 在 R 上的导函数为 $f'(x)$，且 $2f(x)+xf'(x)>x$，则下面的不等式在 R 上恒成立的是（　　）

A. $f(x)>0$　　B. $f(x)<0$　　C. $f(x)>\frac{x}{3}$　　D. $f(x)<\frac{x}{3}$

【思路分析】$2f(x)+xf'(x)>x\Leftrightarrow\left[x^2f(x)\right]'>x^2\Leftrightarrow x^2f(x)>\int\frac{x^3}{3}dx\Leftrightarrow\left[x^2f(x)-\frac{x^3}{3}\right]\uparrow$

【解析】构造函数 $g(x)=x^2f(x)-\frac{1}{3}x^3$，则 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-x^2=x[2f(x)+xf'(x)-x]$，

$\because 2f(x)+xf'(x)>x$ 则 $g'(x)>0$，$\therefore g(x)=x^2f(x)-\frac{1}{3}x^3$ 为实数集上的增函数，当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=0$，

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$x^2f(x)-\frac{1}{3}x^3=x^2[f(x)-\frac{x}{3}]>0$，则 $f(x)>\frac{x}{3}$．故选 C．

【例 18】（2018•咸阳模拟）已知 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，且对任意的实数 x 都有 $f'(x)=e^x(2x-2)+f(x)$（e 是自然对数的底数），$f(0)=1$，则（　　）

A．$f(x)=e^x(x+1)$　　　　B．$f(x)=e^x(x-1)$

C．$f(x)=e^x(x+1)^2$　　　　D．$f(x)=e^x(x-1)^2$

【思路分析】令 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，可得 $g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，$g'(x)=2x-2$，可得 $g(x)=\int(2x-2)dx=(x-1)^2+c$，利用 $f(0)=1$，解得 c 即可得出．

【解析】令 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，$\because$ 对任意的实数 x 都有 $f'(x)=e^x(2x-2)+f(x)$，

$\therefore g'(x)=2x-2$，可得 $g(x)=(x-1)^2+c=\frac{f(x)}{e^x}$，$\because f(0)=1$，$\therefore 1+c=1$，解得 $c=0$．$\therefore f(x)=e^x(x-1)^2$．故选 D．

【例 19】（2018•重庆期中）已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，$f(1)=2$，且对任意 $x\in R$，$2f(x)+f'(x)>2$ 恒成立，若 $f(lna)>1+(\frac{e}{a})^2$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(e,+\infty)$　　B．$(e^2,+\infty)$　　C．$(0,e)$　　D．$(0,e^2)$

【思路分析】根据 $2f(x)+f'(x)$ 联想函数 $e^{2x}f(x)$，

$2f(x)+f'(x)>2\Leftrightarrow\left[e^{2x}f(x)\right]'>2e^{2x}\Leftrightarrow e^{2x}f(x)>\int 2e^{2x}dx=e^{2x}$，故构造 $g(x)=e^{2x}f(x)-e^{2x}$ 对函数求导可得

$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，$f(lna)>1+(\frac{e}{a})^2\Leftrightarrow g(lna)>g(1)$．

【解析】设：$g(x)=e^{2x}f(x)-e^{2x}$，则 $g'(x)=e^{2x}(2f(x)+f'(x)-2)>0$ 恒成立：$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，

又 $f(lna)>1+(\frac{e}{a})^2\Leftrightarrow a^2[f(lna)-1]>e^2\Leftrightarrow e^{2lna}[f(lna)-1]>e^2[(f(1)-1]\Leftrightarrow g(lna)>g(1)$．$\therefore lna>1$，

$\therefore a>e$．故选 A．

达标训练

1．（2018•黄冈期末）设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，$f'(x)$ 为其导函数，已知 $f(1)=0$，当 $x>0$ 时 $f(x)+x\cdot f'(x)>0$，则不等式 $x\cdot f(x)>0$ 的解集为（　　）

A．$(-1,0)\cup(0,1)$　　　　B．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

C．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　　　D．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$

2．（2019•咸阳一模）已知奇函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)+f(x)>0$，若 $a=\frac{1}{e}f(\frac{1}{e})$，$b=-ef(-e)$，$c=f(1)$，则 a，b，c 的大小关系正确的是（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$a<c<b$　　D．$c<a<b$

3．（2018•张家界期末）已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，对任意 $x\in R$，都有 $f'(x)>f(x)$ 成立，则（　　）

A．$e^3\cdot f(2)>e^2f(3)$　　　　B．$e^3\cdot f(2)=e^2\cdot f(3)$

C．$e^3\cdot f(2)<e^2\cdot f(3)$　　　　D．$e^3\cdot f(2)$ 与 $e^2\cdot f(3)$ 的大小不确定

4.（2018•城关期末）定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：$f(x)+f'(x)>0$，$f(0)=4$，则不等式 $e^x f(x)>4$（其中 e 为自然对数的底数）的解集为（　　）

A．$(3,+\infty)$　　B．$(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$　　C．$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　　D．$(0,+\infty)$

5.（2019•绵阳模拟）设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，且 $f'(x)>f(x)(x\in R)$，f（2）$=e^2$(e 为自然对数的底数)，则不等式 $f(2lnx)<x^2$ 的解集为（　　）

A．$(\sqrt{e},e)$　　B．$(0,\sqrt{e})$　　C．$(0,e)$　　D．$(1,e)$

6.（2018•博望月考）已知可导函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)$，其导函数 $f'(x)$ 满足 $xf'(x)-2f(x)>0$，则不等式 $f(2017+x)-(x+2017)^2f(-1)<0$ 的解集为（　　）

A．$(-\infty,-2018)$　　B．$(-2018,-2017)$　　C．$(-2018,0)$　　D．$(-2017,0)$

7.（2018•福州期末）已知定义在 R 上的函数 $f(x)$，其导函数为 $f'(x)$，若 $f'(x)-f(x)<-4$，$f(0)=5$，则不等式 $f(x)>e^x+4$ 的解集是（　　）

A．$(-\infty,1]$　　B．$(-\infty,0)$　　C．$(0,+\infty)$　　D．$(1,+\infty)$

8.（2018•南昌期中）已知函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，函数 $y=f(x)$ 对于任意的 $x\in(0,\pi)$ 满足 $f'(x)\sin x>f(x)\cos x$（其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数），则下列不等式成立的是（　　）

A．$f(-\dfrac{\pi}{3})>-\sqrt{3}f(\dfrac{\pi}{6})$　　B．$\sqrt{2}f(\dfrac{3\pi}{4})<-f(-\dfrac{\pi}{2})$

C．$\sqrt{3}f(\dfrac{\pi}{2})>2f(\dfrac{\pi}{3})$　　D．$\sqrt{2}f(\dfrac{5\pi}{6})<f(\dfrac{3\pi}{4})$

9.（2017•德州期末）设偶函数 $f(x)$ 定义在 $(-\dfrac{\pi}{2},0)\cup(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上，其导函数为 $f'(x)$，当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)\cos x+f(x)\sin x<0$，则不等式 $f(x)>2f(\dfrac{\pi}{3})\cos x$ 的解集为（　　）

A．$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3})\cup(0,\dfrac{\pi}{3})$　　B．$(-\dfrac{\pi}{3},0)\cup(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2})$

C．$(-\dfrac{\pi}{3},0)\cup(0,\dfrac{\pi}{3})$　　D．$(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{3})\cup(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2})$

10.（2018•烟台期中）已知定义在 $(-\infty,0)$ 上的函数 $f(x)$，其导函数记为 $f'(x)$，若 $\dfrac{2f(x)-xf'(x)}{x+1}>0$ 成立，则下列正确的是（　　）

A．$f(-e)-e^2f(-1)>0$　　B．$f(-e)-e^4f(-\dfrac{1}{e})>0$

C．$e^2f(-e)-f(-1)>0$　　D．$e^4f(-e)-f(-\dfrac{1}{e})>0$

11.（2017•诸暨期末）已知 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$，若满足 $xf'(x)-f(x)=x^2+x$，且 f（1）$\geqslant$1，则 $f(x)$ 的解析式可能是（　　）

A．$x^2-xlnx+x$　　B．$x^2-xlnx-x$

C．$x^2+xlnx+x$　　D．$x^2+2xlnx+x$

12.（2018•攀枝花期末）设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\in R)$ 的导函数，当 $x>0$ 时，$f'(x)\cdot xlnx+f(x)<0$，则使得 $(x^2-1)f(x)<0$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　B．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$

C．$(-1,0)\cup(0,1)$　　D．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

13.（2018•新余期末）定义在 $(0,+\infty)$ 上的可导函数 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$，且 $(xlnx)f'(x)<f(x)$，则（　　）

A．$2f(\sqrt{e})>f(e)$　　B．$2f(\sqrt{e})>-f(\dfrac{1}{e})$

C．$f(\dfrac{1}{e^2})>2f(\dfrac{1}{e})$　　D．$f(e)>-f(\dfrac{1}{e})$

14.（2017•雁峰期末）设函数 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的可导函数，其导函数为 $f'(x)$，且有 $2f(x)+xf'(x)>x^2$，则不等式 $(x-2016)^2f(x-2016)-4f(2)>0$ 的解集为（　　）

A．$(2014,+\infty)$　　B．$(0,2014)$

C．$(0,2018)$　　D．$(2018,+\infty)$

15.（2018•澧县一模）设函数 $f'(x)$ 是函数 $f(x)(x\in R)$ 的导函数，已知 $f'(x)<f(x)$，且 $f'(x)=f'(4-x)$，$f(4)=0$，$f(2)=1$，则使得 $f(x)-2e^x<0$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

A．$(-2,+\infty)$　　B．$(0,+\infty)$

C．$(1,+\infty)$　　D．$(4,+\infty)$

16.（2018•安徽二模）$y=f(x)$ 的导函数满足：当 $x\neq 2$ 时，$(x-2)(f(x)+2f'(x)-xf'(x))>0$，则（　　）

A．$f(4)>(2\sqrt{5}+4)f(\sqrt{5})>2f(3)$　　B．$f(4)>2f(3)>(2\sqrt{5}+4)f(\sqrt{5})$

C．$(2\sqrt{5}+4)f(\sqrt{5})>2f(3)>f(4)$　　D．$2f(3)>f(4)>(2\sqrt{5}+4)f(\sqrt{5})$

17. 已知函数 $f(x)$ 在 R 上存在导函数 $f'(x)$，若 $f(x)-f(-x)=2x^3$，且 $x\geq 0$ 时 $f'(x)-3x^2\geq 0$，则不等式 $f(2x)-f(x-1)>7x^3+3x^2-3x+1$ 的解集为（　　）

A．$(-\infty,-1)$　　B．$(-1,\frac{1}{3})$　　C．$(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{3},+\infty)$　　D．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

18.（2019•广元模拟）设函数 $f(x)$ 在 R 上存在导数 $f'(x)$，对任意的 $x\in R$，有 $f(-x)+f(x)=x^2$，且 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>x$．若 $f(2-a)-f(a)\geq 2-2a$，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$[1,+\infty)$　　B．$(-\infty,1]$　　C．$(-\infty,2]$　　D．$[2,+\infty)$

19.（2018•南岗期末）设函数 $f(x)$ 在 R 上存在导函数 $f'(x)$，对任意的实数 x 都有 $f(x)=f(-x)+2x$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>2x+1$．若 $f(a+1)\geq f(-a)+4a+2$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$[-\frac{1}{2},+\infty)$　　B．$[-\frac{3}{2},+\infty)$　　C．$[-1,+\infty)$　　D．$[-2,+\infty)$

20.（2018•重庆期中）已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，$f(1)=2$，且对任意 $x\in R$，$2f(x)+f'(x)>2$ 恒成立，若 $f(lna)>1+(\frac{e}{a})^2$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(e,+\infty)$　　B．$(e^2,+\infty)$　　C．$(0,e)$　　D．$(0,e^2)$

21.（2018•河西期末）设函数 $f(x)$ 在 R 上存在导数 $f'(x)$，$\forall x\in R$，有 $f(-x)+f(x)=x^2$，在 $(0,+\infty)$ 上，$f'(x)<x$，若 $f(6-m)-f(m)-18+6m\geq 0$，则实数 m 的取值范围是_________．

22.（2018•泰州期末）已知函数 $f(x)$，$x\in(0,+\infty)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足 $xf'(x)-2f(x)=x^3e^x$，$f(1)=e-1$，则 $f(x)$ 在 $(2,f(2))$ 处的切线为_________．

23.（2018•新罗期中）设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\in R)$ 的导函数，当 $x>0$ 时，$xlnx\cdot f'(x)<-f(x)$，则使得 $(x^2-4)f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

A．$(-2,0)\cup(0,2)$　　B．$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　C．$(-2,0)\cup(2,+\infty)$　　D．$(-\infty,-2)\cup(0,2)$

24.（2018•德州期末）已知在 R 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，满足 $f'(x)<f(x)$，且 $f(x+5)$ 为偶函数，$f(10)=1$，则不等式 $f(x)<e^x$ 的解集为（　　）

A．$(0,+\infty)$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(5,+\infty)$　　D．$(10,+\infty)$

25.（2018•资阳期末）已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且 $f(2)=\frac{5}{2}$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)+f(x)>2$（其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数）．则不等式 $|x|\cdot f(x)>2|x|+1$ 的解集为（　　）

A．$(-2,0)\cup(0,2)$　　B．$(-\infty,-2)\cup(0,2)$　　C．$(-2,0)\cup(2,+\infty)$　　D．$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

26.（2018•红河州二模）已知函数 $f(x)$ 满足条件：当 $x>0$ 时，$f(x)+\frac{1}{2}xf'(x)>1$，则下列不等式正确的是（　　）

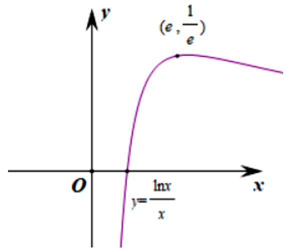
A．$f(1)+3>4f(2)$　　B．$f(2)+3>4f(4)$　　C．$f(1)+8<9f(3)$　　D．$f(2)+4<3f(4)$

27.（2018•朝阳三模）已知 $f(x)$ 是定义在区间 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上的函数，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，且 $xf'(x)\ln 2x>f(x)$ $(x>\frac{1}{2})$，$f(\frac{e}{2})=1$，则不等式 $f(\frac{e^x}{2})<x$ 的解集是（　　）

A．$(-\infty,1)$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(\frac{1}{2},1)$　　D．$(0,1)$

专题 2　构造 $\ln x$ 比大小比

秒杀秘籍：第一讲 由 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 引出的大小比较问题



如右图，$f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 图像性质，有以下结论：

（1）$f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在区间 $(0,e)$ 上单调递增，在区间 $(e,+\infty)$ 单调递减；当 $x=e$ 时，取得最大值 $\frac{1}{e}$；

（2）极大值左偏，$f(2)=f(4)$

（3）关于 a^b 与 b^a $(a>b)$，当 $e>a>b>0$ 时，$a^b>b^a$，当 $a>b>e$ 时，$a^b<b^a$；口诀：大指小底.（大于 e 看指数大，小于 e 看底数大）

证明：（1）函数的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$ 时，$x=e$，$f(e)=\frac{1}{e}$ 故 $f(x)$ 在 $(0,e)\uparrow$，$(e,+\infty)\downarrow$；

（2）$f(2)=\frac{\ln 2}{2}=\frac{2\ln 2}{4}=f(4)$，注意：只能比较 $f(3)$，$f(4)$，$f(5)$ 或者 $f(0.7)$，$f(0.8)$ 之类属于 e 的左边或者右边，$f(2)=f(4)$ 涉及左右互换.

比较 a^b 与 b^a $(a>b)$，即比较 $b\ln a$ 与 $a\ln b$ 的大小，同除以 ab 得到 $\frac{\ln a}{a}$ 与 $\frac{\ln b}{b}$，根据函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的单调性，即可判断.

【例 1】（2017•新课标I）设 x、y、z 为正数，且 $2^x=3^y=5^z$，则（　　）

A．$2x<3y<5z$　　B．$5z<2x<3y$　　C．$3y<5z<2x$　　D．$3y<2x<5z$

【解析】x、y、z 为正数，令 $2^x=3^y=5^z=k>1$．$lgk>0$．则 $x=\frac{\ln k}{\ln 2}$，$y=\frac{\ln k}{\ln 3}$，$z=\frac{\ln k}{\ln 5}$．$\therefore 3y=\frac{3\ln k}{\ln 3}$，$2x=\frac{2\ln k}{\ln 2}$，$5z=\frac{5\ln k}{\ln 5}$．$\because \frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 4}{4}$，且 $\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln 4}{4}>\frac{\ln 5}{5}$，故 $\frac{5}{\ln 5}>\frac{4}{\ln 4}=\frac{2}{\ln 2}>\frac{3}{\ln 3}$，$\therefore 3y<2x<5z$．故选 D.

【例 2】设 $a=(\frac{3}{5})^{\frac{2}{5}}$，$b=(\frac{2}{5})^{\frac{3}{5}}$，$c=(\frac{2}{5})^{\frac{2}{5}}$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A．$a>c>b$　　B．$a>b>c$　　C．$c>a>b$　　D．$b>c>a$

【解析】由于 $0<\frac{2}{5}<\frac{3}{5}<e$，根据“大指小底”原理可知 $(\frac{3}{5})^{\frac{2}{5}}>(\frac{2}{5})^{\frac{3}{5}}$，又因为 $y=\left(\frac{3}{5}\right)^x$ 为单调减函数，$(\frac{2}{5})^{\frac{3}{5}}<(\frac{2}{5})^{\frac{2}{5}}$，再根据幂函数 $y=x^{\frac{2}{5}}$ 可知，$(\frac{3}{5})^{\frac{2}{5}}>(\frac{2}{5})^{\frac{2}{5}}$，故选 A.

【例 3】设 $a=0.6^{0.6}$，$b=0.6^{1.5}$，$c=1.5^{0.6}$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$b<a<c$　　D．$b<c<a$

【解析】由于 $0<0.6<1.5<e$，根据“大指小底”可知：$0.6^{1.5}<1.5^{0.6}$，又根据指数函数 $y=0.6^x$ 的单调性可知 $0.6^{1.5}<0.6^{0.6}<1<1.5^{0.6}$，故选 C.

【例 4】（2011•全国联赛河南赛区）若 $a=\frac{\ln 2}{2}$，$b=\frac{\ln 3}{3}$，$c=\frac{\ln \pi}{\pi}$，$d=\frac{\ln 2.72}{2.72}$，$f=\frac{\sqrt{10}\ln 10}{20}$，则 a，b，c，d，f 的大小（按从小到大）顺序为__________.

【解析】$\because \frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 4}{4}$，$\frac{\sqrt{10}\ln 10}{20}=\frac{\ln 10}{2\sqrt{10}}=\frac{2\ln\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}=\frac{\ln\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$，由于 $e<2.72<3<\pi<\sqrt{10}<4$，根据 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在区间 $(e,+\infty)$ 单调递减，$\therefore a<f<c<b<d$.

【例 5】（2017•唐山一模）已知 $a>b>0, a^b=b^a$，有如下四个结论：①$b<e$；②$b>e$；③存在 a,b 满足 $a\cdot b<e^2$；

④$a\cdot b>e^2$，则正确结论的序号是（　　）

A. ①③　　B. ②③　　C. ①④　　D. ②④

【解析】法一：根据 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在区间 $(0,e)$ 上单调递增，在区间 $(e,+\infty)$ 单调递减；当 $x=e$ 时，取得最大值且极大值左偏，故（1）正确，（2）错误，再根据 $f(2)=f(4)$，可知 $2\times4=8>e^2$，故（3）错（4）对.故选 C.

法二：此题也可以参考对数平均不等式 $\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$，令 $\dfrac{\ln a}{a}=\dfrac{\ln b}{b}=m,\begin{cases}\ln a=ma\cdots\cdots(1)\\ \ln b=mb\cdots\cdots(2)\end{cases}$（1）+（2）得 $\ln a+\ln b=m(a+b)\cdots\cdots(3)$；（1）－（2）得 $\ln a-\ln b=m(a-b)$ $\therefore \text{m}=\dfrac{\ln a-\ln b}{a-b}$，代入（3）得 $\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}=\dfrac{1}{m}<\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{\ln a+\ln b}{2m}$，$\therefore \ln ab>2$，综上 $ab>e^2$.

【例 6】（2018•衡水金卷）下列四个命题：①$\ln5<\sqrt5\ln2$；②$\ln\pi>\sqrt{\dfrac{\pi}{e}}$；③$2^{\sqrt{11}}<11$；④$3e\ln2>4\sqrt2$；其中真命题的个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【解析】由 $\dfrac{\ln5}{\sqrt5}<\ln2\Rightarrow\dfrac{\ln\sqrt5}{\sqrt5}<\ln\sqrt2=\dfrac{2\ln\sqrt2}{2}=\dfrac{\ln2}{2}$，由于 $2<\sqrt5<e$ 时，与 $\dfrac{\ln\sqrt5}{\sqrt5}>\dfrac{\ln2}{2}$ 矛盾，故①不正确；

$\because\dfrac{\ln\pi}{\sqrt\pi}=\dfrac{2\ln\sqrt\pi}{\sqrt\pi}>\dfrac{2\ln\sqrt e}{\sqrt e}\left(e>\sqrt\pi>\sqrt e\right)$，$\therefore\ln\pi>\sqrt{\dfrac{\pi}{e}}$，故②正确；针对命题③，要比较 $2^{\sqrt{11}}$ 与 $\sqrt{11}^2$，即比较 $\sqrt{11}\ln2$ 与 $2\ln\sqrt{11}$，即比较 $\dfrac{\ln2}{2}$ 与 $\dfrac{\ln\sqrt{11}}{\sqrt{11}}$，而 $2<e<\sqrt{11}$ 不好比较，故要进行 $f(2)=f(4)$ 转换，$\dfrac{\ln2}{2}=\dfrac{\ln4}{4}<\dfrac{\ln\sqrt{11}}{\sqrt{11}}$，即 $2^{\sqrt{11}}<11$，所以③正确；针对命题④，要比较 $3e\ln2$ 与 $4\sqrt2$ 的大小，即比较 $2e\cdot\dfrac{3}{2}\ln2=2e\ln\sqrt8$ 与 $2\sqrt8$，即比较 $\dfrac{\ln\sqrt8}{\sqrt8}$ 与 $\dfrac{1}{e}$ 的大小，根据 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 最大值 $\dfrac{1}{e}$，故 $\dfrac{\ln\sqrt8}{\sqrt8}<\dfrac{1}{e}$，与命题矛盾，④不正确；综上可得，故选 B.

【例 7】（2014•湖北）已知 π 为圆周率，$e=2.71828\ldots$ 为自然对数的底数.

（1）求函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调区间；

（2）求 $e^3,3^e,e^\pi,\pi^e,3^\pi,\pi^3$ 这 6 个数中的最大数与最小数；

（3）将 $e^3,3^e,e^\pi,\pi^e,3^\pi,\pi^3$ 这 6 个数按从小到大的顺序排列，并证明你的结论.

【解析】（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$\because f(x)=\dfrac{lnx}{x}$，$\therefore f'(x)=\dfrac{1-lnx}{x^2}$

当 $f'(x)>0$，即 $0<x<e$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $f'(x)<0$，即 $x>e$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减.

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,e)$，单调递减区间为 $(e,+\infty)$.

（2）$\because e<3<\pi$，　$\therefore eln3<eln\pi$，　$\pi lne<\pi ln3$

即 $ln3^e<ln\pi^e$，　$lne^\pi<ln3^\pi$.

于是根据函数 $y=lnx$，　$y=e^x$，　$y=\pi^x$ 在定义域上单调递增

可得 $3^e<\pi^e<\pi^3$，　$e^3<e^\pi<3^\pi$

故这六个数的最大数在 π^3 与 3^π 之中，最小数在 3^e 与 e^3 之中.

