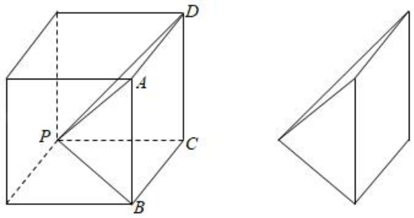
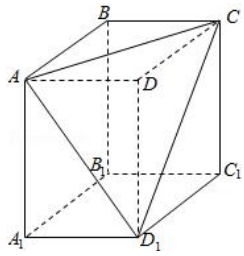
第一章 立体几何

专题 1 三视图还原之俯视图拔高法

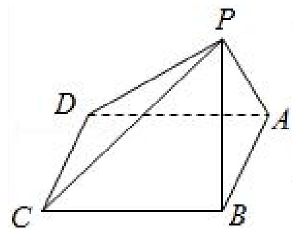
1.【解析】由三视图可得直观图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，最长的棱为 PA，即 $PA=\sqrt{PB^2+PC^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$，故选：B.



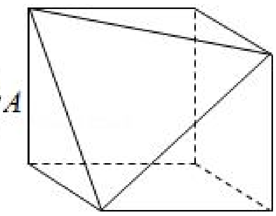
第 1 题



第 2 题



第 5 题


第 6 题

2.【解析】由主视图和俯视图可知切去的棱锥为 $D-AD_1C$，棱 CD_1 在左侧面的投影为 BA_1，故选：B.

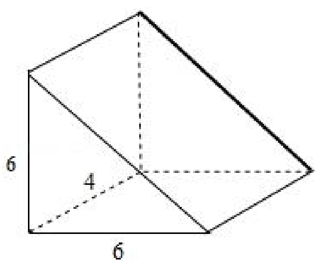
3.【解析】由已知中的三视图可得：该几何体是一个以主视图为底面的直四棱柱，即歪台，其底面面积为：$3\times6=18$，侧面的面积为：$(3\times3+3\times\sqrt{3^2+6^2})\times2=18+18\sqrt{5}$，故棱柱的表面积为：$18\times2+18+18\sqrt{5}=54+18\sqrt{5}$．故选：B.

4.【解析】根据三视图可判断该几何体是底面为直角梯形，高为 2 的直四棱柱，底面的梯形上底 1，下底 2，高为 1，

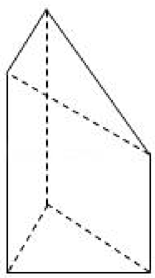
$\therefore$ 侧面为 $(4+\sqrt{2})\times2=8+2\sqrt{2}$，底面为 $\frac{1}{2}\times(2+1)\times1=\frac{3}{2}$，故表面积为 $8+2\sqrt{2}+2\times\frac{3}{2}=11+2\sqrt{2}$，故选：B.

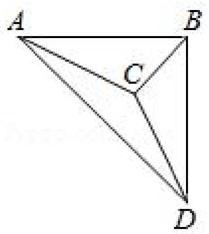
5.【解析】由三视图知：几何体是四棱锥，且四棱锥的一条侧棱与底面垂直，底面为正方形如图：其中 $PB\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为正方形 $\therefore PB=1$，$AB=1$，$AD=1$，$\therefore BD=\sqrt{2}$，$PD=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$．$PC=PA=\sqrt{2}$ 该几何体最长棱的棱长为：$\sqrt{3}$ 故选：C.

6.【解析】设正方体的棱长为 1，由三视图判断，正方体被切掉的部分为三棱锥，$\therefore$ 正方体切掉部分的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{6}$，$\therefore$ 剩余部分体积为 $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$，$\therefore$ 截去部分体积与剩余部分体积的比值为 $\frac{1}{5}$．故选：D.

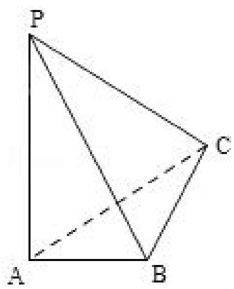


第 7 题


第 8 题



第 9 题



第 10 题

7.【解析】根据网格纸的各小格都是正方形，粗实线画出的是一个几何体的三视图，可知几何体如图：几何体是三棱柱．故选：B.

8.【解析】由三视图知：几何体是三棱柱消去一个同底的三棱锥，如图：三棱柱的高为 5，消去的三棱锥的高为 3，三棱锥与三棱柱的底面为直角边长分别为 3 和 4 的直角三角形，$\therefore$ 几何体的体积 $V=\frac{1}{2}\times3\times4\times5-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4\times3=30-6=24$．故选：C.

9.【解析】几何体的直观图如图：$AB=4$，$BD=4$，C 到 BD 的中点的距离为：4，$\therefore BC=CD=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$．$AC=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=6$，$AD=4\sqrt{2}$，显然 AC 最长．长为 6．故选：B．

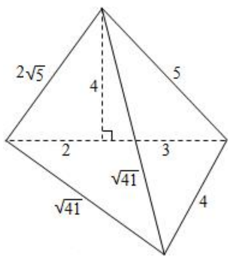
10.【解析】由三视图可知：该几何体是一个三棱锥，其中 $PA\perp$ 底面 ABC，$PA=2$，$AB\perp BC$，$AB=BC=1$．$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times BC=\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}$．因此 $V=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times PA=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{3}$．故选：B．

11．【解析】由三视图知，几何体是一个三棱锥，底面是直角边长为 $1cm$ 和 $2cm$ 的直角三角形，面积是 $\frac{1}{2}\times 1\times 2=1cm^2$，三棱锥的一条侧棱与底面垂直，且长度是 $3cm$，这是三棱锥的高，$\therefore$ 三棱锥的体积是 $\frac{1}{3}\times 1\times 3=1cm^3$，故选：A．

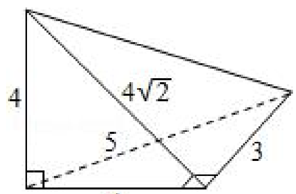
12．【解析】该几何体是三棱锥，底面是俯视图，三棱锥的高为 3．底面三角形斜边长为 6，高为 3 的等腰直角三角形，此几何体的体积为 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 6\times 3\times 3=9$．故选：B．

13．【解析】三视图复原的几何体是底面为直角边长为 4 和 5 的三角形，一个侧面垂直底面的等腰三角形，高为 4，底边长为 5，如图，所以 $S_{底}=\frac{1}{2}\times 4\times 5=10$，$S_{后}=\frac{1}{2}\times 5\times 4=10$，$S_{右}=\frac{1}{2}\times 4\times 5=10$，

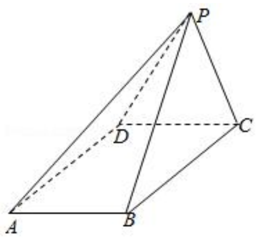
$S_{左}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\sqrt{(\sqrt{41})^2-(\sqrt{5})^2}=6\sqrt{5}$．几何体的表面积为：$S=S_{底}+S_{后}+S_{右}+S_{左}=30+6\sqrt{5}$．故选：B．



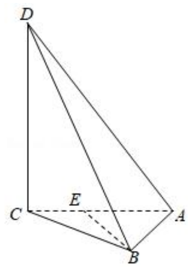
第 13 题



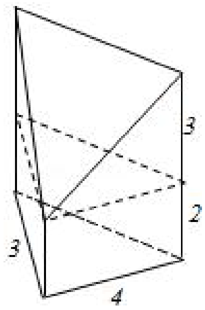
第 14 题



第 16 题



第 20 题



第 21 题

14．【解析】三视图复原的几何体是一个三棱锥，如图，四个面的面积分别为：8，6，$6\sqrt{2}$，10，显然面积的最大值，10．故选：C．

15．【解析】此几何体为一个三棱锥，其底面是边长为 6 的等腰直角三角形，顶点在底面的投影是斜边的中点

由底面是边长为 6 的等腰直角三角形知其底面积是 $\frac{1}{2}\times 6\times 6=18$，又直角三角形斜边的中点到两直角边的距离都是 3，棱锥高为 4，所以三个侧面中与底面垂直的侧面三角形高是 4，底面边长为 $6\sqrt{2}$，其余两个侧面的斜高为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$，故三个侧面中与底面垂直的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times 4\times 6\sqrt{2}=12\sqrt{2}$，另两个侧面三角形的面积都是 $\frac{1}{2}\times 6\times 5=15$，故此几何体的全面积是 $18+2\times 15+12\sqrt{2}=48+12\sqrt{2}$，故选：A．

16．【解析】如图，几何体是四棱锥，一个侧面 $PBC\perp$ 底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是正方形，$V=\frac{1}{3}\times 20\times 20\times 20=\frac{8000}{3}$．

故选：B．

17．【解析】由三视图可知几何体为三棱锥，底面为俯视图三角形，底面积 $S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 1=\sqrt{3}$，棱锥的高为 $h=1$，$\therefore$ 棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{3}$．故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{3}$．

18．【解析】由已知中的三视图可得：该几何体上部是一个以俯视图为底面四棱柱，棱柱的底面面积 $S=\frac{1}{2}\times(1+2)\times 1=\frac{3}{2}$，棱柱的高为 1，故棱柱的体积 $V=\frac{3}{2}$，故答案为：$\frac{3}{2}$

19．【解析】由已知中的三视图可得：该几何体是一个以俯视图为底面的四棱锥，棱锥的底面是底为 2，高为 1 的平行四边形，故底面面积 $S=2\times 1=2m^2$，棱锥的高 $h=3m$，故体积 $V=\frac{1}{3}Sh=2m^3$，故答案为：2

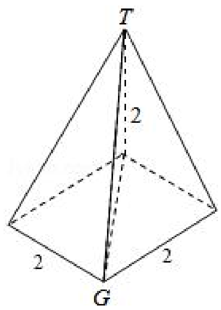
20．【解析】由主视图知 $CD\perp$ 平面 ABC，设 AC 中点为 E，则 $BE\perp AC$，且 $AE=CE=1$．由主视图知 $CD=2$ 由左视图知 $BE=1$，在 $Rt\triangle BCE$ 中，$BC=\sqrt{2}$，在 $Rt\triangle BCD$ 中，$BD=\sqrt{6}$，在 $Rt\triangle ACD$ 中，$AD=2\sqrt{2}$．三棱锥中最长棱的长为 $2\sqrt{2}$．故答案为：$2\sqrt{2}$．

21．【解析】几何体为三棱柱去掉一个三棱锥后的几何体，底面是直角三角形，直角边分别为 3，4，侧面的高为 5，被截取的棱锥的高为 3．如图：$V=V_{棱柱}-V_{棱锥}=\frac{1}{2}\times 3\times 4\times 5-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times 4\times 3=24(cm^3)$ 故答案为：24．

22．【解析】几何体为底面边长为 3 的正方形，高为 1 的四棱锥，所以体积 $V=\frac{1}{3}\times 3^2\times 1=3$．故答案为：3．

23．【解析】由三视图知，几何体是一个三棱锥，底面是直角边长为 $1cm$ 和 $3cm$ 的直角三角形，面积是 $\frac{1}{2}\times 1\times 3=\frac{3}{2}cm^2$，三棱锥的一条侧棱与底面垂直，且长度是 $2cm$，这是三棱锥的高，$\therefore$ 三棱锥的体积是 $\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times 2=1cm^3$，故答案为：1．

24．【解析】由三视图可知，此多面体是一个底面边长为 2 的正方形，且有一条长为 2 的侧棱垂直于底面的四棱锥，所以最长棱长为 $\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$．



25．【解析】根据三视图可知，几何体的体积为：$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 5\times 6\times h=5h$，又因为 $V=20$，所以 $h=4$，故答案为：4

26．【解析】这是一个三棱锥，高为 2，底面三角形一边为 4，这边上的高为 3，体积等于 $\frac{1}{6}\times 2\times 4\times 3=4$，故答案为：4

专题 2　多面体的外接球

基础自测

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	A	C	C	C	D	D	C	C	D	A	B	A	C	A
题号	15	16	17	18	19									
答案	C	C	A	C	D									

【部分解析】

15．$R_1=R_2=\dfrac{l}{2}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow R=\dfrac{5}{2}$，故 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{125\pi}{6}$，故选 C.

16．球顶高最大原理，底面为直角三角形，典型的切瓜模型，$R_1=1$，$R=\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{l}{2}=1$，故根据双半径单交线公式定理可得 $R_2=\dfrac{5}{4}$，$(h-R_2)^2=R_2{}^2-R_1{}^2\Rightarrow h=2$，故 $V_{\max}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2=\dfrac{2}{3}$，故选 C.

17．切瓜模型，BAC 的外接圆半径为 $R_1=1$，且交线 $AC=2\Rightarrow\dfrac{l}{2}=1$，故 $R=R_2=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{\sin 60°}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，故选 A.

18．和 3 题一样，属于 $\dfrac{l}{2}=R_1$ 模型，故选 C.

19．$R_1=\dfrac{l}{2}=1$，$R=R_2\Rightarrow 2R=\dfrac{2}{\sin 60°}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\Rightarrow R=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，故 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32\sqrt{3}\pi}{27}$，故选 D.

达标训练

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	D	C	C	D	B	C	D	C	B	D	D	B	D	C

15. 52π　　16. $\dfrac{630\pi}{13}$　　17. $2\sqrt{2}$　　18. 12π

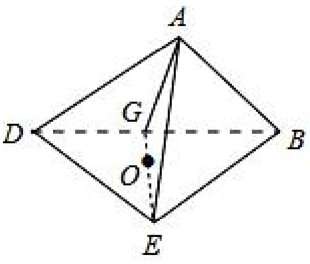
【部分解析】

1.【解析】法一：按照直三棱柱切割体模型理解，$h=2$，且 $r=1$，$R=\sqrt{(\dfrac{h}{2})^2+r^2}=\sqrt{2}$，该几何体外接球的表面积为 $4\pi\times(\sqrt{2})^2=8\pi$．故选 D．

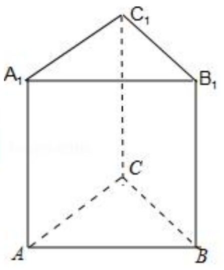
法二：垂直平面模型，按照双半径单交线公式 $R_1=1=\dfrac{l}{2}$，$R_2=R=\sqrt{2}$，故选 D．

2.【解析】如图，由 $AB=1,DA=\sqrt{3}$，$BD=2$，得 $AD\perp AB$，取 BD 中点 G，则 G 为 ΔABD 的外心，设正三角形 BDE 得外心为 O，可知当平面 $ABD\perp$ 平面 BDE 时，满足球顶高最大模型，此时三棱锥 $E-ABD$ 的外接球的半径有最小值为 $OE=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$．$\therefore$ 三棱锥 $E-ABD$ 的外接球的最小表面积为 $4\pi\times(\dfrac{2\sqrt{3}}{3})^2=\dfrac{16\pi}{3}$．

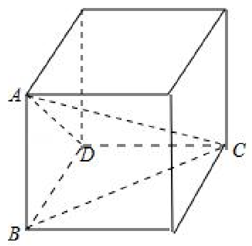
故选 C．



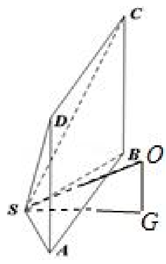
第 2 题



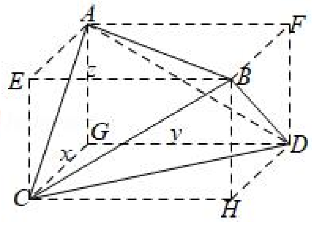
第 3 题



第 4 题



第 5 题



第 6 题

3. 【解析】如图，两两垂直为长方体切割体模型，设 $AB=AC=x$， $AA_1=y$，则三棱柱的侧面积为 $2xy+\sqrt{2}xy=\sqrt{2}+1$，得 $xy=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．把三棱锥补形为长方体，则其对角线长为 $\sqrt{2x^2+y^2}\geqslant\sqrt{2\sqrt{2}xy}=\sqrt{2}$．当且仅当 $\sqrt{2}x=y$，即 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $y=1$ 时上式取“=”．$\therefore$ 三棱锥外接球半径的最小值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，表面积的最小值为 $4\pi\times(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2=2\pi$．故选：$C$．

4. 【解析】鳖臑模型，由题意，四面体有四个面都为直角三角形，四面体放到长方体中，$AB\perp$ 平面 BCD，$AB=BD=CD=2$，可得长方体的对角线为 $\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$．$\therefore$ 球 O 的半径 $R=\sqrt{3}$．球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=12\pi$．故选 D．

5. 【解析】法一：由于四边形 $ABCD$ 为矩形，得 $AB\perp AD$，又 $SA\perp AD$，且 $SA\cap AB=A$，$\therefore AD\perp$ 平面 SAB，则平面 $SAB\perp$ 平面 $ABCD$，设三角形 SAB 的外心为 G，则 $r=GA=\dfrac{AB}{2\sin\angle ASB}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sin120^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$．过 G 作 $GO\perp$ 底面 SAB，且 $OG=\dfrac{h}{2}=1$，则 $OS=\sqrt{r^2+(\dfrac{h}{2})^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$．$\therefore S=4\pi\times(\sqrt{5})^2=20\pi$．故选 B．

法二：双半径交单线模型：设三角形 SAB 的外接圆 $R_1=\dfrac{AB}{2\sin\angle ASB}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sin120^\circ}=2$， $ABCD$ 为矩形，故其外接圆 $R_2=2$， $\dfrac{l}{2}=\sqrt{3}$，故 $R^2=R_1{}^2+R_2{}^2-\dfrac{l^2}{4}=5$， $\therefore S=4\pi\times5=20\pi$．故选 B．

6. 【解析】对边相等的四面体，还原为长方体，如图所示，将四面体 $ABCD$ 放在长方体 $AEBF-GCHD$ 内，

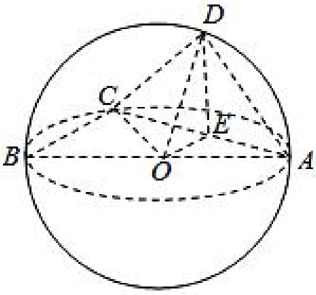
7. 设该长方体的长、宽、高分别为 x、y、z，则长方体的体对角线长即为长方体的外接球直径，设该长方体的外接球半径为 R，由勾股定理得 $\begin{cases}AB^2=x^2+y^2=3\\AC^2=x^2+z^2=4\\AD^2=y^2+z^2=5\end{cases}$，上述三个等式全加得 $2(x^2+y^2+z^2)=12$，所以，该四面体的外接球直径为 $2R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{6}$，因此，四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=\pi\times(2R)^2=6\pi$，故选 C．

8. 【解析】法一：如图：$AB=4$，$AD=CD=2$，$\therefore AC=2\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{2}$，取 AC 的中点 E，AB 的中点 O，连结 DE，OE，$\because$ 平面 $DCA\perp$ 平面 ACB，$DE\perp AC$ $\therefore DE\perp$ 平面 ACB，$\because DE=\sqrt{2}$，$OE=\sqrt{2}$，$\therefore OD=2$，

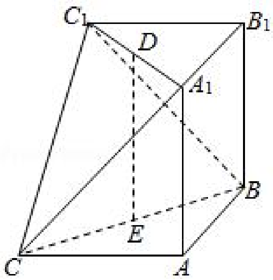
$\therefore OB=OA=OC=OD$，$\therefore OB=2$，即外接球的半径为 2，此时三棱锥外接球的表面积为 $4\pi\bullet 2^2=16\pi$．

故选 D．

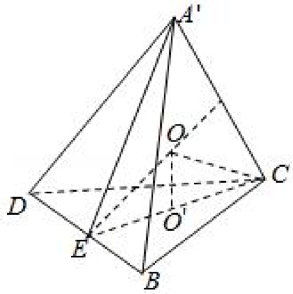
法二：两半平面垂直用双半径单交线模型：$R_1=\frac{l}{2}=\sqrt{2}$，故 $R=R_2=\frac{AB}{2}=2$，$S=4\pi\bullet 2^2=16\pi$，故选 D·



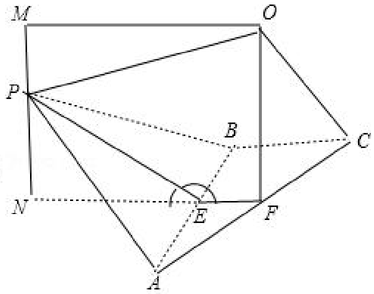
第 7 题



第 8 题



第 9 题



第 10 题

8.【解析】由题意，多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 为棱长为 $\sqrt{2}$ 的正方体，切去一个角，$\therefore$ 多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的直径为 $\sqrt{3}\bullet\sqrt{2}=\sqrt{6}$，半径为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\therefore$ 多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\bullet(\frac{\sqrt{6}}{2})^2=6\pi$．

故选：C．

9. 【解析】法一：如图，由题意可知，$A'B=A'D=BD=BC=CD=2$，$A'C=\sqrt{3}$，取 BD 的中点 E，连接 EC，设球心为 O，连接 EO，CO，O' 为底面 BCD 的中心，连接 OO'，$OO'\perp$ 底面 BCD，可得 $OO'\perp CE$，且 $CE=A'E=A'C=\sqrt{3}$，即有 $OE\perp A'C$，且直角三角形 OEO' 中，$\angle OEC=30^\circ$，$O'E=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$O'C=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$OO'=O'E\tan 30^\circ=\frac{1}{3}$，即有 $R=OC=\sqrt{(\frac{1}{3})^2+(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}$，则 $A'-BCD$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=\frac{52\pi}{9}$，

故选 A．

法二：此为两个全等的等腰三角形共底边构成的外接球模型，且二面角 $\alpha=60^\circ$，底面 BCD 外接圆半径 $r=\frac{BD}{2\sin 60^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，高为 $h=\sqrt{3}$，故 $R=\sqrt{r^2+(h-r)^2\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{13}}{3}$，故选 A.