由 $e<3<\pi$ 及（1）的结论得

$f(\pi)<f(3)<f(e)$

即$\frac{ln\pi}{\pi}<\frac{ln3}{3}<\frac{lne}{e}$，由$\frac{ln\pi}{\pi}<\frac{ln3}{3}$，得$ln\pi^3<ln3^\pi$

$\therefore 3^\pi>\pi^3$；由$\frac{ln3}{3}<\frac{lne}{e}$，得$ln3^e<lne^3$

$\therefore 3^e<e^3$．综上，6个数中的最大数是3^π，最小数是3^e．

（3）由（2）知，$3^e<\pi^e<\pi^3<3^\pi$，$3^e<e^3$，又由（2）知，$\frac{ln\pi}{\pi}<\frac{lne}{e}$，得$\pi^e<e^\pi$

故只需比较e^3与π^e和e^π与π^3的大小．

由（1）知，当$0<x<e$时，$f(x)<f(e)=\frac{1}{e}$，即$\frac{lnx}{x}<\frac{1}{e}$．

在上式中，令$x=\frac{e^2}{\pi}$，又$\frac{e^2}{\pi}<e$，则$ln\frac{e^2}{\pi}<\frac{e}{\pi}$，从而$2-ln\pi<\frac{e}{\pi}$，即得$ln\pi>2-\frac{e}{\pi}$．①

由①得，$eln\pi>e(2-\frac{e}{\pi})>2.7\times(2-\frac{2.72}{3.1})>2.7\times(2-0.88)=3.024>3$

即$eln\pi>3$，亦即$ln\pi^e>lne^3$

$\therefore e^3<\pi^e$．

又由①得，$3ln\pi>6-\frac{3e}{\pi}>6-e>\pi$，即$3ln\pi>\pi$，$\therefore e^\pi<\pi^3$．

综上可得，$3^e<e^3<\pi^e<e^\pi<\pi^3<3^\pi$

即6个数从小到大顺序为3^e，e^3，π^e，e^π，π^3，3^π．

达标训练

1．（2018•烟台期中）设$a=\frac{\ln 2}{2}$，$b=\frac{\ln 3}{3}$，$c=\frac{1}{e}$，则（　　）

A．$c<a<b$　　B．$c<b<a$　　C．$a<b<c$　　D．$b<a<c$

2．（2005•全国卷III）若$a=\frac{\ln 2}{2}$，$b=\frac{\ln 3}{3}$，$c=\frac{\ln 5}{5}$则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$　　C．$c<a<b$　　D．$b<a<c$

3．（2016•广州模拟）设$a=0.7^{0.4}$，$b=0.4^{0.7}$，$c=0.4^{0.4}$，则a，b，c的大小关系为（　　）

A．$b<a<c$　　B．$a<c<b$　　C．$b<c<a$　　D．$c<b<a$

4．（2017•襄阳期末）已知$a=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}$，$b=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$c<a<b$　　D．$b<a<c$

5．（2006•希望杯）已知$a=(\frac{1}{4})^{\frac{1}{5}}$，$b=(\frac{1}{5})^{\frac{1}{4}}$，$c=\frac{4\log_2 b}{5\log_2 a}$则$a$，$b$，$c$的大小关系为（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$c<a<b$　　D．$b<c<a$

6．（2016•云南二模）已知函数$f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)-\frac{2}{2^x+1}+1$，$a=f(\frac{\ln 3}{3})$，$b=f(\frac{\ln 5}{5})$，$c=-f(2-\pi)$．下列结论中正确的是（　　）

A．$b>a>c$　　B．$c>a>b$　　C．$a>b>c$　　D．$c>b>a$

7．（2001•上海卷）用计算器演算函数$y=\frac{\lg x}{x}(x>1)$的若干个值，可以猜想下列命题中的真命题只能是（　　）

A．$y=\frac{\lg x}{x}$在$(1,+\infty)$上是单调减函数　　B．$y=\frac{\lg x}{x}$在$(1,+\infty)$上的值域为$\left[0,\frac{\lg 3}{3}\right]$

C．$y=\frac{\lg x}{x}$在$(1,+\infty)$上有最小值　　D．$y=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\lg n}{n}=0,n\in N^*$

8.（2017•新疆一模）a，b，$c\in R^{+}$ 且 $2^{a}=3^{b}=6^{c}$，记 $x=2a$，$y=3b$，$z=6c$，则 x，y，z 的大小关系为（　　）

A. $y<x<z$　　B. $x<y<z$　　C. $z<x<y$　　D. $x<z<y$

9.（2015•希望杯）比较 e^{2} 和 2^{e} 的大小，结果是 e^{2} ______ 2^{e}.（填">"、"<"或"="，其中 e 是自然对数的底数）

10.（2013•浙江数学竞赛）已知数列 $\{\sqrt[n]{n}\},n=1,2,...,$ 则数列中最大项的值为________.

11.（2013•北京卷）设 l 为曲线 $C:y=\dfrac{\ln x}{x}$ 在点 $(1,0)$ 处的切线.

（1）求 l 的方程；

（2）求证:除切点 $(1,0)$ 之外，曲线 C 在直线 l 的下方.

12.（2013•江苏卷）设函数 $f(x)=\ln x-ax$，$g(x)=e^{x}-ax$ 其中 a 为实数.

（1）若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调减函数，且 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有最小值，求 a 的取值范围；

（2）若 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是单调增函数，试求 $f(x)$ 的零点个数，并证明你的结论.

13.（2014•江苏卷） 已知函数 $f(x)=e^{x}+e^{-x}$，其中 e 是自然对数的底数.

（1）证明：$f(x)$ 是 R 上的偶函数；

（2）若关于 x 的不等式 $mf(x)\leqslant e^{-x}+m-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 m 的取值范围；

（3）已知正数 a 满足：存在 $x_0\in[1,+\infty)$，使得 $f(x_0)<a(-x_0^{3}+3x_0)$ 成立，试比较 e^{a-1} 与 a^{e-1} 的大小，并证明你的结论.

专题 3　对数单身狗，指数找基友

第一讲　对数单身狗，指数找基友原理

设 $f(x)$ 为可导函数，则有 $\left(f(x)\cdot\ln x\right)'=f(x)'\ln x+f(x)\cdot\dfrac{1}{x}$，若 $f(x)$ 为非常数函数，求导式子中含有 $\ln x$，这类问题需要多次求导. 处理这类函数的秒杀技巧是将 $\ln x$ 前面部分提出，就留下 $\ln x$ 这个单身狗，然后研究剩余部分，这类方法技巧叫对数单身狗.

设 $f(x)$ 为可导函数，则有 $\left(e^{x}-f(x)\right)'=e^{x}-f(x)'$，若 $f(x)$ 为非常数函数，求导式子中还是含有 e^{x}，针对此类型，可以采用作商的方法，构造 $\left[\dfrac{f(x)}{e^{x}}\right]'=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^{x}}$，从而达到简化证明和求最值的目的，$e^{x}$ 总在找属于它的基友，此类方法技巧俗称指数找基友.

【例 1】已知 $f(x)=x\ln x$，若 $f(x)\geq ax^{2}+\dfrac{2}{a}(a\neq 0)$. 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的最小值.

【思路分析】令 $F(x)=x\ln x-ax^{2}-\dfrac{2}{a},F(x)'=\ln x+1-2ax.$，如此研究 $F(x)$ 最小值有点复杂，为了避免求导后出现 $\ln x$ 可以先"清除"$\ln x$ 前面的因式，实现"对数单身狗".

【解析】设 $F(x)=x\ln x-ax^{2}-\dfrac{2}{a}=x\left(\ln x-ax-\dfrac{2}{ax}\right)$，$g(x)=\ln x-ax-\dfrac{2}{ax}(a\neq 0)$，题目等价于 $g(x)\geq 0$ 恒成立，即 $g(x)\min\geq 0$，$g(x)'=\dfrac{-a^{2}\left(x+\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{2}{a}\right)}{ax^{2}}$，①$a>0$ 时，$g(1)=-a-\dfrac{2}{a}<0$，不合题意；

②$a<0$ 时，$g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)\downarrow$，在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)\uparrow$. $g(x)_{\min}=g\left(-\dfrac{1}{a}\right)\geq 0$，即 $0>a\geq -e^{3}$.

【例 2】判断 $f(x)=\frac{\ln x}{x}-x+1$ 零点个数.

【解析】 $f(x)=\frac{\ln x-x^2+x}{x}$，令 $g(x)=\ln x-x^2+x$ $g'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=\frac{-2x^2+x+1}{x}=\frac{-(2x+1)(x-1)}{x}$

$g(x)$ 在 $(0,1)\uparrow$，$(1,+\infty)\downarrow$　$\because g(1)=0$. 所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 仅有一个零点

【例 3】求证：(1)（2018•新课标 II 卷）$e^x\ge x^2+1$（$x\ge 0$）；(2) $e^x\ge ex$；(3) $e^x\ge ex+(x-1)^2$（$x\ge 0$）

(1)【证明】指数函数中典型的"指数找基友"模型，(1) 要证 $e^x\ge x^2+1$，只需证 $\frac{x^2+1}{e^x}\le 1$，令 $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$，

$f'(x)=\frac{2x-x^2-1}{e^x}=-\frac{(x-1)^2}{e^x}\le 0$，故 $f(x)\downarrow$，由于 $f(0)=1$，故 $\frac{x^2+1}{e^x}\le 1$，即证；

(2) 令 $f(x)=\frac{ex}{e^x}$，$f'(x)=\frac{e(1-x)}{e^x}$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)_{\max}=f(1)=1$，故 $\frac{ex}{e^x}\le 1$，

$e^x\ge ex$ 即证；

注意：$y=ex$ 即为 $y=e^x$ 在点 $(1,e)$ 处的切线，属于 $e^x\ge x+1$ 的代换模型题，将 $x-1$ 替代原来的 x 即可；关于此类替换，还有 $e^x\ge\frac{e^2}{4}x^2$（用 $\frac{x}{2}$ 替换 x），两函数在点 $(2,e^2)$ 处相切；$e^x\ge\frac{e^3}{27}x^3$（用 $\frac{x}{3}$ 替换 x），两函数在点 $(3,e^3)$ 处相切.

(3) 令 $f(x)=\frac{ex+(x-1)^2}{e^x}$，$f'(x)=-\frac{(x-1)(x+e-3)}{e^x}$，$f'(x)=0$ 时，$x_1=3-e$，$x_2=1$ 故 $f(x)$ 在区间 $(0,3-e)\cup(1,+\infty)\downarrow$，在区间 $(3-e,1)\uparrow$，由于 $f(0)=1$ 且 $f(1)=1$，故 $\frac{e^x+(x-1)^2}{e^x}\le 1$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立.

【例 4】（2016•新课标II卷）当 $x>0$ 时，求证：$(2-x)e^x\le x+2$.

【证明】显然当 $x\ge 2$ 时，不等式成立，当 $0\le x<2$ 时，令 $f(x)=\frac{x+2}{e^x(2-x)}$，$f'(x)=\frac{x^2}{(2-x)^2e^x}>0$ 恒成立，

故 $f(x)$ 在区间 $[0,2)\uparrow$，$f(x)_{\min}=f(0)=1$，故当 $x>0$ 时，$(2-x)e^x\le x+2$.

【例 5】（2011•全国 II 卷）若不等式 $\frac{\ln x}{x+1}+\frac{1}{x}>\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x}$ 在 $x>0$ 时且 $x\ne 1$ 时恒成立，求 k 的取值范围.

【解析】由题意得 $\frac{\ln x}{x+1}+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x-1}-\frac{k}{x}>0\Rightarrow-\frac{2}{x^2-1}\cdot\ln x+\frac{1-k}{x}>0\Rightarrow-\frac{1}{x^2-1}\left[2\ln x+(k-1)\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]>0$，令 $f(x)=2\ln x+(k-1)\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)$，即 $\begin{cases}0<x<1,\ f(x)>0\\ x>1,\ f(x)<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x^2}\left[(k-1)x^2-2x+k-1\right]$，$\because f(1)=0$，$f'(1)\le 0$ $\Rightarrow k\le 0$. 下面讨论 k 在所有的取值范围的情况：①当 $k\le 0$ 时，$(k-1)x^2+2x+k-1\le 0$ 恒成立，即 $\therefore f'(x)\le 0$，$f(x)\downarrow$. 满足题意；②当 $k\ge 1$，$f'(x)\ge 0$，不合题意；③当 $0<k<1$ 时，函数有零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，$\therefore f(x)$ 在 $(x_1,1)\uparrow$，$\therefore f(x)<f(1)=0$，不合题意.

【例 6】（2016•新课标 I 卷）已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点 x_1,x_2，求 a 的取值范围.

【解析】由 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2=0$ 得：$\frac{1}{a}=\frac{(x-1)^2}{e^x(2-x)}$ $(x\ne 2)$，当 $x=2$ 时，当 $a=0$ 时，有仅有 $f(2)=0$；令 $g(x)=\frac{(x-1)^2}{e^x(2-x)}$，易知在 $x>2$ 时，$g(x)<0$，当 $x<2$ 时，$g'(x)=\frac{(x-1)(x^2-4x+5)}{e^x(2-x)^2}$，易知 $x=1$ 时，$g'(x)=0$，故 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,1)\downarrow$，在区间 $(1,2)\uparrow$，$g(x)_{\min}=g(1)=0$，且在 $x\to 2$ 以及 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，故① $\frac{1}{a}\in(0,+\infty)$ 时，即 $a>0$，$f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点，且 $x_1<1<x_2<2$；②

当 $\frac{1}{a}\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=(x-2)e^{x}+a(x-1)^{2}$，有仅有一个零点，且 $x>2$，不合题意；③ $a=0$ 时仅有一个零点，且 $x=2$，不合题意，综上，$a>0$.

【例7】（2018•新课标III卷）已知函数 $f(x)=(2+x+ax^{2})ln(1+x)-2x$．若 $a=0$，证明：当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$．

【证明】当 $a=0$ 时，$f(x)=(2+x)ln(1+x)-2x$，$(x>-1)$．由于 $x+2>0$，故令 $g(x)=\ln(1+x)-\frac{2x}{x+2}$；

$g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+2)^{2}}=\frac{x^{2}}{(x+1)(x+2)^{2}}$，故 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0\Rightarrow g(x)\uparrow$，$\because g(0)=0\therefore$ 当 $-1<x<0$ 时，$g(x)<0$；当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，故当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$．

【例8】（2017•新课标II卷）已知函数 $f(x)=ax^{2}-ax-xlnx$，且 $f(x)\geqslant 0$．

（1）求 a；

（2）证明：$f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0，且 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$．

【解析】（1）因为 $f(x)=ax^{2}-ax-xlnx=x(ax-a-lnx)(x>0)$，则 $f(x)\geqslant 0$ 等价于 $h(x)=ax-a-lnx\geqslant 0$，由于 $h(1)=0$，所以 $h(x)\geqslant 0$ 等价于 $h(x)$ 在 $x>0$ 时的最小值为 $h(1)$，所以等价于 $h(x)$ 在 $x=1$ 处是极小值，求导可知 $h'(x)=a-\frac{1}{x}$，所以 $h(x)_{min}=h(\frac{1}{a})$，所以 $\frac{1}{a}=1$，解得 $a=1$；

（2）证明：由（1）可知 $f(x)=x^{2}-x-xlnx$，$f'(x)=2x-2-lnx$，令 $f'(x)=0$，可得 $2x-2-lnx=0$，记 $t(x)=2x-2-lnx$，则 $t'(x)=2-\frac{1}{x}$，令 $t'(x)=0$，解得：$x=\frac{1}{2}$，所以 $t(x)$ 在区间 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{2}$，$+\infty)$ 上单调递增，所以 $t(x)_{min}=t(\frac{1}{2})=ln2-1<0$，从而 $t(x)=0$ 有解，即 $f'(x)=0$ 存在两根 x_0，x_2，且不妨设 $f'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上为正、在 $(x_0$，$x_2)$ 上为负、在 $(x_2$，$+\infty)$ 上为正，所以 $f(x)$ 必存在唯一极大值点 x_0，且 $2x_0-2-lnx_0=0$，所以 $f(x_0)=x_0{}^{2}-x_0-x_0lnx_0=x_0{}^{2}-x_0+2x_0-2x_0{}^{2}=x_0-x_0{}^{2}$，由 $x_0<\frac{1}{2}$ 可知 $f(x_0)<(x_0-x_0{}^{2})_{max}=-\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$；由 $f'(\frac{1}{e})<0$ 可知 $x_0<\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0$，$\frac{1}{e})$ 上单调递减，所以 $f(x_0)>f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e^{2}}$；综上所述，$f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0，且 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$．

【例9】（2017•新课标I卷）已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^{x}-x$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围．

【分析】（1）求导，根据导数与函数单调性的关系，分类讨论，即可求得 $f(x)$ 单调性；（2）可以根据第一问的结论来求，但此题出现了 e^{2x} 和 x 之间的关系，故可以利用指对互换原理，简化讨论和运算，令 $e^{x}=t$，则 $x=\ln t(t>0)$，从而构造 $f(t)=at^{2}+(a-2)t-\ln t$，这样对数单身狗模型立即形成．

【解析】(1) 由 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^{x}-x$，求导 $f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^{x}-1$，当 $a=0$ 时，$f'(x)=-2e^{x}-1<0$，$\therefore$ 当 $x\in R$，$f(x)$ 单调递减，当 $a>0$ 时，$f'(x)=(2e^{x}+1)(ae^{x}-1)=2a(e^{x}+\frac{1}{2})(e^{x}-\frac{1}{a})$，令 $f'(x)=0$，解得：$x=ln\frac{1}{a}$，当 $f'(x)>0$，解得：$x>ln\frac{1}{a}$，当 $f'(x)<0$，解得：$x<ln\frac{1}{a}$，$\therefore x\in(-\infty,ln\frac{1}{a})$ 时，$f(x)$ 单调递减，$x\in(ln\frac{1}{a}$，$+\infty)$ 单调递增；当 $a<0$ 时，$f'(x)=2a(e^{x}+\frac{1}{2})(e^{x}-\frac{1}{a})<0$，恒成立，$\therefore$ 当 $x\in R$，$f(x)$ 单调递减，综上可知：当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 R 单调减函数，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,ln\frac{1}{a})$ 是减函数，在 $(ln\frac{1}{a}$，$+\infty)$ 是增函数；

（2）若 $a\leqslant 0$ 时，由（1）可知：$f(x)$ 最多有一个零点；当 $a>0$ 时，$f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^{x}-x$，令 $e^{x}=t$，则 $x=\ln t(t>0)$，$f(t)=at^{2}+(a-2)t-\ln t$，当 $t\to 0$ 时，$f(t)\to+\infty$，当 $t\to+\infty$，$f(t)\to+\infty$，$\therefore$ 函

数有两个零点时，$f(t)$ 的最小值小于 0 即可，由 $f'(t)=2at+(a-2)t-\frac{1}{t}=\frac{(2t+1)(at-1)}{t}$，$f'(t)=0$ 时，$t=\frac{1}{a}$，故 $f(t)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 是减函数，在 $(\frac{1}{a}$，$+\infty)$ 是增函数，$\therefore f(t)_{min}=f(\frac{1}{a})=a\times(\frac{1}{a^2})+(a-2)\times\frac{1}{a}-ln\frac{1}{a}<0$，$\therefore 1-\frac{1}{a}-ln\frac{1}{a}<0$，即 $ln\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-1>0$，设 $m=\frac{1}{a}$，则 $g(m)=\ln m+m-1$，$(m>0)$，求导 $g'(m)=\frac{1}{m}+1$，由 g（1）$=0$，$\therefore m=\frac{1}{a}>1$，解得：$0<a<1$，$\therefore a$ 的取值范围 $(0,1)$．

注意：对数单身狗和指数找基友，在很多情况下是等同的，指数换成对数，就要“单身狗”，同样对数换成指数，则要“找基友”.

【例 10】（2014•辽宁卷）已知函数

$$f(x)=(\cos x-x)(x+2\pi)-\frac{8}{3}(\sin x+1),\ g(x)=3(x-\pi)\cos x-4(1+\sin x)\ln x\left(3-\frac{2x}{\pi}\right).$$

（1）证明：存在唯一 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使 $f(x)=0$;

（2）证明：存在唯一 $x_1\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 使 $g(x_1)=0$，且对(1)中 x_0 有 $x_0+x_1<\pi$.

【证明】（1）$f(x)'=-(1+\sin x)(2x+\pi)-2x-\frac{2}{3}\cos x$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)'<0$.故 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减.由于 $f(0)=\pi-\frac{8}{3}>0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\pi^2-\frac{16}{3}<0$，故存在唯一 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f(x_0)=0$. 命题得证.

（3）欲证 $x_0+x_1<\pi$，只需 $x_0<\pi-x_1$，令 $t=\pi-x$，则 $y=g(x)$ 零点 x_1 和 $h(t)=3t\cos t-4(1+\sin t)\ln(1+\frac{2t}{\pi})$ 零点 t_0 满足 $t_0=\pi-x$,，于是转化为证明 $x_0<t_0$，

$h(t)=3t\cos t-4(1+\sin t)\ln\left(1+\frac{2t}{\pi}\right)$，由于对数部分 $\ln\left(1+\frac{2t}{\pi}\right)$ 不是单身狗，故将 $(1+\sin t)$ 除去，构造

$F(t)=\frac{h(t)}{1+\sin t}$ 与 $h(t)$ 零点相同．经过计算整理得

$F'(t)=\frac{f(t)}{\frac{2}{3}(1+\sin t)\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$，故 $F(t)$ 在 $(0,\ x_0)\uparrow$，$\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)\downarrow$. 由于 $F(0)=0$. $\therefore F(x_0)>0$. $\therefore x_0<t_0<\frac{\pi}{2}$.

结论：关于恒成立或零点问题时，将指数 e^x 作为分母构造“找基友”模型，对数部分 $\ln(mx+n)$ 一定要除去所有与其相乘的函数，构造“单身狗”模型. 解题达到事半功倍的效果.

达标训练

1.（2018•新课标III卷）已知函数 $f(x)=\frac{ax^2+x-1}{e^x}$．

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程；

（2）证明：当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)+e\geqslant 0$．

2.（2018•郴州期末）已知函数 $f(x)=axlnx$ 图象上在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 垂直.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）若对所有 $x\geqslant 1$ 都有 $f(x)-mx+2\geqslant 0$，求实数 m 的取值范围.

3.（2017•浙江卷）已知函数 $f(x)=(x-\sqrt{2x-1})e^{-x}(x\geqslant\frac{1}{2})$．

（1）求 $f(x)$ 的导函数；

（2）求 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}$，$+\infty)$ 上的取值范围.

4.（2016•山东）设 $f(x)=xlnx-ax^2+(2a-1)x$，$a\in R$．

（1）令 $g(x)=f'(x)$，求 $g(x)$ 的单调区间；

（2）已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，求正实数 a 的取值范围.

5．（2018•醴陵期末）已知函数 $f(x)=bx\ln x+3(b\neq 0)$， $f'(e)=4$， $g(x)=-x^2+ax$．

（1）求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）若对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 有 $f(x)-g(x)\geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

6．（2014•福建理科卷）已知函数 $f(x)=e^x-ax$（a 为常数）的图象与 y 轴交于点 A，曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线斜率为 -1．

（1）求 a 的值及函数 $f(x)$ 的极值；

（2）证明：当 $x>0$ 时， $x^2<e^x$；（3）证明：对任意给定的正数 c，总存在 x_0，使得当 $x\in(x_0,\ +\infty)$ 时，恒有 $x^2<ce^x$．

7．（2018•新课标卷I）已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$．

（1）设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a，并求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时， $f(x)\geqslant 0$．

8．（2014•四川卷）已知函数 $f(x)=e^x-ax^2-bx-1$，其中 a， $b\in R$， $e=2.71828\ldots$ 为自然对数的底数．

（1）设 $g(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，求函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值；

（2）若 $f(1)=0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，求 a 的取值范围．

专题 4 破解洛必达法则之隐零点护航法

第一讲 洛必达（$L'Hopital$）法则

洛必达法则在一定情况下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式值的方法，对于处理一类含参数不等式恒成立的导数问题有一定的作用．

洛必达法则 1：设① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，② $f'(x),g'(x)$ 存在，且 $g'(x)\neq 0$，③ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

洛必达法则 2：设① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，② $f'(x),g'(x)$ 存在，且 $g'(x)\neq 0$，③ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

洛必达法则的应用：若 $k\geq\frac{f(x)}{g(x)}(x\geq x_0)$，令 $p=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}(x\geq x_0)$，此时 $f(x_0)=0,g(x_0)=0$，故 $p=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}(x\geq x_0)$，故当 $k\geq p$ 时 $k\geq\frac{f(x)}{g(x)}(x\geq x_0)$ 恒成立．

若 $k\leq\frac{f(x)}{g(x)}(x\geq x_0)$ 恒成立，令 $p=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}(x\geq x_0)$，此时 $f(x_0)=0,g(x_0)=0$，故 $p=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}(x\geq x_0)$，故当 $k\leq p$ 时 $k\leq\frac{f(x)}{g(x)}(x\geq x_0)$ 恒成立。

注意：① $p=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}(x\geq x_0)$ 求导直到分母为非零数；②分母不为零后，不能再求导；③ $\frac{f'(x)}{g'(x)},\frac{f''(x)}{g''(x)}$ 出现繁分式一定要化简．

【例 1】（2010•新课标卷）设函数 $f(x)=e^x-1-x-ax^2\geq 0$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

分析： $f(x)=e^x-1-x-ax^2\geq 0\Rightarrow a\leq\frac{e^x-1-x}{x^2}\ (x\geq 0)$，属于 $\frac{0}{0}$ 类型，故可以利用洛必达法则求出 a 的取值范围． $f(x)=e^x-1-x-ax^2\geq 0\Rightarrow e^x-1-x\geq ax^2\Rightarrow a\leq\frac{e^x-1-x}{x^2}$，令 $p=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$，根据洛必达法则， $p=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$，故 $a\leq\frac{1}{2}$．

由于在高考中洛必达法则不能出现在试卷上（只给答案分），故可以采用“隐零点护航法”破解，如下：

【解析】求导得：$f'(x)=e^x-1-2ax$，$f''(x)=e^x-2a$，$\because f(0)=e^0-1-0-a\cdot 0^2=0$

$f'(0)=0$，$f''(0)=1-2a$ ①当 $1-2a<0$ 时，$\exists x_0=\ln 2a\in[0,+\infty)$，使 $f''(x_0)=0$。故当 $x\in[0,x_0]$ 时，$f''(x)\le 0$，$f'(x)$ 为单调减区间，由于 $f'(0)=0$，故当 $x\in[0,x_0]$ 时，$f'(x_0)\le 0$，即 $f(x)$ 在区间 $x\in[0,x_0]$ 单调递减，由于 $f(0)=0$，故在区间 $x\in(0,x_0)$ 时，$f(x)<0$，与题设矛盾．　②当 $1-2a\ge 0$ 时，

$f''(x)=e^x-2a\ge 0$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，故 $f'(x)=e^x-2ax-1$ 在区间 $x\in[0,+\infty)$ 单调递增，故 $f'(x)\ge 0$ 恒成立，同理可得，$f(x)$ 在区间 $x\in[0,+\infty)$ 单调递增，故 $f(x)\ge 0$ 恒成立。综上所述，$a\le\frac{1}{2}$．

隐零点护航法：洛必达法则推出结果后，一定要履行“参变不分离”的策略，符合洛必达求出结果的区间证明恒成立，不符合洛必达求出结果的区间推矛盾，而推矛盾要引入一个“隐零点” x_0，故称为隐零点护航法．

【例 2】（2016•新课标II卷）已知函数 $f(x)=(x+1)lnx-a(x-1)$．

（1）当 $a=4$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在(1，f（1））处的切线方程；

（2）若当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，求 a 的取值范围．

【解析】（1）当 $a=4$ 时，$f(x)=(x+1)lnx-4(x-1)$．f（1）$=0$，即点为 $(1,0)$，函数的导数

$$f'(x)=lnx+(x+1)\cdot\frac{1}{x}-4,$$

则 f'（1）$=ln1+2-4=2-4=-2$，即函数的切线斜率 $k=f'$（1）$=-2$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=-2(x-1)=-2x+2$；

(2)【分析】参变分离得 $a<\dfrac{(x+1)\ln x}{x-1}$，由于 $x\to 1$ 时，属于 $\dfrac{0}{0}$ 模型，故可用洛必达法则秒出答案再来个“隐零点护航法”写过程，$a<\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{x+1}{x}+\ln x}{1}=2$，由于 $x\ne 1$，故 $a\le 2$（端点取不到，等号来辅助），洛必达法则就是参数和变量的“结婚证”，隐零点护航就充分说明这一点；

$(II)\because f(x)=(x+1)lnx-a(x-1)$，$f(1)=0\ \therefore f'(x)=1+\frac{1}{x}+lnx-a$，且 $f'(1)=2-a$；$\therefore f''(x)=\frac{x-1}{x^2}$，

$\because x>1$，$\therefore f''(x)>0$，$\therefore f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore f'(x)>f'$（1）$=2-a$．

① $a\leqslant 2$，$f'(x)>f'$（1）$\geqslant 0$，$\therefore f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore f(x)>f$（1）$=0$，满足题意；

② $a>2$，存在 $x_0\in(1,+\infty)$，$f'(x_0)=0$，函数 $f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0$，$+\infty)$ 上单调递增，由 $f(1)=0$，可得存在 $x_0\in(1,+\infty)$，$f(x_0)<0$，不合题意．综上所述，$a\leqslant 2$．

【例 3】（2015•山东）设函数 $f(x)=\ln(x+1)+a(x^2-x)$，其中 $a\in R$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 极值点的个数，并说明理由；

（2）若 $\forall x>0$，$f(x)\ge 0$ 成立，求 a 的取值范围．

【解析】(I) 函数 f（x）$=\ln$（$x+1$）$+a$（x^2-x），其中 $a\in R$，$x\in$（-1，$+\infty$）．$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+2ax-a=\dfrac{2ax^2+ax-a+1}{x+1}$ 令 g（x）$=2ax^2+ax-a+1$．

（1）当 $a=0$ 时，g（x）$=1$，此时 f'（x）>0，函数 f（x）在（-1，$+\infty$）上单调递增，无极值点．

（2）当 $a>0$ 时，$\triangle=a^2-8a$（$1-a$）$=a$（$9a-8$）．

①当 $0<a\le\frac{8}{9}$ 时，$\triangle\le 0$，g（x）≥ 0，f'（x）≥ 0，函数 f（x）在（-1，$+\infty$）上单调递增，无极值点．

②当 $a>\frac{8}{9}$ 时，△>0，设方程 $2ax^2+ax-a+1=0$ 的两个实数根分别为 x_1，x_2，$x_1<x_2$.

∴当 $x\in(-1,x_1)$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增．因此函数 $f(x)$ 有两个极值点．

（3）当 $a<0$ 时，△>0．由 $g(-1)=1>0$，可得 $x_1<-1<x_2$．∴当 $x\in(-1,x_2)$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减．因此函数 $f(x)$ 有一个极值点．

综上所述：当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 有一个极值点；当 $0<a\le\frac{8}{9}$ 时，函数 $f(x)$ 无极值点；当 $a>\frac{8}{9}$ 时，函数 $f(x)$ 有两个极值点．

（2）设当 $x\ge 0$ 时，$f(x)\le\frac{x}{ax+1}$，求 a 的取值范围．

分析：（I）由于 $e^x\ge 1+x$，故 $e^{-x}\le\frac{1}{1+x}$，即 $1-e^{-x}\ge 1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$（等号当仅当 $x=0$ 时成立）;

当 $x\in(1,+\infty), x^2-x>0$, 故 $a\ge\frac{-\ln(x+1)}{x^2-x}$，由于 $\frac{-\ln(x+1)}{x^2-x}<0$，当 $x\to+\infty$ 时，为 $\frac{\infty}{\infty}$ 类型，

$$a\ge\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln(x+1)}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{(2x-1)(x+1)}=0, \quad \therefore a\in[0,1].$$

【解析】$f(0)=0$，$f'(x)=\frac{1}{x+1}+2ax-a$，$f'(0)=1-a$；$f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+2a$，$f''(x)\uparrow$

当 $a<0$ 时，令 $h(x)=\ln(x+1)-x$，$h'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}\le 0$，故 $h(x)\le h(0)=0$

由于 $\ln(x+1)\le x$，故 $f(x)\le ax^2+(1-a)x$，由二次函数性质可知与 $f(x)\ge 0$ 矛盾，故舍去；

当 $1-a\ge 0$ 时，即 $0\le a\le 1$，此时 $f'(x)=\frac{1}{x+1}+2ax-a=\frac{2ax^2+ax-a+1}{x+1}=\frac{2a(x+\frac{1}{4})^2-\frac{9}{8}a+1}{x+1}\ge 0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 单调递增，$f(x)\ge f(0)=0$ 恒成立；

当 $1-a<0$ 时，即 $a>1$，$\exists x_0\in[0,+\infty)$，使 $f'(x_0)=0$。故当 $x\in[0,x_0]$ 时，$f'(x)\le 0$，$f(x)$ 为单调减区间，$f(x)\le f(0)=0$，与题设矛盾。综上，$a\in[0,1]$.

总结：证明矛盾需要切线放缩，常见的有 $e^x\ge x+1$，$x\ge\ln(x+1)$。遇到 e^x 时，由于此函数为凹函数，且在 $x\to\infty$ 时，爆炸递增厉害，则 $x\to\infty$ 时，一定有 $e^x>ax^n$；而 $\ln x$ 是个凸函数，在 $x\to\infty$ 时，递增缓慢，则 $x\to\infty$ 时，一定有 $\ln x<ax^n$，所以一旦出现 $\ln x>ax^n$ 恒成立时，除了洛必达法则算出的答案外，还一定有 $a<0$.

第二讲　泰勒•麦克劳林冥级数展开式与放缩法

e^x 的麦克劳林（Maclaurin）展开式：$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$

当 $0<x<1$ 时，有 $1+x<e^x<1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}$，即 $\ln(1+x)<x<\ln\frac{1}{1-x}$ ①

将①式中 x 用 $\frac{x}{1+x}$ 替换，可得 $\frac{x}{1+x}<\ln\frac{1}{1-\frac{x}{1+x}}\Rightarrow\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)$ ②

综上可推出三个加强型不等式：$1+x\le e^x$ ③；$e^x\le\frac{1}{1-x}(x<1)$ ④；$\frac{x}{1+x}\le\ln(1+x)\le x(x>-1)$ ⑤　　③

④⑤中等号当仅当 $x=0$ 时成立．

【例 4】（2010•全国卷II）设函数 $f(x)=1-e^{-x}$．

（1）证明：当 $x>-1$ 时，$f(x)\ge\frac{x}{x+1}$；

（2）设当 $x\ge 0$ 时，$f(x)\le\frac{x}{ax+1}$，求 a 的取值范围．

分析：（I）由于 $e^x\ge 1+x$，故 $e^{-x}\le\frac{1}{1+x}$，即 $1-e^{-x}\ge 1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$（等号当仅当 $x=0$ 时成立）;

（II）$1-e^{-x}\le\dfrac{x}{ax+1}$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，显然 $1-e^{-x}\ge0$，故 $\dfrac{x}{ax+1}\ge0$，即 $ax+1>0$，故 $a\ge0$，分离变量可得 $a\le\dfrac{xe^{x}-e^{x}+1}{x\left(e^{x}-1\right)}$，当 $x\to0$ 时，属于 $\dfrac{0}{0}$ 型，$a\le\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^{x}-e^{x}+1}{x\left(e^{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{1}{2}$.

【解析】（I）当 $x>-1$ 时，要证 $f(x)\ge\dfrac{x}{1+x}$，当且仅当 $e^{x}\ge1+x$，令 $g(x)=e^{x}-x-1$，则 $g'(x)=e^{x}-1$，当 $x\ge0$ 时 $g'(x)\ge0$，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 是增函数，当 $x\le0$ 时 $g'(x)\le0$，$g(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 是减函数，于是 $g(x)$ 在 $x=0$ 处达到最小值，因而当 $x\in R$ 时，$g(x)\ge g(0)$ 时，即 $e^{x}\ge1+x$，所以当 $x>-1$ 时，$f(x)\ge\dfrac{x}{1+x}$ 故 $e^{-x}\le\dfrac{1}{1+x}$，即 $1-e^{-x}\ge1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}$；

（II）要使 $1-e^{-x}\le\dfrac{x}{ax+1}$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，显然 $1-e^{-x}\ge0$，故 $\dfrac{x}{ax+1}\ge0$，即 $ax+1>0$，故 $a\ge0$，

令 $F(x)=\dfrac{x}{ax+1}+e^{-x}-1$，$F(0)=\dfrac{0}{a\cdot0+1}+e^{-0}-1=0$，$F'(x)=\dfrac{1}{(ax+1)^{2}}-e^{-x}$，$F'(0)=0$

$F''(x)=-\dfrac{2a}{(ax+1)^{2}}+e^{-x}$，$F''(0)=1-2a$；$F'''(x)=\dfrac{4a^{2}}{(ax+1)^{3}}-e^{-x}$，$F'''(0)=4a^{2}-1$，$x\to\infty$，$F'''(x)>0$

①当 $1-2a<0$ 时，$F'''(0)>0$，$\exists x_0\in[0,+\infty)$，使 $F''(x_0)=0$。故当 $x\in[0,x_0]$ 时，$F''(x_0)\le0$，$f'(x)$ 为单调减区间，由于 $F'(0)=0$，故当 $x\in[0,x_0]$ 时，$F'(x_0)\le0$，即 $f(x)$ 在区间 $x\in[0,x_0]$ 单调递减，由于 $F(0)=0$，故在区间 $x\in(0,x_0)$ 时，$f(x)<0$，与题设矛盾.

②当 $1-2a\ge0$ 时，$F''(x)\ge0$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，故 $F'(x)$ 在区间 $x\in[0,+\infty)$ 单调递增，故 $F'(x)\ge0$ 恒成立，同理可得，$F(x)$ 在区间 $x\in[0,+\infty)$ 单调递增，故 $F(x)\ge0$ 恒成立。综上所述，$0\le a\le\dfrac{1}{2}$.

【例 5】（2015•北京卷）已知函数 $f(x)=ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0，f(0))$ 处的切线方程；

（2）求证，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>2(x+\dfrac{x^{3}}{3})$；

（3）设实数 k 使得 $f(x)>k(x+\dfrac{x^{3}}{3})$ 对 $x\in(0,1)$ 恒成立，求 k 的最大值.

【分析】（1）利用函数的导数求在曲线上某点处的切线方程.（2）构造函数利用函数的单调性证明命题成立.

（3）根据洛必达法则 $k<\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x+\dfrac{x^{3}}{3}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{2}{(1+x)^{2}}}{1+x^{2}}=2$，由于 $x\ne0$，故 $k\le2$.

【解析】（1）因为 $f(x)=ln(1+x)-ln(1-x)$ 所以 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}$，$f'(0)=2$，又因为 $f(0)=0$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0，f(0))$ 处的切线方程为 $y=2x$.

（2）证明：令 $g(x)=f(x)-2(x+\dfrac{x^{3}}{3})$，则 $g'(x)=f'(x)-2(1+x^{2})=\dfrac{2x^{2}}{1-x^{2}}$，因为 $g'(x)>0(0<x<1)$，所以 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增. 所以 $g(x)>g(0)=0$，$x\in(0,1)$，即当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>2(x+\dfrac{x^{3}}{3})$.

（3）由（2）知，当 $k\le2$ 时，$f(x)>k(x+\dfrac{x^{3}}{3})$ 对 $x\in(0,1)$ 恒成立. 令 $h(x)=f(x)-k(x+\dfrac{x^{3}}{3})$，则 $h'(x)=\dfrac{kx^{4}-(k-2)}{1-x^{2}}$ 当 $k>2$ 时，当 $0<x<\sqrt[4]{\dfrac{k-2}{k}}$ 时，$h'(x)<0$，因此 $h(x)$ 在区间 $(0,\sqrt[4]{\dfrac{k-2}{k}})$ 上单调递减. 当 $0<x<\sqrt[4]{\dfrac{k-2}{k}}$ 时，$h(x)<h(0)=0$，即 $f(x)<k(x+\dfrac{x^{3}}{3})$. 矛盾. 综上所知，$k$ 的最大值为 2.

【例 6】（2017•新课标II）设函数 $f(x)=(1-x^2)e^x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant ax+1$，求 a 的取值范围.

【解析】（1）因为 $f(x)=(1-x^2)e^x$，$x\in R$，所以 $f'(x)=(1-2x-x^2)e^x$，令 $f'(x)=0$ 可知 $x=-1\pm\sqrt{2}$，当 $x<-1-\sqrt{2}$ 或 $x>-1+\sqrt{2}$ 时 $f'(x)<0$，当 $-1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2}$ 时 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1-\sqrt{2})$，$(-1+\sqrt{2}$，$+\infty)$ 上单调递减，在 $(-1-\sqrt{2}$，$-1+\sqrt{2})$ 上单调递增；

（2）分析：由于 $a\ge\dfrac{(1-x^2)e^x-1}{x}$，当 $x\to 0$ 时，属于 $\dfrac{0}{0}$ 类型，

$a\ge\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x^2)e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-2x-x^2)e^x}{1}=1$ 根据洛必达法则算出答案后开始隐零点护航，如下：

$g(x)=ax+1-(1-x)(1+x)e^x$，$g(0)=0$，$g'(x)=a-(1-2x-x^2)e^x$，$g'(0)=a-1$，

$g''(x)=(1+4x+x^2)e^x$，显然，当 $x\ge 0$ 时，$g''(x)>0$ 恒成立，即 $g'(x)\uparrow$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立；

①当 $a\geqslant 1$ 时，$g'(x)>g'(0)\ge 0$ 恒成立，则 $g(x)\uparrow$，$g(x)\ge g(0)=0$ 恒成立，符合题意；

②当 $a<1$ 时，$x\to+\infty$ $g'(x)=e^x(x^2+2x-1)+a>0$，则 $\exists x_0\in[0,+\infty)$，使 $g'(x_0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $[0$，$x_0)$ 上单调递减，$g(x)<g(0)=0$ 矛盾；综上所述，a 的取值范围是 $[1$，$+\infty)$.

【例 7】（2018•新课标III）已知函数 $f(x)=(2+x+ax^2)ln(1+x)-2x$.

（1）若 $a=0$，证明：当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$；

（2）若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a.

【解析】（1）证明：若 $a=0$，$f(x)=(2+x)ln(1+x)-2x$，$(x>-1)$. 令 $g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{2+x}$（对数单身狗）

$g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}\ge 0$ 恒成立，$g(0)=0$，$g(x)\uparrow$ 可得 $x\in(-1,0)$ 时，

$g(x)<0\Leftrightarrow f(x)<0$，$x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)>0\Leftrightarrow f(x)>0$；

（2）【解析】由 $f(x)=(2+x+ax^2)ln(1+x)-2x$，得 $f'(x)=\dfrac{ax^2-x+(1+2ax)(1+x)ln(x+1)}{x+1}$，$f(0)=0$；

令 $h(x)=ax^2-x+(1+2ax)(1+x)ln(x+1)$，$h'(x)=4ax+(4ax+2a+1)ln(x+1)$. $h'(0)=0$；

$h''(x)=8a+4aln(x+1)+\dfrac{1-2a}{x+1}$，令 $h''(0)=0$，解得 $a=-\dfrac{1}{6}$.（隐零点护航法从这里开始）

当 $a\geqslant 0$，$x>0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，$\therefore h(x)>h(0)=0$，即 $f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极大值点，不符合题意. 当 $a<0$ 时，显然 $h''(x)$ 单调递减，

①$\therefore$ 当 $-1<x<0$ 时，$h''(x)>0$，当 $x>0$ 时，$h''(x)<0$，$\therefore h'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore h'(x)\leqslant h'(0)=0$，$\therefore h(x)$ 单调递减，又 $h(0)=0$，$\therefore$ 当 $-1<x<0$ 时，$h(x)>0$，即 $f'(x)>0$，当 $x>0$ 时，$h(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，符合题意；

②若 $-\dfrac{1}{6}<a<0$，则 $h''(0)=1+6a>0$，$h''(e^{-\frac{1+6a}{4a}}-1)=(2a-1)(1-e^{\frac{1+6a}{4a}})<0$，$\therefore h''(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一一个零点，设为 x_0，$\therefore$ 当 $0<x<x_0$ 时，$h''(x)>0$，$h'(x)$ 单调递增，$\therefore h'(x)>h'(0)=0$，即 $f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，不符合题意；

③若 $a<-\dfrac{1}{6}$，则 $h''(0)=1+6a<0$，$h''(\dfrac{1}{e^2}-1)=(1-2a)e^2>0$，$\therefore h''(x)=0$ 在 $(-1,0)$ 上有唯一一个零点，设为 x_1，$\therefore$ 当 $x_1<x<0$ 时，$h''(x)<0$，$h'(x)$ 单调递减，$\therefore h'(x)>h'(0)=0$，$\therefore h(x)$ 单调递增，$\therefore h(x)<h(0)=0$，即 $f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在 $(x_1$，$0)$ 上单调递减，不符合题意. 综上，$a=-\dfrac{1}{6}$.

【例 8】(2019•合肥一模）已知函数 $f(x)=e^{x-1}-a(x-1)+lnx(a\in R$， e 是自然对数的底数).

（1）设 $g(x)=f'(x)$（其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数），求 $g(x)$ 的极小值；

（2）若对 $x\in[1,+\infty)$，都有 $f(x)\geqslant 1$ 成立，求实数 a 的取值范围.

【解析】（1） $g(x)=f'(x)=e^{x-1}+\dfrac{1}{x}-a\ (x>0)$， $g'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x^2}$． 令 $\varphi(x)=g'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x^2}(x>0)$，

$\therefore \varphi'(x)=e^{x-1}+\dfrac{2}{x^3}>0$，$\therefore g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，g'（1）$=0$．$\because$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$，$\therefore g(x)_{极小}=g$（1）$=2-a$．

（2）分析：指对跨阶题目中遇到含有等号的情况，就一定要找到取等条件，洛必达能完成的就是端点值为取等条件，此题 $a\leq\dfrac{e^{x-1}+\ln x-1}{x-1}$， $x\to 1$ 时，$\dfrac{0}{0}$，故 $a\leq\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x-1}+\ln x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x-1}+\dfrac{1}{x}}{1}=2$

由（1）知，$f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减，$\therefore f'(x)\geqslant f'$（1）$=2-a$．

当 $a\leqslant 2$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)\geqslant f$（1）$=1$，满足条件；当 $a>2$ 时，f'（1）$=2-a<0$．又 $\because f'(lna+1)=e^{lna}-a+\dfrac{1}{lna+1}=\dfrac{1}{lna+1}>0$，$\therefore\exists x_0\in(1,lna+1)$，使得 $f'(x_0)=0$，此时，$x\in(1,x_0)$，$f'(x)<0$；$x\in(x_0,lna+1)$，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，$x\in(1,x_0)$，都有 $f(x)<f$（1）$=1$，不符合题意．综上所述，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,\ 2]$．

达标训练

1．(2006•全国卷II）设函数 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)$. 若对所有的 $x\geq 0$，都有 $f(x)\geq ax$ 成立．求实数 a 的取值范围.

2．(2014•新课标 II）已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $g(x)=f(2x)-4bf(x)$，当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，求 b 的最大值；

（3）已知 $1.4142<\sqrt{2}<1.4143$，估计 $\ln 2$ 的近似值（精确到 0.001).

3．(2016•四川）设函数 $f(x)=ax^2-a-lnx$，其中 $a\in R$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）确定 a 的所有可能取值，使得 $f(x)>\dfrac{1}{x}-e^{1-x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内恒成立 $(e=2.718\ldots$ 为自然对数的底数).

4．(2013•辽宁）已知函数 $f(x)=(1+x)e^{-2x}$， $g(x)=ax+\dfrac{x^3}{2}+1+2x\cos x$，当 $x\in[0,1]$ 时：

（1）求证：$1-x\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{1+x}$；

（2）若 $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

5．(2012•天津）已知函数 $f(x)=x-\ln(x+a)$ 的最小值为 0，其中 $a>0$.

（1）求 a 的值；

（2）若对任意的 $x\in[0,+\infty)$，有 $f(x)\leq kx^2$ 成立，求实数 k 的最小值；

（3）证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2}{2i-1}-\ln(2n+1)<2(n\in N^*)$．

6．(2010•新课标）设函数 $f(x)=x(e^x-1)-ax^2$．

（1）若 $a=\dfrac{1}{2}$，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若当 $x\geq 0$ 时 $f(x)\geq 0$，求 a 的取值范围.

7．(2010•湖北）已知函数 $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}+c(a>0)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x-1$．

（1）用 a 表示出 b，c；

（2）若 $f(x)\geq\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

8.（2018•广东期末）已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)-\dfrac{x}{e^x}(a\in R)$

（1）若 $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极值，求 a 的值，并求 $f(x)$ 的单调区间.

（2）若 $x>0$ 时，$f(x)>0$，求实数 a 的取值范围.

9.（2019•成都模拟）已知函数 $f(x)=-a\ln x-\dfrac{e^x}{x}+ax, a\in R$.

（1）当 $a<0$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a=1$ 时，若不等式 $f(x)+(bx-b+\dfrac{1}{x})e^x-x\geqslant 0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 时恒成立，求实数 b 的取值范围.

10.（2014•陕西）设函数 $f(x)=\ln(1+x)$，$g(x)=xf'(x)$，$x\geq 0$，其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.

（1）令 $g_1(x)=g(x)$，$g_{n+1}(x)=g(g_n(x))$，$n\in N_+$，求 $g_n(x)$ 的表达式；

（2）若 $f(x)\geq ag(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（3）设 $n\in N_+$，比较 $g(1)+g(2)+\cdots\cdots+g(n)$ 与 $n-f(n)$ 的大小，并加以证明.

11.（2019•荆门模拟）已知函数 $f(x)=(ax^2+x+a)e^{-x}(a\in R)$.

（1）若 $a\geqslant 0$，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若对任意的 $a\leqslant 0$，$f(x)\leqslant b\ln(x+1)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 b 的取值范围.

12.（2016•广州一模）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x+m}-x^3$，$g(x)=\ln(x+1)+2$.

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线斜率为1，求实数 m 的值；

（2）当 $m\geq 1$ 时，证明：$f(x)>g(x)-x^3$.

13.（2016•广州二模） 已知函数 $f(x)=e^{-x}-ax(x\in R)$.

（1）当 $a=-1$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

（2）若 $x\geq 0$ 时，$f(-x)+\ln(x+1)\geq 1$，求实数 a 的取值范围；

（3）求证：$\mathrm{e}^{2-\sqrt{\mathrm{e}}}<\dfrac{3}{2}$.