10.【解析】法一：取 AB 中点 E，AC 中点 F，易知 $AB\perp EF$，$AB\perp EP$，$\therefore\angle PEF=150^\circ$，且平面 $PEF\perp$ 平面 ABC，$\therefore$ 作 $PN\perp EF$ 交 FE 的延长线于 N，则 $PN\perp$ 平面 ABC，球心 O 在过 F 与平面 ABC 垂直的直线上如图：作 $OM\perp PN$ 于 M，设 $OF=x$，由已知条件可得 $FC=\frac{\sqrt{11}}{2}$，$EF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$EN=PE\cos 30^\circ=2\sqrt{3}$，

$PN=PE\sin 30^\circ=2$，从而 $PM=x-2$，$OM=EF+EN=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，在直角三角形 OMP 中，

$OP^2=(x-2)^2+(\frac{5\sqrt{3}}{2})^2$，在直角三角形 OFC 中，$OC^2=x^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2$ 由 $OP^2=OC^2$ 解得 $x=5$，

$\therefore OC^2=\frac{111}{4}$，$\therefore S_{球}=4\pi OC^2=111\pi$，故选 D．

法二：二面角模型用双距离单交线公式，以法一的图为基准，可以发现 $m=|EF|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$R_2=\frac{|PB|}{2\sin\angle PAB}=\frac{9}{4}$，

$n=h-R_2=\frac{7}{4}$，$\frac{l}{2}=\sqrt{2}$，$\alpha=150^\circ$，故 $R^2=\frac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{l^2}{4}=\frac{111}{4}$，故 $S=4\pi R^2=111\pi$，故选：D．

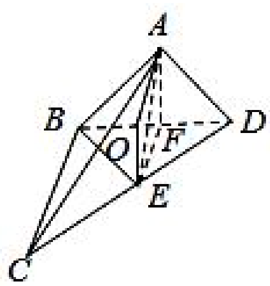
11.【解析】法一：取 AC 中点 D，连接 SD，BD，则由 $AB=BC$，$SA=SC$ 得出 $SD\perp AC$，$BD\perp AC$，$\therefore\angle SDB$ 为 $S-AC-B$ 的平面角，且 $AC\perp$ 面 SBD．$\because AB=BC=\sqrt{2}$，$AC=2$，易得：ΔABC 为等腰直角三角形，又 $\because BD\perp AC$，故 $BD=AD=\frac{1}{2}AC$，在 ΔSBD 中，$BD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 2=1$，在 ΔSAC 中，$SD^2=SA^2-AD^2=3$，在 ΔSBD 中，由余弦定理得 $SB^2=SD^2+BD^2-2SD\bullet BD\cos\angle SDB=3+1-2\times\sqrt{3}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2$，满足 $SB^2=SD^2-BD^2$，$\therefore\angle SBD=90^\circ$，$SB\perp BD$，又 $SB\perp AC$，$BD\cap AC=D$，$\therefore SB\perp$ 面 ABC．

以 SB，BA，BC 为棱可以补成一个棱长为 $\sqrt{2}$ 的正方体，S、A、B、C 都在正方体的外接球上，正方体的对角线为球的一条直径，所以 $2R=\sqrt{3}\times\sqrt{2}$，$R=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\therefore$ 球的表面积 $S=4\pi\times(\frac{\sqrt{6}}{2})^2=6\pi$．故选：$D$．

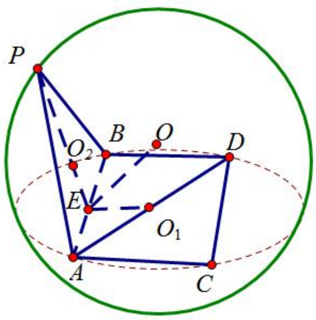
法二：根据双距离单交线公式，$m=0$，$n=\frac{1}{3}|SD|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{l}{2}=1$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 故 $R^2=\frac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{l^2}{4}=\frac{3}{2}$，故 $S=4\pi R^2=6\pi$，故选 D．

12.【解析】法一：取 CD 中点 E，BD 中点 F，连结 BE、AF、EF，$\because$ 四面体 $ABCD$ 中，面 ABD 和面 BCD 都是等腰 $Rt\triangle$，$AB=\sqrt{2}$，$\angle BAD=\angle CBD=\frac{\pi}{2}$，且二面角 $A-BD-C$ 的大小为 $\frac{5\pi}{6}$，$\therefore AF\perp BD$，$EF\perp BD$，$\therefore\angle AFE$ 是二面角 $A-BD-C$ 的平面角，$\angle AFE=\frac{5\pi}{6}$，$BD=BC=\sqrt{2+2}=2$，$CD=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$，$CE=DE=\sqrt{2}$，$AF=BF=DF=EF=1$，$EF=\frac{1}{2}BC=1$，则点 E 为 ΔBCD 外接圆的圆心，点 F 为 ΔABD 外接圆的圆心，过点 E 作平面 BCD 的垂线 EO，过点 F 作平面 ABD 的垂线 FO，且直线 EO 与直线 FO 交于点 O，则点 O 为四面体 $ABCD$ 外接球的球心，易知 $\angle AFO=\angle OEF=\frac{\pi}{2}$，$\angle OFE=\angle AFE-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$，所以，$OF=\frac{EF}{\cos\angle OFE}=2$，所以，$OA=\sqrt{AF^2+OF^2}=\sqrt{5}$，则四面体 $ABCD$ 的外接球半径为 $\sqrt{5}$，因此，球 O 的表面积为 $4\pi\bullet(\sqrt{5})^2=20\pi$，故选 B．

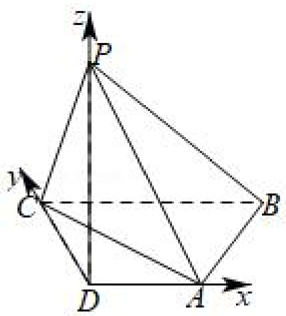
法二：双距离单交线公式，$m=|EF|=1$，，$n=0$，$\frac{l}{2}=1$，$\alpha=\frac{5\pi}{6}$，故 $R^2=\frac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{l^2}{4}=5$，故 $S=4\pi R^2=20\pi$，故选 B．



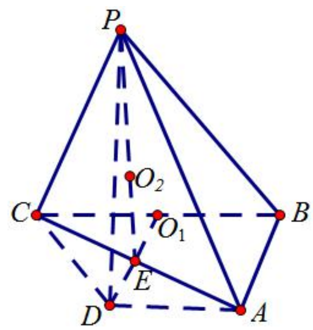
12 题图



13 题图



14 题图 1



14 题图 2

13.【解析】作出直观图，易知底面为一个矩形，故 $R_1=|AO_1|=2\sqrt{2}$，$m=|O_1E|=2$，在 ΔPAB 中，$|PE|=4$，

$|PA|=\sqrt{PE^2+AE^2}=2\sqrt{5}$，$R_2=\dfrac{|PA|}{2\sin\angle PBA}=\dfrac{5}{2}$，$n=|PE|-R_2=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{l}{2}=2$，根据正视图可知：$\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$，$R^2=\dfrac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{l^2}{4}=\dfrac{49}{3}$，故 $S=4\pi R^2=\dfrac{196}{3}\pi$，故选 D．

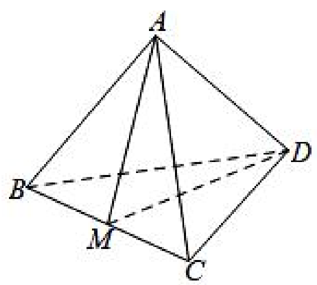
14.【解析】法一：作出该棱锥的实物图如图 1 所示，该几何体为三棱锥 $P-ABC$，且 ΔABC 为等腰直角三角形，腰长为 $BC=2$，过点 P 作 $PD\perp$ 平面 ABC，则 $AD\perp CD$，以点 D 为坐标原点，DA、DC、DP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyx$，则点 $A(1，0，0)$、$B(2，1，0)$、$C(0，1，0)$、$P(0，0，2)$，设球心的坐标为 $(x，y，z)$，则 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+z^2=(x-2)^2+(y-1)^2+z^2\\ x^2+(y-1)^2+z^2=(x-2)^2+(y-1)^2+z^2\\ x^2+y^2+(z-2)^2=(x-2)^2+(y-1)^2+z^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=\dfrac{5}{4}\end{cases}$，

所以，该棱锥的外接球的半径为 $R=\sqrt{0^2+1^2+(\dfrac{5}{4})^2}=\dfrac{\sqrt{41}}{4}$，因此，该棱锥的外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=\dfrac{41}{4}\pi$．故选：$C$．

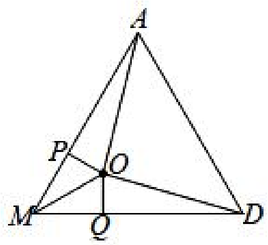
法二：如图 2 所示，根据俯视图可知 O_1 位于 BC 边中点位置，E 为 AC 边中点，$m=|O_1E|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，在 ΔPAC 中，$|PE|=\sqrt{PD^2+DE^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$|CE|=\dfrac{l}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{O_2C^2-O_2E^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2}-n\right)^2-n^2}\Rightarrow n=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，根据 PED 可知：

$\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$，$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$R^2=\dfrac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{l^2}{4}=\dfrac{41}{16}$，故 $S=4\pi R^2=\dfrac{41}{4}\pi$，故选：$C$．

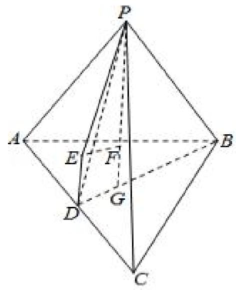
15.【解析】如图 1 所示，取 BC 的中点 M，连接 AM、DM，则 $AM\perp BC$，且 $DM\perp BC$，所以，二面角 $A-BC-D$ 的平面角为 $\angle AMD=60°$，且 $AM=DM=AB\sin 60°=3\sqrt{3}$，则 ΔADM 是边长为 $3\sqrt{3}$ 的正三角形，



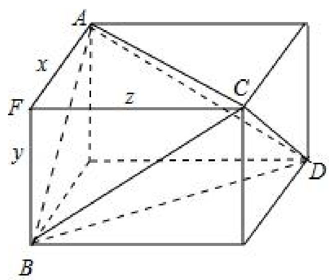
15 题图 1



15 题图 2



16 题图



17 题图

法一：如图 2 所示，符合两全等的等腰三角形共底边模型，设 ΔABC 和 ΔBCD 的外心分别为点 P、Q，则 $h-r=PM=QM=\dfrac{1}{3}AM=\sqrt{3}$，过点 P、Q 在平面 ADM 内作 AM 和 DM 的垂线交于点 O，则 O 为该三棱锥的外接球球心，易知，$\dfrac{\alpha}{2}=\angle OMP=30°$，所以，$OP=PM\cdot\tan 30°=1$，$PA=\dfrac{2}{3}AM=2\sqrt{3}$，所以，球 O 的半径为 $OA=\sqrt{(h-r)^2\tan^2\dfrac{\alpha}{2}+r^2}=\sqrt{OP^2+PA^2}=\sqrt{13}$，因此，$S=4\pi\times(\sqrt{13})^2=52\pi$．故答案为 52π．

法二：$m=n=\frac{1}{3}|AM|=\sqrt{3}$，$\frac{l}{2}=|MC|=3$，$\alpha=60^\circ$，$R^2=\frac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{l^2}{4}=13$，

$S=4\pi\times(\sqrt{13})^2=52\pi$．故答案为 52π．

16.【解析】法一：取 AC 中点 D，连结 BD，PD，$\because$ 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$AB=BC=3\sqrt{2}$，侧面 PAC 为正三角形，且顶点 P 在底面上的射影落在 ΔABC 的重心 G 上，

$\therefore AD=DC=BD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2}=3$，$\therefore DG=1$，$BG=2$，$PD=\sqrt{PA^2-AD^2}=3\sqrt{3}$，

$PG=\sqrt{PD^2-DG^2}=\sqrt{26}$，设三棱锥 $P-ABC$ 外接球球心为 E，由 $ED\perp$ 平面 ABC，作 $EF\perp PG$ 交 PG 于 F，

则 $PE=AE=R$，设 $DE=x$，$PF=\sqrt{26}-x$，$\therefore\sqrt{1^2+(\sqrt{26}-x)^2}=\sqrt{3^2+x^2}$，解得 $x=\frac{9}{\sqrt{26}}$，

$\therefore R=\sqrt{9+\frac{81}{26}}=\sqrt{\frac{315}{26}}$，$\therefore$ 该三棱锥的外接球的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times\frac{315}{26}=\frac{630\pi}{13}$．故答案为：$\frac{630\pi}{13}$．

法二：显然底面的 $m=0$，$n=\frac{1}{3}|PD|=\sqrt{3}$，二面角大小 $\cos\alpha=\frac{|DG|}{|PD|}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$，$\sin^2\alpha=\frac{26}{27}$，$\frac{l}{2}=|AC|=3$，

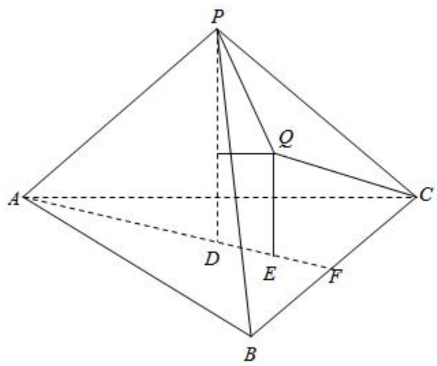
$R^2=\frac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{l^2}{4}=\frac{315}{26}$，$S=4\pi R^2=4\pi\times\frac{315}{26}=\frac{630\pi}{13}$．故答案为：$\frac{630\pi}{13}$．

17.【解析】由题意可知，四面体 $ABCD$ 的对棱都相等，故该四面体可以通过补形补成一个长方体，如图所示：设 $AF=x$，$BF=y$，$CF=z$，则 $\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{5}$，又 $4\pi\times(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2})^2=9\pi$，

可得 $x=y=2$，$\therefore a=\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{2}$．故答案为：$2\sqrt{2}$．

18.【解析】如图，三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=BC=AC=3$，$\angle PAC=\angle PAB$，$PA=2$，E 为 ΔABC 外接圆的圆心，则 $AE=\frac{2}{3}\sqrt{3^2-(\frac{3}{2})^2}=\frac{2}{3}\bullet\frac{3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$PA$ 与平面 ABC 所成角 $\angle PAF$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，即

$\cos\angle PAF=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AD$ 的长度为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$．则 PA 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，$PD=PA\bullet\sin\angle PAD=2\bullet\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$．设外接球的球心为 O 半径为 r，则 $r^2=EO^2+AE^2$，……① $(PD-OE)^2+ED^2=r^2$……②



由①②解得：$r=\sqrt{3}$，三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 $S=4\pi r^2=12\pi$．故答案为：12π．(此题依然可以用双距离单交线公式，此处省略具体过程)

专题3 多面体的内切球

1． A； 2． C； 3． A； 4． $\frac{4\pi}{81}$； 5． $\frac{32\pi}{81}$；

6． $\sqrt{15}-2\sqrt{3}$； 7． $24\pi-8\sqrt{2}\pi$； 8． $\sqrt{6}\pi$； 9． $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$； 10． $\frac{2\pi}{3}$.

专题4 线面平行和面面平行的判定及性质

达标训练 1

一．选择题（共 19 小题）

1．B； 2．D； 3．B； 4．D； 5．D； 6．B； 7．C； 8．B； 9．A； 10．D； 11．C； 12．D； 13.C； 14．C； 15．B； 16．D； 17．D； 18．D； 19．B；

二．填空题（共 1 小题）

20．P 是 CC_1 中点；

达标训练 2

一．选择题（共 6 小题）

1．A； 2．A； 3．B； 4．C； 5．D； 6．D；

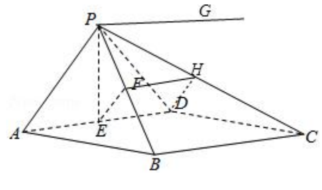
二．填空题（共 1 小题）

7． $\sqrt{2}$；

专题5 线面平行与面面平行解答题

1.【证明】(1) 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB//A_1B_1$，$AB//A_1B_1$，$AB\not\subset$ 平面 A_1B_1C，$A_1B_1\subset//$ 平面 $A_1B_1C\Rightarrow AB//$ 平面 A_1B_1C.

2.【解析】存在 P 是 AM 的中点，理由：连接 BD 交 AC 于 O，取 AM 的中点 P，连接 OP，可得 $MC//OP$，$MC\not\subset$ 平面 BDP，$OP\subset$ 平面 BDP，所以 $MC//$ 平面 PBD.



3.【解析】取 PC 的中点 H，连接 DH，FH，在三角形 PCD 中，FH 为中位线，

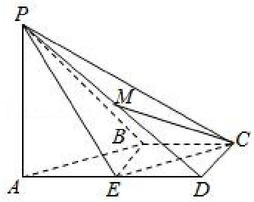
可得 $FH//BC$，$FH=\frac{1}{2}BC$，由 $DE//BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$，可得 $DE=FH$，$DE//FH$，

四边形 $EFHD$ 为平行四边形，可得 $EF//DH$，$EF\not\subset$ 平面 PCD，$DH\subset$ 平面 PCD，即有 $EF//$ 平面 PCD.

4.【证明】取 B_1D_1 中点 G，连结 A_1G、CG，$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，O 为 AC 与 BD 的交点，$\therefore$ 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 后，$A_1G\underline{\parallel}OC$，$\therefore$ 四边形 $OCGA_1$ 是平行四边形，$\therefore A_1O//CG$，$\because A_1O\not\subset$ 平面 B_1CD_1，$CG\subset$ 平面 B_1CD_1，$\therefore A_1O//$ 平面 B_1CD_1.

5.【证明】$\because D$，E 分别为 AB，BC 的中点，$\therefore DE$ 为 ΔABC 的中位线，$\therefore DE//AC$，$\because ABC-A_1B_1C_1$ 为棱柱，$\therefore AC//A_1C_1$，$\therefore DE//A_1C_1$，$\because A_1C_1\subset$ 平面 A_1C_1F，且 $DE\not\subset$ 平面 A_1C_1F，$\therefore DE//A_1C_1F$.

6.【证明】M 为 PD 的中点，直线 $CM//$ 平面 PAB．取 AD 的中点 E，连接 CM，ME，CE，则 $ME//PA$，



$\because ME\not\subset$ 平面 PAB，$PA\subset$ 平面 PAB，$\therefore ME//$ 平面 PAB．

$\because AD//BC$，$BC=AE$，$\therefore ABCE$ 是平行四边形，$\therefore CE//AB$．

$\because CE\not\subset$ 平面 PAB，$AB\subset$ 平面 PAB，$\therefore CE//$ 平面 PAB．

$\because ME\cap CE=E$，$\therefore$ 平面 $CME//$ 平面 PAB，

$\because CM\subset$ 平面 CME，$\therefore CM//$ 平面 PAB

若 M 为 AD 的中点，连接 CM，由四边形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$\angle ADC=\angle PAB=90^\circ$，$BC=CD=\frac{1}{2}AD$．

可得四边形 $ABCM$ 为平行四边形，即有 $CM//AB$，$CM\not\subset$ 平面 PAB，$AB\subset$ 平面 PAB，$\therefore CM//$ 平面 PAB．

7.【证明】连接 A_1B，在$\triangle A_1BC$ 中，$\because E$ 和 F 分别是 BC 和 A_1C 的中点，$\therefore EF//A_1B$，

又$\because A_1B\subset$ 平面 A_1B_1BA，$EF\not\subset$ 平面 A_1B_1BA，$\therefore EF//$ 平面 A_1B_1BA．

8.【证明】证法一：如图所示，连接 DG，CD，设 $CD\cap GF=M$，连接 MH．

在三棱台 $DEF-ABC$ 中，$AB=2DE$，G 为 AC 的中点．$\therefore DF\underset{=}{//}GC$，$\therefore$ 四边形 $CFDG$ 是平行四边形，

$\therefore DM=MC$．又 $BH=HC$，$\therefore MH//BD$，又 $BD\not\subset$ 平面 FGH，$MH\subset$ 平面 FGH，$\therefore BD//$ 平面 FGH．

证法二：在三棱台 $DEF-ABC$ 中，$AB=2DE$，H 为 BC 的中点．$\therefore BH\underset{=}{//}EF$，

$\therefore$ 四边形 $BHFE$ 为平行四边形．$\therefore BE//HF$．在 ΔABC 中，G 为 AC 的中点，H 为 BC 的中点，$\therefore GH//AB$，

又 $GH\cap HF=H$，$\therefore$ 平面 $FGH//$ 平面 $ABED$，$\because BD\subset$ 平面 $ABED$，$\therefore BD//$ 平面 FGH．

9.【证明】$\because D$、E 为 PC、AC 的中点，$\therefore DE//PA$，又$\because PA\not\subset$ 平面 DEF，$DE\subset$ 平面 DEF，$\therefore PA//$ 平面 DEF．

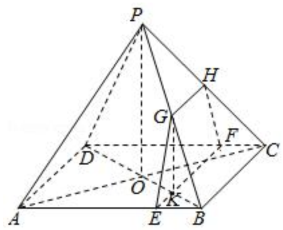
10.【证明】连接 CE，则$\because AD//BC$，$BC=\frac{1}{2}AD$，E 为线段 AD 的中点，$\therefore$ 四边形 $ABCE$ 是平行四边形，

$BCDE$ 是平行四边形，

设 $AC\cap BE=O$，连接 OF，则 O 是 AC 的中点，$\because F$ 为线段 PC 的中点，$\therefore PA//OF$，

$\because PA\not\subset$ 平面 BEF，$OF\subset$ 平面 BEF，$\therefore AP//$ 平面 BEF．

11.【证明】(1) $\because BC//$ 平面 $GEFH$，平面 $GEFH\cap$ 平面 $ABCD=EF$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore BC//EF$，$\because EF\not\subset$ 平面 PBC，$BC\subset$ 平面 PBC，$\therefore EF//$ 平面 PBC，



$\because$ 平面 $EFGH\cap$ 平面 $PBC=GH$，$\therefore EF//GH$．

【解析】(2) 连接 AC，BD 交于点 O，BD 交 EF 于点 K，连接 OP，GK．

$\because PA=PC$，O 为 AC 中点，$\therefore PO\perp AC$，同理可得 $PO\perp BD$，

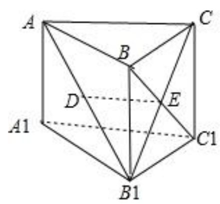
又$\because BD\cap AC=O$，$AC\subset$ 底面 $ABCD$，$BD\subset$ 底面 $ABCD$，$\therefore PO\perp$ 底面 $ABCD$，

又$\because$ 平面 $GEFH\perp$ 平面 $ABCD$，$PO\not\subset$ 平面 $GEFH$，$\therefore PO//$ 平面 $GEFH$，

$\because$ 平面 $PBD\cap$ 平面 $GEFH=GK$，$\therefore PO//GK$，且 $GK\perp$ 底面 $ABCD$ $\therefore GK$ 是梯形 $GEFH$ 的高

$\because AB=8$，$EB=2$，$\therefore \frac{EB}{AB}=\frac{KB}{DB}=\frac{1}{4}$，$\therefore KB=\frac{1}{4}DB=\frac{1}{2}OB$，即 K 为 OB 中点，

又$\because PO//GK$，$\therefore GK=\frac{1}{2}PO$，即 G 为 PB 中点，且 $GH=\frac{1}{2}BC=4$，



由已知可得 $OB=4\sqrt{2}$，$PO=\sqrt{PB^2-OB^2}=\sqrt{68-32}=6$，$\therefore GK=3$，

故四边形 $GEFH$ 的面积 $S=\frac{1}{2}(GH+EF)\times GK=\frac{1}{2}(4+8)\times 3=18$．

12.【证明】如上图所示，由据题意得，E 为 B_1C 的中点，D 为 AB_1 的中点，所以 $DE//AC$．

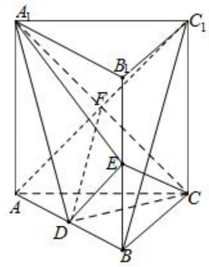
又因为 $DE \not\subset$ 平面 AA_1C_1C，$AC \subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $DE//$ 平面 AA_1C_1C.