14. 设函数 $f(x)=(1-ax)\ln(x+1)-bx$，曲线 $y=f(x)$ 恒与 x 轴相切于坐标原点.

（1）求常数 b 的值；

（2）当 $0\leq x\leq 1$ 时，$f(x)\geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（3）求证：$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ 恒成立.

专题 5　利用零点比大小秒杀参数取值范围

第一讲 零点比大小问题秒杀双参数取值范围

①$kx+b\leq f(x)$ 恒成立，求 $\dfrac{b}{k}$ 的最值和取值范围；②$kx+b\geq f(x)$ 恒成立，求 $\dfrac{b}{k}$ 的最值和取值范围；

如下图 1 所示，通常的方法是构造函数 $g(x)=f(x)-kx$，则 $g(x)_{\min}\geq b$ 时，从而达到解决此类型的目的，这种解答方法适合解答题，但此类型题目出现在选择题第 12 题的几率更大，常规思路由于计算量大，对一道客观题来说没必要，故需要采纳一些高观点低运算的方法，此类型可以利用数形结合的思想，如图 2 所示，通常 $y=f(x)$ 是一个凹函数（$f''(x)>0$），$kx+b\leq f(x)$ 意味着 $y=f(x)$ 与 $y=kx+b$ 相切时即恒成立，$\left(-\dfrac{b}{k},0\right)$ 是直线和 x 轴的交点，记为 $(x_2,0)$，故此类型题可以将 $y=f(x)$ 的唯一零点 x_1 求出，满足 $x_1\leq x_2=-\dfrac{b}{k}$ 即可.

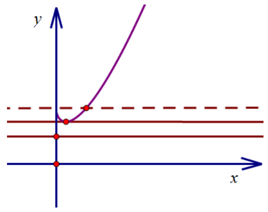


图 1

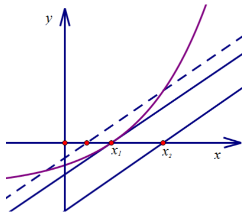


图 2

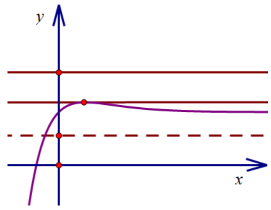


图 3

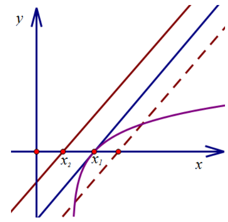


图 4

同理，在比较 $kx+b\ge f\left(x\right)$ 时，也是一类型转化，此时 $y=f\left(x\right)$ 为凸函数（$f''\left(x\right)<0$），也将图 3 的方案转化为图 4，构造 $x_1\ge x_2=-\dfrac{b}{k}$；四个图中的虚线直线是不可能满足题目要求的，此类方法叫做零点比大小．

【例 1】（2018•宁波期末）已知直线 $y=kx+b$ 的图象恒在曲线 $y=ln(x+3)$ 的图象上方，则 $\dfrac{b}{k}$ 的取值范围是（　　）

A．$(1,+\infty)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(0,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

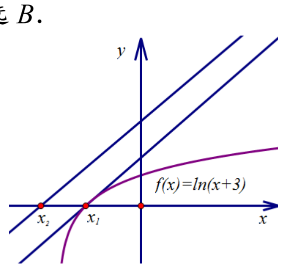
解：如图所示，易知 $y=ln(x+3)$ 为凸函数，零点为 $\left(-2,0\right)$，故 $x_1=-2$，当 $kx+b=0$ 时 $x_2=-\dfrac{b}{k}$，利用零点比大小模型，可知 $x_1>x_2$，故 $-2>-\dfrac{b}{k}\Rightarrow\dfrac{b}{k}>2$，选 B.

【例 2】（2018•长沙二模）已知函数 $f(x)=lnx$，$g(x)=(a-e)x+2b$．若不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，则 $\dfrac{2b}{a}$ 的最小值是（　　）

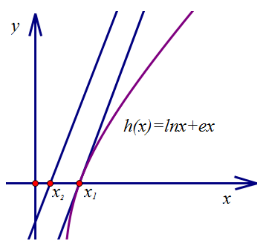
A．$-\dfrac{1}{2e}$　　B．$-\dfrac{1}{e}$　　C．$-e$　　D．e

解：（常规方法）令 $h(x)=f(x)-g(x)=lnx-(a-e)x-2b$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-(a-e)$，当 $a\leqslant e$ 时，$h(x)$ 单调递增，$h(x)$ 无最大值，不合题意；当 $a>e$ 时，令 $h'(x)=0$，则 $x=\dfrac{1}{a-e}$，$x\in(0,\dfrac{1}{a-e})$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，$x\in(\dfrac{1}{a-e}$，$+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，$\therefore h(x)_{max}=h(\dfrac{1}{a-e})=-ln(a-e)-1-2b\leqslant 0$，即 $ln(a-e)\geqslant -1-2b$，$2b\geqslant -1-ln(a-e)$，$\dfrac{2b}{a}\geqslant\dfrac{-1-ln(a-e)}{a}$，$a>e$，由 $\dfrac{-1-ln(a-e)}{a}$ 的导数为 $\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{\dfrac{a}{a-e}-ln(a-e)}{a^2}=\dfrac{1}{a^2}(\dfrac{-e}{a-e}+ln(a-e))$，当 $a=2e$ 时，$\dfrac{1}{a^2}(\dfrac{-e}{a-e}+ln(a-e))=0$，且 $a>2e$，$\dfrac{1}{a^2}(\dfrac{-e}{a-e}+ln(a-e))>0$；$e<a<2e$ 时，$\dfrac{1}{a^2}(\dfrac{-e}{a-e}+ln(a-e))<0$，可得 $a=2e$ 时，$\dfrac{-1-ln(a-e)}{a}$ 取得最小值 $-\dfrac{1}{e}$．$\dfrac{2b}{a}$ 的最小值为 $-\dfrac{1}{e}$．故选 B．

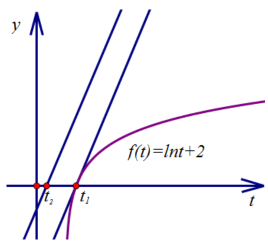
秒杀解法：$f(x)-g\left(x\right)\le 0\Leftrightarrow \ln x+ex\le ax+2b$，如图，作出 $h(x)=\ln x+ex$ 的图像，易知是凸函数，曲线 $h(x)$ 与 x 轴交于点 $(\dfrac{1}{e},0)$，即 $x_1=\dfrac{1}{e}$，要满足题意，则 $ax+2b=0$ 时，$x_2=-\dfrac{2b}{a}\le x_1=\dfrac{1}{e}$，则 $\dfrac{2b}{a}\ge-\dfrac{1}{e}$．故选 B.



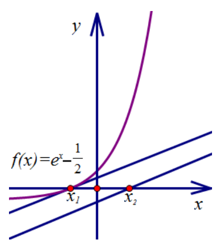
例 1 图



例 2 图



例 3 图



例 4 图

【例 3】已知 $x+\dfrac{1}{a}\le e^{2ax+b}$ 对 $\forall x\in(-\dfrac{1}{a},+\infty)$ 恒成立，则 $\dfrac{b}{a}$ 的最小值为________．

解：由于零点的不好求，故需要换元和代数变形以求出两零点。令 $t=x+\dfrac{1}{a}$，则 $t>0$，指对互换得，该题设等价于 $\ln t\le 2a(t-\dfrac{1}{a})+b$ 对 $\forall t\in(0,+\infty)$ 恒成立，又等价于 $\ln t+2\le 2at+b(t>0)$ 恒成立，如图所示，作出 $f\left(t\right)=\ln t+2$ 图像，则得到零点 $t_1=\dfrac{1}{e^2}$，再求出 $y=2at+b$ 的零点 $t_2=-\dfrac{b}{2a}$，根据零点比大小模型 $-\dfrac{b}{2a}\le\dfrac{1}{e^2}$，所以 $\dfrac{b}{a}\ge-\dfrac{2}{e^2}$．

【例4】已知 $e^x-ax-b-\dfrac{1}{2}\ge 0$ 恒成立，则 $\dfrac{b}{a}$ 的最大值为________；当 b 取最大值时，a 的值为________．

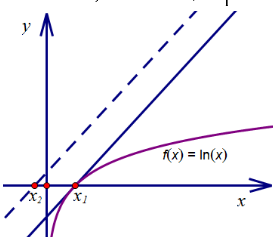
解：$e^x-ax-b-\dfrac{1}{2}\ge 0\Leftrightarrow e^x-\dfrac{1}{2}\ge ax+b$，如图，$f\left(x\right)=e^x-\dfrac{1}{2}$ 的零点为 $x_1=\ln\dfrac{1}{2}$，$y=ax+b$ 的零点为 $x_2=-\dfrac{b}{a}$，根据零点比大小模型 $x_2\ge x_1\Rightarrow-\dfrac{b}{a}\ge\ln\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{b}{a}\le\ln 2$；又曲线 $y=e^x-\dfrac{1}{2}$ 在 y 轴上的截距为 $\dfrac{1}{2}$，则 $b\le\dfrac{1}{2}$；当 $b=\dfrac{1}{2}$ 时，直线 $y=ax+b$ 应为曲线 $y=e^x-\dfrac{1}{2}$ 的切线，易得 $a=1$．

注意：关于双变量其中一个参数取得最值的时候，通常是两个函数在零点相切的时候取得．

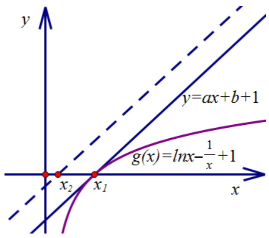
【例5】（2017•深圳一模）在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=x+b$ 是曲线 $y=alnx$ 的切线，则当 $a>0$ 时，实数 b 的最小值是__________．

解：（常规法）设出曲线上的一个切点为 (x,y)，由 $y=alnx$，得 $y'=\dfrac{a}{x}$，$\because$ 直线 $y=x+b$ 是曲线 $y=alnx$ 的切线，$\therefore y'=\dfrac{a}{x}=1$，$\therefore x=a$，$\therefore$ 切点为 $(a,alna)$，代入 $y=x+b$，可得 $b=alna-a$，$\therefore b'=lna+1-1=0$，可得 $a=1$，$\therefore$ 函数 $b=alna-a$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore a=1$ 时，b 取得最小值 -1．故答案为：-1．

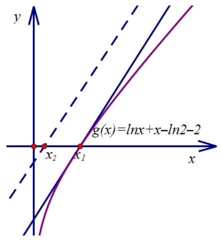
秒杀解法：构造函数 $f\left(x\right)=\ln x$ 与函数 $y=\dfrac{1}{a}x+\dfrac{b}{a}$，如图所示，可知 $x_1=1$，$x_2=b+1$，当直线与 $f\left(x\right)$ 相切时，一定有 $x_1=x_2\Rightarrow b=-1$；此时 b 取得最小值．



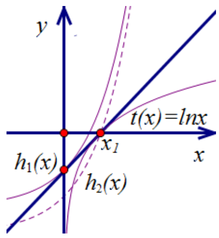
例5图



例6图



例7图



例8图

【例6】（2015•泰兴期末）若直线 $y=ax+b$ 是函数 $f(x)=lnx-\dfrac{1}{x}$ 图象的切线，则 $a+b$ 的最小值为_____．

解：（常规法）设切点 $(m,lnm-\dfrac{1}{m})$，函数 $f(x)=lnx-\dfrac{1}{x}$ 的导数为：$f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$，即有切线的斜率 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m^2}$，

若直线 $g(x)=ax+b$ 是函数 $f(x)=lnx-\dfrac{1}{x}$ 图象的切线，则 $a=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m^2}$，$lnm-\dfrac{1}{m}=ma+b$，即有：$b=lnm-\dfrac{2}{m}-1$，$a+b=lnm-\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m^2}-1$，令 $\dfrac{1}{m}=t>0$，则 $a+b=-lnt-t+t^2-1$，令 $h(t)=-lnt-t+t^2-1$，则 $h'(t)=-\dfrac{1}{t}+2t-1=\dfrac{(2t+1)(2t-1)}{t}$ 当 $t\in(0,1)$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 在 $(0,1)$ 上是单调递减；当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$h(t)>0$，$h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调递增；即有 $t=1$ 时，$h(t)$ 取得极小值，也为最小值．$a+b\geqslant h$（1）$=-1$，故答案为：-1．

秒杀解法：由于 $a+b$ 为直线 $y=ax+b$ 在 $x=1$ 时取得的值，故此题需要构造零点为1的函数，令 $g\left(x\right)=f\left(x\right)+1$ 即可完成构造；如图所示，令 $g\left(x\right)=\ln x-\dfrac{1}{x}+1$，其零点 $x_1=1$，则与其相切直线向上

平移一个单位为 $y=ax+b+1$，其零点为 x_2，根据两零点比大小原理，则 $x_1 \geq x_2$，当仅当它们相切时取得等号，此时 $a+b+1=0 \Rightarrow (a+b)_{\min}=-1$.

注意：在常规法，也就是参考答案给的解法和秒杀解法对比中，显然构造零点的相切，能达到“高观点低运算”的功能，很多题目找零点显然是解决此类问题的核心，在之后我们会在找点的“*ATM* 提款机找点法”中继续深挖.

【例 7】（2018•苏州期末）已知 $y=kx+b$ 是函数 $f(x)=lnx+x$ 的切线，则 $2k+b$ 的最小值为_________.

解：此处忽略 500 字，直接上秒杀解法，由于 $2k+b$ 是直线 $y=kx+b$ 在 $x=2$ 处取得的值，故可以通过平移，让其回到零点位置，令 $g(x)=\ln x+x+m$，$g(2)=0 \Rightarrow m=-\ln 2-2$，如图所示，作出 $g(x)=\ln x+x-\ln 2-2$ 与 $y=kx+b-\ln 2-2$ 的图像，易知 $x_1 \geq x_2$，当 $x_1=2=x_2$ 时相切，则 $2k+b \geq \ln 2+2$.

【例 8】（2018•苏州期末）已知 $a \neq 0$，函数 $f(x)=ae^x$，$g(x)=alnx+b$，若存在一条直线与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 均相切，则使不等式 $\frac{b}{a}<m$ 恒成立的最小整数 m 的值是_________.

解：无零点就要找零点，如图，构造 $h(x)=e^x-\frac{b}{a}$ 与 $t(x)=\ln x$，易知 $t(x)$ 在零点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=x-1$，故求出与其相切的函数 $h_1(x)=e^x-2$，再根据零点比大小原理，当 $h(x)$ 过相同零点时，可知 $h_2(x)=e^x-e$，此时显然 $h_2(x)$ 与 $t(x)$ 有两个交点，两凹凸性相反的函数在同一单调区间相交时无公切线理论（参考公切线专题），故可知 $-e<-\frac{b}{a}<-2 \Rightarrow \frac{b}{a}<e<3$，所以 $m=3$.

注意：关于 $f(x)$ 与 $g(x)+m$ 公切线问题，找到其中 $f(x)$ 在零点（其零点易求）的切线方程，并以此直线为切线求出对应的 $g(x)+m_1$，再根据过相同零点时的方程 $g(x)+m_2$，从而得到一个取值范围，即为题目所求.

第二讲　构造零点比大小问题秒杀指对跨阶型单参数问题

在一些定义域为人为设计无零点，比如指数函数，需要通过构造并凑出零点，方法通常是指对互换（反函数代换法），换元法，将 e^x 转换成 $\ln x$，构造出定义域端点为零点后，再利用数形结合，解出参数的取值范围，通常以 $ae^x-b\ln x \geq m(a>0,b>0)$ 形式出现.

一：若 $ae^x-\ln x \geq b$（b 已知），则构造 $\ln a+x \geq \ln(\ln x+b)$，利用 $-\ln a \leq e^{1-b}(b \leq 1)$

二：$a^x \geq \log_a x$，两函数一定关于 $y=x$ 对称，如图 5 则考虑极限情况，公切线一定是 $y=x$，当 $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ 时，$a^x \geq \log_a x$ 恒成立，且切点为 (e,e)；当 $a^x \geq \log_a x$ 在区间 $(m,+\infty)$ 恒成立，且 $m>e$，则边界 $x=m$ 就是 a 取得最小值的点，如图 6。找点法则通常是不考虑区间找出临界值，再考虑区间来分析端点值.

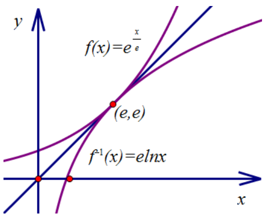


图 5

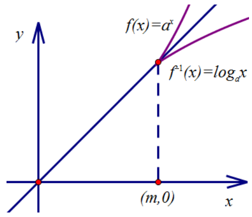


图 6

【例 9】（2018•长郡月考）已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$，若 $f(x) \geq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_________.

解：$ae^x-\ln x-1 \geq 0 \Rightarrow ae^x \geq \ln x+1(x>0) \Rightarrow \ln a+x \geq \ln(\ln x+1)$，参考图 4 凸函数的模型可知 $x_1=1$，$x_2=-\ln a$，故根据零点比大小模型，只需 $-\ln a \leq 1$，可得 $a \geq \frac{1}{e}$.

【例 10】对于任意的 $x>0$, 不等式 $a^x>\log_a x(a>0,且a \neq 1)$ 恒成立，则 a 的取值范围是___________.

解：（法一）显然，$a>1$，则可令 $a=e^{\lambda}(\lambda>0)$，则 $a^x>\log_a x\Rightarrow e^{\lambda x}>\frac{1}{\lambda}\ln x\Rightarrow \lambda e^{\lambda x}>\ln x$，两边取对数构造零点可得：$\ln\lambda+\lambda x>\ln(\ln x)(x>1)$，则 $x_1=e$，$x_2=-\frac{\ln\lambda}{\lambda}$，根据凸函数的零点比大小原理可得：$-\frac{\ln\lambda}{\lambda}<e$ 即 $\ln\lambda+e\lambda>0$，由于 $f(\lambda)=\ln\lambda+e\lambda$ 为增函数，且 $f(\frac{1}{e})=0$，所以 $\lambda>\frac{1}{e}$，从而 $a=e^{\lambda}>e^{\frac{1}{e}}$.

法二：由于 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x(a>0,且a\neq1)$ 互为反函数，则公切线一定是 $y=x$，此时 $\begin{cases}a^{x_0}=\log_a x_0\\ a^{x_0}\ln a=\frac{1}{x_0\ln a}=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_0=e\\ a=e^{\frac{1}{e}}\end{cases}$，故 $a>e^{\frac{1}{e}}$ 时，$a^x>\log_a x(a>0,且a\neq1)$ 恒成立.

【例 11】（2018•武邑期中）设实数 $\lambda>0$，若对任意的 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $e^{\lambda x}-\frac{lnx}{\lambda}\geqslant0$ 恒成立，则 λ 的取值范围是__________.

解：（法一）不等式 $e^{\lambda x}-\frac{\ln x}{\lambda}\geq0$ 恒成立，故只需 $\forall x\in(0,+\infty)$, 不等式 $\lambda e^{\lambda x}\geq\ln x$ 恒成立，即 $\ln\lambda+\lambda x\geq\ln(\ln x)$，所以 $x_1=e$，$x_2=-\frac{\ln\lambda}{\lambda}$，由于函数为凸函数，根据零点比大小模型可知：$-\frac{\ln\lambda}{\lambda}\leq e$，即 $\ln\lambda+e\lambda\geq0$，由于 $f(\lambda)=e\lambda+\ln\lambda$ 为增函数，且 $f(\frac{1}{e})=0$，所以 $\lambda\geq\frac{1}{e}$.

法二：由于 $y=e^{\lambda x}$ 与 $y=\frac{lnx}{\lambda}$ 互为反函数，故图象关于 $y=x$ 对称，根据 $a^x\geq\log_a x$ 恒成立条件可知 $a\geq e^{\frac{1}{e}}$，即 $e^{\lambda}\geq e^{\frac{1}{e}}$ 可得 λ 的最小值为 $\frac{1}{e}$. 故答案为：$[\frac{1}{e},\ +\infty)$.

【例 12】设 $\lambda>0$，若 $\forall x\in(e^2,+\infty)$，不等式 $\lambda e^{\lambda x}-\ln x\geq0$ 恒成立，则 λ 的最小值为____________.

解：（法一）不等式 $\lambda e^{\lambda x}\geq\ln x$ 恒成立，即 $\ln\lambda+\lambda x\geq\ln(\ln x)$. $\because x\in(e^2,+\infty)$，显然 $e^2>e$，最值在端点，当 $x=e^2$ 时，$\ln\left(\ln e^2\right)=\ln2$，右边需要凑出零点，故构造 $\ln\lambda-\ln2+\lambda x\geq\ln(\ln x)-\ln2$，$\because x_1=e^2$，$x_2=\frac{\ln2-\ln\lambda}{\lambda}$，则只需 $\frac{\ln2-\ln\lambda}{\lambda}\leq e^2$，即 $e^2\lambda+\ln\lambda\geq\ln2$，由于 $f(\lambda)=e^2\lambda+\ln\lambda$ 为增函数，且 $f\left(\frac{2}{e^2}\right)=\ln2$，$\therefore\lambda\geq\frac{2}{e^2}$.

法二：根据图 6 可知，由于 $e^2>e$，且 $y=e^{\lambda x}$ 与 $y=\frac{lnx}{\lambda}$ 互为反函数，故 $\lambda e^{\lambda e^2}-\ln e^2\geq0$，即 $e^2\lambda+\ln\lambda\geq\ln2$，后面和法一一致.

达标训练

1.（2018•南阳期末）若直线 $y=ax+b$ 与曲线 $f(x)=lnx-1$ 相切，则 $\frac{b}{a}$ 的最小值为（　　）

A．$-\frac{1}{e^2}$　　B．$-e^2$　　C．$-e$　　D．$-\frac{1}{e}$

2.（2018•焦作期中）记曲线 $f(x)=x-e^{-x}$ 上任意一点处的切线为直线 $l:y=kx+b$，则 $k+b$ 的值不可能为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．2　　D．3

3.（2018•厦门二模）设函数 $f(x)=x-e^{-x}$，直线 $y=mx+n$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，则 $m+n$ 的最小值是（　　）

A．$-\frac{1}{e}$　　B．1　　C．$1-\frac{1}{e}$　　D．$1+\frac{1}{e^3}$

4.（2018•四川模拟）已知不等式 $e^x \geq ax+b\left(a, b \in R, a \neq 0\right)$ 对任意实数 x 恒成立，则 $\dfrac{b-2}{a}$ 的最大值为（　　）

A．$2-2ln2$　　B．$-l-ln2$　　C．$-2ln2$　　D．$-ln2$

5.（2018•西湖模拟）已知不等式 $e^x-4x+2 \geq ax+b\left(a, b \in R, a \neq -4\right)$ 对任意实数 x 恒成立，则 $\dfrac{b-4}{a+4}$ 的最大值为（　　）

A．$2-2\ln 2$　　B．$-1-\ln 2$　　C．$-2\ln 2$　　D．$-\ln 2$

6. 已知关于 x 的不等式 $e^x > lnx+a$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，则整数 a 的最大取值为（　　）

A．3　　B．1　　C．2　　D．0

7.（2017•深圳二模）设实数 $\lambda > 0$，若对任意的 $x \in (0,+\infty)$，不等式 $e^{\lambda x}-\dfrac{lnx}{\lambda}\geqslant 0$ 恒成立，则 λ 的最小值为（　　）

A．$\dfrac{1}{e}$　　B．$\dfrac{1}{2e}$　　C．$\dfrac{2}{e}$　　D．$\dfrac{e}{3}$

8.（2016•哈尔滨四模）已知函数 $f(x)=a^x-\log_a x$，要使 $f(x)$ 恒有两个零点，则 a 的取值范围是（　　）

A．$(1,e^{\frac{1}{e}})$　　B．$(1,e]$　　C．$(1,e^2)$　　D．$(e^{\frac{1}{e}},e^2)$

9.（2018•安徽模拟）设函数 $f(x)=6x^2•e^x-3ax+2a$(e 为自然对数的底数)，当 $x \in R$ 时 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则实数 a 的最大值为（　　）

A．e　　B．$2e$　　C．$4e$　　D．$6e$

10.（2018•河南模拟）已知函数 $f(x)=lnx+(2e^2-a)x-\dfrac{b}{2}$，其中 e 是自然对数的底数，若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立，则 $\dfrac{b}{a}$ 的最小值为（　　）

A．$-\dfrac{1}{e^2}$　　B．$-\dfrac{2}{e^2}$　　C．$-\dfrac{1}{e}$　　D．$-\dfrac{2}{e}$

11. 设 $k > 0$，若存在正实数 x，使得不等式 $\log_2 x-k\cdot 2^{kx}\geqslant 0$ 成立，则 k 的最大值为（　　）

A．$\dfrac{1}{e}\log_2 e$　　B．$\dfrac{1}{e}ln2$　　C．$e\log_2 e$　　D．$\dfrac{1}{2}ln2$

12.（2018•恩施一模）已知 $\lambda > 0$，若对任意的 $x \in (0,+\infty)$，不等式 $e^{2\lambda x}-\dfrac{lnx}{2\lambda}\geqslant 0$ 恒成立，则 λ 的最小值为（　　）

A．$\dfrac{1}{2e}$　　B．e　　C．$\dfrac{e}{2}$　　D．$\dfrac{2}{e}$

13.（2018•蚌埠一模）已知 k、$b \in R$，设直线 $l: y=kx+b$ 是曲线 $y=e^x+x$ 的一条切线，则（　　）

A．$k<1$ 且 $b\leqslant 1$　　B．$k<1$ 且 $b\geqslant 1$　　C．$k>1$ 且 $b\leqslant 1$　　D．$k>1$ 且 $b\geqslant 1$

14. 对 $\forall x>0$，不等式 $2ae^{2x}-\ln x+\ln a \geq 0$ 恒成立，则实数 a 的最小值为（　　）

A．$\dfrac{2}{\sqrt{e}}$　　B．$\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$　　C．$\dfrac{2}{e}$　　D．$\dfrac{1}{2e}$

15.（2017•日照二模）已知函数 $f(x)=lnx+(e-a)x-b$，其中 e 为自然对数的底数．若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立，则 $\dfrac{b}{a}$ 的最小值为________．

16.（2018•道里月考）已知 $k>0$，$b>0$ 且 $kx+b\geqslant ln(x+4)$ 对任意的 $x>-4$ 恒成立，则 $\dfrac{b}{k}$ 的最小值为________．

17.（2017•乌鲁木齐模拟）若 $ln(x+1)-1\leqslant ax+b$ 对任意 $x>-1$ 的恒成立，则 $\dfrac{b}{a}$ 的最小值是________．

18.（2017•岳麓月考）若直线 $y=kx+b$ 为函数 $f(x)=lnx$ 图象的一条切线，则 $k+b$ 的最小值为________．

19.（2018•崇川月考）已知 a，$b \in R$，若关于 x 的不等式 $lnx\leqslant a(x-2)+b$ 对一切正实数 x 恒成立，则当 $a+b$ 取最小值时，b 的值为________．

20.（2018•西城期中）若对任意 $x \in (\dfrac{1}{2},+\infty)$，不等式 $ln(2x-1)\leqslant x^2+a$ 恒成立，则 a 的取值范围是__________．

21.（2017•江西模拟）若曲线 $y=lnx$ 的一条切线为 $y=e(x-a)+b$，其中 a， b 为正实数，则实数 a 的取值范围是__________.