13.【证明】(1) 证明：连接 AC_1 交 A_1C 于点 F，则 F 为 AC_1 的中点.

$\because$ 直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D，E 分别是 AB，BB_1 的中点，故 DF 为三角形 ABC_1 的中位线，故 $DF//BC_1$.

由于 $DF \subset$ 平面 A_1CD，而 BC_1 不在平面 A_1CD 中，故有 $BC_1//$ 平面 A_1CD.

【解析】(2) $\because AA_1=AC=CB=2$，$AB=2\sqrt{2}$，故此直三棱柱的底面 ABC 为等腰直角三角形.



由 D 为 AB 的中点可得 $CD\perp$ 平面 ABB_1A_1，$\therefore CD=\dfrac{AC\bullet BC}{AB}=\sqrt{2}$.

$\because A_1D=\sqrt{A_1A^2+AD^2}=\sqrt{6}$，同理，利用勾股定理求得 $DE=\sqrt{3}$，$A_1E=3$.

再由勾股定理可得 $A_1D^2+DE^2=A_1E^2$，$\therefore A_1D\perp DE$.

$\therefore S_{\triangle A_1DE}=\dfrac{1}{2}\bullet A_1D\bullet DE=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore V_{C-A_1DE}=\dfrac{1}{3}\bullet S_{\triangle A_1DE}\bullet CD=1$.

专题 6 线面垂直的判定与证明

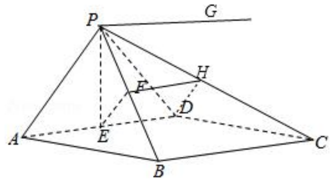
1.【证明】在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB$，$\Rightarrow$ 四边形 ABB_1A_1 是菱形，$\perp AB_1\perp A_1B$.

在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB$，$AB_1\perp B_1C_1\Rightarrow AB_1\perp BC$.

$$\therefore \begin{cases} AB_1\perp A_1B, AB_1\perp BC \\ A_1B\cap BC=B \\ A_1B\subset \text{面}A_1BC, BC\subset\text{面}A_1BC \end{cases} \Rightarrow AB_1\perp \text{面 } A_1BC\text{，且 } AB_1\subset \text{平面 } ABB_1A_1 \Rightarrow \text{平面 } ABB_1A_1\perp \text{平面 } A_1BC.$$

2.【证明】矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弦 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直，所以 $AD\perp$ 半圆弦 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面，$CM\subset$ 半圆弦 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面，$\therefore CM\perp AD$，M 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C，D 的点. $\therefore CM\perp DM$，$DM\cap AD=D$，$\therefore CM\perp$ 平面 AMD，$CM\subset$ 平面 CMB，$\therefore$ 平面 $AMD\perp$ 平面 BMC；

3.【证明】(1) $PA=PD$，E 为 AD 的中点，可得 $PE\perp AD$，底面 $ABCD$ 为矩形，可得 $BC//AD$，则 $PE\perp BC$；



(2) 由于平面 PAB 和平面 PCD 有一个公共点 P，且 $AB//CD$，在平面 PAB 内过 P 作直线 $PG//AB$，

可得 $PG//CD$，即有平面 $PAB\cap$ 平面 $PCD=PG$，

由平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，又 $AB\perp AD$，可得 $AB\perp$ 平面 PAD，即有 $AB\perp PA$，

$PA\perp PG$；同理可得 $CD\perp PD$，即有 $PD\perp PG$，

可得 $\angle APD$ 为平面 PAB 和平面 PCD 的平面角，由 $PA\perp PD$，可得平面 $PAB\perp$ 平面 PCD；

4.【证明】(1) $\because$ 在平行四边形 $ABCM$ 中，$\angle ACM=90°$，$\therefore AB\perp AC$，又 $AB\perp DA$. 且 $AD\cap AC=A$，

$\therefore AB\perp$ 面 ADC，$\therefore AB\subset$ 面 ABC，$\therefore$ 平面 $ACD\perp$ 平面 ABC；

(2) $\because AB=AC=3$，$\angle ACM=90°$，$\therefore AD=AM=3\sqrt{2}$，$\therefore BP=DQ=\dfrac{2}{3}DA=2\sqrt{2}$，

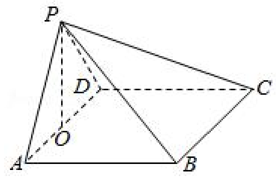
由 (1) 得 $DC\perp AB$，又 $DC\perp CA$，$\therefore DC\perp$ 面 ABC，$\therefore$ 三棱锥 $Q-ABP$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABP}\times\dfrac{1}{3}DC$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}S_{\Delta ABC}\times\dfrac{1}{3}DC=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times3\times\dfrac{1}{3}\times3=1$.

5.【证明】(1) $\because$ 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$，$\therefore AB\perp PA$，$CD\perp PD$，

又 $AB//CD$，$\therefore AB\perp PD$，$\because PA\cap PD=P$，$\therefore AB\perp$ 平面 PAD，

$\because AB\subset$ 平面 PAB，$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PAD .



(2) 设 $PA=PD=AB=DC=a$，取 AD 中点 O，连结 PO，

$\because PA=PD=AB=DC$，$\angle APD=90^\circ$，平面 $PAB\perp$ 平面 PAD，

$\therefore PO\perp$ 底面 $ABCD$，且 $AD=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$，$PO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

$\because$ 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\dfrac{8}{3}$，由 $AB\perp$ 平面 PAD，得 $AB\perp AD$，$\therefore V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}\times S_{\text{四边形}ABCD}\times PO$

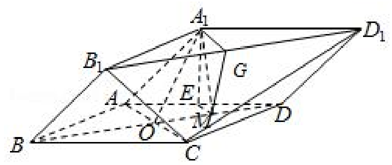
$=\dfrac{1}{3}\times AB\times AD\times PO=\dfrac{1}{3}\times a\times\sqrt{2}a\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=\dfrac{1}{3}a^3=\dfrac{8}{3}$，解得 $a=2$，$\therefore PA=PD=AB=DC=2$，$AD=BC=2\sqrt{2}$，

$PO=\sqrt{2}$，$\therefore PB=PC=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$，$\therefore$ 该四棱锥的侧面积：$S_{\text{侧}}=S_{\Delta PAD}+S_{\Delta PAB}+S_{\Delta PDC}+S_{\Delta PBC}$

$=\dfrac{1}{2}\times PA\times PD+\dfrac{1}{2}\times PA\times AB+\dfrac{1}{2}\times PD\times DC+\dfrac{1}{2}\times BC\times\sqrt{PB^2-(\dfrac{BC}{2})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\times2\times2+\dfrac{1}{2}\times2\times2+\dfrac{1}{2}\times2\times2+\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{8-2}=6+2\sqrt{3}$.

6.【证明】四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 后，$BD\underset{=}{//}B_1D_1$，



$\because M$ 是 OD 的中点，O 为 AC 与 BD 的交点，E 为 AD 的中点，$A_1E\perp$ 平面 $ABCD$，

又 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore BD\perp A_1E$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，O 为 AC 与 BD 的交点，$\therefore AO\perp BD$，

$\because M$ 是 OD 的中点，E 为 AD 的中点，$\therefore EM\perp BD$，

$\because A_1E\cap EM=E$，$\therefore BD\perp$ 平面 A_1EM，

$\because BD//B_1D_1$，$\therefore B_1D_1\perp$ 平面 A_1EM，

$\because B_1D_1\subset$ 平面 B_1CD_1，$\therefore$ 平面 $A_1EM\perp$ 平面 B_1CD_1 .

7.【证明】在 $ABC-A_1B_1C_1$ 的直棱柱中，$\therefore AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，$\therefore AA_1\perp A_1C_1$，

又 $\because A_1C_1\perp A_1B_1$，且 $AA_1\cap A_1B_1=A_1$，AA_1、$A_1B_1\subset$ 平面 AA_1B_1B，$\therefore A_1C_1\perp$ 平面 AA_1B_1B，

$\because DE//A_1C_1$，$\therefore DE\perp$ 平面 AA_1B_1B，

又 $\because A_1F\subset$ 平面 AA_1B_1B，$\therefore DE\perp A_1F$，

又 $\because A_1F\perp B_1D$，$DE\cap B_1D=D$，且 DE、$B_1D\subset$ 平面 B_1DE，$\therefore A_1F\perp$ 平面 B_1DE，

又 $\because A_1F\subset$ 平面 A_1C_1F，$\therefore$ 平面 $B_1DE\perp$ 平面 A_1C_1F .

8.【证明】$\because PA\perp CD$，$\angle PAB=90^\circ$，AB 与 CD 相交，$\therefore PA\perp$ 平面 $ABCD$，

$\because BD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp BD$，

由 $BC=CD=\dfrac{1}{2}AD$，可得 $\angle BAD=\angle BDA=45^\circ$，$\therefore\angle ABD=90^\circ$，$\therefore BD\perp AB$，

$\because PA\cap AB=A$，$\therefore BD\perp$ 平面 PAB，$\because BD\subset$ 平面 PBD，$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PBD .（此题第一问参考线面平行部分）

9.【证明】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，$\therefore AC\perp BD$，

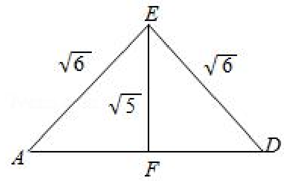
$\because BE\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore AC\perp BE$，则 $AC\perp$ 平面 BED，

$\because AC\subset$ 平面 AEC，$\therefore$ 平面 $AEC\perp$ 平面 BED；

（2）设 $AB=x$，在菱形 $ABCD$ 中，由 $\angle ABC=120^{\circ}$，得 $AG=GC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，$GB=GD=\dfrac{x}{2}$，

$\because BE\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore BE\perp BG$，则 ΔEBG 为直角三角形，$\therefore EG=\dfrac{1}{2}AC=AG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，

则 $BE=\sqrt{EG^2-BG^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，



$\because$ 三棱锥 $E-ACD$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}AC\bullet GD\bullet BE=\dfrac{\sqrt{6}}{24}x^3=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，解得 $x=2$，即 $AB=2$，

$\because \angle ABC=120^{\circ}$，$\therefore AC^2=AB^2+BC^2-2AB\bullet BC\cos ABC=4+4-2\times2\times2\times(-\dfrac{1}{2})=12$，即 $AC=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，

在三个直角三角形 EBA，EBD，EBC 中，斜边 $AE=EC=ED$，

$\because AE\perp EC$，$\therefore \Delta EAC$ 为等腰三角形，则 $AE^2+EC^2=AC^2=12$，即 $2AE^2=12$，$\therefore AE^2=6$，则 $AE=\sqrt{6}$，

$\therefore$ 从而得 $AE=EC=ED=\sqrt{6}$，$\therefore \Delta EAC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times EA\bullet EC=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}=3$，

在等腰三角形 EAD 中，过 E 作 $EF\perp AD$ 于 F，则 $AE=\sqrt{6}$，$AF=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}\times2=1$，

则 $EF=\sqrt{(\sqrt{6})^2-1^2}=\sqrt{5}$，$\therefore \Delta EAD$ 的面积和 ΔECD 的面积均为 $S=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{5}=\sqrt{5}$，

故该三棱锥的侧面积为 $3+2\sqrt{5}$．

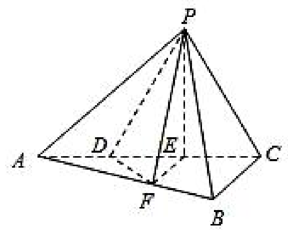
10.【解析】(1) 如图，由 $DE=EC$，$PD=PC$ 知，E 为等腰 ΔPDC 中 DC 边的中点，故 $PE\perp AC$，

又平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，平面 $PAC\cap$ 平面 $ABC=AC$，$PE\subset$ 平面 PAC，$PE\perp AC$，

所以 $PE\perp$ 平面 ABC，从而 $PE\perp AB$．因为 $\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，$EF//BC$，故 $AB\perp EF$，

从而 AB 与平面 PEF 内两条相交直线 PE，EF 都垂直，所以 $AB\perp$ 平面 PEF．

（2）设 $BC=x$，则在直角 ΔABC 中，$AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{36-x^2}$，从而 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\bullet BC=\dfrac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}$，



由 $EF//BC$ 知 $\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{2}{3}$，得 $\Delta AFE\backsim\Delta ABC$，故 $\dfrac{S_{\Delta AFE}}{S_{\Delta ABC}}=(\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{4}{9}$，即 $S_{\Delta AFE}=\dfrac{4}{9}S_{\Delta ABC}$，

由 $AD=\dfrac{1}{2}AE$，$S_{\Delta AFD}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta AFE}=\dfrac{1}{2}\bullet\dfrac{4}{9}S_{\Delta ABC}=\dfrac{2}{9}S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{9}x\sqrt{36-x^2}$，

从而四边形 $DFBC$ 的面积为：$S_{DFBC}=S_{\Delta ABC}-S_{AFD}=\dfrac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}-\dfrac{1}{9}x\sqrt{36-x^2}=\dfrac{7}{18}x\sqrt{36-x^2}$．

由（I）知，$PE\perp$ 平面 ABC，所以 PE 为四棱锥 $P-DFBC$ 的高．

在直角 ΔPEC 中，$PE=\sqrt{PC^2-EC^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

故体积 $V_{P-DFBC}=\dfrac{1}{3}\bullet S_{DFBC}\bullet PE=\dfrac{1}{3}\bullet\dfrac{7}{18}x\sqrt{36-x^2}\bullet2\sqrt{3}=7$，

故得 $x^4-36x^2+243=0$，解得 $x^2=9$ 或 $x^2=27$，由于 $x>0$，可得 $x=3$ 或 $x=3\sqrt{3}$．

所以：$BC=3$ 或 $BC=3\sqrt{3}$．

11.【解析】(1) 在图 1 中，因为 $AB=BC=\frac{1}{2}AD=a$， E 是 AD 的中点， $\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，所以 $BE\perp AC$，

即在图 2 中， $BE\perp A_1O$， $BE\perp OC$，从而 $BE\perp$ 面 A_1OC，由 $CD//BE$，所以 $CD\perp$ 面 A_1OC，

(2) 即 A_1O 是四棱锥 A_1-BCDE 的高，根据图 1 得出 $A_1O=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

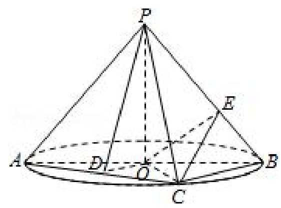
$\therefore$ 平行四边形 $BCDE$ 的面积 $S=BC\bullet AB=a^2$，

$V=\frac{1}{3}\times S\times A_1O=\frac{1}{3}\times a^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$，由 $V=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3=36\sqrt{2}$，得出 $a=6$.

12.【解析】(1) 在 ΔAOC 中，因为 $OA=OC$， D 为 AC 的中点，所以 $AC\perp DO$，
又 PO 垂直于圆 O 所在的平面，所以 $PO\perp AC$，因为 $DO\cap PO=O$，所以 $AC\perp$ 平面 PDO.
(2) 因为点 C 在圆 O 上，所以当 $CO\perp AB$ 时， C 到 AB 的距离最大，且最大值为 1，

又 $AB=2$，所以 ΔABC 面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$，又因为三棱锥 $P-ABC$ 的高 $PO=1$，

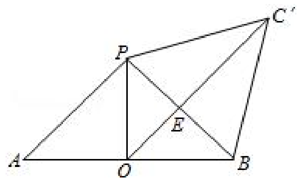
故三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为： $\frac{1}{3}\times 1\times 1=\frac{1}{3}$.



(3) 在 ΔPOB 中， $PO=OB=1$， $\angle POB=90^\circ$，所以 $PB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，
同理 $PC=\sqrt{2}$，所以 $PB=PC=BC$，
在三棱锥 $P-ABC$ 中，将侧面 BCP 绕 PB 旋转至平面 $BC'P$，使之与平面 ABP 共面，如图所示，
当 O， E， C' 共线时， $CE+OE$ 取得最小值，又因为 $OP=OB$， $C'P=C'B$，

所以 OC' 垂直平分 PB，即 E 为 PB 中点. 从而 $OC'=OE+EC'=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

亦即 $CE+OE$ 的最小值为： $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

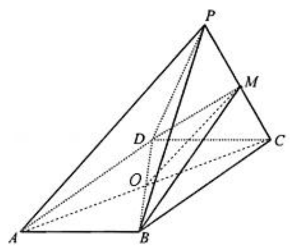


13.【证明】$\because D$、E 为 PC、AC 的中点，$\therefore DE=\frac{1}{2}PA=3$；又 $\because E$、F 为 AC、AB 的中点，$\therefore EF=\frac{1}{2}BC=4$；

$\therefore DE^2+EF^2=DF^2$， $\therefore\angle DEF=90^\circ$， $\therefore DE\perp EF$； $\because DE//PA$， $PA\perp AC$，
$\therefore DE\perp AC$；
$\because AC\cap EF=E$， $\therefore DE\perp$ 平面 ABC；$\because DE\subset$ 平面 BDE， $\therefore$ 平面 $BDE\perp$ 平面 ABC.

14.【证明】(1) $\because AB\perp$ 平面 BCD， $CD\subset$ 平面 BCD， $\therefore AB\perp CD$，
$\because CD\perp BD$， $AB\cap BD=B$， $\therefore CD\perp$ 平面 ABD；
【解析】(2) $\because AB\perp$ 平面 BCD， $BD\subset$ 平面 BCD， $\therefore AB\perp BD$.

$\because AB=BD=1$， $\therefore S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}$， $\because M$ 为 AD 中点， $\therefore S_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABD}=\frac{1}{4}$，



$\because CD\perp$ 平面 ABD， $\therefore V_{A-MBC}=V_{C-ABM}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABM}\bullet CD=\frac{1}{12}$.

15.【证明】 ΔABD 中， $AD=2$， $AB=1$， $\angle BAD=60^\circ$，所以 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\bullet AD\cos\angle BAD=3$，
所以 $AD^2=AB^2+BD^2$，所以 $AB\perp BD$；
因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB//CD$，所以 $BD\perp CD$；
又因为平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$， $BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $BD\perp$ 平面 PCD；因为 $BD\subset$ 平面 MBD，所以平面 $MBD\perp$ 平面 PCD．

16．【解析】(1) 设 N 为 A_1B_1 的中点，连结 MN， AN、 AC、 CM，则四边形 $MNAC$ 为所作图形．

由题意知 $MN//A_1C_1$（或 $//EF$)，四边形 $MNAC$ 为梯形，且 $MN=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{2}$，

过 M 作 $MP\perp AC$ 于点 P，可得 $MC=\sqrt{8+4}=2\sqrt{3}$， $PC=\frac{AC-MN}{2}=\sqrt{2}$，

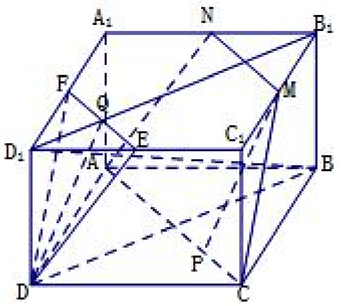
得 $MP=\sqrt{MC^2-QC^2}=\sqrt{10}$，$\therefore$ 梯形 $MNAC$ 的面积 $=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times\sqrt{10}=6\sqrt{5}$．

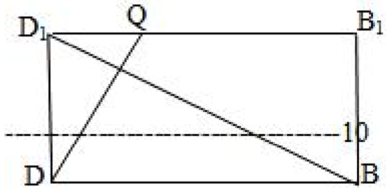
【证明】(2) 证法 1：在长方体中 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，设 D_1B_1 交 EF 于 Q，连接 DQ，

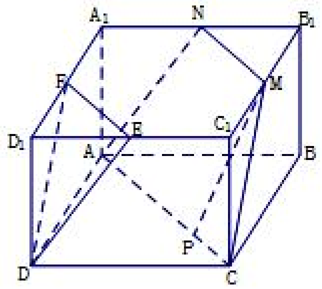
则 Q 为 EF 的中点并且为 D_1B_1 的四等点，如图，$D_1Q=\frac{1}{4}\times4\sqrt{2}=\sqrt{2}$，

由 $DE=DF$ 得 $DQ\perp EF$，又 $EF\perp BB_1$，$\therefore EF\perp$ 平面 BB_1D_1D，$\therefore EF\perp D_1B$，$\frac{D_1Q}{D_1D}=\frac{D_1D}{DB}=\frac{1}{2}$，

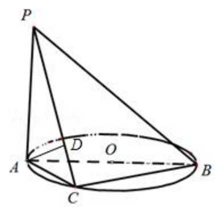
$\therefore\angle D_1QD=\angle BD_1D$，$\therefore\angle QD_1B+\angle D_1QD=\angle DD_1B+\angle BD_1Q=90^\circ$，$\therefore DQ\perp D_1B$，$\therefore D_1B\perp$ 平面 DEF．







17．【证明】因为 $MN\perp A_1C$，又 $MN\perp AA_1$， $AA_1\cap A_1C=A_1$， $AA_1\subset$ 平面 A_1ACC_1， $A_1C\subset$ 平面 A_1ACC_1，所以 $MN\perp$ 平面 A_1ACC_1．因为 $MN\subset$ 平面 A_1MC，所以平面 $A_1MC\perp$ 平面 A_1ACC_1．



18．【证明】(1) $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，点 C 是 $\odot O$ 上的动点，$\therefore\angle ACB=90^\circ$，即 $BC\perp AC$．

又 $\because PA$ 垂直于 $\odot O$ 所在的平面 ABC， $BC\subset$ 平面 $\odot O$，$\therefore PA\perp BC$

又 $PA\cap AC=A$，$\therefore BC\perp$ 平面 PAC．又 $BC\subset$ 平面 PBC，$\therefore$ 平面 $PAC\perp$ 平面 PBC．

【解析】(2) 由 (1) 知平面 $PAC\perp$ 平面 PBC，平面 $PAC\cap$ 平面 $PBC=PC$，过 A 点作 PC 的垂线，垂足为 D，显然 $AD\perp$ 平面 PBC，即 AD 为三棱锥 $A-PBC$ 的高

在 RtΔPAC 中， $PA=3,AC=\sqrt{3}$，所以 $PC=2\sqrt{3}$，由 $AD\times PC=PA\times AC$，得 $AD=\frac{PA\times AC}{PC}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

即点 A 到平面 PCB 的距离为 $\frac{3}{2}$，三棱锥点 A 到平面 PBC 的距离：$\frac{3}{2}$

19．【证明】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore$ 折起后 $PE\perp PA$，且 $PA=AB$，

$\because\angle PAB=60^\circ$，$\therefore\Delta PAB$ 是正三角形，$\therefore PB=PA$，

$\because$ 正方形 $ABCD$ 中， E 为 CD 的中点，$\therefore EA=EB$，$\therefore\Delta PAE\cong\Delta PBE$，$\therefore\angle EPB=\angle EPA$，$\therefore PE\perp PB$，

$\because PA\cap PB=P$，$\therefore PE\perp$ 平面 PAB，又 $PE\subset$ 平面 PEC，$\therefore$ 平面 $PEC\perp$ 平面 PAB．

(2) 设正方形的边长为 a，由 (1) 知 $PE\perp$ 平面 PAB，且 ΔPAB 是边长为 a 的正三角形，

$\because$ 三棱锥 $E-PEC$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore V_{E-PAB}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $a=2$．$\therefore$ 该三棱锥的表面积：

$S=S_{\Delta PAE}+S_{\Delta PBE}+S_{\Delta PAB}+S_{\Delta EAB}=\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2+\frac{1}{2}\times2\times2=4+\sqrt{3}$.

20.【证明】(1) 因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$PA\perp AB$，$PA\subset$ 平面 PAB，所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$．又因为 $BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp BC$．

(2) 方法一：取 PD 中点 F，连接 EF，AF．在 ΔPCD 中，E，F 分别为 PC，PD 的中点，

所以 $EF//DC$ 且 $EF=\frac{1}{2}DC$．又因为 $AB//DC$ 且 $AB=\frac{1}{2}DC$，所以 $AB//EF$ 且 $AB=EF$．

所以四边形 $ABEF$ 为平行四边形．所以 $BE//AF$．因为 $AF\subset$ 平面 PAD，$BE\not\subset$ 平面 PAD，

所以 $BE//$ 平面 PAD．

方法二：取 DC 中点 G，连接 BG，EG．在 ΔPCD 中，E，G 分别为 PC，DC 的中点，

所以 $EG//PD$．又因为 $PD\subset$ 平面 PAD，$EG\not\subset$ 平面 PAD，所以 $EG//$ 平面 PAD．

因为 $AB//DG$ 且 $AB=DG$，所以四边形 $ABGD$ 为平行四边形．所以 $BG//AD$．

又因为 $AD\subset$ 平面 PAD，$BG\not\subset$ 平面 PAD，所以 $BG//$ 平面 PAD．

因为 $EG//$ 平面 PAD，$BG//$ 平面 PAD，$EG\cap BG=G$，所以平面 $BGE//$ 平面 PAD．

又因为 $BE\subset$ 平面 BGE，所以 $BE//$ 平面 PAD．

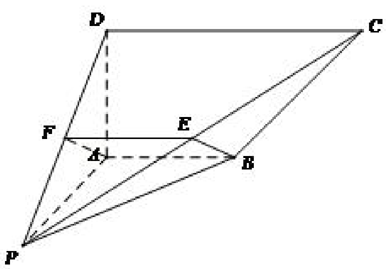
(3) 因为 $AP=AD$，F 为 PD 的中点，所以 $AF\perp PD$．又因为 $BE//AF$，所以 $BE\perp PD$．

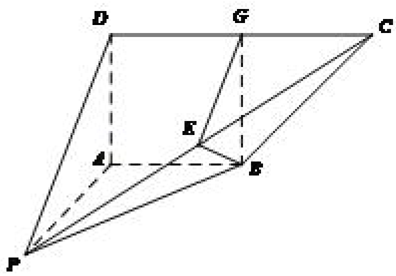
因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$DC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp DC$．因为 $AB//CD$，$\angle DAB=90^\circ$，所以 $AD\perp DC$．

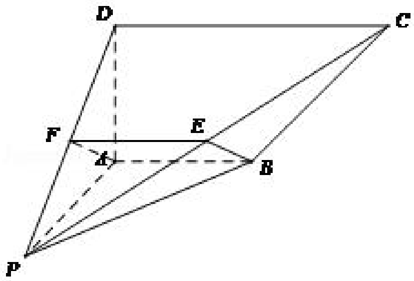
因为 $DC\perp AD$，$DC\perp PA$，$AD\cap PA=A$，所以 $DC\perp$ 平面 PAD．又因为 $AF\subset$ 平面 PAD，所以 $DC\perp AF$．

又因为 $BE//AF$，所以 $DC\perp BE$．因为 $BE\perp DC$，$BE\perp PD$，$DC\cap PD=D$，所以 $BE\perp$ 平面 PDC．

又因为 $BE\subset$ 平面 PDC，所以平面 $PBC\perp$ 平面 PDC．







专题 7　线面垂直与面面垂直

1．B；　2．C；　3．C；　4．D；　5．C；6．C；7．B；　8．B；　9．C；　10．B；　11．C；　12．A；　13.D；14．C；　15．C；　16．D；　17．A；　18．C；　19．C；　20．B；　21．B；　22．D；23．A；　24．B；　25.D；26．D；　27．D；　28．B；　29．B.

第二章 数列参考答案

专题1 高考中的数列基础知识

等差数列：

1．B；2．C；3．C；4．B；5．B；6．A；7．C；8．B；9．A；10．C；11．B；12．B；13．B；14．B；15．B；16．A；17．A；18．A；19．C；20．B；21．$\underline{14}$；22．$a_n=6n-3$；23．$\underline{20}$；24．$\underline{6}$；25．$\underline{10}$；26．$\underline{27}$；27．$\underline{8}$；28．$\dfrac{5}{6}n^2-\dfrac{7}{6}n$；29．$\underline{20}$；30．$\underline{15}$；31．$\underline{35}$；32．$\underline{1}$；$\dfrac{1}{4}n(n+1)$；33．$\underline{74}$；34．$\underline{-1}$；35．$\underline{110}$；36．$\underline{81}$；37．$\underline{63}$；

38．（1）$\{a_n\}$是等差数列，且$a_1=ln2$，$a_2+a_3=5ln2$．可得：$2a_1+3d=5ln2$，可得$d=ln2$，$\{a_n\}$的通项公式；$a_n=a_1+(n-1)d=nln2$，

（2）$e^{a_n}=e^{ln2^n}=2^n$，$\therefore e^{a_1}+e^{a_2}+\ldots+e^{a_n}=2^1+2^2+2^3+\ldots+2^n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$．

39．（1）$\because$等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=-7$，$S_3=-15$，

$\therefore a_1=-7$，$3a_1+3d=-15$，解得$a_1=-7$，$d=2$，$\therefore a_n=-7+2(n-1)=2n-9$；

（2）$\because a_1=-7$，$d=2$，$a_n=2n-9$，$\therefore S_n=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)=\dfrac{1}{2}(2n^2-16n)=n^2-8n=(n-4)^2-16$，

$\therefore$当$n=4$时，前n项的和S_n取得最小值为-16．

40．【解析】（1）(I)由$a_n^2+2a_n=4S_n+3$，可知$a_{n+1}^2+2a_{n+1}=4S_{n+1}+3$

两式相减得$a_{n+1}^2-a_n^2+2(a_{n+1}-a_n)=4a_{n+1}$，即$2(a_{n+1}+a_n)=a_{n+1}^2-a_n^2=(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)$，

$\because a_n>0$，$\therefore a_{n+1}-a_n=2$，$\because a_1^2+2a_1=4a_1+3$，$\therefore a_1=-1$（舍）或$a_1=3$，

则$\{a_n\}$是首项为3，公差$d=2$的等差数列，$\therefore\{a_n\}$的通项公式$a_n=3+2(n-1)=2n+1$

（2）$\because a_n=2n+1$，$\therefore b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3})$，

$\therefore$数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots+\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3})=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+3})=\dfrac{n}{3(2n+3)}$．

等比数列：

1．B；2．C；3．C；4．C；5．D；6．C；7．D；8．B；9．A；10．B；11．A；12．A；
13．$\underline{-63}$；14．$\underline{32}$；15．$\underline{1}$；$\underline{121}$；16．$\underline{64}$；17．$\underline{1}$；18．$\underline{3^{n-1}}$；19．$\underline{6}$；20．$\underline{5}$；21．$\underline{4}$；22．$\underline{50}$；23．$\underline{(-2)^{n-1}}$；24．$\underline{63}$；25．$\underline{2}$；$\underline{2^{n+1}-2}$；26．$\underline{2}$；27．$\dfrac{1}{4}$；28．$\underline{-7}$；

29．【解析】（1）$\because$等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_5=4a_3$．

$\therefore 1\times q^4=4\times(1\times q^2)$，解得 $q=\pm 2$，当 $q=2$ 时，$a_n=2^{n-1}$，当 $q=-2$ 时，$a_n=(-2)^{n-1}$，

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为，$a_n=2^{n-1}$，或 $a_n=(-2)^{n-1}$．

（2）记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．当 $a_1=1$，$q=-2$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{1-(-2)^n}{1-(-2)}=\dfrac{1-(-2)^n}{3}$，

由 $S_m=63$，得 $S_m=\dfrac{1-(-2)^m}{3}=63$，$m\in N$，无解；

当 $a_1=1$，$q=2$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，

由 $S_m=63$，得 $S_m=2^m-1=63$，$m\in N$，解得 $m=6$．

30．【解析】(1) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$na_{n+1}=2(n+1)a_n$，则：$\dfrac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_n}{n}}=2$（常数），由于 $b_n=\dfrac{a_n}{n}$，故：$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$，

数列 $\{b_n\}$ 是以 b_1 为首项，2 为公比的等比数列．整理得：$b_n=b_1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$，所以：$b_1=1$，$b_2=2$，$b_3=4$．

（2）数列 $\{b_n\}$ 是为等比数列，由于 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$（常数）；

（3）由（1）得：$b_n=2^{n-1}$，根据 $b_n=\dfrac{a_n}{n}$，所以：$a_n=n\cdot 2^{n-1}$．

31．【解析】(1) $\because S_n=1+\lambda a_n$，$\lambda\neq 0$．$\therefore a_n\neq 0$．

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=1+\lambda a_n-1-\lambda a_{n-1}=\lambda a_n-\lambda a_{n-1}$，即 $(\lambda-1)a_n=\lambda a_{n-1}$，

$\because \lambda\neq 0$，$a_n\neq 0$．$\therefore \lambda-1\neq 0$．即 $\lambda\neq 1$，即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$，$(n\geqslant 2)$，

$\therefore \{a_n\}$ 是等比数列，公比 $q=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$，当 $n=1$ 时，$S_1=1+\lambda a_1=a_1$，即 $a_1=\dfrac{1}{1-\lambda}$，$\therefore a_n=\dfrac{1}{1-\lambda}\cdot(\dfrac{\lambda}{\lambda-1})^{n-1}$．

（2）若 $S_5=\dfrac{31}{32}$，则若 $S_5=1+\lambda[\dfrac{1}{1-\lambda}\cdot(\dfrac{\lambda}{\lambda-1})^4]=\dfrac{31}{32}$，即 $(\dfrac{\lambda}{1-\lambda})^5=\dfrac{31}{32}-1=-\dfrac{1}{32}$，则 $\dfrac{\lambda}{1-\lambda}=-\dfrac{1}{2}$，得 $\lambda=-1$．

32．【解析】(1)　设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\because a_3=2$，前 3 项和 $S_3=\dfrac{9}{2}$．

$\therefore a_1+2d=2$，$3a_1+3d=\dfrac{9}{2}$，解得 $a_1=1$，$d=\dfrac{1}{2}$．$\therefore a_n=1+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{n+1}{2}$．

（2）$b_1=a_1=1$，$b_4=a_{15}=8$，可得等比数列 $\{b_n\}$ 的公比 q 满足 $q^3=8$，解得 $q=2$．

$\therefore \{b_n\}$ 前 n 项和 $T_n=\dfrac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$．

33．【解析】(1) 因为 $2S_n=3^n+3$，所以 $2a_1=3^1+3=6$，故 $a_1=3$，当 $n>1$ 时，$2S_{n-1}=3^{n-1}+3$，

此时，$2a_n=2S_n-2S_{n-1}=3^n-3^{n-1}=2\times3^{n-1}$，即 $a_n=3^{n-1}$，所以 $a_n=\begin{cases}3,n=1\\3^{n-1},n>1.\end{cases}$.

（2）因为 $a_nb_n=\log_3 a_n$，所以 $b_1=\frac{1}{3}$，当 $n>1$ 时，$b_n=3^{1-n}\cdot\log_3 3^{n-1}=(n-1)\times3^{1-n}$，所以 $T_1=b_1=\frac{1}{3}$；

当 $n>1$ 时，$T_n=b_1+b_2+\ldots+b_n=\frac{1}{3}+(1\times3^{-1}+2\times3^{-2}+\ldots+(n-1)\times3^{1-n})$，

所以 $3T_n=1+(1\times3^0+2\times3^{-1}+3\times3^{-2}+\ldots+(n-1)\times3^{2-n})$，

两式相减得：$2T_n=\frac{2}{3}+(3^0+3^{-1}+3^{-2}+\ldots+3^{2-n}-(n-1)\times3^{1-n})=\frac{2}{3}+\frac{1-3^{1-n}}{1-3^{-1}}-(n-1)\times3^{1-n}=\frac{13}{6}-\frac{6n+3}{2\times3^n}$，

所以 $T_n=\frac{13}{12}-\frac{6n+3}{4\times3^n}$，经检验，$n=1$ 时也适合，综上可得 $T_n=\frac{13}{12}-\frac{6n+3}{4\times3^n}$.

34.【解析】设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由题意得：$\begin{cases}a_1q=6\\6a_1+a_1q^2=30\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a_1=3\\q=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=2\\q=3\end{cases}$，

当 $a_1=3$，$q=2$ 时：$a_n=3\times2^{n-1}$，$S_n=3\times(2^n-1)$；

当 $a_1=2$，$q=3$ 时：$a_n=2\times3^{n-1}$，$S_n=3^n-1$.

35.【解析】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 $a_3^2=9a_2a_6$ 得 $a_3^2=9a_4^2$，所以 $q^2=\frac{1}{9}$.

由条件可知各项均为正数，故 $q=\frac{1}{3}$. 由 $2a_1+3a_2=1$ 得 $2a_1+3a_1q=1$，所以 $a_1=\frac{1}{3}$.

故数列 $\{a_n\}$ 的通项式为 $a_n=\frac{1}{3^n}$.

（2）$b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\ldots+\log_3 a_n=-(1+2+\ldots+n)=-\frac{n(n+1)}{2}$，

故 $\frac{1}{b_n}=-\frac{2}{n(n+1)}=-2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$ 则 $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}=-2[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]=-\frac{2n}{n+1}$，

所以数列 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 的前 n 项和为 $-\frac{2n}{n+1}$.

错位相减：

1.（1）$a_n=2^n$；（2）$5-\frac{2n+5}{2^n}$.

2.（1）$\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n-2$，$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^n$.（2）$(3n-4)2^{n+2}+16$.

3.（1）$a_n=\frac{2}{2n-1}$.（2）$1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$.

4.（1）$a_n=6n+5$；$b_n=4+3(n-1)=3n+1$；（2）$T_n=3n\cdot2^{n+2}$.

5.（1）$b_n=n(n\in N^*)$；（2）$T_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2(n\in N^*)$.

6.（1）$a_n=2^{n-1}$，n∈N*；$b_n=2n-1$，n∈N*.（2）$S_n=(2n-3)\cdot2^n+3(n\in N^*)$.

7.（1）$a_n=\frac{1}{9}(2n+79)$，$b_n=9\cdot(\frac{2}{9})^{n-1}$；（2）$T_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$.

8.（1）$a_n=1+2(n-1)=2n-1$；（2）$\therefore T_n=\dfrac{(3n-1)\cdot 4^{n+1}+4}{9}$.

9.（1）$a_n=2+(n-2)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}n+1$，（2）$S_n=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2^{n-1}})-\dfrac{n-2}{2^{n+1}}=2-\dfrac{n+4}{2^{n+1}}$.

10.（1）数列$\{\dfrac{a_n}{n}\}$是以 1 为首项，以 1 为公差的等差数列；（2）$S_n=\dfrac{2n-1}{4}\cdot 3^{n+1}+\dfrac{3}{4}$

11.（1）$c_n=2n-1$；（2）$S_n=(n-1)3^n+1$.

12.（I）$a_n=1+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{1+n}{2}$　（II）$2(1-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{2n}{n+1}$

13.（1）$\{a_n\}$的通项公式$a_n=2^{n-1}$；（2）$T_n=1+(n-1)2^n$.

14.（1）$a_n=2n$　.（2）数列$\{b_n\}$的前n项和T_n为$\dfrac{n}{2n+2}$.

15.（1）$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)(-1)=2-n$；（2）$2(-1-\dfrac{1}{2n-1})=\dfrac{n}{1-2n}$.

16.（1）$a_n=2n-1$，$(n\in N^*)$.（2）$T_n=3-\dfrac{2n+3}{2^n}$.

17.（1）略；（2）$a_n=2n-1$；（3）略

18.（1）$a_n=2^n$.（2）$T_n=(n-1)2^{n+1}+2$.

19（1）$a_n=3n-1$，$b_n=2^n$.（2）$T_n-8=(3n-4)2^{n+1}$.　$T_n-8=a_{n-1}b_{n+1}$ $(n\in N^*,n\geq 2)$.

20.　（I）$a_n=2-n$；（II）$S_n=\dfrac{n}{2^{n-1}}$.

数列构造

1. C；2.A；3.A；4.D；5.B　6.$-\dfrac{1}{n}$. 7. $\dfrac{2}{5}$；8. <u>1</u>；9. <u>47</u>；10. <u>11</u>；11. $\dfrac{1}{2n-1}$；12. $2n^2+6n$；13. <u>$2^{n+1}-1$</u>；14. <u>1023</u>；15. <u>$2\times3^{n-1}-1$</u>；16. 2^{n-1} $(n\in N^*)$；

17.（1）$a_4=\dfrac{7}{8}$；（2）数列$\{a_{n+1}-\dfrac{1}{2}a_n\}$是以$a_2-\dfrac{1}{2}a_1=1$为首项，公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列；

（3）数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=(2n-1)\times(\dfrac{1}{2})^{n-1}$.

18.（1）$\{b_n\}$是首项为 1，公差为 2 的等差数列.（2）$\{a_n\}$的通项公式$a_n=(n-1)^2+1=n^2-2n+2$

19.（1）$a_n-1=\dfrac{5}{6}(a_{n-1}-1)$，（2）$n=15$.