22.（2018•襄阳一模）若 $f(x)=lnx+\frac{a}{x}-a$ 有且仅有一个零点，则 a 的取值范围是__________.

23.（2018•蚌埠一模）已知函数 $f(x)=lnx$， $g(x)=(a-e)x+2b$（其中 e 为自然对数的底数）.

（1）若函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)$ 的图象相切于 $x=\frac{1}{e}$ 处，求 a， b 的值；

（2）当 $2b=e-a$ 时，若不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立，求 a 的最小值.

24.（2017•信阳期中）已知实数 $\lambda>0$，设函数 $f(x)=e^{\lambda x}-\frac{lnx}{\lambda}$.

（1）当 $\lambda=1$ 时，求函数 $g(x)=f(x)+lnx-x$ 的极值；

（2）若对任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 λ 的最小值.

25.（2018•绍兴期末）已知函数 $f(x)=lnx+(e-a)x-2b$，其中 a， $b\in R$， e 为自然对数的底数.

（1）若 $a=e-2b$，当 $f(x)\geqslant 0$ 有唯一解时，求 b 的值；

（2）若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求 $\frac{b}{a}$ 的最小值.

专题 6　指对跨阶系列一之改头换面分而治之

秒杀秘籍：第一讲　改头换面 $e^x\geq x+1$， $x\geq\ln(x+1)$

常见放缩 $e^x-\ln(x+m)\geq x+1-(x+m-1)=2-m$，将 e^x 和 $\ln x$ 同时放缩成直线，这种方法叫做改头换面。如图所示， $e^x-\ln(x+1)\geq(x+1)-x=1$，此时取等条件都相同，原因是他们在 $x=0$ 处的切线平行； $e^x-\ln(x+m)\geq 0$ 恒成立，则整数 m 的最大值为 2，无法取等（图 3）；当 $m\geq 3$，无法恒成立.

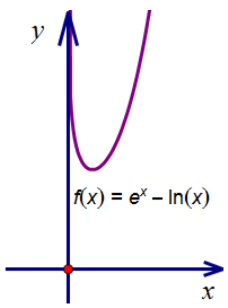


图 1

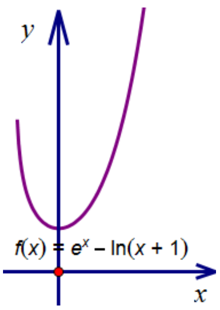


图 2

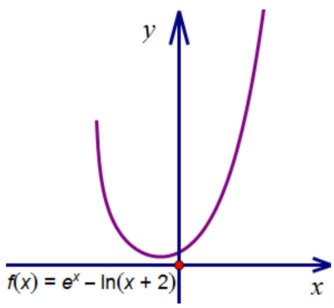


图 3

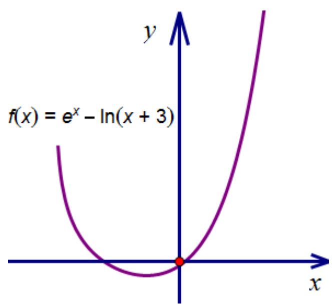


图 4

【例 1】（2013•新课标II）已知函数 $f(x)=e^x-ln(x+m)$.

（1）设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $m\leqslant 2$ 时，证明 $f(x)>0$.

解：（I）$\because f'(x)=e^x-\frac{1}{x+m}$， $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点， $\therefore f'(0)=1-\frac{1}{m}=0$，解得 $m=1$．所以函数 $f(x)=e^x-ln(x+1)$，其定义域为 $(-1,+\infty)$． $\because f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}=\frac{e^x(x+1)-1}{x+1}$．设 $g(x)=e^x(x+1)-1$，则 $g'(x)=e^x(x+1)+e^x>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数，又 $\because g(0)=0$，所以当 $x>0$ 时， $g(x)>0$，即 $f'(x)>0$；当 $-1<x<0$ 时， $g(x)<0$， $f'(x)<0$．所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上为减函数；在 $(0,+\infty)$ 上为增函数；

（II）（常规方法）证明：当 $m\leqslant 2$， $x\in(-m,+\infty)$ 时， $ln(x+m)\leqslant ln(x+2)$，故只需证明当 $m=2$ 时 $f(x)>0$．当 $m=2$ 时，函数 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+2}$ 在 $(-2,+\infty)$ 上为增函数，且 $f'(-1)<0$， $f'(0)>0$．故 $f'(x)=0$ 在 $(-2,+\infty)$ 上有唯一实数根 x_0，且 $x_0\in(-1,0)$．当 $x\in(-2,x_0)$ 时， $f'(x)<0$，当 $x\in(x_0$， $+\infty)$ 时， $f'(x)>0$，从而当 $x=x_0$ 时， $f(x)$ 取得最小值．由 $f'(x_0)=0$，得 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0+2}$， $ln(x_0+2)=-x_0$．故 $f(x)\geqslant f(x_0)=\frac{1}{x_0+2}+x_0=\frac{(x_0+1)^2}{x_0+2}>0$

综上，当 $m\leqslant 2$ 时， $f(x)>0$.

（2）秒杀解法：构造 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1=0$ 时， $x=0$， $g(x)_{\min}=0$；

再构造 $h(x)=\ln(x+m)-x-m+1$，$h'(x)=\dfrac{1}{x+m}-1=0$ 时，$x=1-m$，$h(x)_{\max}=0$；

$e^x-\ln(x+m)\ge x+1-(x+m-1)=2-m$，由于 $m\le 2$，故 $f(x)\ge 0$，由于取等条件不一致，故 $f(x)>0$.

【例 2】若 $e^x>ln(x+m)$（其中 $x\in R$ 且 $x>-m$），证明：$m<\dfrac{5}{2}$.

证明：因为 $e^x>ln(x+m)$ 恒成立，分离参数得，$m<e^{e^x}-x$，所以 $m<[e^{e^x}-x]_{min}$，构造函数，$F(x)=e^{e^x}-x$，令 $F'(x)=e^{e^x+x}-1=0$ 得，$e^x+x=0$，记 $g(x)=e^x+x$，单调递增，设该函数的零点为 x_0，因为 $g(-1)<0$，$g(-\dfrac{1}{2})>0$，所以 $x_0\in(-1,-\dfrac{1}{2})$，因此 $F(x)_{min}=F(x)_{极小值}=F(x_0)=-\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)<-\left(-\dfrac{1}{2}-2\right)=\dfrac{5}{2}$，所以 $m<\dfrac{5}{2}$.

上式化简用到：①x_0 满足方程 $e^x+x=0$，②$x_0\in(-1,-\dfrac{1}{2})$；③对勾函数单调性.

第二讲　xe^x、$\dfrac{e^x}{x}$ 与 $\ln x$ 改头换面

①$xe^x=e^{x+\ln x}\ge x+\ln x+1$；$\dfrac{e^x}{x}=e^{x-\ln x}\ge x-\ln x+1$；$x^2e^x=e^{x+2\ln x}\ge x+2\ln x+1$（利用 $e^x\ge x+1$）；

这一系列放缩的取等条件就是 $x+\ln x=0(x\approx 0.6)$，或者 $x+2\ln x=0(x\approx 0.7)$；

②$xe^x=e^{x+\ln x}\ge e(x+\ln x)$；$\dfrac{e^x}{x}=e^{x-\ln x}\ge e(x-\ln x)$；$x^2e^x=e^{x+2\ln x}\ge e(x+2\ln x)$（利用 $e^x\ge ex$）；

这一系列放缩的取等条件就是 $x+\ln x=1(x=1)$，或者 $x+2\ln x=1(x=1)$；

③$xe^x=e^{x+\ln x}\ge(x+\ln x)^2+1$；$\dfrac{e^x}{x}=e^{x-\ln x}\ge(x-\ln x)^2+1$；$x^2e^x=e^{x+2\ln x}\ge(x+2\ln x)^2+1$（利用 $e^x\ge x^2+1$），

这一系列放缩的取等条件就是 $x+\ln x=0(x\approx 0.6)$，或者 $x+2\ln x=0(x\approx 0.7)$；

【例 3】（2018•江苏期末）函数 $f(x)=xe^x-x-\ln x$ 的最小值为__________.

解：$xe^x-x-\ln x=e^{x+\ln x}-x-\ln x\ge x+\ln x+1-x-\ln x\ge 1$，当仅当 $x+\ln x=0$ 时，等号成立，令 $g(x)=x+lnx$，显然 $g'(x)>0$，$g(1)>0$，$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\ln 2<\dfrac{1}{2}-\ln\sqrt{e}<0$，故 $\exists x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取最小值 1.

【例 4】（2018•长沙模拟）已知 $f(x)=xe^x-ax-\ln x\ge 1$ 对于任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则 a 的取值范围是____________.

解：由于 $xe^x-ax-\ln x=e^{x+\ln x}-ax-\ln x\ge x+\ln x+1-ax-\ln x\ge 1$，即 $(1-a)x\ge 0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，显然 $a\le 1$，根据例 3 的相同取等条件可知，故 $a\in(-\infty,1]$.

【例 5】（2019•深圳月考）已知 $x(e^{2x}-a)\ge\ln x+1$ 对于任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则 a 的最大值为（　　）

A．1　　B．2　　C．$e-1$　　D．e

解：由于 $x^2e^x=e^{x+2\ln x}$，故可以换元，令 $x+2\ln x=t$，易知 t 是关于 x 的单调增函数，且 $t\in R$，故根据复合函数零点原理可得：$f(t)=e^t-at$ 有两个零点，参变分离加指数找基友得：$\dfrac{1}{a}=\dfrac{t}{e^t}=g(t)$，$g'(t)=\dfrac{1-t}{e^t}$，易知当 $t<1$ 时，$g(t)\uparrow$，当 $t>1$ 时，$g(t)\downarrow$，$g(t)_{\max}=g(1)=\dfrac{1}{e}$，当 $t<0$ 时，显然 $g(t)<0$，$t>0$ 时，由于 $t\to 0$ 和 $t\to+\infty$ 时 $g(t)\to 0$，故当 $\dfrac{1}{a}\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$，即 $a\in(e,+\infty)$ 时，$f(t)=e^t-at$ 有两个零点.

第三讲　指对跨阶之分而治之

要证明 $f(x)>g(x)$ 恒成立，通常方法是构造 $h(x)=f(x)-g(x)$，求出 $h(x)$ 的最小值，证明其大于零，但很多题往往最小值很难求出，属于隐零点问题，但 $f(x)_{\min}\ge g(x)_{\max}$，虽然他们取等条件不一致，但也足够证明 $f(x)>g(x)$，故此类方法叫做分而治之.

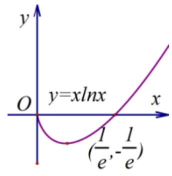


图 5

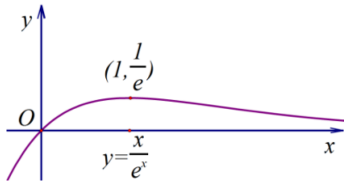


图 6

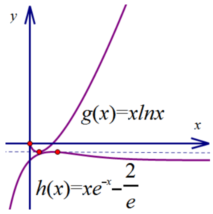


图 7

例：以图 5 和图 6 为例，可命题 $\ln x-e^{-x}>-\frac{2}{ex}$ 恒成立（图 7）.

【例 7】（2018•南昌二模）已知函数 $f(x)=x\ln x,g(x)=-x^2+ax-3$.

（1）对一切 $x\in(0,+\infty),2f(x)\geq g(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（2）证明对一切 $x\in(0,+\infty)$, 都有 $\ln x>\frac{1}{e^x}-\frac{2}{ex}$ 成立.

解：（1）对一切 $x\in(0,+\infty)$，有 $2xln\ x\geqslant -x^2+ax-3$，则 $a\leqslant 2ln\ x+x+\frac{3}{x}$，设 $h(x)=2ln\ x+x+\frac{3}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{(x+3)(x-1)}{x^2}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 是减少的，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 是增加的，所以 $h(x)_{min}=h$（1）$=4$．因为对一切 $x\in(0,+\infty)$，$2f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立，所以 $a\leqslant h(x)_{min}=4$．

（2）证明：问题等价于 $xln\ x>\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}(x\in(0,+\infty))$，$f(x)=xln\ x(x\in(0,+\infty))$ 的最小值是 $-\frac{1}{e}$，当且仅当 $x=\frac{1}{e}$ 时取到，$m(x)=\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}(x\in(0,+\infty))$，则 $m'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，易知 $m(x)_{max}=m$（1）$=-\frac{1}{e}$，当且仅当 $x=1$ 时取到．从而对一切 $x\in(0,+\infty)$，都有 $ln\ x>\frac{1}{e^x}-\frac{2}{ex}$ 成立．

【例 8】（2014•全国卷 I）设函数 $f(x)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=e(x-1)+2$.

（1）求 a,b；（2）证明：$f(x)>1$.

解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=ae^xlnx+\frac{a}{x}\bullet e^x-\frac{b}{x^2}\bullet e^{x-1}+\frac{b}{x}\bullet e^{x-1}$，由题意可得 f（1）$=2$，f'（1）$=e$，故 $a=1$，$b=2$；

（2）由（I）知，$f(x)=e^xlnx+\frac{2}{x}\bullet e^{x-1}$，$\because f(x)>1$，$\therefore e^xlnx+\frac{2}{x}\bullet e^{x-1}>1$，$\therefore lnx>\frac{1}{e^x}-\frac{2}{xe}$，$\therefore f(x)>1$ 等价于 $xlnx>xe^{-x}-\frac{2}{e}$，设函数 $g(x)=xlnx$，则 $g'(x)=1+lnx$，$\therefore$ 当 $x\in(0,\frac{1}{e})$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(\frac{1}{e}$，$+\infty)$ 时，$g'(x)>0$．故 $g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{e}$，$+\infty)$ 上单调递增，从而 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $g(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$

设函数 $h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{e}$，则 $h'(x)=e^{-x}(1-x)$．$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，从而 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值为 h（1）$=-\frac{1}{e}$．综上，当 $x>0$ 时，$g(x)>h(x)$，即 $f(x)>1$．

反思：分而治之的证明过程中，$g(x)$ 的最小值与 $h(x)$ 的最大值都是 $-\frac{1}{e}$，这引发了思考：两者有什么内在的必然联系？$g(x)=x\ln x,h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{e}=-e^{-x}\ln e^{-x}-\frac{2}{e}=-g\left(e^{-x}\right)-\frac{2}{e}$，$h(x)$ 原来是由 $g(x)$ 代换而来，由 $g(x)\geq-\frac{1}{e}$（当且仅当 $x=\frac{1}{e}$ 时，等号成立）就可得 $g\left(e^{-x}\right)\geq-\frac{1}{e}$（当且仅当 $x=1$ 时，等号成立），这也属于同构式，理清了 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的关系，就可简化原来的证题过程.参考下一讲《同构式放缩》

【例 9】（2016•山东卷）已知 $f(x)=a(x-lnx)+\frac{2x-1}{x^2}$，$a\in R$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a=1$ 时，证明 $f(x)>f'(x)+\frac{3}{2}$ 对于任意的 $x\in[1,\ 2]$ 成立．

解：（1）由 $f(x)=a(x-lnx)+\frac{2x-1}{x^2}$，得 $f'(x)=a(1-\frac{1}{x})+\frac{2x^2-(2x-1)\bullet 2x}{x^4}=\frac{(x-1)(ax^2-2)}{x^3}(x>0)$

若 $a\leqslant 0$，则 $ax^2-2<0$ 恒成立，$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数；当 $a>0$，若 $0<a<2$，当 $x\in(0,1)$ 和 $(\frac{\sqrt{2a}}{a},\ +\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，当 $x\in(1,\frac{\sqrt{2a}}{a})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数；若 $a=2$，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数；若 $a>2$，当 $x\in(0,\frac{\sqrt{2a}}{a})$ 和 $(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，当 $x\in(\frac{\sqrt{2a}}{a},\ 1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数；

（2）当 $a=1$ 时，$f(x)>f'(x)+\frac{3}{2}$ 即 $x-\ln x+\frac{2x-1}{x^2}>1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{2}\Leftrightarrow x-\ln x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}>\frac{5}{2}$，

$f(x)>f'(x)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}>\ln x-x+\frac{5}{2}$．记 $h(x)=\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}$，

则 $h'(x)=\frac{-3x^2-2x+6}{x^4},x\in[1,2]$，易判 $h(x)$ 在 $[1,2]$ 上存在唯一的零点 x_0，且 $x_0\in(1,2)$．当 $1<x<x_0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单增；当 $x_0<x<2$ 时，$h'(x)<0,h(x)$ 在 $(x_0,2)$ 上单减．于是

$h(x)_{\min}=\min\{h(1),h(2)\}=\frac{3}{2}$．同样可求右侧函数 $y=\ln x-x+\frac{5}{2}$ 在 $x=1$ 处取得最大值 $\frac{3}{2}$，故

$h(x)\geq\frac{3}{2}\geq\ln x-x+\frac{5}{2}$，又等号不同时取得，故得证．

反思：注意到不等式的复杂结构，考虑分而治之，但该如何分配？左边留谁？右侧剩谁？

我们的目标是左侧的最小值 $>$ 右侧的最大值，或者至少是 $\geq$．经过穷举，发现此题的分配方式是唯一的．

达标训练

1.（2018•长沙岳麓）已知函数 $f(x)$ 的自变量取值区间为 A，若其值域也为 A，则称区间 A 为 $f(x)$ 的保值区间．若 $g(x)=x-ln(x+m)$ 的保值区间是 $[2,+\infty)$，则 m 的值为__________．

2.（2018•深圳月考改编）函数 $f(x)=e^x-\frac{\ln x+1}{x}$ 的最小值是__________．

3.（2019•南昌期末）函数 $f(x)=e^{-x}(x+\ln x+1)-x$ 的最大值是__________．

4．函数 $f(x)=\frac{x^2e^x-2\ln x}{x+1}$ 的最小值是__________．

5．已知 $f(x)=e^x-1-\frac{a(\ln x+1)}{x}\geq 0$ 对 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 恒成立，则 a 的最大值为__________．

6．已知 $f(x)=ae^x-1-\frac{\ln x}{x}$ 恰有一个零点，则 a 的取值范围为__________．

7．已知 $f(x)=xe^x-a(x+\ln x)$ 有两个零点，其实数 a 的取值范围是__________．

8.（2019•沈阳一模）已知函数 $f(x)=alnx-2x$，若不等式 $f(x+1)>ax-2e^x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$a\leqslant 2$　　B．$a\geqslant 2$　　C．$a\leqslant 0$　　D．$0\leqslant a\leqslant 2$

9.（2018•昆明一模）已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}+k(lnx-x)$，若 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的唯一极值点，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,e]$　　B．$(-\infty,e)$　　C．$(-e,+\infty)$　　D．$[-e,+\infty)$

10.（2018•朝阳模拟）已知函数 $f(x)=e^x+alnx$，①当 $a=1$ 时，$f(x)$ 有最大值；②对于任意的 $a>0$，函数 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数；③对于任意的 $a<0$，函数 $f(x)$ 一定存在最小值；④对于任意的 $a>0$，都有 $f(x)>0$．其中正确结论的序号是____________．（写出所有正确结论的序号）

11. 求证：当$x>1$时，$e^{x-1}>x^2-x\ln x$.

12. （2018•济宁二模）已知函数$f(x)=2x-alnx(a\in R)$，$g(x)=\frac{e^x}{x}$.

（1）讨论函数$f(x)$的单调性；

（2）当$a=2$时，证明：$g(x)>f(x)$.

13. （2016•广州一模）已知函数$f(x)=e^{x+m}-x^3$，$g(x)=ln(x+1)+2$.

（1）若曲线$y=f(x)$在点$(0，f(0))$处的切线斜率为1，求实数m的值；

（2）若$h(x)=g(x-1)-ax-2$在$(0,+\infty)$有两个零点，求a的取值范围；

（3）当$m\geqslant 1$时，证明：$f(x)>g(x)-x^3$.

14. （2018•江西模拟）设函数$f(x)=xe^x-\frac{1}{2}(a+1)(x^2+2x)$，$g(x)=lnx-\frac{1}{2}(a+1)x^2-ax+a+1$，$a\in R$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）当$x>0$时，函数$y=f(x)$的图象上存在点在函数$y=g(x)$的图象的下方，求a的取值范围.

15. （2018•扬州模拟）已知函数$f(x)=lnx-x+\frac{ae^x}{x}$，$g(x)=\frac{x}{e^x}$（其中$a$为参数）.

（1）若对任意$x\in R$，不等式$g(x)-b<0$恒成立，求实数b的取值范围；

（2）当$a=\frac{1}{e}$时，求函数$f(x)$的单调区间；

（3）求函数$f(x)$的极值.

16. （2016•天津模拟）已知函数$f(x)=x^2+ax-lnx$，$a\in R$.

（1）若函数$f(x)$在$[1,2]$上是减函数，求实数a的取值范围；

（2）令$g(x)=f(x)-x^2$，是否存在实数a，当$x\in(0，e]$（e是自然常数）时，函数$g(x)$的最小值是3，若存在，求出a的值；若不存在，说明理由；

（3）求证：当$x\in(0，e]$时，$e^2x^2-\frac{5}{2}x>(x+1)lnx$.

17. （2015•腾冲一模）已知函数$f(x)=e^x-x-m(m\in R)$.

（1）当$x>0$时，$f(x)>0$恒成立，求m的取值范围；

（2）当$m=-1$时，证明：$(\frac{x-lnx}{e^x})f(x)>1-\frac{1}{e^2}$.

18. （2019•黄山一模）已知函数$f(x)=e^x-ln(x+m)+m$.

（1）设$x=0$是$f(x)$的极值点，求m的值；

（2）在（1）的条件下，$f(x)-k\geqslant 0$在定义域内恒成立，求k的取值范围；

（3）当$m\leqslant 2$时，证明：$f(x)>m$.

19. （2019•成都模拟）已知函数$f(x)=-alnx-\frac{e^x}{x}+ax,a\in R$.

（1）当$a<0$时，讨论函数$f(x)$的单调性；

（2）当$a=1$时，若关于x的不等式$f(x)+(x+\frac{1}{x})e^x-bx\geqslant 1$恒成立，求实数$b$的取值范围.

20. （2012•山东）已知函数$f(x)=\frac{lnx+k}{e^x}$（k为常数，$e=2.71828\ldots$是自然对数的底数），曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与x轴平行.

（1）求k的值；

（2）求$f(x)$的单调区间；

（3）设$g(x)=(x^2+x)f'(x)$，其中$f'(x)$为$f(x)$的导函数．证明：对任意$x>0$，$g(x)<1+e^{-2}$.

21. （2018•长春二模）已知函数$f(x)=xe^x+\frac{lnx}{x}$.

（1）求证：函数$f(x)$有唯一零点；

（2）若对任意$x\in(0,+\infty)$，$xe^x-lnx\geqslant 1+kx$恒成立，求实数k的取值范围.

22.（2018•哈尔滨二模）已知 $f(x)=(x-1)e^x$

（1）当 $a<0$ 时，求函数 $g(x)=f(x)+\frac{1}{2}ax^2$ 的极值点；

（2）若 $\forall x>1$，都有 $f(x)\geqslant x+m+ln(x-1)$ 成立，求 m 取值范围.

23.（2016•洛阳二模）已知函数 $f(x)=(x^2-x)lnx-\frac{3}{2}x^2+2x$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）设函数 $g(x)=\frac{(a+1)x}{lnx}$，对任意 $x\in(1,+\infty)$ 都有 $f(x)>g(x)$ 成立，求实数 a 的取值范围.

24.（2016•河南二模）已知函数 $f(x)=e^x lnx+\frac{2e^{x-1}}{x}$，$x>0$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）函数 $g(x)=\frac{x}{e^x}f(x)$，求证：$g(x)>\frac{x}{e^x}$ 对 $x>0$ 恒成立.

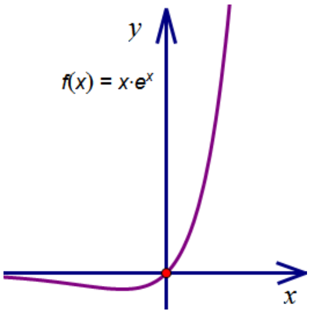
25.（2019•湖南期末）已知曲线 $f(x)=\frac{a+lnx}{x}$ 在点 $(e,f(e))$ 处切线的斜率为 $-e^{-2}$.

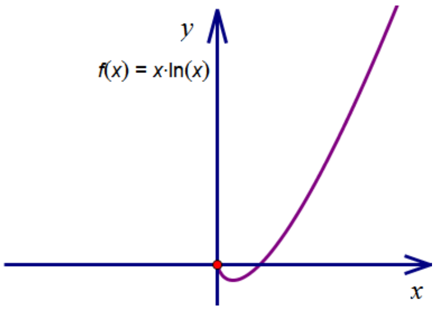
（1）若函数 $f(x)$ 在 $(m,m+1)$ 上存在极值，求实数 m 的取值范围；

（2）求证：当 $x>1$ 时，$\frac{f(x)}{e+1}>\frac{2e^{x-1}}{(x+1)(xe^x+1)}$.

专题 7 指对跨阶系列二之同构式构造

第一讲 同构式问题构造 xe^x 与 $xlnx$





我们发现，$f(x)=xe^x$ 在 $(-1,+\infty)\uparrow$，而 $f(x)=x\ln x$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)\downarrow$，在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)\uparrow$，在考查同构式的类型中，构造 xe^x 来求取值范围，构造 $x\ln x$ 来判断零点个数及分布；

同构式模型：①$a^x>\log_a x\Rightarrow e^{x\ln a}>\frac{\ln x}{\ln a}\Rightarrow x\ln a\cdot e^{x\ln a}>x\ln x=e^{\ln x}\ln x\Rightarrow x\ln a>\ln x\Rightarrow a>e^{\frac{1}{e}}$，

②$e^{\lambda x}>\frac{\ln x}{\lambda}\Rightarrow \lambda e^{\lambda x}>\ln x\Rightarrow \lambda xe^{\lambda x}>x\ln x=e^{\ln x}\ln x\Rightarrow \lambda x>\ln x\Rightarrow \lambda>\frac{1}{e}$；

③$e^{ax}+ax>\ln(x+1)+x+1=e^{\ln(x+1)}+\ln(x+1)\Rightarrow ax>\ln(x+1)$

【例 1】对于任意的 $x>0$, 不等式 $a^x>\log_a x(a>0,且a\neq1)$ 恒成立，则 a 的取值范围是________.

解：$a^x>\log_a x\Rightarrow e^{x\ln a}>\frac{\ln x}{\ln a}\Rightarrow x\ln a\cdot e^{x\ln a}>x\ln x=e^{\ln x}\ln x$，故只需 $x\ln a>\ln x\Rightarrow \ln a>\frac{\ln x}{x}$，由于 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,e)\uparrow,(e,+\infty)\downarrow$，故 $f(x)_{\max}=f(e)=\frac{1}{e}$，$\therefore \ln a>\frac{1}{e}$，即 $a>e^{\frac{1}{e}}$.

【例 2】（2018•长郡月考）已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$，若 $f(x)\geq0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

解：由题意得：$ae^x\geq\ln ex\Rightarrow aexe^x\geq ex\ln ex\Rightarrow ae\cdot xe^x\geq e^{\ln ex}\ln ex$ 恒成立，则需要满足 $\begin{cases}ae\geq1\\x\geq\ln ex=\ln x+1\end{cases}$，显然 $x-1\geq\ln x$ 恒成立，故只需 $ae\geq1$，即 $a\geq\frac{1}{e}$.

【例 3】对 $\forall x>0$，不等式 $2ae^{2x}-\ln x+\ln a\geq0$ 恒成立，则实数 a 的最小值为（　　）

A. $\frac{2}{\sqrt{e}}$　　B. $\frac{1}{2\sqrt{e}}$　　C. $\frac{2}{e}$　　D. $\frac{1}{2e}$

解：由题意得：$2ae^{2x}\ge \ln x-\ln a\Rightarrow 2xe^{2x}\ge \frac{x}{a}\ln\frac{x}{a}=e^{\ln\frac{x}{a}}\ln\frac{x}{a}\Rightarrow 2x\ge \ln\frac{x}{a}$，令$\frac{x}{a}=t$，$2at\ge \ln t$ 此时要构造过原点的切线放缩模型 $\ln t\le \frac{1}{e}t$，故 $2a\ge \frac{1}{e}$，即 $a\ge \frac{1}{2e}$.

【例 4】(2018•武邑期中）设实数 $\lambda>0$，若对任意的 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $e^{\lambda x}-\frac{lnx}{\lambda}$≥0 恒成立，则 λ 的取值范围是_________.

解：$e^{\lambda x}-\frac{lnx}{\lambda}\geqslant 0\Rightarrow \lambda xe^{\lambda x}\ge x\ln x=e^{\ln x}\ln x$，即 $\lambda x\ge \ln x$ 恒成立，$\therefore \lambda\ge\frac{1}{e}$.

【例 5】(2019•衡水金卷）易知 $a<0$，不等式 $x^{a+1}\cdot e^{x}+a\ln x\ge 0$ 对任意的实数 $x>1$ 恒成立，则实数 a 的最小值是（　　）

A. $-\frac{1}{2e}$　　B. $-2e$　　C. $-\frac{1}{e}$　　D. $-e$

解：由题意得：$x^{a+1}\cdot e^{x}+a\ln x\ge 0\Rightarrow xe^{x}\ge \frac{-a\ln x}{x^{a}}=\frac{1}{x^{a}}\ln\frac{1}{x^{a}}=e^{\ln\frac{1}{x^{a}}}\ln\frac{1}{x^{a}}\Rightarrow x\ge \ln\frac{1}{x^{a}}$ 对 $x>1$ 恒成立，此时 $a\ge\left(-\frac{x}{\ln x}\right)_{\max}$，即 $a\ge -e$，选 D.

【例 6】(2019•武汉调研）已知函数 $f(x)=e^{x}-a\ln(ax-a)+a(a>0)$，若关于 x 的不等式 $f(x)>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $(0,e]$　　B. $(0,e^{2})$　　C. $[1,e^{2}]$　　D. $(1,e^{2})$

解：由题意可知：$e^{x}>a\ln(ax-a)-a\Rightarrow \frac{e^{x}}{a}-\ln a>\ln(x-1)-1\Rightarrow e^{x-\ln a}+x-\ln a>x-1+\ln(x-1)$，即构成同构式 $e^{x-\ln a}+x-\ln a>e^{\ln(x-1)}+\ln(x-1)$，只需 $x-\ln a>\ln(x-1)\Rightarrow x-\ln(x-1)\ge 2>\ln a$，$\therefore a<e^{2}$，故选 B.

【例 7】已知方程 $x^{2}\ln x=a\ln a-a\ln x$ 有 3 个实根，则实数 a 的取值范围是_________.

解：构造 $x\ln x=\frac{a}{x}\ln\frac{a}{x}$，根据定义域可知 $a>0$，如图，当 $x>1$ 时，$y=x\ln x>0$，此时，仅存在 $x_1=\frac{a}{x_2}$，使 $x_1\ln x_1=\frac{a}{x_2}\ln\frac{a}{x_2}$，此时只存在两个实根，不合题意；当 $0<x<1$ 时，则一定存在 $x_1=\frac{a}{x_2}$ 或者 $\frac{1}{e}<x_1<1,0<x_3<\frac{1}{e}$（偏移情况），考虑到极值是左偏的，故 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 时，$\frac{a}{x}\in(ae,+\infty)$，定义域要求完全覆盖，故 $ae<\frac{1}{e}$，即 $a<\frac{1}{e^{2}}$.

第二讲　放对再放指，常数是关键

关于指对跨阶，由于 e^{x} 属于递增过快，若不是存在 $xe^{x}=e^{x+\ln x}\ge x+\ln x+1$ 或者 $\frac{e^{x}}{x}=e^{x-\ln x}\ge x-\ln x+1$ 之类的可以直接消除对数的，一般考虑对递增较慢的 $\ln x$ 进行放缩，但在区间 $(0,1)$ 内重点考虑切线放缩，通常放缩有：① $\ln x\le x-1$；② $\ln x\le\frac{x}{e}$（取等条件 $x=e$）；③ $\ln x\le x-1\Rightarrow \ln\frac{1}{x}\le\frac{1}{x}-1\Rightarrow \ln x\ge 1-\frac{1}{x}$（取等条件 $x=1$）；

④ $\ln x\ge 1-\frac{1}{x}\Rightarrow x\ln x\ge x-1$；⑤ $\ln x\le x-1\Rightarrow \ln ex\le ex-1\Rightarrow \ln x\le ex-2$（取等条件 $x=\frac{1}{e}$）；

$$⑥\ e^{x}\ge x+1\Rightarrow\begin{cases}e^{x-1}\ge x\Rightarrow e^{x}\ge ex\ (\text{取等条件}x=1)\\ e^{\frac{x}{2}}\ge e\cdot\frac{x}{2}\Rightarrow e^{x}\ge\frac{e^{2}}{4}x^{2}\ (\text{取等条件}x=2)\\ e^{\frac{x}{3}}\ge e\cdot\frac{x}{3}\Rightarrow e^{x}\ge\frac{e^{3}}{27}x^{3}\ (\text{取等条件}x=3)\end{cases}；$$

⑦ $e^{x}\ge x^{2}+1(x\ge 0)$（取等条件 $x=0$）；

⑧$e^x \geq ex+(x-1)^2(x\geq 0)$（取等条件 $x=0$ 以及 $x=1$，⑦和⑧根据找基友证明）

【例 8】（2019•榆林一模）已知不等式 $e^x-1\geqslant kx+lnx$，对于任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则 k 的最大值_________.

解：要取等，看系数，$e^x\geq x+1\Rightarrow e^x-1\geq x+1-1\geq kx+x-1\geq kx+lnx$，由于取等条件不一，且并未消除常数项，则此放缩法失效，考虑消除常数项 -1，故构造 $\ln x\leq x-1$ 取等条件是 $x=1$，此时取等的 $e^x\geq ex$，故 $(e-1)x\geq kx$，即 $k\leq e-1$.

【例 9】（2019•重庆巴蜀月考）已知 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}-a\ln x$.

（1）当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值；

（2）若 $0<a\leq\dfrac{e^2}{2}$，求证：$f(x)>0$.

解：（1）$a=0$ 时，$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$，$f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\downarrow$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)\uparrow$，故 $f(x)_{\min}=f(1)=e$；

（2）思路：此题若放缩 $\dfrac{e^x}{x}$，定会遇到很多问题，所以根据"放对再放指"的原理，由于 $f(x)>\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{e^2}{2}\ln x$，先放 $\ln x$，由于此题无常数项，故不采用 $\ln x\leq x-1$ 来增加常数项，由于，$\dfrac{e^2}{2}$ 的出现暴露了需要"降次"，故试用 $\ln x\leq\dfrac{x}{e}$，则可得 $f(x)>\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{ex}{2}>0$，此时只需证明 $e^x>\dfrac{e}{2}x^2$，此时再利用"指数找基友"即可证明不等式，或者放缩成 $e^x\geq\dfrac{e^2}{4}x^2>\dfrac{e}{2}x^2$ 也可以；

证明：$0<a\leq\dfrac{e^2}{2}$，由于 $\ln x\uparrow$，故 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}-a\ln x>\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{e^2}{2}\ln x$，故只需 $\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{e^2}{2}\ln x>0$，令 $g(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}=0$，当 $x=e$ 时 $g(x)_{\max}=\ln e-\dfrac{e}{e}=0$，即 $\ln x\leq\dfrac{x}{e}$，故只需证 $e^x-\dfrac{e}{2}x^2>0$，只需证 $\dfrac{ex^2}{e^x}<2$ 令 $h(x)=\dfrac{ex^2}{e^x}$，$h'(x)=\dfrac{ex(2-x)}{e^x}$，故 $h(x)$ 在 $(0,2)\uparrow$，在 $(2,+\infty)\downarrow$ 当 $x=2$ 时，$h(x)_{\min}=h(2)=\dfrac{e^2}{4}<2$，即证.

【例 10】（2018•甘肃会宁）已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x},g(x)=\ln x+1$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；（2）证明：$x^3f(x)>g(x)$

解（1）参考例 9；（2）思路 1：第（1）问不会白给，故利用"分而治之"，此过程一定要有凹凸函数的反转，构造 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}>\dfrac{\ln x+1}{x^3}=h(x)$，利用 $f(x)_{\min}=e>h(x)_{\max}=h\left(e^{-\frac{2}{3}}\right)=\dfrac{e^2}{3}$；

思路 2："放对后放指"，要证明 $x^2e^x>\ln x+1$，只需证明 $x^2e^x>x-1+1=x>\ln x+1$，故只需证明 $xe^x>1$ 显然失败，失败区间在 $(0,1)$，故思考取等区间在 $(0,1)$ 上的切线放缩式子，构造 $\ln ex\leq ex-1$，取等条件为 $x=\dfrac{1}{e}$，即 $\ln x\leq ex-2$，只需证 $x^2e^x>ex-1$，这时需要涉及找点的知识，虽然此式已经构造成功，但这里不详叙述；构造 $e^x>\dfrac{\ln x+1}{x^2}$ 利用切线放缩，过原点切线 $e^x\geq ex$，$\dfrac{e^2}{3}x\geq\dfrac{\ln x+1}{x^2}$，故 $e^x\geq ex>\dfrac{e^2}{3}x\geq\dfrac{\ln x+1}{x^2}$ 恒成立.

达标训练

1.（2018•广东期末）已知函数 $f(x)$ 的定义域是 R，其导函数是 $f'(x)$，且 $f'(x)\geqslant 0$，则满足不等式 $f(\ln t)+\ln t-1\leq f(1)$ 的实数 t 的集合是（　　）

A．$[e,+\infty)$　　B．$[1,+\infty)$　　C．$(0,e]$　　D．$[e^{-1},e]$

2.（2019•沈阳一模）已知函数 $f(x)=alnx-2x$，若不等式 $f(x+1)>ax-2e^{x}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$a\leqslant 2$　　B．$a\geqslant 2$　　C．$a\leqslant 0$　　D．$0\leqslant a\leqslant 2$

3.（2019•全国I卷调研）设实数 $m>0$，若对任意的 $x\geq e$，若不等式 $x^{2}\ln x-me^{\frac{m}{x}}\geq 0$ 恒成立，则 m 的最大值为（　　）

A．$\frac{1}{e}$　　B．$\frac{e}{3}$　　C．$2e$　　D．e

4.（2018•衡水中学）已知 x_0 是方程 $2x^{2}e^{2x}+\ln x=0$ 的实根，则关于实数 x_0 的判断正确的是（　　）

A．$x_0\geq\ln 2$　　B．$x_0\leq\frac{1}{e}$　　C．$2x_0+\ln x_0=0$　　D．$2e^{x_0}+\ln x_0=0$

5.（2019•长沙测试）若 $\forall x>0$，恒有 $a\left(e^{ax}+1\right)\geq 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x$，则实数 a 的最小值为（　　）

A．$\frac{1}{e^{2}}$　　B．$\frac{2}{e^{2}}$　　C．$\frac{1}{e}$　　D．$\frac{2}{e}$

6.（2018•南通期末）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，对任意的 $x>0$，$f(x)-x\cdot f'(x)<0$ 恒成立，则关于实数 t 的不等式 $f(\sqrt{t^{2}-t-2})<\sqrt{t-2}\cdot f(\sqrt{t+1})$ 的解集是__________.

7.（2018•芮城期末）已知函数 $f(x)=ae^{x}-lnx-1$．

（1）设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a 的值并求 $g(x)=f(x)+lnx-\frac{x}{e^{2}}$ 的单调区间；

（2）若不等式 $f(x)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，求 a 的取值范围．

8.（2018•浙江期末）已知函数 $f(x)=\frac{e^{x}}{x}$．

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $a\geqslant\frac{2}{e^{2}}$，求证：$af(x)>lnx$．

9.（2018•德阳模拟）已知函数 $f(x)=e^{x}+mx-1$．

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若曲线 $f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线垂直于直线 $y=-x+2$，求证：当 $x>0$ 时，$f(x)-2lnx>3-2ln2$．

10.（2018•荆州一模）已知函数 $f(x)=e^{x-m}-xlnx-(m-1)x$，$m\in R$，$f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数．

（1）若 $m=1$，求证：对任意 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)\geqslant 0$；

（2）若 $f(x)$ 有两个极值点，求实数 m 的取值范围．

11.（2018•新课标I）已知函数 $f(x)=ae^{x}-lnx-1$．

（1）设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a，并求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时，$f(x)\geqslant 0$．

12.（2014•全国卷 I）设函数 $f\left(x\right)=ae^{x}\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=e\left(x-1\right)+2$．

（1）求 a,b；

（2）证明：$f\left(x\right)>1$．

专题 8 对数平均不等式的应用

第一讲 对数平均不等式的概念

两个正数 a 和 b 的对数平均定义：$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}(a\neq b)\\ a(a=b).\end{cases}$，对数平均与算术平均、几何平均的大小关系：

$\sqrt{ab}\le L(a,b)\le\dfrac{a+b}{2}$（此式记为对数平均不等式）取等条件：当且仅当 $a=b$ 时，等号成立．

只证：当 $a\neq b$ 时，$\sqrt{ab}<L(a,b)<\dfrac{a+b}{2}$，可设 $a>b$．（1）先证：$\sqrt{ab}<L(a,b)$ ……①

不等式① $\Leftrightarrow \ln a-\ln b<\dfrac{a-b}{\sqrt{ab}}\Leftrightarrow \ln\dfrac{a}{b}<\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\Leftrightarrow 2\ln x<x-\dfrac{1}{x}(其中x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}>1)$

构造函数 $f(x)=2\ln x-(x-\dfrac{1}{x}),(x>1)$，则 $f'(x)=\dfrac{2}{x}-1-\dfrac{1}{x^2}=-(1-\dfrac{1}{x})^2$．

因为 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $f(x)<f(1)=0$，从而不等式①成立；

（2）再证：$L(a,b)<\dfrac{a+b}{2}$ ②不等式

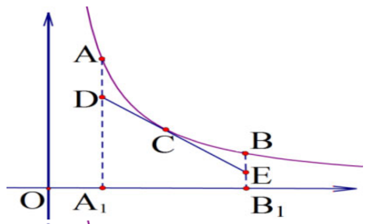
② $\Leftrightarrow \ln a-\ln b>\dfrac{2(a-b)}{a+b}\Leftrightarrow \ln\dfrac{a}{b}>\dfrac{2(\frac{a}{b}-1)}{(\frac{a}{b}+1)}\Leftrightarrow \ln x>\dfrac{2(x-1)}{(x+1)}(其中x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}>1)$

构造函数 $g(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{(x+1)},(x>1)$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$．

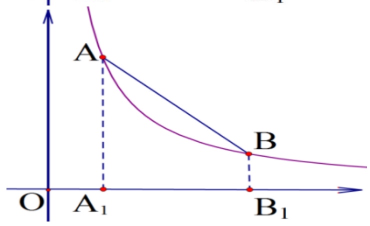
因为 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x)<g(1)=0$，从而不等式②成立；

综合（1）（2）知，对 $\forall a,b\in R^+$，都有对数平均不等式 $\sqrt{ab}\le L(a,b)\le\dfrac{a+b}{2}$ 成立，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立．

第二讲 利用定积分秒杀对数平均不等式证明



如右图 1 所示，在反比例函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 上任取两点 $A\left(a,\dfrac{1}{a}\right),B\left(b,\dfrac{1}{b}\right)$，点 $C\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{2}{a+b}\right)$ 为 AB 在双曲线上的中点，$AA_1\perp x$ 轴交其于 A_1，$BB_1\perp x$ 轴交其于 B_1，过 C 作双曲线切线交 AA_1 和 BB_1 于 D,E 两点，根据 $S_{ACBB_1A_1}>S_{DEB_1A_1}\Rightarrow\int_a^b\dfrac{1}{x}dx>\dfrac{2}{a+b}\cdot(b-a)$，即 $\dfrac{b-a}{\ln b-\ln a}<\dfrac{a+b}{2}$



如右图 2 所示，在 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 上任取两点 $A\left(\sqrt{a},\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right),B\left(\sqrt{b},\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)$，$AA_1\perp x$ 轴交其于 A_1，$BB_1\perp x$ 轴交其于 B_1，根据 $S_{ABB_1A_1}>S_{曲ABB_1A_1}$

$\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}\dfrac{1}{x}dx<\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)\cdot\dfrac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{2}\left(\ln\sqrt{b}-\ln\sqrt{a}\right)<\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}$，即 $\dfrac{b-a}{\ln b-\ln a}>\sqrt{ab}$

考点 1 指数换对数的证明极值偏移问题

【例 1】（2010•天津卷）已知函数 $f(x)=xe^{-x}$，如果 $x_1\neq x_2$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$，证明：$x_1+x_2>2$．

解：$\because f(x_1)=f(x_2),\therefore x_1>0,\ x_2>0,x_1\neq x_2$，（请读者自己证明）

$\therefore x_1e^{-x_1}=x_2e^{-x_2}\Rightarrow\ln x_1e^{-x_1}=\ln x_2e^{-x_2}\Rightarrow\ln x_1-x_1=\ln x_2-x_2$，整理可得 $\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1$

$\because\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$，$\therefore\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1<\dfrac{x_1+x_2}{2}\Rightarrow$ 即 $x_1+x_2>2$

【例 2】已知 x_1,x_2 是函数 $f(x)=e^x-ax$ 的两个零点，且 $x_1<x_2$，其极值点为 x_0．

（1）求 a 的取值范围；

（2）求证：$x_1+x_2<2x_0$；

（3）求证：$x_1+x_2>2$；

（4）求证：$x_1\cdot x_2<1$．

解：（1）$f'(x)=e^x-a=0\Rightarrow x_0=\ln a(a>0)$，故 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\ln a)\downarrow$，在区间 $(\ln a,+\infty)\uparrow$，若 $f(x)=e^x-ax$ 有两个零点，则 $f(\ln a)=e^{\ln a}-a\ln a<0\Rightarrow\ln a>1$，即 $a>e$；

（2）构造函数 $F(x)=f(x)-f(2x_0-x)$，则 $F'(x)=f'(x)+f'(2x_0-x)=e^x+e^{2\ln a-x}-2a$，

当 $x<\ln a$ 时，$F'(x)>2\sqrt{e^{2\ln a}}-2a=0$ 则 $F(x)\uparrow$；

得 $F(x)<F(\ln a)=0$ ，$F(x)<F(\ln a)=0,\therefore f(x)<f(2x_0-x)$，其中 $x<x_0$；将 x_1 代入不等式得 $f(x_1)=f(2x_0-x_1)$，又$x_2>x_0,x_2>x_0,2x_0-x_1>x_0$，$f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上$\uparrow$，故 $x_2<2x_0-x_1$，即 $x_1+x_2<2x_0$．

（3）（4）：又 $\begin{cases}e^{x_1}-ax_1=0\\e^{x_2}-ax_2=0\end{cases}$　$\therefore\begin{cases}x_1=lna+lnx_1 & (1)\\x_2=lna+lnx_2 & (2)\end{cases}$

$(1)-(2)$ 得 $x_1-x_2=lnx_1-lnx_2\therefore\dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{x_1-x_2}{lnx_1-lnx_2}=1>\sqrt{x_1x_2}\therefore x_1+x_2>2$，$x_1x_2<1$