20.【解析】（1）$a_n=(n^2-1)c^n+c^{n-1}$，（2）$(-\infty,-\dfrac{1+\sqrt{13}}{6})\cup[1,+\infty)$

21.（1）$b_1=4$, $b_2=\dfrac{17}{4}, b_3=\dfrac{72}{17}$

（2）$c_n=b_nb_{n+1}=4b_n+1>17(n\geq 2)$）所以$s_n=c_1+c_2+c_n\geq 17n$

22【解析】（1）$\{b_n\}$是以 1 为首项，$-\dfrac{1}{2}$为公比的等比数列.（2）$a_n=\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}(-\dfrac{1}{2})^{n-1}$ $(n\in N^*)$.

23.【解析】（1）$\{b_n\}$是以$b_1=3$为首项、以 2 为公比的等比数列.（2）$a_n=(3n\ -1)2^{n-2}$ $(n\in N^*)$.

24.（1）$b_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.（2）$S_n=n$（n+1）$+\frac{n+2}{2^{n-1}}-4$.

25.（1）$a_n=(a-1)c^{n-1}+1$.（2）$S_n=2-(n+2)(\frac{1}{2})^n$.

（3）证明：由（1）知 $a_n=(a-1)c^{n-1}+1$．若 $0<(a-1)c^{n-1}+1<1$，则 $0<(1-a)c^{n-1}<1$0<（1－a）c^{n-1}<1.因为 $0<a_1=a<1$，$0<c^{n-1}<\frac{1}{1-a}(n\in N^*)$，由于 $c^{n-1}>0$ 对于任意 $n\in N^*$ 成立，知 $c>0$．下面用反证法证明 $c\le 1$．假设 $c>1$．由函数 $f(x)=c^x$ 的图象知，当 $n\to+\infty$ 时，$c^{n-1}\to+\infty$，所以 $c^{n-1}<\frac{1}{1-a}$ 不能对任意 $n\in N^{*}{}_{+}$恒成立，导致矛盾．$\therefore c\le 1$．因此 $0<c\le 1$

26. （1）$a_2=S_1+2^2=2+2^2=6$，$S_2=8$；$a_3=S_2+2^3=8+2^3=16$, $S_2=24$，$a_4=S_3+2^4=40$；（2）$\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列．（3）$a_n=(a_n-2a_{n-1})+2(a_{n-1}-2a_{n-2})+\ldots+2^{n-2}(a_2-2a_1)+2^{n-1}a_1=(n+1)2^{n-1}$

27. （1）$a_n=\begin{cases}1+\dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}, q\ne 1\\ n, q=1\end{cases}$（2）由（1），当 $q=1$ 时，显然 a_3 不是 a_6 与 a_9 的等差中项，故 $q\ne 1$．由 $a_3-a_6=a_9-a_3$ 可得 $q^5-q^2=q^2-q^8$，由 $q\ne 0$ 得 $q^3-1=1-q^6$，①整理得 $(q^3)^2+q^3-2=0$，解得 $q^3=-2$ 或 $q^3=1$（舍去）．于是 $q=-\sqrt[3]{2}$．另一方面，$a_n-a_{n+3}=\frac{q^{n+2}-q^{n-1}}{1-q}=\frac{q^{n-1}}{1-q}(q^3-1)$，$a_{n+6}-a_n=\frac{q^{n-1}-q^{n+5}}{1-q}=\frac{q^{n-1}}{1-q}(1-q^6)$．由①可得 $a_n-a_{n+3}=a_{n+6}-a_n$，n∈N*．所以对任意的 $n\in N^*$，a_n 是 a_{n+3} 与 a_{n+6} 的等差中项．

专题 2 裂项相消

1.【解析】(1)由 $a_1+\frac{1}{3}a_2+\frac{1}{5}a_3+\ldots+\frac{1}{2n-1}a_n=n$，得 $a_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_1+\frac{1}{3}a_2+\frac{1}{5}a_3+\ldots+\frac{1}{2n-3}a_{n-1}=n-1$，

$\therefore\frac{1}{2n-1}a_n=1$，$a_n=2n-1(n\geqslant 2)$，$a_1=1$ 适合上式，$\therefore a_n=2n-1$；

（2）$\because\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{2}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$.

$\therefore$ 数列 $\{\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}\}$ 的前 84 项和 $S_{84}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{169}-\sqrt{167})=\frac{1}{2}(13-1)=6$.

2.【解析】依题意，$a_n=n+5$，$b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n=0$，即 $b_{n+2}+b_n=2b_{n+1}$，$\therefore\{b_n\}$为等差数列，令 $\{b_n\}$ 得前 n 和为，S_n 所以，$S_9=153=9\left(\frac{11+b_7}{2}\right)$，$b_7=23$，$d=3$，$b_n=3n+2$；

（2）由（1）得，$c_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$，$\therefore T_n=\frac{n}{(2n+1)}>\frac{k}{57}$ 任意的 $n\in N^*$ 都成立，

容易判断 $T_n=\frac{n}{(2n+1)}\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$，所以 $\frac{k}{57}<\frac{1}{3}, k<19, \because k\in Z, k=18$.

3.【解析】$a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=1$，$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}(n\in N^*,n\geqslant 2)$，可得 $a_3=\frac{3}{2}$，$a_4=\frac{5}{2}$，$a_5=\frac{8}{2}$，$a_6=\frac{13}{2}$，$a_7=\frac{21}{2}$，

$\ldots$，

则 $\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\frac{1}{a_3a_5}+\ldots+\frac{1}{a_{2018}a_{2020}}=\frac{4}{1\times 3}+\frac{4}{2\times 5}+\frac{4}{3\times 8}+\frac{4}{5\times 13}+\ldots+\frac{4}{mn}$

$=4[\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})+\frac{1}{5}(\frac{1}{3}-\frac{1}{8})+\frac{1}{8}(\frac{1}{5}-\frac{1}{13})+\ldots+\frac{1}{m}-\frac{1}{n}]$

$=4(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{15}+\frac{1}{15}-\frac{1}{40}+\frac{1}{40}-\frac{1}{8\times 13}+\ldots+\frac{1}{m}-\frac{1}{n})$

$=4(\frac{1}{2}-\frac{1}{n})=2-\frac{4}{n}$，由于 $\frac{4}{n}\in(0,1)$，则 $2-\frac{4}{n}\in(1,2)$，则 $\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\frac{1}{a_3a_5}+\ldots+\frac{1}{a_{2018}a_{2020}}$ 的整数部分为 1．故选 B．

4.【解析】数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\ldots+\frac{1}{n}a_n=n^2+n$，①

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\ldots+\frac{1}{n-1}a_{n-1}=(n-1)^2+(n-1)$，②

①－②得：$\frac{1}{n}a_n=2n$，故：$a_n=2n^2$，数列 $\{b_n\}$ 满足：$b_n=\frac{2n+1}{a_na_{n+1}}=\frac{2n+1}{4n^2(n+1)^2}=\frac{1}{4}[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}]$，

则：$T_n=\frac{1}{4}[1-(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{3})^2+\ldots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}]$，$=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{(n+1)^2})$，

由于 $T_n<\frac{n}{n+1}\lambda(n\in N^*)$ 恒成立，故：$\frac{1}{4}(1-\frac{1}{(n+1)^2})<\frac{n}{n+1}\lambda$，整理得：$\lambda>\frac{n+2}{4n+4}$，当 $n=1$ 时，$(\frac{2n+1}{4n+4})_{max}=\frac{3}{8}$．

故选 D．

5.【解析】

$$a_n=\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{4}\frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{4}\frac{4n^2-1+1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$S_n=\frac{n}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{n}{2n+1}\right)$$

6.【解析】

$$a_n=\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\frac{n+2}{n!+(n+1)n!+(n+2)!}=\frac{n+2}{(n+2)n!+(n+2)!}=\frac{1}{n!+(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

$$\therefore S_n=\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

7.【解析】$a_n=\frac{5n+4}{n(n+1)(n+2)}=\frac{5n+2}{n(n+1)}-\frac{5n+7}{(n+1)(n+2)}$，则 $S_n=\frac{7}{2}-\frac{5n+7}{(n+1)(n+2)}=\frac{7n^2+11n}{2(n+1)(n+2)}$，故存在 $a=7,b=11$ 符合题意

8.【解析】$\frac{n+2}{n\times(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)2^n}$，$S_n=\frac{3}{1\times 2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{7}{2\times 3}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{n+2}{n\times(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{(n+1)2^n}$

9.【解析】(1) $\because a_n-\frac{S_n}{2}=1(n\in N^*)$，$\therefore a_{n+1}-\frac{S_{n+1}}{2}=1$，两式作差可得：$(a_{n+1}-a_n)-\frac{S_{n+1}-S_n}{2}=0$，$\therefore a_{n+1}=2a_n$，

即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$．在 $a_n-\dfrac{S_n}{2}=1$ 中取 $n=1$，可得 $a_1=2$．$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列，则 $a_n=2^n$；

（2）证明：$\because b_n=\dfrac{2^n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}(n\in N^*)$，$\therefore b_n=\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，

$\therefore T_n=(\dfrac{1}{2^1-1}-\dfrac{1}{2^2-1})+(\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1})+\ldots+(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1})=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$．$\therefore T_n$ 是一个单调递增数列，

当 $n=1$ 时，$(T_n)_{min}=T_1=1-\dfrac{1}{2^2-1}=\dfrac{2}{3}$，当 $n\to+\infty$ 时，$T_n\to1$．$\therefore T_n\in[\dfrac{2}{3},1)$．

10．【解析】（1）因为 $\dfrac{1}{a_1-1}+\dfrac{2}{a_2-1}+\dfrac{3}{a_3-1}+\ldots+\dfrac{n}{a_n-1}=n$……………①当 $n=1$ 时，$a_1=2$，

当 $n\geqslant2$ 时，$\dfrac{1}{a_1-1}+\dfrac{2}{a_2-1}+\dfrac{3}{a_3-1}+\ldots+\dfrac{n-1}{a_{n-1}-1}=n-1$……….②由①－②得：$a_n=n+1$，

因为 $a_1=2$ 适合上式，所以 $a_n=n+1(n\in N^*)$

（2）证明：由（I）知，$b_n=\dfrac{2n+1}{(a_n-1)^2(a_{n+1}-1)^2}=\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$

$\therefore T_n=(\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2})+(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2})+\ldots+(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2})=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$ $\because \dfrac{1}{(n+1)^2}>0$，即 $T_n<1$．

11．【解析】（1）$a_{n+1}+1=\dfrac{a_n+1}{a_n+2}$，$a_n\neq-1$ 且 $a_1=1$，$\therefore \dfrac{1}{a_{n+1}+1}=\dfrac{a_n+2}{a_n+1}$，即 $\dfrac{1}{a_{n+1}+1}=\dfrac{(a_n+1)+1}{a_n+1}$，

$\therefore \dfrac{1}{a_{n+1}+1}-\dfrac{1}{a_n+1}=1$，

数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n+1}\right\}$ 是等差数列，$\therefore \dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{1}{2}+(n-1)\bullet1$，$\therefore \dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{2n-1}{2}$，$\therefore a_n=\dfrac{3-2n}{2n-1}$．

（2）由（1）知 $b_n=\dfrac{2}{2n-1}$，$\therefore c_n=(-1)^{n-1}nb_nb_{n+1}=(-1)^{n-1}n\bullet\dfrac{2}{2n-1}\bullet\dfrac{2}{2n+1}$，$\therefore c_n=(-1)^{n-1}(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n+1})$

$S_{2019}=(1+\dfrac{1}{3})-(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5})+(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7})+\ldots+(\dfrac{1}{2\times2019-1}+\dfrac{1}{2\times2019+1})=\dfrac{4040}{4039}$．

12．【解析】（1）由题意，$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\ldots+\dfrac{a_n}{n+1}=n^2+n$，当 $n\geqslant2$ 时，$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\ldots+\dfrac{a_{n-1}}{n}=(n-1)^2+n-1$，

两式相减得，$\dfrac{a_n}{n+1}=2n$，即 $a_n=2n(n+1)(n\geqslant2)$．当 $n=1$ 时，$a_1=4$ 也符合，$\therefore a_n=2n(n+1)$；

（2）$b_n=\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2n(n+1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$，$\therefore S_n=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{n}{2(n+1)}$．

由 $S_n=\dfrac{n}{2(n+1)}>\dfrac{9}{20}$，解得 $n>9$．$\therefore$ 满足 $S_n>\dfrac{9}{20}$ 的最小正整数 $n=10$．

13．【解析】（1）等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n，且 $S_n=2^{n+1}-b$，$n=1$ 时，$a_1=S_1=4-b$；$n\geqslant2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-b-2^n+b=2^n$，由于数列为等比数列，可得 $4-b=2$，即 $b=2$；则 $a_n=2^n$，$n\in N^*$；

（2）证明：$b_n=\dfrac{a_n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}=\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，

前 n 项和 $T_n=1-\frac{1}{4-1}+\frac{1}{4-1}-\frac{1}{8-1}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$，

由于 $2^{n+1}-1\geqslant 3$，可得 $0<\frac{1}{2^{n+1}-1}\leqslant\frac{1}{3}$，则 $T_n\geqslant\frac{2}{3}$．

14．【解析】由 $a_{n+1}-a_n=a_n^2$，得 $a_{n+1}=a_n^2+a_n=a_n(a_n+1)\geqslant 6$，$\therefore\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(a_n+1)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+1}$，

$\therefore\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$，$\therefore\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}=(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2})+(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3})+\ldots+(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})=\frac{1}{2}-\frac{1}{a_{n+1}}\in(0,\frac{1}{2})$，

$\because\frac{a_n}{a_n+1}=1-\frac{a_n}{a_{n+1}}$，$\therefore T_m=\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+1}+\ldots+\frac{a_m}{a_m+1}=m-(\frac{1}{2}-\frac{1}{a_{m+1}})=m-\frac{1}{2}+\frac{1}{a_{m+1}}<m-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=m-\frac{1}{3}$

$\because T_m<2018$，$\therefore m-\frac{1}{3}<2018$，$\therefore m<2018+\frac{1}{3}$ $\therefore$ 正整数 m 的最大值为 2018，　故选：B

15．【解析】$a_1=\frac{6}{5}$，$a_n=\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}(n\in N^*)$，可得 $a_1>1$，$a_n-1>0$，$a_{n+1}-1>0$，即有 $a_n(a_n-1)=a_{n+1}-1$，

取倒数可得 $\frac{1}{a_n(a_n-1)}=\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}$，即有 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}$，

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_2-1}+\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_3-1}+\ldots+\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}=5-\frac{1}{a_{n+1}-1}<5$，

由对 $n\in N^*$，都有 $k>\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$ 成立，可得 $k\geqslant 5$，则 k 的最小值为 5．故选：C．

16．【解析】$a_1=\frac{4}{3}$，且 $a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)(n\in N^*)$，$\therefore a_{n+1}-a_n=a_n^2+1>0$，$\therefore a_{n+1}>a_n$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，可得 $a_2-1=\frac{4}{3}\times(\frac{4}{3}-1)+1=\frac{4}{9}$，$a_3-1=\frac{13}{9}\times(\frac{13}{9}-1)=\frac{52}{81}$，$a_4-1=\frac{6916}{6561}>1$，…，$\therefore a_{2018}-1>1$．

$\therefore\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n(a_n-1)}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}$，可得：$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}$，

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots\frac{1}{a_{2017}}=(\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_2-1})+(\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_3-1})+(\frac{1}{a_3-1}-\frac{1}{a_4-1})+\ldots+(\frac{1}{a_{2017}-1}-\frac{1}{a_{2018}-1})$

$=3-\frac{1}{a_{2018}-1}\in(2,3)$．$\therefore\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots\frac{1}{a_{2017}}$ 的整数部分是 2．故选：C．

17．【解析】$\because a_1=1$，$a_{n+1}=a_n^2+a_n>1$，$\therefore\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(a_n+1)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+1}$，即 $\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$，则 $\frac{a_n}{a_n+1}=1-\frac{1}{a_n+1}$，

则 $\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\ldots\frac{a_{2018}}{1+a_{2018}}=2018-(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_{2018}})$，

$\because\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_{2018}}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{2018}}-\frac{1}{a_{2019}}=1-\frac{1}{a_{2019}}$，

$\therefore\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\ldots\frac{a_{2018}}{1+a_{2018}}=2018-(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_{2018}})=2018-1+\frac{1}{a_{2019}}=2017+\frac{1}{a_{2019}}$，

$\because\frac{1}{a_{2019}}\in(0,1)$，$\therefore[2017+\frac{1}{a_{2019}}]=2017$，即 $[\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\ldots\frac{a_{2018}}{1+a_{2018}}]=2017$，故答案为：2017

18．【解析】由题设知，$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$，$\therefore\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n(a_n-1)}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}$，$\therefore\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n}$，

通过累加，得 $m=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{2014}}=\frac{1}{a_1-1}=2-\frac{1}{a_{2015}-1}$．由 $a_{n+1}-a_n=(a_n-1)^2\geqslant 0$，即 $a_{n+1}\geqslant a_n$，

由 $a_1=\frac{3}{2}$，$a_2=\frac{7}{4}$，$a_3=\frac{37}{16}$．$\therefore a_{2019}\geqslant a_{2018}\geqslant a_{2017}\geqslant\ldots\geqslant a_3>2$，$\therefore a_{2019}-1>1$，$\therefore 0<\frac{1}{a_{2019}-1}<1$，$\therefore 1<m<2$，

所以 m 的整数部分为 1．故选：B．

19.【解析】$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{4}{3}$，$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)(n\in N^*)$．可得：$a_{n+1}-a_n=(an-1)^2>0$，$\therefore a_{n+1}>a_n$，

因此数列 $\{a_n\}$ 单调递增．则 $a_2-1=\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}$，可得 $a_2=\frac{13}{9}$，同理可得：$a_3=\frac{133}{81}$，$a_4=\frac{13477}{6561}$．$\frac{1}{a_3-1}=\frac{81}{52}>1$，

$\frac{1}{a_4-1}=\frac{6561}{6916}<1$，另一方面：$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}$，$\therefore S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$

$=(\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_2-1})+(\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_3-1})+\ldots+(\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1})=3-\frac{1}{a_{n+1}-1}$，

当 $n=1$ 时，$S_1=\frac{1}{a_1}=\frac{3}{4}$，其整数部分为 0；当 $n=2$ 时，$S_2=\frac{3}{4}+\frac{9}{13}=1+\frac{23}{52}$，其整数部分为 1；

当 $n=3$ 时，$S_3=\frac{3}{4}+\frac{9}{13}+\frac{81}{133}=2+\frac{355}{6561}$，其整数部分为 2；当 $n\geqslant 4$ 时，$S_n=2+1-\frac{1}{a_{n+1}-1}\in(2,3)$，其整数部分为 2．综上可得：$S_n$ 的整数部分的所有可能值构成的集合是 $\{0，1，2\}$．故选：A．

20.【解析】

$\because a_1=\frac{1}{2}$ $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{2018}+a_n(n\in N^*)\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{2018}=\frac{a_n^2}{2018^2}+\frac{a_n}{2018}\Rightarrow\frac{2018}{a_{n+1}}=\frac{2018}{a_n}\left(\frac{2018}{a_n+2018}\right)\Rightarrow\frac{1}{a_n+2018}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$

故 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2018+a_i}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=2-\frac{1}{a_{n+1}}$，$\because a_{n+1}=\frac{a_n^2}{2018}+a_n(n\in N^*)$，$\therefore a_{n+1}-a_n=\frac{a_n^{\ 2}}{2018}>0$，即 $a_{n+1}>a_n$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 单调递增，即题目要符合条件：$\frac{1}{2018+a_1}+\frac{1}{2018+a_2}+\cdots+\frac{1}{2018+a_{n-1}}=2-\frac{1}{a_n}>1$，且 $\frac{1}{2}<a_{n-1}\leq 1$；

$\frac{n-1}{2018+1}<\frac{1}{2018+a_1}+\frac{1}{2018+a_2}+\cdots+\frac{1}{2018+a_{n-1}}<\frac{n-1}{2018+\frac{1}{2}}$，即 $\frac{n-1}{2019}\geq 1$，$n\geq 2020$，使 $a_n>1$ 的正整数 n 的最小值是 2020，故选 C．

21.【解析】证明：（1）由题意，可知：$2a_{n+1}-2a_n=a_n^2-4a_n+4=(a_n-2)^2\geqslant 0$，$\therefore a_{n+1}\geqslant a_n$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列．又 $\because a_1=3$，$\therefore a_{n+1}\geqslant a_n\geqslant\ldots\geqslant a_1=3>0$，$\therefore(a_n-2)^2\geqslant\ldots\geqslant(a_1-2)^2=1>0$．$\therefore a_{n+1}>a_n$．

（2）由题意，可知：$\because 2a_{n+1}=a_n^2-2a_n+4$，$\therefore 2a_{n+1}-4=a_n^2-2a_n$．即：$2(a_{n+1}-2)=a_n(a_n-2)$

$\Rightarrow\frac{1}{2(a_{n+1}-2)}=\frac{1}{a_n(a_n-2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{a_n})\Rightarrow\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{a_{n+1}-2}$．

$\therefore\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1-2}-\frac{1}{a_2-2}+\frac{1}{a_2-2}-\frac{1}{a_3-2}+\ldots+\frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{1}{a_1-2}-\frac{1}{a_{n+1}-2}=1-\frac{1}{a_{n+1}-2}$．

∵ $n\in N^*$，又由（I），知：$a_{n+1}\geqslant a_2=\frac{7}{2}$，∴ $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}=1-\frac{1}{a_{n+1}-2}\geqslant\frac{1}{3}$；