第（2）问也可以通过第（3）问结论用对数平均不等式秒杀，（1）+（2）得：$x_1+x_2=2lna+lnx_1x_2<2lna=2x_0$

考点 2　符号反向用加法原理

若出现 $x_1+x_2>a$ 或者 $x_1\cdot x_2<b$ 时，属于正常的作差代换，构造出 $\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=m<\dfrac{x_1+x_2}{2}$，由模型一即可秒杀，遇到 $x_1+x_2<a$ 或者 $x_1\cdot x_2>b$ 时，属于对数平均不等式反向，这就需要将两式相减先构造对数平均不等式，再相加实现和积互换，从而达到证明反向不等式．

【例 3】已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，如果 $x_1<x_2$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$，求证：$x_1\cdot x_2>e^2$．

证明：因为 $f(x_1)=f(x_2)$，所以可设 $\dfrac{\ln x_1}{x_1}=\dfrac{\ln x_2}{x_2}=m\therefore\begin{cases}\ln x_1=mx_1\cdots\cdots(1)\\\ln x_1=mx_2\cdots\cdots(2)\end{cases}$

（1）+（2）得 $\ln x_1+\ln x_2=m(x_1+x_2)\cdots\cdots(3)$；（1）－（2）得 $\ln x_1-\ln x_2=m(x_1-x_2)$　$\therefore m=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，

代入（3）得 $\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=\dfrac{1}{m}<\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{\ln x_1+\ln x_2}{2m}$，$\therefore\dfrac{1}{m}<\dfrac{\ln x_1+\ln x_2}{2m},\therefore\ln x_1x_2>2$，综上 $x_1\cdot x_2>e^2$．

【例 4】已知 $\ln(x+m)-mx=0$，（$m>1$）有两个根 x_1，x_2，求证：$x_1+x_2<0$．

证明：令 $mx_1=\ln(x_1+m)$（1）　　　$mx_2=\ln(x_2+m)$（2）

$\therefore\dfrac{1}{m}=\dfrac{x_1-x_2}{\ln(x_1+m)-\ln(x_2+m)}=\dfrac{(x_1+m)-(x_2+m)}{\ln(x_1+m)-\ln(x_2+m)}\therefore\dfrac{1}{m}>\sqrt{(x_1+m)(x_2+m)}$，$\therefore(x_1+m)(x_2+m)<\dfrac{1}{m^2}$

再由 $\dfrac{x_1}{\ln(x_1+m)}=\dfrac{x_2}{\ln(x_2+m)}=\dfrac{x_1+x_2}{\ln(x_1+m)+\ln(x_2+m)}=\dfrac{x_1-x_2}{\ln(x_1+m)-\ln(x_2+m)}=\dfrac{1}{m}$

得：$x_1+x_2=\dfrac{\ln(x_1+m)+\ln(x_2+m)}{m}=\dfrac{\ln(x_1+m)(x_2+m)}{m}<\dfrac{\ln\dfrac{1}{m^2}}{m}=-2\dfrac{\ln m}{m}<0$，（$m>1$）$\therefore$ $x_1+x_2<0$

考点 3　中点导数问题点差法

题目给到 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}(x_2>x_1)$，涉及证明 $f'(x_0)<0$ 或者 $f'(x_0)>0$ 时，利用分析法执果索因，将式子证明最后转交给对数平均不等式，方法类似圆锥曲线点差法（作差，同除 (x_1-x_2)，取中点）；当出现 $f'\left(\dfrac{x_1+2x_2}{3}\right)<0$、

$f'\left(\frac{\alpha x_1+(1-\alpha)x_2}{3}\right)<0\left(\frac{1}{2}<\alpha<1\right)$之类题型时，要转化为$f'\left(\frac{2x_1+x_2}{3}\right)<f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0$，也属于对数点差法系列.

【例 5】(2011•辽宁卷) 已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+(2-a)x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴交于 A,B 两点，线段 AB 的中点的横坐标为 x_0，证明: $f'(x_0)<0$.

解:(1) 略.(2) $f'(x_0)=\frac{1}{x_0}-2ax_0+(2-a)$，由 $f(x_1)=f(x_2)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x_1-ax_1^2+(2-a)x_1=0(1)\\ \ln x_2-ax_2^2+(2-a)x_2=0(2)\end{cases}$

$(1)-(2):\ln x_1-\ln x_2=a(x_1^2-x_2^2)+(a-2)(x_1-x_2)$，同除以$(x_1-x_2)$得，

$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-a(x_1+x_2)+(2-a)=0$ 要证 $f'(x_0)<0$，

只需证 $\frac{1}{x_0}-2ax_0+(2-a)=\frac{2}{x_1+x_2}-a(x_1+x_2)+(2-a)<0$;

只需证 $\frac{2}{x_1+x_2}-a(x_1+x_2)+(2-a)<\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-a(x_1+x_2)+(2-a)$;

根据对数平均不等式 $\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{x_1-x_2}{lnx_1-lnx_2}$，故原命题得证.

【例 6】(2018•全国卷 I) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，证明: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

解:(1) 略。(2) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}=0$，即 $-x^2+ax-1=0$，故 $x_1+x_2=a,x_1x_2=1$;

要证 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$，只需证 $\frac{\frac{1}{x_1}-x_1+a\ln x_1-\frac{1}{x_2}+x_2-a\ln x_2}{x_1-x_2}<a-2$，

只需证 $\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}{x_1-x_2}-1+\frac{a\ln x_1-a\ln x_2}{x_1-x_2}<a-2$，只需证 $-\frac{1}{x_1x_2}-1+\frac{a(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}<a-2$，

只需证 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<1$，由于 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}>\sqrt{x_1x_2}=1$，故命题得证.

考点 4　作差求和取对数三板斧

非一次函数的形式，由 e^x 与二次函数 ax^2+bx+c 混合的函数，先作差得出 $a(x_1-x_2)\left(x_1+x_2+\frac{b}{a}\right)$，再两边取对数，构造对数平均不等式，在证明 $x_1+x_2>-\frac{b}{a}$ 或者 $x_1+x_2<-\frac{b}{a}$，往往用反证法减少运算；对于 $x\ln x$ 这类不好分离的式子，又要和差齐下。必要时要考虑换元法解决 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 之类的问题.

【例 7】(2016•新课标 I 卷) 已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点 x_1,x_2.

(1) 求 a 的取值范围;　　(2) 证明: $x_1+x_2<2$.

解:(1) 由 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 得: $f'(x)=(x-1)(e^x+2a)$，要使得 $y=f(x)$ 有两个零点，则必须使得 $y=f'(x)$ 在 R 上只有一个根，易得 $a>0$，详细过程请参考高考参考答案，这里不做详细叙述;

（2）法一：$f(x)=(x-2)e^{x}+a(x-1)^{2}=0$ 即 $(2-x)e^{x}=a(x-1)^{2}>0$; 由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 得 $\begin{cases}(2-x_1)e^{x_1}=a(x_1-1)^2\\(2-x_2)e^{x_2}=a(x_2-1)^2\end{cases}$，两式相减得 $(2-x_1)e^{x_1}-(2-x_2)e^{x_2}=a(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)$,

下面用反证法证明 $x_1+x_2<2$. 若 $x_1+x_2\ge 2$. 则 $(2-x_1)e^{x_1}-(2-x_2)e^{x_2}\le 0,(2-x_1)e^{x_1}\le(2-x_2)e^{x_2}$，取对数得 $\ln(2-x_1)+x_1\le\ln(2-x_2)+x_2$，则 $\dfrac{x_2-x_1}{\ln(2-x_1)-\ln(2-x_2)}\ge 1.$ 而由对数平均不等式得：

$$\frac{x_2-x_1}{\ln(2-x_1)-\ln(2-x_2)}=\frac{(2-x_1)-(2-x_2)}{\ln(2-x_1)-\ln(2-x_2)}<\frac{(2-x_1)+(2-x_2)}{2}=2-\frac{x_1+x_2}{2}\le 1,$$ 矛盾.

法二：参变分离得：$a=\dfrac{(2-x_1)e^{x_1}}{(x_1-1)^2}=\dfrac{(2-x_2)e^{x_2}}{(x_2-1)^2}$，有 $a>0$ 得，$x_1<1<x_2<2$，将上述等式两边取以 e 为底的对数，得 $\ln\dfrac{(2-x_1)}{(x_1-1)^2}+x_1=\ln\dfrac{(2-x_2)}{(x_2-1)^2}+x_2$，化简得: $[\ln(x_1-1)^2-\ln(x_2-1)^2]-[\ln(2-x_1)^2-\ln(2-x_2)^2]=x_1-x_2$

$$1=\frac{[\ln(x_1-1)^2-\ln(x_2-1)^2]}{x_1-x_2}-\frac{[\ln(2-x_1)^2-\ln(2-x_2)^2]}{x_1-x_2}=[(x_1-1)+(x_2-1)]\frac{[\ln(x_1-1)^2-\ln(x_2-1)^2]}{(x_1-1)^2-(x_2-1)^2}+\frac{[\ln(2-x_1)^2-\ln(2-x_2)^2]}{(2-x_1)-(2-x_2)}$$

由对数平均不等式得：$\dfrac{[\ln(x_1-1)^2-\ln(x_2-1)^2]}{(x_1-1)^2-(x_2-1)^2}>\dfrac{2}{(x_1-1)^2+(x_2-1)^2}$，$\dfrac{[\ln(2-x_1)^2-\ln(2-x_2)^2]}{(2-x_1)-(2-x_2)}>\dfrac{2}{(2-x_1)+(2-x_2)}$，从而

$$1>\frac{2(x_1+x_2-2)}{(x_1-1)^2+(x_2-1)^2}+\frac{2}{(2-x_1)+(2-x_2)}=\frac{2(x_1+x_2-2)}{(x_1-1)^2+(x_2-1)^2}+1+\frac{x_1+x_2-2}{4-(x_1+x_2)}$$

等价于 $0>\dfrac{2(x_1+x_2-2)}{(x_1-1)^2+(x_2-1)^2}+\dfrac{x_1+x_2-2}{4-(x_1+x_2)}=(x_1+x_2-2)[\dfrac{2}{(x_1-1)^2+(x_2-1)^2}+\dfrac{1}{4-(x_1+x_2)}]$

由 $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2>0,4-(x_1+x_2)>0$，故 $x_1+x_2<2$，明显法一成功避免了二次函数的对数平均值的构造，更简洁.

【例 8】已知函数 $f(x)=x\ln x$ 与直线 $y=m$ 交于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两点.

（1）求证：$0<x_1x_2<\dfrac{1}{e^2}$；（2）证明：$\dfrac{2}{e}<x_1+x_2<1$.

解：（1）由 $x_1\ln x_1=m,x_2\ln x_2=m$，可得：$x_1=\dfrac{m}{\ln x_1}$①，$x_2=\dfrac{m}{\ln x_2}$②，

①-②得：$x_1-x_2=m(\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{\ln x_1\ln x_2})\Rightarrow\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=\dfrac{-m}{\ln x_1\ln x_2}$③，①+②得 $x_1+x_2=\dfrac{m(\ln x_2+\ln x_1)}{\ln x_1\ln x_2}$④，

根据对数平均不等式：$\dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{-m}{\ln x_1-\ln x_2}(x_1\ne x_2)$，即 $\dfrac{m(\ln x_2+\ln x_1)}{2\ln x_1\ln x_2}>\dfrac{-m}{\ln x_1\ln x_2}$，由题于 $y=m$ 与 $y=x\ln x$ 交于不同两点，易得出则 $m<0$ ∴上式简化为：$\ln(x_1\cdot x_2)<-2=\ln e^{-2}$ $\therefore 0<x_1\cdot x_2<\dfrac{1}{e^2}$

(2) $f'(x)=1+\ln x$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{e}$ 所以 $0<x_1<\dfrac{1}{e}<x_2<1$ 且 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{e})$ 单调递减，在 $(\dfrac{1}{e},+\infty)$ 单调递增，构造函数（极值点偏移）易证 $x_1+x_2>\dfrac{2}{e}$ 以下略;

$x_1+x_2<1$【构造函数，利用 $\dfrac{\ln x}{x-1}<1$ 且↓】证明：$\because x_1\ln x_1=x_2\ln x_2\,(x_2>x_1)$ $\therefore\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{\ln x_2}{\ln x_1}<\dfrac{1-x_2}{1-x_1}$

$\therefore(x_1-x_2)[1-(x_1+x_2)]<0$，$\therefore x_1+x_2<1$

【例 9】已知 $f(x)=x-\dfrac{1}{2}xlnx$，若 $f(x)=a$ 有两个不等实根 x_2,x_2，求证：$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>\dfrac{2}{e}$.

证明：设 $t=\dfrac{1}{x},t>0$，则 $g(t)=\dfrac{1}{t}+\dfrac{lnt}{2t}=\dfrac{2+lnt}{2t},(t>0)$ 则 $g(t)=a$ 有两不等实根 t_1,t_2（不妨设 $t_1<t_2$）

要证 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>\frac{2}{e}$　只要 $t_1+t_2>\frac{2}{e}$ 即可；又 $g'(t)=\frac{-2(1+lnt)}{4t^2}$ $\therefore t\in(0,\frac{1}{e})$ 时，$g'(t)>0, g(t)$ 单调递增

$t\in\frac{1}{e},+\infty)$ 时 $g'(t)<0, g(t)$ 单调递减 $\therefore g(t)_{max}=g(\frac{1}{e})=\frac{e}{2}$，方程 $g(t)=a$ 要有两个不等实根，则 $a<\frac{e}{2}$ 即

$\frac{1}{a}>\frac{2}{e}$ 且 $0<t_1<\frac{1}{e}<t_2$，下面证明 $t_1+t_2>\frac{1}{a}$ $\therefore\begin{cases}2+lnt_1=2at_1\\2+lnt_2=2at_2\end{cases}$　$\therefore lnt_1-lnt_2=2a(t_1-t_2)$，

$4+lnt_1+lnt_2=2a(t_1+t_2)$ $\therefore\frac{1}{2a}=\frac{t_1+t_2}{4+lnt_1+lnt_2}=\frac{t_1-t_2}{lnt_1-lnt_2}<\frac{t_1+t_2}{2}$ $\therefore t_1+t_2>\frac{1}{a}$ 得证.

达标训练

1. 已知函数 $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$，若 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，证明：$x_1+x_2>4$.

2. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2$，其中 $a\in R$.

（1）若函数 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围；

（2）若函数 $f(x)$ 有极大值为 $-\frac{1}{2}$，且方程 $f(x)=m$ 的两根为 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，证明：$x_1+x_2>4a$.

3. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax$，a 为常数，若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，求证：$x_1\cdot x_2>e^2$.

4. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+(1-a)x-alnx$，$a\in R$，有两个不同的零点 x_1,x_2 求证：$x_1+x_2>2$.

5. 已知 $a\in R$，函数 $f(x)=x-ae^x+1$ 有两个零点 $x_1,x_2,(x_1<x_2)$.

（1）求实数 a 的取值范围；

（2）证明：$e^{x_1}+e^{x_2}>2$.

6. 函数 $f(x)=x^2-2x+1+ae^x$ 有两极值点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$.证明：$x_1+x_2>4$.

7. 设函数 $f(x)=e^x-ax+a(a\in R)$ 的图像与 x 轴交于 $A(x_1,0),B(x_2,0)(x_1<x_2)$ 两点.

（1）求证：$f'(\sqrt{x_1x_2})<0$；（2）求证：$x_1x_2<x_1+x_2$.

8. 已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x+a}$（$a\in R$），曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x+y+1=0$ 垂直.

（1）试比较 2016^{2017} 与 2017^{2016} 的大小，并说明理由；

（2）若函数 $g(x)=f(x)-k$ 有两个不同的零点 x_1,x_2，证明：$x_1\bullet x_2>e^2$.

9. 已知函数 $f(x)=\frac{ax}{\ln x}$.

（1）若 $f(x)$ 在点 $(e^2,f(e^2))$ 处的切线与直线 $4x+y=0$ 垂直，求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（2）若方程 $f(x)=1$ 有两个不相等的实数解 x_1,x_2，证明：$x_1+x_2>2e$.

10. 设函数 $f(x)=a\ln x-bx^2$，其图像在点 $P(2,f(2))$ 处切线的斜率为 -3.当 $a=2$ 时，令 $g(x)=f(x)-kx$，设 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 是方程 $g(x)=0$ 的两个根，x_0 是 x_1,x_2 的等差中项，求证：$g'(x_0)<0$（$g'(x)$ 为函数 $g(x)$ 的导函数）.

12. 已知函数 $f(x)=xlnx-\frac{a}{2}x^2$，若函数 $g(x)=f(x)-x$ 有两极值点 x_1,x_2 求证：$\frac{1}{lnx_1}+\frac{1}{lnx_2}>2ae$

13.（2019•蓉城名校联盟）已知函数 $f(x)=x^2+(1-2a)x-a\ln x,a>0$ 有两个零点 x_1、x_2，求证：$x_1x_2>1$.

专题 9　数形结合秒杀公切线

第一讲　公切线的几何探秘

$y=f(x)$与$y=g(x)$是否有公切线，决定它们公切线条数的是由函数凹凸性和共单调区间交点。

凹凸性相同的两曲线，在两个曲线$f''(x)>0, g''(x)>0$时，两个函数均为凹函数，且$f'(x)>0, g'(x)>0$时均在递增区间，如图 1，若$y=f(x)$与$y=g(x)$无交点，可以类比圆的外公切线，当小圆内含于大圆时，无公切线；

若$y=f(x)$与$y=g(x)$有唯一交点时，如图 2，可以类比于当小圆与大圆内切时，有唯一的外公切线；

若$y=f(x)$与$y=g(x)$有两个交点时，如图 3，可以类比于当小圆与大圆相交时，有两条外公切线；

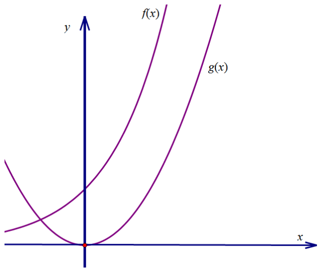


图 1 无公切线

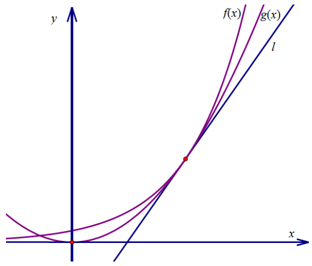


图 2 有一条公切线

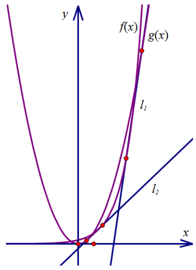


图 3 两条公切线

考点 1　切线与一曲线的切点已知，且与另一曲线相切，求另一曲线方程

【例 1】（2017•许昌二模）已知函数$y=x+1+\ln x$在点$A(1,2)$处的切线l，若直线l与二次函数$y=ax^2+(a+2)x+1$的图象也相切，则实数a的取值为（　　）

A．12　　B．8　　C．0　　D．4

解：$y=x+1+\ln x$的导数为$y'=1+\frac{1}{x}$，曲线$y=x+1+\ln x$在$x=1$处的切线斜率为$k=2$，则曲线$y=x+1+\ln x$在$x=1$处的切线方程为$y-2=2x-2$，即$y=2x$．由于切线与曲线$y=ax^2+(a+2)x+1$相切，$y=ax^2+(a+2)x+1$可联立$y=2x$，得$ax^2+ax+1=0$，又$a\neq 0$，两线相切有一切点，所以有$\Delta=a^2-4a=0$，解得$a=4$．故选D.

【例 2】已知函数$f(x)=x-e^{\frac{x}{a}}(a>0)$，且$y=f(x)$的图象在$x=0$处的切线$l$与曲$y=e^x$相切，符合情况的切线有（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

解：函数$f(x)=x-e^{\frac{x}{a}}$的导数为$f'(x)=1-\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}, a>0$，易知，曲线$y=f(x)$在$x=0$处的切线$l$的斜率为$1-\frac{1}{a}$，切点为$(0,-1)$，可得切线的方程为$y=\left(1-\frac{1}{a}\right)x-1$，假设$l$与曲线$y=e^x$相切，设切点为$(x_0,y_0)$，即有$e^{x_0}=1-\frac{1}{a}=\left(1-\frac{1}{a}\right)x_0-1$，消去$a$得$e^{x_0}=e^{x_0}x_0-1$，设$h(x)=xe^x-e^x-1$，则$h'(x)=xe^x$令$h'(x)>0$，则$x>0$

所以$h(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，当$x\to-\infty$，$h(x)\to-1$，$x\to+\infty$，$h(x)\to+\infty$，所以$h(x)$在$(0,+\infty)$有唯一解，则$e^{x_0}>1$，而$a>0$时，$1-\frac{1}{a}<1$与$e^{x_0}>1$矛盾，不存在．故选A.

另解：特值法，取$a=1$，$f(x)=x-e^x$，$f'(x)=1-e^x, f'(0)=0$，而$y=e^x>0$，故不存在切线l

公切线的几何探秘

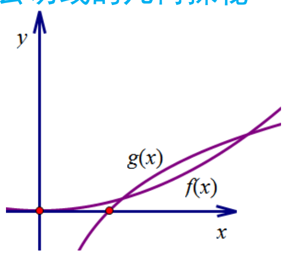


图 4 无公切线

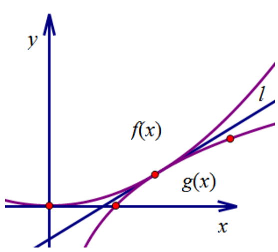


图 5 有一条公切线

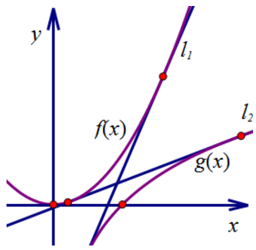


图 6 有两条公切线

同理，凹凸性不同的两条曲线，在两个曲线$f''(x)>0$为凹函数，$g''(x)<0$为凸函数时，且$f'(x)>0, g'(x)>0$均在递增区间，如图 4，若$y=f(x)$与$y=g(x)$有两个交点，可以类比圆的内公切线，当两圆相交时，无内

公切线；若 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 有唯一交点时，如图 5 所示，可以类比于当两圆外切时，有唯一的内公切线.

若 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 无交点时，如图 6 所示，可以类比于当两圆相离时，有两条内公切线.

公切线定理代数表达：

当 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 具有公切线时，设直线与 $y=f(x)$ 切于点 $(x_1,f(x_1))$, 与 $y=g(x)$ 切于点 $(x_2,g(x_2))$,

①当 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 切于同一点，设切点为 $P(x_0,y_0)$，则有 $\begin{cases} f'(x_0)=g'(x_0) \\ f(x_0)=g(x_0) \end{cases}$

②当 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 为平行曲线，即 $g(x)=f(x+a)-b$，则有 $f'(x_1)=f'(x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)+b}{x_1-x_2}=\dfrac{b}{a}$

③公切线方程的等量关系 $f'(x_1)=g'(x_2)=\dfrac{f(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$，求参数取范围或者切点的取值范围.

考点 2　平行曲线公切线问题

两平行曲线由于曲率相同，通常单调性单一的两曲线仅有一个交点，故只有一条公切线，类比于两圆的单边外公切线模型.

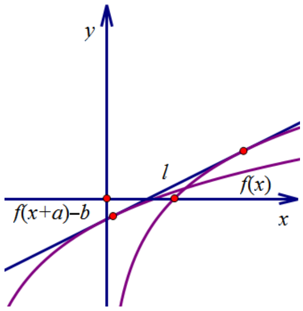


图 7 凸函数

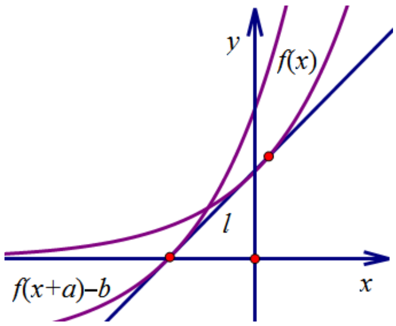


图 8 凹函数

$\because f'(x_1)=f'(x_2+a), \therefore x_1=x_2+a$

根据切线方程 $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$

$f(x_2+a)-b-f(x_1)=f'(x_1)(x_2-x_1)$

$-b=-af'(x_1)\Rightarrow f'(x_1)=k=\dfrac{b}{a}$

【例 3】(2018•郐城期中) 若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=lnx+3$ 的切线，也是曲线 $y=ln(x+2)$ 的切线，则实数 b 的值是（　　）

A. $2+ln\dfrac{2}{3}$　　B. $2-ln6$　　C. $2+ln6$　　D. $2+ln\dfrac{3}{2}$

解：根据题意，设 $y=kx+b$ 与 $y=lnx+3$ 的切点为 $(x_1,\ lnx_1+3)$，与 $y=ln(x+2)$ 的切点为 $(x_2,\ ln(x_2+2))$；对于 $y=lnx+3$，其导数 $y'=\dfrac{1}{x}$，则切线的斜率 $y'|_{x=x_1}=\dfrac{1}{x_1}$，切线的方程为 $y-(lnx_1+3)=\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)$，即 $y=\dfrac{1}{x_1}x+(lnx_1+3)-1$；对于 $y=ln(x+2)$，其导数 $y'=\dfrac{1}{x+2}$，则切线的斜率 $y'|_{x=x_2}=\dfrac{1}{x_2+2}$，$\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{x_2+2}$，则 $x_1=x_2+2$，则 $-2=\dfrac{x_2}{x_2+2}$；解可得 $x_2=-\dfrac{4}{3}$，$x_1=\dfrac{2}{3}$；则 $b=(lnx_1+3)-1=2+ln\dfrac{2}{3}$；故选 A.