又由 $2(a_{n+1}-2)=a_n(a_n-2)$，得：$\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{2}{a_n}\bullet\frac{1}{a_n-2}\leqslant\frac{2}{3}\bullet\frac{1}{a_n-2}\leqslant\ldots\leqslant(\frac{2}{3})^n\bullet\frac{1}{a_1-2}=(\frac{2}{3})^n$，

∴ $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}=1-\frac{1}{a_{n+1}-2}\leqslant 1-(\frac{2}{3})^n$．∴ $\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\leqslant 1-(\frac{2}{3})^n(n\in N^*)$．命题得证．

21．【解析】（1）令 $m=1$，则，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n,\therefore\{a_n\}$成等比数列，故$a_n=\frac{1}{2^n}$，

$b_{n+1}=b_1+b_n,\therefore\{b_n\}$成等差数列，$\therefore b_n=-\frac{n}{2}$

（2）$b_n=\frac{4c_n+n}{3c_n+n}=-\frac{n}{2},\therefore c_n=-\frac{2n+n^2}{3n+8}$

（3）$\because d_n=\frac{a_n}{c_n}=-\frac{3n+8}{2^n\cdot n(n+2)}=\frac{1}{2^n(n+2)}-\frac{1}{2^{n-2}n}$，

$T_n=(\frac{1}{2\times 3}-\frac{1}{2^{-1}\times 1})+(\frac{1}{2^2\times 4}-\frac{1}{2^0\times 2})+\cdots+[\frac{1}{2^n(n+2)}-\frac{1}{2^{n-2}n}]=-\frac{1}{2^{-1}\times 1}-\frac{1}{2^0\times 2}+\frac{1}{2^{n-1}(n+1)}+\frac{1}{2^n(n+2)}$，而

当 $n\geq 2$ 时，$0<\frac{3n+5}{2^n(n^2+3n+2)}<\frac{1}{2^n}=a_n$，故 $-\frac{5}{2}<T_n<a_n-\frac{5}{2}$．

23．【解析】（1）$\because a_2=0$，$a_3=-\frac{3}{4}$，$a_4=-\frac{8}{5}$．

（2）假设存在使数列$\left\{\frac{a_n+an}{a_n+n}\right\}$成为以—1为公差的等差数列，

$\frac{a_{n+1}+a(n+1)}{a_{n+1}+n+1}-\frac{a_n+an}{a_n+n}=-1$，化简可得，$a=-2$

（3）$\frac{a_n-2n}{a_n+n}=-n,\therefore a_n=\frac{2n-n^2}{n+1}$，$\frac{1}{3^{\frac{n+2}{2}}a_{n+2}}=-\frac{n+3}{n(n+2)}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n+2}{2}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n3^{\frac{n}{2}}}-\frac{1}{(n+2)3^{\frac{n+2}{2}}}\right)$

$$S_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)3^{\frac{n+1}{2}}}-\frac{1}{(n+2)3^{\frac{n+2}{2}}}\right)=-\frac{2\sqrt{3}+1}{12}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)3^{\frac{n+1}{2}}}+\frac{1}{(n+2)3^{\frac{n+2}{2}}}\right)>-\frac{2\sqrt{3}+1}{12}$$

24．【解析】（1）数列$\{x_n\}$满足 $x_1=1$，$x_{n+1}=x_n^2+x_n$，$n\in N^*$，设 $P_n=\pi_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}$，$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}$，

可得 $x_{n+1}=x_n^2+x_n=x_n(1+x_n)$，即有 $\frac{1}{1+x_n}=\frac{x_n}{x_{n+1}}$，$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n(1+x_n)}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{1+x_n}$，即有 $\frac{1}{1+x_n}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}$，

可得 $P_5+S_5=\frac{x_1}{x_2}\bullet\frac{x_2}{x_3}\ldots\frac{x_5}{x_6}+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_5}-\frac{1}{x_6}=\frac{x_1}{x_6}+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_6}=\frac{1}{x_6}+1-\frac{1}{x_6}=1$；

（2）$x_1=1$，$x_{n+1}=x_n^2+x_n$，$n\in N^*$，可得 $\frac{x_i}{1+x_i}=1-\frac{1}{1+x_i}=1-(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_{i+1}})$，

可得 $\sum_{i=1}^{2019}\frac{x_i}{1+x_i}=2009-(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_{2019}}-\frac{1}{x_{2020}})=2019-1+\frac{1}{x_{2020}}=2018+\frac{1}{x_{2020}}$，

由 $x_1=1$， $x_{n+1}=x_n^2+x_n>1$，可得 $\frac{1}{x_{2020}}\in(0,1)$，即有 $[\sum_{i=1}^{2019}\frac{x_i}{1+x_i}]=2018$；

（3）设定义在正整数集 N^* 上的函数 $f(n)$ 满足，当 $\frac{m(m-1)}{2}<n\leqslant\frac{m(m+1)}{2}(m\in N^*)$ 时， $f(n)=m$，

当 $m=1$ 时， $0<n\leqslant 1$，可得 f （1） $=1$；

当 $m=2$ 时， $1<n\leqslant 3$ 时， f （2） $=f$ （3） $=2$；

当 $m=3$ 时， $3<n\leqslant 6$ 时， f （4） $=f$ （5） $=f$ （6） $=3$，

$\ldots$， $m=k$ 时，可得 $f(n)=k(k$ 个 $k)$，

可得 $\sum_{i=1}^{n}f(i)=1+(2+2)+(3+3+3)+(4+4+4+4)+\ldots+(k+k+\ldots+k)+\ldots=1+2^2+3^2+4^2+\ldots+k^2+\ldots$，

由 $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+18^2=\frac{18\times(18+1)(2\times 18+1)}{6}=2109$，由 $2109-90=2019$， $90\div 18=5$，

可得当 $n=\frac{1}{2}\times 18\times(18+1)-5=166$ 时，满足 $\sum_{i=1}^{n}f(i)=2019$．

专题 3　经典的一阶递推

1．【解析】数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，且满足 $a_{n+1}-a_n=(-\frac{1}{2})^n(n\in N^+)$，可得

$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1})$

$=1+(-\frac{1}{2})+\frac{1}{4}+\ldots+=(-\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1-\frac{1}{(-2)^n}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^n]$，存在正整数 n，使得 $(a_n-\lambda)(a_{n+1}-\lambda)<0$ 成立，

当 n 为偶数时， $a_n=\frac{2}{3}[1-(\frac{1}{2})^n]$，递增，可得 a_n 的最小值为 $a_2=\frac{1}{2}$； $a_{n+1}=\frac{2}{3}[1+(\frac{1}{2})^{n+1}]$，递减，可得 a_{n+1} 的最大值为 $a_3=\frac{3}{4}$，可得 $a_n<\lambda<a_{n+1}$，即有 $\frac{1}{2}<\lambda<\frac{3}{4}$；当 n 为奇数时， $a_n=\frac{2}{3}[1+(\frac{1}{2})^n]$，递减，可得 a_n 的最大值为 $a_1=1$； $a_{n+1}=\frac{2}{3}[1-(\frac{1}{2})^{n+1}]$，递增，可得 a_{n+1} 的最小值为 $a_2=\frac{1}{2}$，可得 $a_{n+1}<\lambda<a_n$，即有 $\frac{1}{2}<\lambda<1$；

则 λ 的取值范围是 $(\frac{1}{2}$， $1)$，故选 C．

2．【解析】由题意，可知： $\because 4n^2-16n+15=(2n-3)(2n-5)$， $\therefore(2n-5)a_{n+1}=(2n-3)a_n+(2n-3)(2n-5)$，

等式两边同时除以 $(2n-3)(2n-5)$，可得： $\frac{a_{n+1}}{2n-3}=\frac{a_n}{2n-5}+1$，可设 $b_n=\frac{a_n}{2n-5}$，则 $\frac{a_{n+1}}{2n-5}=b_{n+1}$，

$\therefore b_{n+1}=b_n+1$，即： $b_{n+1}-b_n=1$． $\because b_1=\frac{a_1}{2\times 1-5}=\frac{21}{-3}=-7$． $\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是以 -7 为首项，1 为公差的等差数列．

$\therefore b_n=-7+(n-1)\times1=n-8$，$n\in N^*$．$\therefore a_n=(n-8)(2n-5)=2n^2-21n+40$．可把 a_n 看成关于 n 的二次函数，则根据二次函数的性质，可知：当 $n=5$ 或 $n=6$ 时，a_n 可能取最小值．$\because$ 当 $n=5$ 时，

$a_5=2\times5^2-21\times5+40=-15$，

当 $n=6$ 时，$a_6=2\times6^2-21\times6+40=-14$．$\therefore$ 当 $n=5$ 时，a_n 取得最小值．故选 A．

3.【解析】$(3n-5)a_{n+1}=(3n-2)a_n-9n^2+21n-10$，即为 $(3n-5)a_{n+1}-(3n-2)a_n=-(3n-5)(3n-2)$，

可得 $\dfrac{a_{n+1}}{3n-2}-\dfrac{a_n}{3n-5}=-1$，设 $b_n=\dfrac{a_n}{3n-5}$，即 $b_{n+1}-b_n=-1$，可得 $\{b_n\}$ 是 $\dfrac{-8}{-2}=4$ 为首项、-1 为公差的等差数列，

可得 $b_n=4-(n-1)=5-n$，即 $a_n=(3n-5)(5-n)$，可得 $a_n:-8$，3，8，7，0，-13，-32，-57，-88，…，$(n>5$，各项递减，且为负的)，由 n，$m\in N^*$，$n>m$，则 S_n-S_m 的最大值为 $(-8+3+8+7+0)-(-8)=18$．故选 C．

4.【解析】法一：$\because a_{n+1}=3a_n+2^n$，$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{2^n}=\dfrac{3a_n}{2^n}+1$，$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{3}{2}\bullet\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{1}{2}$，$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}+1=\dfrac{3}{2}(\dfrac{a_n}{2^n}+1)$，$\because a_1=1$，

$\therefore \dfrac{a_1}{2^1}+1=\dfrac{3}{2}$，$\therefore$ 数列 $\{\dfrac{a_n}{2^n}+1\}$ 是以 $\dfrac{3}{2}$ 为首相以 $\dfrac{3}{2}$ 为公比的等比数列，$\therefore \dfrac{a_n}{2^n}+1=(\dfrac{3}{2})^n$，$\therefore a_n=3^n-2^n$，故选 A．

法二：令 $a_{n+1}+A\cdot2^{n+1}=3(a_n+A\cdot2^n)$，$\because a_{n+1}=3a_n+2^n$，对比系数得：$A=1$，$\therefore$ 数列 $\{a_n+2^n\}$ 是以 3 为首项，

3

为公比的等比数列，$\therefore a_n+2^n=3^n$，$\therefore a_n=3^n-2^n$，$\therefore b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n-2^n}=\dfrac{3\bullet(\frac{3}{2})^n-2}{(\frac{3}{2})^n-1}=3+\dfrac{1}{(\frac{3}{2})^n-1}$，

$\because \forall n\in N^*$，

$\therefore (\dfrac{3}{2})^n-1\geqslant\dfrac{1}{2}\ \therefore 0<\dfrac{1}{(\frac{3}{2})^n-1}\leqslant2$，$\therefore 3<b_n\leqslant5$，对于 $\forall n\in N^*$，都有 $b_n>t$ 恒成立，$\therefore t\leqslant3\ \therefore t$ 的最大值为 3，故选 A．

5.【解析】由 $\dfrac{a_{n+1}}{2n-3}=\dfrac{a_n}{2n-5}+1$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{2n-3}-\dfrac{a_n}{2n-5}=1$，$\dfrac{a_1}{2-5}=-5$．$\therefore$ 数列 $\{\dfrac{a_n}{2n-5}\}$ 为等差数列，首项为 -5，公差为 1．$\therefore \dfrac{a_n}{2n-5}=-5+n-1$，可得：$a_n=(2n-5)(n-6)$，当且仅当 $3\leqslant n\leqslant5$ 时，$a_n<0$．已知 n，$m\in N$，$n>m$，

则 S_n-S_m 的最小值为 $a_3+a_4+a_5=-3-6-5=-14$．故选 C．

7．【解析】$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$na_{n+1}=2(n+1)a_n$，化为 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=2\dfrac{a_n}{n}$，$\therefore$ 数列 $\dfrac{a_n}{n}$ 是等比数列，首项为 1，公比为 2．$\therefore \dfrac{a_n}{n}=2^{n-1}$，$\therefore a_n=n\bullet2^{n-1}$．$\therefore S_n=1+2\times2+3\times2^2+\ldots\ldots+n\bullet2^{n-1}$，

$2S_n=2+2\times 2^2+\ldots\ldots+(n-1)\bullet 2^{n-1}+n\bullet 2^n$．

$\therefore -S_n=1+2+2^2+\ldots\ldots+2^{n-1}-n\bullet 2^n=\dfrac{2^n-1}{2-1}-n\bullet 2^n$．可得：$S_n=(n-1)\bullet 2^n+1$．则它的前 100 项和 $S_{100}=99\times 2^{100}+1$．故答案为 $99\times 2^{100}+1$．

7.【解析】(1) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+2^n+2(n\in N^*)$，$\therefore (a_{n+1}-2^{n+1})-(a_n-2^n)=2$．$a_1-2=0$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n-2^n\}$ 为等差数列，首项为 0，公差为 2；　(2) 由 (1) 可得：$a_n-2^n=0+2(n-1)$，可得：

$a_n=2^n+2(n-1)$，$\therefore S_n=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}+2\times\dfrac{n(0+n-1)}{2}=2^{n+1}-2+n^2-n$．

8．(1) 证明：由 $na_{n+1}=(n+1)a_n+n(n+1)$，得 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+1$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=1$，$\therefore$ 数列 $\{\dfrac{a_n}{n}\}$ 是以 2 为首项，以 1 为公差的等差数列，则 $\dfrac{a_n}{n}=2+(n-1)\times 1=n+1$，即 $a_n=n(n+1)$；(2)【解析】由 (1) 知，$a_n=n(n+1)$，

则 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，$\therefore \dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_{99}}=(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\ldots+(\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100})=1-\dfrac{1}{100}=\dfrac{99}{100}$．

9.【解析】(1) 由题意可得：$a_{n+1}+\lambda(n+1)+\mu=3(a_n+\lambda n+\mu)$，化为：$a_{n+1}=3a_n+2\lambda n+2\mu-\lambda$．

又 $a_{n+1}=3a_n+4n$．$\therefore 2\lambda=4$，$2\mu-\lambda=0$．解得 $\lambda=2$，$\mu=1$．

(2) 对于 (I) 中的 λ，μ，则 $c_n=(\lambda n+\mu)(a_n+\lambda n+\mu)=(2n+1)(a_n+2n+1)$．

$\because \{a_n+2n+1\}$ 是公比为 3 的等比数列，$a_1+3=3$．$\therefore a_n+2n+1=3^n$，$\therefore c_n=(2n+1)\bullet 3^n$．

$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3\times 3+5\times 3^2+7\times 3^3+\ldots\ldots+(2n+1)\bullet 3^n$．

$\therefore 3S_n=3\times 3^2+5\times 3^3\ldots\ldots+(2n-1)\bullet 3^n+(2n+1)\bullet 3^{n+1}$．

$\therefore -2S_n=3\times 3+2\times(3^2+3^3+\ldots+3^n)-(2n+1)\bullet 3^{n+1}=3+2\times\dfrac{3(3^n-1)}{3-1}-(2n+1)\bullet 3^{n+1}$，整理为 $S_n=n\bullet 3^{n+1}$．

10.【解析】(1) 由已知得 $S_n=n^2a_n$，所以 $S_{n-1}=(n-1)^2a_{n-1}$，所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}(n\geq 2)$，所以 $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$，所以 $a_n(n+1)=a_{n-1}(n-1)\Rightarrow a_n(n+1)\cdot n=a_{n-1}\cdot n\cdot(n-1)$.数列 $\{a_n(n+1)\cdot n\}$ 为常数数列，即

$a_n\cdot n(n+1)=a_1\times 1\times 2=2$，$a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}$；故 $S_n=n^2a_n=\dfrac{2n}{n+1}$.

(2) $b_n=\dfrac{S_n}{n!}=\dfrac{2n}{(n+1)n!}=2[\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}]$，

$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=2[(\dfrac{1}{1!}-\dfrac{1}{2!})+(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!})+\cdots+\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}]=2[1-\dfrac{1}{(n-1)!}]<2$.

又因为当 $n\geq 2$ 时，$(n+1)!>n+1$，所以 $T_n=2-\dfrac{2}{(n+1)!}>2-\dfrac{2}{n+1}=\dfrac{2n}{n+1}$，故当 $n\geq 2$ 时有 $\dfrac{2n}{n+1}<T_n<2$.

11.【解析】(1) $a=0$ (2) $a_n=\frac{n-1}{n-2}a_{n-1}$，$\frac{a_n}{n-1}=\frac{a_{n-1}}{n-2}=\cdots=\frac{a_2}{1}$，$a_n=(n-1)a^2$ 故 $\begin{cases}a_1=0 & 当n=1\\(n-1)p & 当n\geq 2\end{cases}$.

(3) $b_n=2+2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$，$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=2n+2(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})<2n+3$.

12.【解析】因为 $a_{n+1}+a_n=n^2+n$，所以

$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)=1+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)$

$=\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)+1$.

13.【解析】$\because S_n=n\left(5n-4\right)a_n, \because S_{n-1}=\left(5n^2-4n-1\right)a_n$, 且$S_{n-1}=(n-1)(5n-9)a_{n-1}$，$a_n=S_n-S_{n-1}$，

即 $(5n+1)a_n=(5n-9)a_{n-1}$，$(5n+1)(5n-4)a_n=(5n-4)(5n-9)a_{n-1}=1\times 6\times a_1$. $a_n=\frac{6}{(5n+1)(5n-4)}$

14.【解析】$\because \frac{a_n}{5n+2}=\frac{a_{n-1}}{5n-8}+\frac{25}{5n+2}$,即$\frac{a_n}{(5n+2)(5n-3)}=\frac{a_{n-1}}{(5n-3)(5n-8)}+\frac{25}{(5n+2)(5n-3)}$，

故 $\frac{a_n}{(5n+2)(5n-3)}-\frac{a_{n-1}}{(5n-3)(5n-8)}=5\left(\frac{1}{5n-3}-\frac{1}{5n+2}\right)$ 使用累加法可得，即$\frac{a_n}{(5n+2)(5n-3)}=\frac{5n-3}{5n+2}$ 所以 $a_n=(5n-3)^2$

15.【解析】$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}-\frac{a_n}{n!}=(n+2)$，$\frac{a_n}{n!}-\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}=(n+1)$，$\ldots$ $\frac{a_2}{2!}-\frac{a_1}{1!}=3$，以上 n 个式子累加可得，

$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}-\frac{a_1}{1}=\frac{(3+(n+2))n}{2}$ $\therefore a_n=\frac{n^2+3n-2}{2}n!$

16.【解析】由已知得 $\frac{1}{a_n}=\frac{3}{a_{n-1}}+2\cdot 3^{n-1}$，则 $\frac{1}{3^n a_n}=\frac{3}{3^n a_{n-1}}+\frac{2\cdot 3^{n-1}}{3^n}$，即 $\frac{1}{3^n a_n}=\frac{1}{3^{n-1}a_{n-1}}+\frac{2}{3}$.

所以数列 $\{\frac{1}{3^n a_n}\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为公差的等差数列.所以 $\frac{1}{3^n a_n}=\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\frac{2}{3}=\frac{2n-1}{3}$，即 $a_n=\frac{1}{(2n-1)\cdot 3^{n-1}}$.

17.【解析】因为 $a_{n+1}-3(n+1)+2=\frac{1}{3}(a_n-3n+2)$，且 $a_1-3+2=1$，所以数列 $\{a_n-3n+2\}$ 是以 1 为首项，$\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列，则 $a_n-3n+2=\frac{1}{3^{n-1}}$，即 $a_n=\frac{1}{3^{n-1}}+3n-2$.

18.【解析】令 $a_{n+1}+A(n+1)^2+B(n+1)+C=-(a_{n-1}+An^2+Bn+C)$，再求得 A，B，C，最后求得 $a_n=(-1)^{n-1}+\frac{n}{2}-\frac{n^2}{2}$.

19.【解析】因为 a_n,S_n 是一元二次方程 $x^2-3n^2x+b_n=0$ 的两个根，所以 $\begin{cases}a_n+S_n=3n^2\\a_nS_n=b_n\end{cases}$，由 $a_n+S_n=3n^2$ 得 $a_{n+1}+S_{n+1}=3(n+1)^2$，两式相减得 $a_{n+1}-a_n+S_{n+1}-S_n=6n+3$，所以 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}(6n+3)$，令 $a_{n+1}+A(n+1)+B=\frac{1}{2}(a_n+An+B)$，则 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{2}An-\frac{1}{2}B-A$，比较以上两式的系数，得

$\begin{cases}-\frac{1}{2}A=3\\-\frac{1}{2}B-A=\frac{3}{2}\end{cases}$，解得$\begin{cases}A=-6\\B=9\end{cases}$.所以$a_{n+1}-6(n+1)+9=\frac{1}{2}(a_n-6n+9)$.又$a_1+S_1=3$，$a_1=\frac{3}{2}$，所以数列$\{a_n-6n+9\}$是以$\frac{9}{2}$为首项、$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.所以$a_n-6n+9=\frac{9}{2}(\frac{1}{2})^{n-1}$，$a_n=6n+\frac{9}{2^n}+9$，

$S_n=3n^2-a_n=3n^2-6n-\frac{9}{2^n}+9$,所以$b_n=(6n+\frac{9}{2^n}-9)(3n^2-6n-\frac{9}{2^n}+9)$.