【例 4】(2018•青山月考) 若直线 $y=kx+b$ 与曲线 $C_1:y=3+e^x$ 和曲线 $C_2:y=e^{x+2}$ 同时相切，则 $b=$（　　）

A. $\dfrac{9}{2}-\dfrac{3}{2}ln\dfrac{3}{2}$　　B. $2-ln2$　　C. $\dfrac{1}{2}-ln\dfrac{1}{2}$　　D. $3-ln3$

解：根据题意，设直线直线 $y=kx+b$ 与曲线 $C_1:y=3+e^x$ 相切于 $(m,3+e^m)$，与曲线 $C_2:y=e^{x+2}$ 相切于点 (n,e^{n+2})，曲线 $C_1:y=3+e^x$，其导数 $y'=e^x$，则有 $y'|_{x=m}=e^m$，则在点 $(m,3+e^m)$ 处切线的方程为 $y-(3+e^m)=e^m(x-m)$，即 $y=e^mx-me^m+(3+e^m)$，曲线 $C_2:y=e^{x+2}$，其导数 $y'=e^{x+2}$，则有 $y'|_{x=n}=e^{n+2}$，则在 (n,e^{n+2}) 处切线的方程为 $y-e^{n+2}=e^{n+2}(x-n)$，即 $y=e^{n+2}x-ne^{n+2}+e^{n+2}$，则有 $e^m=e^{n+2}$，则有 $m=n+2$，又由 $me^m-(3+e^m)=ne^{n+2}-e^{n+2}$，则有 $e^{n+2}=\dfrac{3}{2}$，则 $n=ln\dfrac{3}{2}-2$，则 $b=-ne^{n+2}+e^{n+2}=\dfrac{9}{2}-\dfrac{3}{2}ln\dfrac{3}{2}$；故选 A.

考点 3　两曲线公共点公切线问题

当 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 切于同一点，设切点为 $P(x_0,y_0)$，则有 $\begin{cases} f'(x_0)=g'(x_0) \\ f(x_0)=g(x_0) \end{cases}$，从而确定参数的取值范围.

【例 5】(2018•攀枝花期末) 若曲线 $y=ax^2$ 与曲线 $y=lnx$ 在它们的公共点处具有公共切线， 则实数 a 的值为（　　）

A. $\dfrac{1}{2e}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\sqrt{e}$　　D. $\dfrac{1}{e}$

解：$\because y=ax^2$，$\therefore y'=2ax$，$\because y=lnx$，$\therefore y'=\dfrac{1}{x}$，$\because$ 曲线 $y=ax^2$ 与曲线 $y=lnx$ 在它们的公共点设为 $P(s,t)$ 处具有公共切线，$\therefore 2as=\dfrac{1}{s}$，$t=as^2$，$t=lns$，$\therefore t=\dfrac{1}{2}$，$s=\sqrt{e}$，$a=\dfrac{1}{2e}$，故选 A.

【例 6】(2017•太原一模) 设函数 $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-2ax(a>0)$ 与 $g(x)=a^2lnx+b$ 有公共点，且在公共点处的切线方程相同，则实数 b 的最大值为（　　）

A. $\dfrac{1}{2e^2}$　　B. $\dfrac{1}{2}e^2$　　C. $\dfrac{1}{e}$　　D. $-\dfrac{3}{2e^2}$

解：设公共点坐标为 (x_0,y_0)，则 $f'(x)=3x-2a,g'(x)=\dfrac{a^2}{x}$，所以有 $f'(x_0)=g'(x_0)$，即 $3x_0-2a=\dfrac{a^2}{x_0}$，解出 $x_0=a$（$x_0=-3a$ 舍去），又 $y_0=f(x_0)=g(x_0)$，所以有 $\dfrac{3}{2}x_0^2-2ax_0=a^2\ln x_0+b$，故 $b=\dfrac{3}{2}x_0^2-2ax_0=a^2\ln x_0+b$，所以有 $b=-\dfrac{1}{2}a^2-a^2\ln a$，对 b 求导有 $b'=-2a(1+\ln a)$，故 b 关于 a 的函数在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 为增函数，在 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 为减函数，所以当 $a=\dfrac{1}{e}$ 时 b 有最大值 $\dfrac{1}{2e^2}$，故选 A.

【例 7】(2014•盐城期末) 设点 P 为函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2ax$ 与 $g(x)=3a^2\ln x+2b(a>0)$ 图象的公共点，以 P 为切点可作直线 l 与两曲线都相切，则实数 b 的最大值为（　　）

A. $\dfrac{2}{3}e^{\frac{3}{4}}$　　B. $\dfrac{3}{2}e^{\frac{3}{4}}$　　C. $\dfrac{4}{3}e^{\frac{2}{3}}$　　D. $\dfrac{3}{4}e^{\frac{2}{3}}$

解：设 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)(x>0)$ 在公共点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线相同，$f'(x)=x+2a,g'(x)=\dfrac{3a^2}{x}$，由题意 $f(x_0)=g(x_0),f'(x_0)=g'(x_0)$，即 $\dfrac{1}{2}{x_0}^2+2ax_0=3a^2\ln x_0+2b,x_0+2a=\dfrac{3a^2}{x_0}$，由 $x_0+2a=\dfrac{3a^2}{x_0}$ 得 $x_0=a$ 或 $x_0=-3a$（舍去），即有 $2b=\dfrac{1}{2}a^2+2a^2-3a^2\ln a=\dfrac{5}{2}a^2-3a^2\ln a$，令 $h(t)=\dfrac{5}{2}t^2-3t^2\ln t(t>0)$，则 $h'(t)=2t(1-3\ln t)$，于是当 $t(1-3\ln t)>0$，即 $0<t<e^{\frac{1}{3}}$ 时，$h'(t)>0$；当 $t(1-3\ln t)<0$，即 $t>e^{\frac{1}{3}}$ 时，$h'(t)<0$，故 $h(t)$ 在 $\left(0,e^{\frac{1}{3}}\right)$ 为增函数，在 $\left(e^{\frac{1}{3}},+\infty\right)$ 为减函数，于是 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最大值为 $h\left(e^{\frac{1}{3}}\right)=\dfrac{3}{2}e^{\frac{2}{3}}$，故 b 的最大值为 $\dfrac{3}{4}e^{\frac{2}{3}}$，故选 D.

考点 4　两曲线公切线存在性判断和参数取值范围问题

【例 8】(2018•高安期末) 若曲线 $C_1: y = ax^2\ (a > 0)$ 与曲线 $C_2: y = e^x$ (其中无理数 $e = 2.718\ldots$) 存在公切线，则整数 a 的最值情况为 (　　)

A．最大值为 2，没有最小值　　B．最小值为 2，没有最大值

C．既没有最大值也没有最小值　　D．最小值为 1，最大值为 2

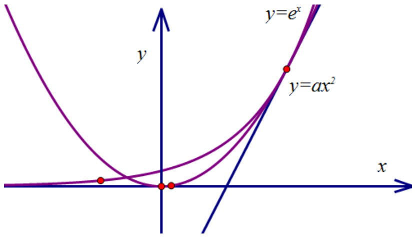


图 9

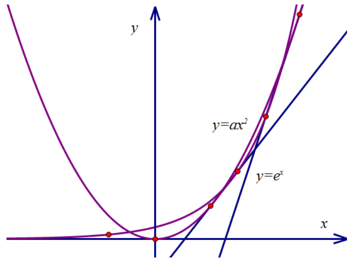


图 10

解：由 $y = ax^2$，得 $y' = 2ax$，由 $y = e^x$，得 $y' = e^x$，曲线 $C_1: y = ax^2$ 与曲线 $C_2: y = e^x$ 存在公共切线，设公切线与曲线 C_1 切于点 $(x_1,\ ax_1^2)$，与曲线 C_2 切于点 $(x_2,\ e^{x_2})$，则 $2ax_1 = e^{x_2} = \dfrac{e^{x_2} - ax_1^2}{x_2 - x_1}$，可得 $2x_2 = x_1 + 2$，$\therefore a = \dfrac{e^{\frac{x_1}{2}+1}}{2x_1}$，记 $f(x) = \dfrac{e^{\frac{x}{2}+1}}{2x}$，则 $f'(x) = \dfrac{e^{\frac{x}{2}+1}(x-2)}{4x^2}$，当 $x \in (-\infty, 2)$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 递减；当 $x \in (2, +\infty)$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 递增．$\therefore$ 当 $x = 2$ 时，$f(x)_{min} = \dfrac{e^2}{4}$．$\therefore a$ 的范围是 $[\dfrac{e^2}{4},\ +\infty)$，则整数 a 的最小值为 2，无最大值．故选 B．

秒杀解法：由于 $C_1: y = ax^2\ (a > 0)$ 与曲线 $C_2: y = e^x$ 均为凹函数，故根据图 9 和图 10 可知，先求出 C_1 与 C_2 公共点的公切线，即 $2ax_0 = e^{x_0} = a{x_0}^2 \Rightarrow x_0 = 2, a = \dfrac{e^2}{4}$，若 C_1 与 C_2 要有两个交点，则抛物线开口越小时成立，开口大时将没有交点，与题意不符合，故 $a \geq \dfrac{e^2}{4}$，故选 B．

【例 9】(2018•北京模拟) 若两曲线 $y = x^2 - 1$ 与 $y = a\ln x - 1$ 存在公切线，则正实数 a 的取值范围是______．

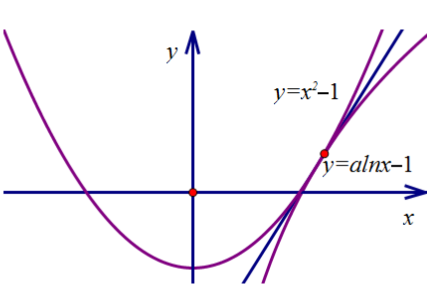


图 11

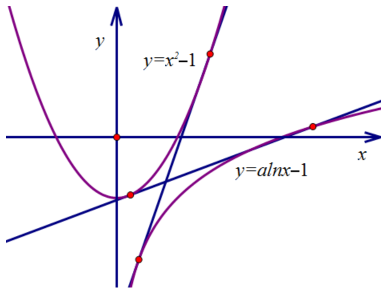


图 12

解：两曲线 $y = x^2 - 1$ 与 $y = a\ln x - 1$ 存在公切线，$y = x^2 - 1$ 的导数 $y' = 2x$，$y = a\ln x - 1$ 的导数为 $y' = \dfrac{a}{x}$，设 $y = x^2 - 1$ 相切的切点为 $(n, n^2 - 1)$ 与曲线 $y = a\ln x - 1$ 相切的切点为 $(m, a\ln m - 1)$，$y - (n^2 - 1) = 2n(x - n)$，即 $y = 2nx - n^2 - 1$，$y - (a\ln m - 1) = \dfrac{a}{m}(x - m)$，即：$y = \dfrac{a}{m}x - a + a\ln m - 1$

$\therefore \begin{cases} 2n = \dfrac{a}{m} \\ n^2 + 1 = a + 1 - a\ln m \end{cases}$　$\therefore \dfrac{a^2}{4m^2} = a - a\ln m$，$\because a > 0$，$\therefore \dfrac{a}{4m^2} = 1 - \ln m$，即 $\dfrac{a}{4} = m^2(1 - \ln m)$ 有解即可，令 $g(x) = x^2(1 - \ln x)$，$y' = 2x(1 - \ln x) + x^2(-\dfrac{1}{x}) = x(1 - 2\ln x) = 0$，可得 $x = \sqrt{e}$，$\therefore g(x)$ 在 $(0, \sqrt{e})$ 是增函数；$(\sqrt{e},\ +\infty)$ 是减函数，$g(x)$ 的最大值为：$g(\sqrt{e}) = \dfrac{e}{2}$，又 $g(0) = 0$，$\therefore 0 < \dfrac{a}{4} \leqslant \dfrac{e}{2}$，$\therefore 0 < a \leqslant 2e$．故答案为：$(0,\ 2e]$．

秒杀解法：如图 11，找到 $y=x^2-1$ 与 $y=alnx-1$ 相切于同一点的情况，即 $\begin{cases}2x_0=\dfrac{a}{x_0}\\ x_0{}^2-1=a\ln x_0-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\sqrt{e}\\ a=2e\end{cases}$，由于两函数是一凹一凸，故类比于两圆的内公切线原理，两曲线相离时，有两条公切线，如图 12 所示，故曲线 $y=alnx-1$ 要更加平缓，根据几何性质即可知道 $0<a\leqslant 2e$．

通常，曲线 $y=af(x)$ 越陡，则系数 $|a|$ 越大，曲线 $y=af(x)$ 越缓，则系数 $|a|$ 越小，类比二次函数图像即可得知．

考点 5　不切于同一点的两曲线，已知公切线切一曲线的范围，求切于另一条曲线的范围．

公切线方程的等量关系：$f'(x_1)=g'(x_2)=\dfrac{f(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$

【例 10】已知曲线 $y=x^2+1$ 在点 $P(x_0,x_0^2+1)$ 处的切线为 l，若 l 也与函数 $y=\ln x,x\in(0,1)$ 的图象相切，则 x_0 满足(　　)（其中 $e=2.71828...$）

A．$1<x_0<\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{2}<x_0<\sqrt{e}$　　C．$\sqrt{e}<x_0<\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{3}<x_0<2$

解：设 $f'(x_0)=2x_0$，所以切线 l 的方程为 $y-(x_0{}^2+1)=2x_0(x-x_0)$，整理为：$y=2x_0x-x_0{}^2+1$，同时直线 l 也是函数 $y=\ln x,x\in(0,1)$ 的切线，设切点为 $(x_1,\ln x_1)$，所以切线方程为 $y-\ln x_1=\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)$，整理为 $y=\dfrac{1}{x_1}x+\ln x_1-1$，直线方程是同一方程（如图 13），那么 $\begin{cases}2x_0=\dfrac{1}{x_1}\\ -x_0{}^2+1=lnx_1-1\end{cases}$，$x_0\in(1,+\infty)$，整理为

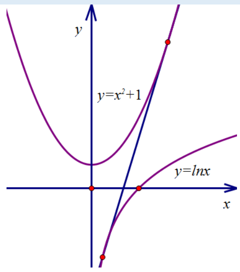


图 13

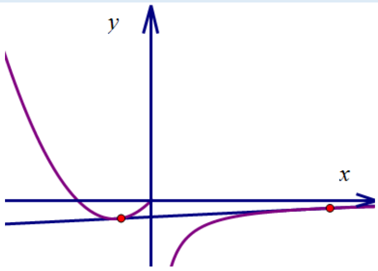


图 14

【例 11】（2017•鄂尔多斯期中）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, & x<0\\ -\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ 的图象上存在不同的两点 A、B，使得曲线 $y=f(x)$ 在这两点处的切线重合，则点 A 的横坐标的取值范围可能是(　　)

A．$(-\dfrac{1}{2},\ 0)$　　B．$(-1,-\dfrac{1}{2})$　　C．$(\dfrac{1}{2},\ 1)$　　D．$(1,2)$

解：当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+x$ 的导数为 $f'(x)=2x+1$；当 $x>0$ 时，$f(x)=-\dfrac{1}{x}$ 的导数为 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$，设 $A(x_1,\ f(x_1))$，$B(x_2,\ f(x_2))$ 为该函数图象上的两点，且 $x_1<x_2$，当 $x_1<x_2<0$，或 $0<x_1<x_2$ 时，$f'(x_1)\neq f'(x_2)$，故 $x_1<0<x_2$，当 $x_1<0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 $A(x_1,\ f(x_1))$ 处的切线方程为 $y-(x_1^2+x_1)=(2x_1+1)(x-x_1)$；当 $x_2>0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 $B(x_2,\ f(x_2))$ 处的切线方程为 $y+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{x_2{}^2}(x-x_2)$．两直线重合的充要条件是 $\dfrac{1}{x_2{}^2}=2x_1+1$①，$-\dfrac{2}{x_2}=-x_1^2$②，由 $x_1<0<x_2$ 得 $0<\dfrac{1}{x_2}<1$，由①②可得 $\dfrac{1}{4}x_1^4-2x_1-1=0$，设 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-2x-1$，由 $f(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{64}>0$，$f(0)=-1<0$，可得 $x_1\in(-\dfrac{1}{2}$，$0)$，A 可能；由 $f(-1)=\dfrac{5}{4}>0$，B 不正确；由①可得 $x_2>1$，由②可得 $\dfrac{2}{x_2}=x_1^2<\dfrac{1}{4}$，即有 $x_2>8$，则 C，D 不正确．故选 A．

秒杀解法：如图 14，易知曲线位于分段的两个区间，且两段属于一凹一凸模型，故可以类比两圆相离时的

内公切线，两区间一定属于同一单调区间，$x>0$ 时，$f\left(x\right)=-\dfrac{1}{x}$ 属于单调增区间，故当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)=x^2+x$ 的单调增区间为 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$，根据图像，$A$ 可以位于此区间，另一个点 B 所在区间 $\to+\infty$，不好把握，故选 A.

【例 12】（2018•葫芦岛一模）若对于函数 $f(x)=\ln(x+1)+x^2$ 图象上任意一点处的切线 l_1，在函数 $g(x)=a\sin x\cos x-x$ 的图象上总存在一条切线 l_2，使得 $l_1\perp l_2$，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $[\dfrac{\sqrt{2}-1}{2},1]$　　B. $[-1,\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}]$

C. $(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}]\cup[\dfrac{\sqrt{2}-1}{2},+\infty)$　　D. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

解：函数 $f(x)=\ln(x+1)+x^2$，$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+2x$，其中 $x>-1$，函数 $g(x)=a\sin x\cos x-x=\dfrac{1}{2}a\sin 2x-x$，$\therefore g'(x)=a\cos 2x-1$；要使过曲线 $f(x)$ 上任意一点的切线为 l_1，总存在过曲线 $g(x)=ax+2\cos x$ 上一点处的切线 l_2，使得 $l_1\perp l_2$，则 $(\dfrac{1}{x_1+1}+2x_1)(a\cos 2x_2-1)=-1$，$a\cos 2x_2-1=\dfrac{-1}{\dfrac{1}{1+x_1}+2x_1}$

$\because \dfrac{1}{1+x_1}+2x_1=\dfrac{1}{1+x_1}+2(x_1+1)-2\geqslant 2\sqrt{2}-2$ $\because \forall x_1$，$\exists x_2$ 使得等式成立，$\therefore(\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}，0)\subseteq[-1-|a|，-1+|a|]$，解得 $|a|\geqslant 1$，即 a 的取值范围为 $a\geqslant 1$ 或 $a\leqslant -1$. 故选 D.

达标训练

1.（2018•江岸月考）设曲线 $f(x)=a\ln x+b$ 和曲线 $g(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}+cx$ 在它们的公共点 $M(1,2)$ 处有相同的切线，则 $a+b+c$ 的值为（　　）

A. 0　　B. π　　C. -2　　D. 4

2.（2017•微山月考）已知 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+mx+\dfrac{7}{2}(m<0)$，直线 l 与函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象都相切，与 $f(x)$ 图象的切点为 $(1,f(1))$，则 m 等于（　　）

A. -1　　B. -3　　C. -4　　D. -2

3.（2017•海淀期中）函数 $f(x)=\ln x$ 与函数 $g(x)=ax^2-a$ 的图象在点 $(1,0)$ 的切线相同，则实数 a 的值为（　　）

A. 1　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$ 或 $-\dfrac{1}{2}$

4.（2018•宁城模拟）已知曲线 $y=\ln x+2$ 和曲线 $y=\ln(x+1)$ 有相同的切线，则该切线的斜率为（　　）

A. e　　B. $\sqrt{3}$　　C. $1+\ln 2$　　D. 2

5.（2017•雁塔期末）若存在过点 $O(0,0)$ 的直线 l 与曲线 $f(x)=x^3-3x^2+2x$ 和 $y=x^2+a$ 都相切，则 a 的值是（　　）

A. 1　　B. $\dfrac{1}{64}$　　C. 1 或 $\dfrac{1}{64}$　　D. 1 或 $-\dfrac{1}{64}$

6.（2017•太原一模）设函数 $f\left(x\right)=3x^2-4ax\left(a>0\right)$ 与 $g\left(x\right)=2a^2\ln x+b$ 有公共点，且在公共点处的切线方程相同，则实数 b 的最大值为（　　）

A. $\dfrac{1}{e^2}$　　B. $\dfrac{1}{2e^2}$　　C. $\dfrac{1}{3e^2}$　　D. $\dfrac{1}{4e^2}$

7. 已知曲线 $y=e^{x+a}$ 与 $y=x^2$ 恰好存在两条公切线，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $[2\ln 2-2,+\infty)$　　B. $(2\ln 2,+\infty)$

C. $(-\infty,2\ln 2-2]$　　D. $(-\infty,2\ln 2-2)$

8.（2016•荆州期中）函数 $f(x)=lnx$ 在点 $P(x_0$，$f(x_0))$ 处的切线 l 与函数 $lg(x)=e^x$ 的图象也相切，则满足条件的切点 P 的个数有（　　）

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

9.（2016•益阳模拟）若曲线 $C_1:y=ax^2(a>0)$ 与曲线 $C_2:y=e^x$ 存在公共切线，则 a 的取值范围为（　　）

A. $\left(0,\frac{e^2}{8}\right]$　　B. $\left(0,\frac{e^2}{4}\right]$　　C. $\left[\frac{e^2}{8},+\infty\right)$　　D. $\left[\frac{e^2}{4},+\infty\right)$

10.（2017•南雄二模）已知曲线 C_1：$y=x^2$ 与曲线 C_2：$y=\ln x(x>\frac{\sqrt{2}}{2})$，直线 l 是曲线 C_1 和曲线 C_2 的公切线，设直线 l 与曲线 C_1 切点为 P，则点 P 的横坐标 t 满足（　　）

A. $0<t<\frac{1}{2e}$　　B. $\frac{1}{2e}<t<\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}<t<\sqrt{2}$

11.（2018•四川模拟）已知直线 l 是曲线 $y=e^x$ 与曲线 $y=e^{2x}-2$ 的一条公切线，l 与曲线 $y=e^{2x}-2$ 切于点 (a,b)，且 a 是函数 $f(x)$ 的零点，则 $f(x)$ 的解析式可能为（　　）

A. $f(x)=e^{2x}(2x+2ln2-1)-1$　　B. $f(x)=e^{2x}(2x+2ln2-1)-2$

C. $f(x)=e^{2x}(2x-2ln2-1)-1$　　D. $f(x)=e^{2x}(2x-2ln2-1)-2$

12.（2018•盐湖模拟）设过曲线 $f(x)=-e^x-x+3a$ 上任意一点处的切线为 l_1，总存在过曲线 $g(x)=(x-1)a+2\cos x$ 上一点处的切线 l_2，使得 $l_1\perp l_2$，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $[-1,1]$　　B. $[-2,2]$　　C. $[-2,1]$　　D. $[-1,2]$

13.（2018•长沙月考）若函数 $f(x)=lnx$ 与函数 $g(x)=x^2+2x+a(x<0)$ 有公切线，则 a 的取值范围为（　　）

A. $(\ln\frac{1}{2e},+\infty)$　　B. $(-1,+\infty)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\ln 2,+\infty)$

14.（2016•辽宁期末）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+a,x<0\\ \frac{1}{x},x>0\end{cases}$ 的图象上存在不同的两点 A、B，使得曲线 $y=f(x)$ 在这两点处的切线重合，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(\frac{1}{4},1)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $(-\infty,-2)\cup(\frac{1}{4},+\infty)$　　D. $(-\infty,\frac{1}{4})$

15.（2017•红塔月考）已知曲线 $y=e^{x+a}$ 与 $y=(x-1)^2$ 恰好存在两条公切线，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,2ln2+3)$　　B. $(-\infty,2ln2-3)$　　C. $(2ln2-3,+\infty)$　　D. $(2ln2+3,+\infty)$

16. 曲线 $y=a\sqrt{x}(a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 有公共点，且在公共点处的切线相同，则 a 的值为_________.

17.（2018•全国四模）函数 $f(x)=lnx+\frac{mx}{x+1}$ 与 $g(x)=x^2+1$ 有公切线 $y=ax(a>0)$，则实数 m 的值为

_________.