20.【解析】(1)依题意，令$a_{n+1}+\lambda(n+1)^2+\mu(n+1)+\gamma=2(a_n+\lambda n^2+\mu n+\gamma)$所以

$a_{n+1}=2a_n+\lambda n^2+\mu n-2\lambda n+\gamma-\lambda-\mu$

即$\begin{cases}\lambda=-1\\\mu-2\lambda=3\\\gamma-\lambda-\mu=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}\lambda=-1\\\mu=1\\\gamma=0\end{cases}$.所以数列$\{a_n-n^2+n\}$是以2为公比、$a_1-1+1=1$为首项等比数列.所以

$a_n-n^2+n=2^{n-1}$，$a_n=n^2+2^{n-1}-n$，即存在$\lambda=-1,\mu=1$,使得数列$\{a_n-n^2+n\}$成等比数列.

(2)$b_n=\frac{1}{a_n+n-2^{n-1}}=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})}=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$，所以当$n\geq2$是，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$<1+(\frac{1}{2-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2+\frac{1}{2}})+(\frac{1}{3-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3+\frac{1}{2}})+\cdots+(\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}})=1+\frac{2}{3}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}<1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$；当$n=2$时，

$S_2=b_1+b_2=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$，$\frac{6n}{(n+1)(2n+1)}=\frac{12}{3\times5}=\frac{4}{5}<\frac{5}{4}$；当$n=3$，$b_n=\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.所以

$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n>(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n}=\frac{n}{n+1}$.又当$n\geq3$时，$2n+1>6$，即$1>\frac{6}{2n+1}$，

所以$S_n>\frac{n}{n+1}\cdot\frac{6}{2n+1}=\frac{6n}{(n+1)(2n+1)}$.故$\frac{6n}{(n+1)(2n+1)}\leq S_n<\frac{5}{3}$.

21.【解析】(1)当$n=1$时，$4S_1=8+3a_1-3$,得$a_1=5$.当$n\geq2$时，由$4S_n=8n+3a_n-3$，得$4S_{n-1}=8(n-1)^2+3a_{n-1}-3$.两式相减得$4a_n=4(S_n-S_{n-1})=8(2n-1)+3(a_n-a_{n-1})$，故$a_n=-3a_{n-1}+16_n-8$ ①

令$a_n+p_n+q=-3[a_{n-1}+p(n-1)+q]$，$a_n=-3a_{n-1}-4p_n-4q+3p$ ②.比较①②系数得$-4p=16$，$p=-4$，所以$a_n-4n-1=(a_1-4-1)\cdot(-3)^{n-1}=0$，$a_n=4n+1$.

(2)$\frac{1}{\sqrt{b_k}}=\frac{1}{\sqrt{a_k}\cdot\sqrt{a_k-2}\cdot\sqrt{a_k+2}}=\frac{1}{\sqrt{a_k}}(\frac{1}{\sqrt{a_k-2}}-\frac{1}{\sqrt{a_k+2}})\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k+2}-\sqrt{a_k-2}}$

$=\frac{\sqrt{a_k+2}+\sqrt{a_k-2}}{4\sqrt{a_k}}(\frac{1}{\sqrt{a_k-2}}-\frac{1}{\sqrt{a_k+2}})$，又因为$(\sqrt{a_k+2}+\sqrt{a_k-2})^2-(2\sqrt{a_k})^2=2(\sqrt{a_k^2-4}-a_k)<0$，

所以$\frac{\sqrt{a_k+2}+\sqrt{a_k-2}}{\sqrt{a_k}}<2$，$\frac{1}{\sqrt{b_k}}<\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{a_k-2}}-\frac{1}{\sqrt{a_k+2}})=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{a_k-2}}-\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}-2}})$.

所以$\frac{1}{\sqrt{b_1}}+\frac{1}{\sqrt{b_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{b_n}}<\frac{1}{2}[(\frac{1}{\sqrt{a_1-2}})-\frac{1}{\sqrt{a_2-2}}+(\frac{1}{\sqrt{a_2-2}})-\frac{1}{\sqrt{a_3-2}}+\cdots+(\frac{1}{\sqrt{a_n-2}}-\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}-2}})]=$

$\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{a_1-2}}-\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}-2}})<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

22.【解析】(1) 由 $S_n=n^2+\frac{1}{2}a_n$,得 $S_{n+1}=(n+1)^2+\frac{1}{2}a_{n+1}$，两式相减得 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2n+1+\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$，所以 $\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)=2n+1$，故 $a_{n+1}+A(n+1)+B=-(a_n+An+B)$，$a_{n+1}=-a_n-2An-A-2B$，比较以上两式，得 $-2A=4$，$-A-2B=2$，故 $A=-2$，$B=0$.所以 $a_{n+1}-2(n+1)=-(a_n-2n)$.又 $S_1=1^2+\frac{1}{2}a_1$，$a_1=2$ 。故数列 $\{a_n-2n\}$ 是以 $a_1-2=0$ 为首项、-1 为公比的公比的等比数列，所以 $a_n-2n=0\cdot(-1)^{n-1}=0$，即 $a_n=2n$.

（2）令 $f(n)=(1-\frac{1}{a_1})(1-\frac{1}{a_2})\cdots(1-\frac{1}{a_n})\sqrt{2n+1}$，所以 $\frac{f(n+1)}{f(n)}=(1-\frac{1}{a_{n+1}})\cdot\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}}=\frac{(2n+1)\sqrt{2n+3}}{(2n+2)\sqrt{2n+1}}<1$，所以

$f(n+1)<f(n)$，$\{f(n)\}$ 为递减数列，$f(n)\max=f(1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.所以原不等式 $f(n)<a-\frac{3}{2a}$ 对于一切 $n\notin N*$ 恒成立，所以 $f(n)_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{2}<a-\frac{3}{2a}\Rightarrow\frac{(a-\sqrt{3})(2a+\sqrt{3})}{a}>0$，即 $a>\sqrt{3}$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<0$.

23.【解析】（1）由已知，$\frac{1}{\sqrt{a_1}}=\frac{1}{2\sqrt{a_1a_2}}$，得 $a_2=\frac{1}{4}$；$\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2a_3}}=\frac{1}{2\sqrt{a_2a_3}}$，得 $a_3=\frac{1}{9}$.

（2）当 $n\ge2$ 时，$\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n}}=\frac{1}{2\sqrt{a_na_{n+1}}}$， ① $\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}}=\frac{1}{2\sqrt{a_{n-1}a_n}}$. ②

②—①得 $\frac{1}{\sqrt{a_n}}=\frac{1}{2\sqrt{a_na_{n+1}}}-\frac{1}{2\sqrt{a_{n-1}a_n}}$，所以 $\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}}=2$，所以数列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{a_{2n-1}}}\right\}$，$\left\{\frac{1}{\sqrt{a_{2n}}}\right\}$ 皆为等差数列.

所以 $\frac{1}{\sqrt{a_{2n-1}}}=\frac{1}{\sqrt{a_1}}+2(n-1)=2n-1$，$\frac{1}{\sqrt{a_{2n}}}=\frac{1}{\sqrt{a_2}}+2(n-1)=2n-1$.综上，$\frac{1}{\sqrt{a_n}}=n$，所以 $a_n=\frac{1}{n^2}$.

（3）$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\cdots+\sqrt{a_na_{n+1}}=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$，

$\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}=\sqrt{\frac{n^2}{(n+1)^2}}=\frac{n}{n+1}$ 所以等式成立.

24．【解析】（1）由已知得 $f'(x)=(a_n-a_{n-1})x-(a_{n+1}-a_n)(n\ge2)$，依题意有 $f'(t)=0$，所以 $(a_n-a_{n-1})t-(a_{n+1}-a_n)=0$.

又 $t\ne0$，所以 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=t$，所以数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 t 为公比的等比数列.又首项 $a_2-a_1=t^2-t$，所以

$a_{n+1}-a_n=(t^2-t)\cdot t_{n-1}=(t-1)\cdot t_n$，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}t^k$.

又 $a_1+(t+1)\sum_{k=1}^{n-1}t^k=t+(t-1)\cdot\frac{t(1-t^{n-1})}{1-t}=t-t+t^n=t^n$，故 $a_n=t^n$.

（2）因为 $b_n=a_n\ln|a_n|=t_n\ln|t^n|=nt^n\ln|t|$，所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=(t+2t^2+3t^3+\cdots+nt^n)\ln|t|$.①

式①两边都乘以 t 得 $tSn=[t2+2t^3+3t^4+\cdots+(n-1)t^n+nt^{n-1}]\ln|t|$　②.

①—②的 $(1-t)S_n=(t+t^2+t^3++(n-1)t^n-nt^{n+1})\ln|t|=[\frac{t(1-t^n)}{1-t}-nt^{n+1}]\ln|t|$ 所以 $Sn=[\frac{t(1-t^n)}{(1-t)^2}-\frac{nt^{n-1}}{1-t}]\ln|t|$.

（3）因为 $t=-\sqrt{\frac{7}{10}}$，所以 $-1<t<0$.当 n 为偶数时，$bn=nt^n\ln|t|<0$；当 n 为偶数时，$bn=nt^n\ln|t|>0$ 最大项必为奇数.设最大项为 b_{2k+1}，则 $\begin{cases}b_{2k+1}\geq b_{2k-1}\\b_{2k+1}\geq b_{2k+3}\end{cases}$，即 $\begin{cases}(2k+1)t^2\geq 2k-1\\2k+1\geq(2k+3)t^2\end{cases}$.因 $t^2=\frac{7}{10}$ 所以 $\frac{11}{6}\leq k\frac{17}{6}$，即 $k=2$.故数列 $\{b_n\}$ 中最大项为第 5 项.

专题 4 和数列与积数列

1.【解析】$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+a_n=2n-3$，$\therefore a_{n+2}+a_{n+1}=2(n+1)-3=2n-1$，$a_{n+2}-a_n=2$，

当 $n=1$ 时，$a_2+a_1=-1$，$\therefore a_2=-3$．$\therefore$ 数列 $\{a_{2n}\}$ 是等差数列，首项为 -3，公差为 2.

$\therefore a_{2n}=-3+2(n-1)=2n-5$．$\therefore a_{2014}=2014-5=2009$．故选 D．

2.【解析】$\because a_1=1$，$a_na_{n+1}=2^n$，$\therefore n=1$ 时，$a_2=2$．$n\geqslant 2$ 时，$\frac{a_na_{n+1}}{a_{n-1}a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=2$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的奇数项与偶数项分别成等比数列，公比为 2．则 $S_{20}=(a_1+a_3+\ldots+a_{19})+(a_2+a_4+\ldots+a_{20})$

$=\frac{2^{10}-1}{2-1}+\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=3\times 1023=3069$．故选 D．

3.【解析】$\because a_1=1$，$a_{n+1}\bullet a_n=2^n(n\in N^*)$，$\therefore$ 当 $n=1$ 时，$a_2\bullet a_1=2$，$\therefore a_2=2$，$\therefore a_n\bullet a_{n-1}=2^{n-1}(n\geqslant 2)$，

$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=2$，$\therefore$ 从第 2 项开始，每隔一项，即偶数项，以 2 为首项，以 2 为公比的等比数列，

从第 1 项开始，每隔一项，即为奇数项，以 1 为首项，以 2 为公比的等比数列，

$\therefore S_{2017}=\frac{1\times(1-2^{1009})}{1-2}+\frac{2\times(1-2^{1008})}{1-2}=2^{1009}-1+2^{1009}-2=2^{1010}-3$，故选：$B$．

4.【解析】设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q>0$，$\because a_na_{n+1}=2^{2n}$ $(n\in N^*)$，$\therefore \frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\frac{2^{2(n+1)}}{2^{2n}}=4=q^2$，解得 $q=2$．

$\therefore a_n^2\times 2=2^{2n}$，$a_n>0$．解得 $a_n=2^{\frac{2n-1}{2}}$．则 $a_6-a_5=2^{\frac{11}{2}}-2^{\frac{9}{2}}=16\sqrt{2}$．故选 D．

5.【解析】法一：$a_1=1$，$a_n\bullet a_{n+1}=2^n(n\in N^*)$．$n=1$ 时，$a_1a_2=2$，$a_2=2$．$\therefore n\geqslant 2$ 时，$\frac{a_na_{n+1}}{a_{n-1}a_n}=\frac{2^n}{2^{n-1}}$，化为：

$\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=2$．$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的奇数项与偶数项分别成等比数列，首项分别为 1，2，公比都为 2．$\therefore A$，B 不正确．

$a_{2019}=2^{1009}$，因此 C 不正确．

$S_{2019}=(a_1+a_3+\ldots\ldots+a_{2019})+(a_2+a_4+\ldots\ldots+a_{2018})=(1+2+2^2+\ldots\ldots+2^{1009})+(2+2^2+\ldots\ldots+2^{1009})$

$=\dfrac{2^{1010}-1}{2-1}+\dfrac{2(2^{1009}-1)}{2-1}=2^{1011}-3$．因此 D 正确．故选 D．

法二：待定系数法，$a_n=2^{xn+y+z(-1)^n}$，$a_{n+1}=2^{xn+x+y+z(-1)^n}$，$a_n\cdot a_{n+1}=2^{2xn+x+2y}=2^n$，对比系数得，$x=\dfrac{1}{2}$，

$y=-\dfrac{1}{4}$，$a_1=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-z}=1$，$\therefore z=\dfrac{1}{4}$，$\therefore a_n=2^{\frac{2n-1+(-1)^n}{4}}$，$n\in N^*$．$A$、$B$、$C$ 均错，求和同法一．

6.【解析】$\because S_{n+1}+S_n=\dfrac{n^2-19n}{2}$①由等差数列前 n 项和的性质，知数列 $\{a_n\}$ 为单调递增的等差数列，

将 n 换为 $n+1$ 得，$S_{n+2}+S_{n+1}=\dfrac{(n+1)^2-19(n+1)}{2}$②，②－①得，$a_{n+2}+a_{n+2}=n-9$，

当 $n=9$ 时，$a_{11}+a_{10}=0$，又 $a_{10}<a_{11}$，$\therefore a_{11}>0$，$a_{10}<0$，$\therefore n=10$ 时，S_n 取最小值．故选 A．

7.【解析】若数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=3n+1$，$n\in N^*$，可得 $a_1+a_2=4$，$a_3+a_4=10$，$a_5+a_6=16$，

$\ldots$，$a_{2n}+a_{2n-1}=6n-2$，相加可得 $a_1+a_2+\ldots+a_{2n}=4+10+16+\ldots+(6n-2)=\dfrac{1}{2}n(4+6n-2)=3n^2+n$．

8.【解析】法一：$\because$ 数列 $\{a_n\}(n\in N^*)$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=(\dfrac{1}{2})^n$，

$\therefore(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\ldots+(a_{2n-1}+a_{2n})=\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{2})^3+\ldots+(\dfrac{1}{2})^{2n-1}=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{4^n})}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{2}{3}(1-\dfrac{1}{4^n})$，$\therefore S_{2n}=\dfrac{2}{3}(1-\dfrac{1}{4^n})$．

又 $a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\ldots+(a_{2n-2}-a_{2n-1})=1+(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{1}{2})^4+\ldots+(\dfrac{1}{2})^{2n-2}=1+\dfrac{(\frac{1}{2})^2(1-\frac{1}{4^{n-1}})}{1-\frac{1}{4}}=1+\dfrac{1}{3}(1-\dfrac{1}{4^{n-1}})$．

即 $S_{2n-1}=1+\dfrac{1}{3}(1-\dfrac{1}{4^{n-1}})$．$\therefore a_{2n}=S_{2n}-S_{2n-1}=\dfrac{1}{3\cdot2^{2n-1}}-\dfrac{2}{3}$．$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{3\cdot2^{2n-1}}-\dfrac{2}{3})=-\dfrac{2}{3}$．

法二：待定系数法，令 $a_n=x\cdot(\dfrac{1}{2})^n+y(-1)^n$，则 $a_{n+1}=x\cdot(\dfrac{1}{2})^{n+1}+y(-1)^{n+1}$，$a_{n+1}+a_n=\dfrac{3}{2}x\cdot(\dfrac{1}{2})^n=(\dfrac{1}{2})^n$，对比系数得 $x=\dfrac{2}{3}$，$a_1=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}-y=1$，$\therefore y=-\dfrac{2}{3}$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=\dfrac{2}{3}\cdot(\dfrac{1}{2})^{2n}-\dfrac{2}{3}(-1)^{2n}=-\dfrac{2}{3}$

9.【解析】由数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_{n+1}+a_n=2n+1$，可得 $a_1+a_2=3$，$a_3+a_4=7$，$a_5+a_6=11$，$\ldots$，

$a_{29}+a_{30}=59$，$a_{31}+a_{32}=63$，可得，$S_{30}=\dfrac{15\times(3+59)}{2}=465<500$，$S_{32}=465+63=528>500$．

由 $S_n=500$，若 $a_2<2$，则 n 的最大值为 31，故答案为：31．

10.【解析】法一：$\because$ 对于任意的 $n\in N^*$ 都有 $S_n+S_{n+1}=n^2$，①　$\therefore S_{n+1}+S_{n+2}=(n+1)^2$，②

②－①差得 $a_{n+1}+a_{n+2}=(n+1)^2-n^2=2n+1$，③，则当 $n\geqslant2$ 时，$a_n+a_{n+1}=2n-1$④

③－④得 $a_{n+2}-a_n=2$，也就是隔 2 项成等差数列，公差为 2.

$\because \{a_n\}$ 为单调递增的数列 $\therefore$ 只要保证 $a_1<a_2<a_3$，即 $a_1<a_2<2+a_1$，可以保证整个数列单调递增.

当 $n=1$ 时，$a_1+a_1+a_2=1$，即 $a_2=1-2a_1$，代入 $a_1<a_2<2+a_1$，得 $a_1<1-2a_1<2+a_1$，即 $\begin{cases}a_1<1-2a_1\\1-2a_1<2+a_1\end{cases}$ $\begin{cases}a_1<\dfrac{1}{3}\\a_1>-\dfrac{1}{3}\end{cases}$，即 $-\dfrac{1}{3}<a_1<\dfrac{1}{3}$，即 a_1 的取值范围为 $(-\dfrac{1}{3}，\dfrac{1}{3})$，故选 B.

以上方法是错的，但这是参考答案给的方法，错误原因在于递推式 $a_{n+2}-a_n=2$ 中，$n\geq 2$，因为和式代换 $a_{n+2}-a_n=(S_{n+2}+S_{n+1})-(S_{n+1}+S_n)$ 当中，一定有 $n\geq 2$，此结论只能说明数列从第二项起隔项递增，也可以尝试 $S_1+S_2=2a_1+a_2=1\Rightarrow a_2=1-2a_1$，$S_2+S_3=2a_1+2a_2+a_3=4\Rightarrow a_3=4-2(1-2a_1)-2a_1=2+2a_1$，与参考答案中的 $a_3=2+a_1$ 矛盾，故 $\begin{cases}a_1<1-2a_1\\1-2a_1<2+2a_1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_1<\dfrac{1}{3}\\a_1>-\dfrac{1}{4}\end{cases}$，即 $-\dfrac{1}{4}<a_1<\dfrac{1}{3}$，即 a_1 的取值范围为 $(-\dfrac{1}{4}，\dfrac{1}{3})$，故选 D.

法二：待定系数法，令 $S_n=An^2+Bn+C+D(-1)^n$，则 $S_{n+1}=A(n+1)^2+B(n+1)+C+D(-1)^{n+1}$，由于 $S_n+S_{n+1}=2An^2+(2A+2B)n+A+B+2C=n^2$，对比系数得：$A=\dfrac{1}{2}$，$B=-\dfrac{1}{2}$，$C=0$，$S_1=-D=a_1$，则 $S_2=\dfrac{1}{2}\times 2^2-\dfrac{1}{2}\times 2+D=1-a_1$，$S_3=\dfrac{1}{2}\times 3^2-\dfrac{1}{2}\times 3-D=3+a_1$，故 $a_2=1-2a_1$，$a_3=2+2a_1$，$\begin{cases}a_1<1-2a_1\\1-2a_1<2+2a_1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_1<\dfrac{1}{3}\\a_1>-\dfrac{1}{4}\end{cases}$，即 $-\dfrac{1}{4}<a_1<\dfrac{1}{3}$，即 a_1 的取值范围为 $(-\dfrac{1}{4}，\dfrac{1}{3})$，故选 D.（待定系数法一定不会错）

11.【解析】根据题意，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+a_n=(-1)^n(2n-1)$，当 n 为奇数时，有 $a_{n+1}+a_n=-(2n-1)$，其中当 $n=1$ 时，有 $a_2+a_1=-1$，当 $n=3$ 时，有 $a_4+a_3=-5$，当 $n=5$ 时，有 $a_6+a_5=-9$，…

当 $n=59$ 时，有 $a_{60}+a_{59}=-(2\times 59-1)=-117$，则 $\{a_n\}$ 的前 60 项和 $S_{60}=(a_2+a_1)+(a_4+a_3)+\ldots+(a_{60}+a_{59})$ $=(-1)+(-5)+\ldots+(-117)=-(1+5+9+\ldots+117)$ $=-\dfrac{(1+117)\times 30}{2}=-1770$；故选：$C$.

12.【解析】(1) 由 $a_{n+1}+a_n=4n+4$，$\therefore a_{n+2}+a_{n+1}=4(n+1)+4=4n+8$ $\therefore a_{n+2}-a_n=4$

$\therefore \{a_n\}$的奇数项与偶数项分别是公差为 4 的等差数列．又 $a_1=1$，$\therefore a_2=7$ $\therefore a_n=\begin{cases}4n-3, & n\text{为正奇数}\\ 4n+3, & n\text{为正偶数}\end{cases}$

（2）若数列$\{a_n\}$是等差数列，则 $a_n=a_1+(n-1)d$，$a_{n+1}=a_1+nd$．由 $a_{n+1}+a_n=4n+4$，

得 $(a_1+nd)+[a_1+(n-1)d]=4n+4$，即 $2d=4$，$2a_1-d=4$，解得，$d=2$，$a_1=3$，所以存在存在 $a_1=3$，

使$\{a_n\}$为等差数列．

13．【解析】法一：$a_2-a_1=1$，$a_3+a_2=3$，$a_4-a_3=5$，$a_5+a_4=7$，$a_6-a_5=9$，…

$a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{64}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\ldots+(a_{62}+a_{63})+a_{64}=a_1+1953+a_{64}$，

将 $a_1-a_2=-1$，$a_3+a_2=3$，$a_4-a_3=5$，$-a_5-a_4=-7$，$-a_6-a_5=-9$，

$a_7+a_6=11$，$a_8-a_7=13$，$a_9+a_8=15\ldots$，$a_{64}-a_{63}=125$ 相加

得 $a_1+a_{64}=-1+3+5-7-9+11+13-15-17+\ldots+123+125=127$，

$\therefore$ 则$\{a_n\}$的前 64 项和为：$1953+127=2080$．故选：D．

法二：$a_2-a_1=1$，$a_3+a_2=3$，$a_4-a_3=5$，故 $S_4=10$，且 S_4，S_8-S_4，$S_{12}-S_8\cdots$ 是以 10 为首项，16 为公差的等差数列，$S_{64}=16S_4+\dfrac{16\times15}{2}\times16=2080$

14．【解析】$\because a_{n+1}+(-1)^n a_n=n+2$，$\therefore a_2-a_1=3$，$a_3+a_2=4$，$a_4-a_3=5$．可得 $a_3+a_1=1$，$a_2+a_4=9$，

同理可得：$a_5+a_7=a_3+a_1=1=a_9+a_{11}=a_{13}+a_{15}=a_{17}+a_{19}$．

$a_6+a_8=17$，$a_{10}+a_{12}=25$，$a_{14}+a_{16}=33$，$a_{18}+a_{20}=41$．

$\therefore \{a_n\}$的前 20 项和 $=(a_1+a_3)+\ldots+(a_{17}+a_{19})+(a_2+a_4)+(a_6+a_8)+\ldots+(a_{18}+a_{20})$

$=5+9+17+25+33+41=130$．故选：A．

15．【解析】法一：数列$\{a_n-n\}$的前 2018 项和为 1，即有 $(a_1+a_2+\ldots+a_{2018})-(1+2+\ldots+2018)=1$，

可得 $a_1+a_2+\ldots+a_{2018}=1+1009\times2019$，由数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 n^2，$b_n=a_{n+1}+(-1)^n a_n(n\in N^*)$，

可得 $a_2=1+a_1$，$a_3=2-a_1$，$a_4=7-a_1$，$a_5=a_1$，$a_6=8+a_1$，$a_7=2-a_1$，$a_8=15-a_1$，$a_9=a_1$，…，

可得 $a_1+a_2+\ldots+a_{2018}=(1+2+7)+(9+2+15)+(17+2+23)+\ldots+(4025+2+4031)+(a_1+4033+a_1)$

$=1+1009\times2019$，解得 $a_1=\dfrac{3}{2}$．故答案为：$\dfrac{3}{2}$．

法二：由数列$\{b_n\}$的前n项和为n^2，$b_n=a_{n+1}+(-1)^n a_n=n^2-(n-1)^2=2n-1(n\in N^*)$，数列$\{a_n-n\}$的前2018项和为1，即有$(a_1+a_2+\ldots+a_{2018})-(1+2+\ldots+2018)=1$，可得$a_1+a_2+\ldots+a_{2018}=1+1009\times2019$，由于2018不是4的倍数，故只能从$a_3$开始，$a_3$到$a_{2018}$之间的项数满足4的倍数，$a_3+a_4+a_5+a_6=18$，故$S_6-S_2$，$S_{10}-S_6$，$\cdots S_{2018}-S_{2014}$是公差为16的等差数列，$S_{2018}=a_1+a_2+18\times504+\dfrac{504\times503}{2}\times16=1+1009\times2019$，即：$2a_1+1+18\times504+\dfrac{504\times503}{2}\times16=1+1009\times2019$，解得$a_1=\dfrac{3}{2}$．故答案为：$\dfrac{3}{2}$．

16．【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，$\because a_4=5$，$a_7=11$．

$\therefore a_1+3d=5$，$a_1+6d=11$，$\therefore a_1=-1$，$d=2$．$\therefore a_n=-1+2(n-1)=2n-3$．

又$b_n=(-1)^n\bullet a_n$，$b_{2n-1}+b_{2n}=-a_{2n-1}+a_{2n}=2$．则数列$\{b_n\}$的前100项之和$S_{100}=2\times50==100$．故选$D$．

17．【解析】数列$\{a_n\}$中，$a_{2n}=a_{2n-1}+(-1)^n\bullet n$，$a_{2n+1}=a_{2n}+n$，$\therefore a_{2n+1}-n=a_{2n-1}+(-1)^n\bullet n$，

化为：$a_{2n+1}-a_{2n-1}=n+(-1)^n\bullet n$，$\therefore a_3-a_1=1-1$，$a_5-a_3=2+2$，……，$a_{99}-a_{97}=49-49$，$a_{101}-a_{99}=50+50$．

相加可得：$a_{101}-a_1=1+2+\ldots\ldots+50+25=\dfrac{50\times(1+50)}{2}+25$．可得：$a_{101}=a_1+1300=1301$．故答案为：1301．

18．【解析】$\because a_{n+1}=2a_n+(-1)^n$，$\therefore a_{n+1}+\dfrac{1}{3}(-1)^{n+1}=2[a_n+\dfrac{1}{3}(-1)^n]$，$a_1+\dfrac{1}{3}\times(-1)=\dfrac{2}{3}$．

$\therefore$数列$\{a_n+\dfrac{1}{3}(-1)^n\}$是等比数列，首项为$\dfrac{2}{3}$，公比为2．$\therefore a_n+\dfrac{1}{3}(-1)^n=\dfrac{2}{3}\times2^{n-1}$，解得：$a_n=\dfrac{2}{3}\times2^{n-1}-\dfrac{1}{3}(-1)^n$，

$\therefore S_n=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1-2^n}{1-2}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{-[1-(-1)^n]}{1-(-1)}=\dfrac{2(2^n-1)}{3}+\dfrac{1-(-1)^n}{6}$．则$S_{2n-1}=\dfrac{2(2^{2n-1}-1)}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4^n-1}{3}$．故答案为：$\dfrac{4^n-1}{3}$．

19．【解析】$a_{2k+1}=a_{2k}+2^k=a_{2k-1}+(-1)^k+2^k$，所以$a_{2k+1}-a_{2k-1}=2^k+(-1)^k$，同理$a_{2k-1}-a_{2k-3}=2^{k-1}+(-1)^{k-1}$，

$\ldots\ a_3-a_1=2+(-1)$，所以$(a_{2k+1}-a_{2k-1})+(a_{2k-1}-a_{2k-3})+\ldots+(a_3-a_1)$

$=(2^k+2^{k-1}+\ldots+2)+[(-1)^k+(-1)^{k-1}+\ldots+(-1)]$，由此得$a_{2k+1}-a_1=2(2^k-1)+\dfrac{1}{2}[(-1)^k-1]$，

于是$a_{2k+1}=2^{k+1}+\dfrac{1}{2}(-1)^k-\dfrac{3}{2}$，$a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^k=2^k+\dfrac{1}{2}(-1)^{k-1}-\dfrac{3}{2}+(-1)^k=2^k+\dfrac{1}{2}(-1)^k-\dfrac{3}{2}$，

$\{a_n\}$的通项公式为：当n为奇数时，$a_n=2^{\frac{n+1}{2}}+\dfrac{1}{2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}-\dfrac{3}{2}$；当$n$为偶数时，$a_n=2^{\frac{n}{2}}+\dfrac{1}{2}(-1)^{\frac{n}{2}}-\dfrac{3}{2}$；

则$S_{60}=(a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{59})+(a_2+a_4+a_6+..+a_{60})=[(2+2^2+2^3+\ldots+2^{30})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\ldots-\dfrac{1}{2})-\dfrac{3}{2}\times30]$

$+[(2+2^2+2^3+\ldots+2^{30})+(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{2})-\dfrac{3}{2}\times30]=2\times\dfrac{2(1-2^{30})}{1-2}+0-90=2^{32}-94$．故选：$C$．

20．【解析】$\because$在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=3$，且数列$\left\{a_n+(-1)^n\right\}$是公比为2的等比数列，$\therefore a_n+(-1)^n=2^n$，

$\therefore a_n=2^n-(-1)^n$，$\therefore a_1+a_2+\ldots+a_n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-\dfrac{-1\times[1-(-1)^n]}{1-(-1)}=2^{n+1}-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\times(-1)^n$，

$\because$对于任意的$n\in N^*$，不等式$a_1+a_2+\ldots+a_n\geqslant\lambda a_{n+1}$恒成立，

$\therefore$对于任意的$n\in N^*$，不等式$2^{n+1}-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\times(-1)^n\geqslant\lambda[2^{n+1}-(-1)^{n+1}]$恒成立，

$\therefore$对于任意的$n\in N^*$，不等式$\lambda\leqslant\dfrac{2^{n+1}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times(-1)^n}{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}$恒成立，当$n=1$时，$\dfrac{2^{n+1}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times(-1)^n}{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}$取最大值$\dfrac{2}{3}$，

$\therefore\lambda\leqslant\dfrac{2}{3}$．$\therefore$实数$\lambda$的取值范围是$(-\infty$，$\dfrac{2}{3}]$．故选$C$．

21.【解析】$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n(n+2)}$，$\therefore(-1)^{n+1}a_{n+1}+(-1)^n a_n=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$．

$\therefore$数列$\{(-1)^n a_n\}$的前40项的和$=\dfrac{1}{2}\times(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{39}-\dfrac{1}{41})=\dfrac{1}{2}\times(1-\dfrac{1}{41})=\dfrac{20}{41}$．故选$D$．

专题5 分式数列递推

1.【解析】(1) $a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{2S_n^2}{2S_n-1}$，所以$\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n-1}}=2$，$\dfrac{1}{S_n}=1+(n-1)\cdot2=2n+1$，$S_n=\dfrac{1}{2n-1}$.故

$a_n=\begin{cases}1 & n=1\\ \dfrac{-2}{(2n-1)(2n-3)} & n\geq2\end{cases}$．(2) $T_n=\dfrac{n}{2n+1}$．

2.【解析】$\dfrac{1}{a_n^2}-\dfrac{1}{a_{n-1}^2}=1$，$\dfrac{1}{a_n^2}=\dfrac{1}{a_1^2}+(n-1)=n+\dfrac{1}{a^2}$，$|a_n|=\dfrac{|a|}{\sqrt{1+na^2}}$．

3.【解析】(1) $A_n(-\dfrac{1}{a_{n+1}},a_n)$在$f(x)$上，$a_n=\dfrac{2a_{n-1}}{a_{n-1}+2}$，$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{2}$，$a_n=\dfrac{2}{n}$．

(2) $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\dfrac{1}{4}(\sqrt{4n+1}-1)$

4.【解析】将已知递推式取倒数，得$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$，所以

$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\dfrac{1}{a_{k+1}}-\dfrac{1}{a_k})=\dfrac{1}{a_1}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}[\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}]=2-\dfrac{1}{n!}$，所以$\dfrac{1}{a_n}=2-\dfrac{1}{n!}=\dfrac{2n!-1}{n!}$，$a_n=\dfrac{n!}{2n!-1}$．

5.【解析】将已知递推式两边同除以$a_{n-1}a_n$，得$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=2n-1$，所以$\dfrac{1}{a_n}=1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$，所以

$a_n=\dfrac{1}{n^2}$．

6.【解析】由$a_{n+1}(2a_n+1)=a_n$，可得：$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$，两边取倒数可得：$\dfrac{1}{a_{n+1}}=2+\dfrac{1}{a_n}$，即$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=2$，$\dfrac{1}{a_1}=-99$．

$\therefore$数列$\{\dfrac{1}{a_n}\}$为等差数列，公差为2，首项为-99．$\therefore\dfrac{1}{a_n}=-99+2(n-1)=2n-101$．

$\therefore b_n=\dfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}-\dfrac{1}{a_{2n}a_{2n+1}}=(4n-2-101)(4n-101)-(4n-101)(4n+2-101)=-4(4n-101)=-16n+404$.

令 $b_n=-16n+404\geqslant 0$，解得 $n\leqslant 25+\dfrac{1}{4}$．$\therefore$ 当数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和取得最大值时，n 的值是 25．故选：B.

7.【解析】$\because 2a_na_{n+1}=a_n^2+1$，$\therefore a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n})$，$\because b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}$，

$$\therefore b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1}=\frac{\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})-1}{\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})+1}=\frac{(a_n-1)^2}{(a_n+1)^2}=b_n^2>0,$$

$\because a_1=2$，$b_1=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore b_2=(\dfrac{1}{3})^2$，$\therefore b_3=(\dfrac{1}{3^2})^2=(\dfrac{1}{3})^4$，$b_4=((\dfrac{1}{3})^4)^2=(\dfrac{1}{3})^8$，$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是递减数列，

故选 D.

8.【解析】$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+1}$，$(n\in N^*)$，两边取倒数可得：$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{2a_n}+\dfrac{1}{2}$，化为：$\dfrac{1}{a_{n+1}}-1=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a_n}-1)$，

$\dfrac{1}{a_1}-1=1$，可得：数列 $\{\dfrac{1}{a_n}-1\}$ 是等比数列，首项为 1，公比为 $\dfrac{1}{2}$．$\therefore \dfrac{1}{a_n}-1=(\dfrac{1}{2})^{n-1}$，$\therefore a_n=1-\dfrac{1}{2^{n-1}+1}$.

$\therefore S_{2019}=2019-(\dfrac{1}{1+1}+\dfrac{1}{2+1}+\dfrac{1}{2^2+1}+\ldots+\dfrac{1}{2^{2018}+1})$，令 $T_n=\dfrac{1}{1+1}+\dfrac{1}{2+1}+\dfrac{1}{2^2+1}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{2^{2018}+1}$，

$\because \dfrac{1}{2^n}<\dfrac{1}{2^{n-1}+1}<\dfrac{1}{2^{n-1}}$，而 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{2^{2019}}=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{2019}})}{1-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2^{2019}}$，

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{2^{2018}}=\dfrac{1-\frac{1}{2^{2019}}}{1-\frac{1}{2}}=2(1-\dfrac{1}{2^{2019}})$．$\therefore 2017+\dfrac{1}{2^{2018}}<S_{2019}<2018+\dfrac{1}{2^{2019}}$，

$\because S_{2019}\in(k,k+1)$，则正整数 k 的值为 2018．故选 C.

9.【解析】(1) 由已知，点 $P\left(a_n{}^2,a_{n+1}\right)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上，得 $a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{a_n^2}{1+4a_n^2}}$.两边平方得 $a_{n+1}^2=\dfrac{a_n^2}{1+4a_n^2}$，取倒数得 $\dfrac{1}{a_{n+1}^2}-\dfrac{1}{a_n^2}=4$.所以数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n^2}\right\}$ 是以 5 为首项、4 为公差的等差数列，所以 $\dfrac{1}{a_n^2}=\dfrac{1}{a_1^2}+(n+1)\times 4=4n+1$.

又 $a_n>0$，所以 $a_n=\sqrt{\dfrac{1}{4n+1}}$.

(2) $b_n=\dfrac{a_n}{f(n)}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}>\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.故 $T_n>2(\sqrt{n+1}-1)$.

10.【解析】(1) 因为 $a_1\neq\dfrac{2}{3}$,所以 $f(x)=\dfrac{2bx}{ax-1}$.又 $f(1)=1$，所以 $a=2b+1$.依题意,

$\dfrac{2bx}{ax-1}=2x\Rightarrow 2ax^2-2(b+1)x=0$

$(a\neq 0)$ 只有一个根.所以 $4(1+b)^2-8a\cdot 0$，解得 $b=-1$，代入 $a=2b+1$ 的 $a=-1$.所以 $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$.

（2）因为 $a_{n+1}=f(an)$ 且 $f(x)=\frac{2x}{x+1}$，所以 $a_n=\frac{2a_n}{a_n+1}$，所以 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+1}$.上式两边取倒数，得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}$，即 $\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{2}(\frac{1}{a_n}-1)$. 又 $b_n=\frac{1}{a_n-1}$，所以 $b_n=(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{n-1}=(\frac{1}{2})^n$. 由于 $b_n=\frac{1}{2^n}$，即 $\frac{1}{a_1}-1=\frac{1}{2^n}$，得 $a_n=\frac{2^n}{2^n+1}$.

（3）$a_n\cdot b_n=\frac{2^n}{2^n+1}\times\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$，所以 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1$.

11.【解析】(1) $\because a_1=\frac{1}{2}$，$2a_{n+1}=1+a_{n+1}a_n$，$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$，$\therefore a_2=\frac{1}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$，$a_3=\frac{1}{2-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$，

$\therefore \frac{1}{1-a_{n+1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2-a_n}}=\frac{2-a_n}{1-a_n}=1+\frac{1}{1+a_n}$，$\therefore$ 数列 $\{\frac{1}{1-a_n}\}$ 是等差数列，

（2）由（I）可知 $\frac{1}{1-a_n}=2+1(n-1)=n+1$，$\therefore a_n=\frac{n}{n+1}$，$\therefore b_n=\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

$\therefore S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

12.【解析】(1) 由 $b_{n+1}\cdot b_n=b_n+2$，得 $b_{n+1}=\frac{b_n+2}{b_n}$. 由 $a_n=\frac{1}{b_n+2}$，得

$a_{n+1}=\frac{1}{b_{n+1}-2}=\frac{1}{\frac{b_n+2}{b_n}-2}=\frac{b_n}{2-b_n}=-\frac{2}{b_n-2}-1=-2a_n-1$，所以 $a_{n+1}+2a_n+1=0$.

（2）法 1：由（1）得 $a_{n+1}+\frac{1}{3}=-2(a_n+\frac{1}{3})$，又因为 $b_1=\frac{11}{7}$，所以 $a_1=\frac{1}{\frac{11}{7}-2}=-\frac{7}{3}$，所以数列 $\left\{a_n+\frac{1}{3}\right\}$ 是以 $a_1+\frac{1}{3}$ 为首项、-2 为公比的等比数列.所以 $a_n+\frac{1}{3}=-2\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^n$，$a_n=(-2)^n-\frac{1}{3}$. 又由 $a_n=\frac{1}{b_n-2}$，得 $b_n-2=\frac{1}{a_n}$，故 $b_n=\frac{1}{a_n}+2=\frac{1}{(-2)^n-\frac{1}{3}}+2=\frac{3}{3(-2)^n-1}+2=\frac{6(-2)^n+1}{3(-2)^n-1}$.

13.【解析】(1) 在递推数列 $a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$ 中用 x 代替 a_{n+1}，a_n,得 $x=\frac{1}{2-x}$.所以 $x^2-2x+1=0$，得 $x=1$.所以

$a_{n+1}-1=\frac{1}{2-a_n}-1=\frac{1-2+a_n}{2-a_n}=\frac{-1+a_n}{2-a_n}=-\frac{a_n-1}{a_n-2}$，取倒数得 $\frac{1}{a_{n+1}-1}=-\frac{a_n-1-1}{a_n-1}=\frac{1}{a_n-1}-1$，

$\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}=-1$.所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n-1}\right\}$ 是以 $\frac{1}{a_1-1}=-2$ 为首项、-1 为公差的等差数列.

所以 $\frac{1}{a_n-1}=-2+(n-1)(-1)=-(n+1)$，$a_n=\frac{n}{n+1}$.所以 $k=1$，使得数列 $\left\{\frac{1}{a_n-k}\right\}$ 成等差数列.

（1）因为 $\ln(1+x)<x$ 在 $x>0$ 时成立，从而 $\ln(1+\frac{1}{n+1})<\frac{1}{n+1}$，所以 $1-\frac{1}{n+1}<1-\ln(1+\frac{1}{n+1})$，所以

$a_n=1-\frac{1}{n+1}<1-(1+\frac{1}{n+1})=1-\ln(n+2)+\ln(n+1)$，所以 $Sn=\sum_{k=1}^{n}ak<\sum_{k=1}^{n}[1+\ln(k+1)-\ln(k+2)]=$

$n+(\ln 2-\ln 3)+(\ln 3-\ln 4)+(\ln 4-\ln 5)+\cdots+(\ln 2-\ln 3)+[\ln(n+1)-\ln(n+2)]=n+\ln 2-\ln(n+2)=$

$n-[\ln(n+2)-\ln 2]=n-\ln\frac{n+2}{2}$，即 $S_n<n-\ln\frac{n+2}{2}$．

14.【证明】（1）$\because a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+3}$，$(n\in N^*)$，$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}+2$，$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}+1=3(\frac{1}{a_n}+1)$，$\because \frac{1}{a_1}+1=3$，

$\therefore \{\frac{1}{a_n}+1\}$ 是以 3 为首项，3 公比的等比数列，$\therefore \frac{1}{a_n}+1=3\times 3^{n-1}=3^n$．$\therefore a_n=\frac{1}{3^n-1}$．

【解析】（2）(i) 由（1）得 $b_n=\frac{n}{2^n}$，$T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}$ ①，$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\ldots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$ ②，两式

相减，得：$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-(\frac{1}{2})^n-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$，$\therefore T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$．

(ii) 由 (i) 得 $(-1)^n\lambda<2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n}{2^n}=2-\frac{2}{2^n}$，令 $C_n=2-\frac{2}{2^n}$，则 $\{C_n\}$ 是递增数列，若 n 为偶数时，$\lambda<2-\frac{2}{2^n}$ 恒

成立，又 $\because c_2=\frac{3}{2}$，$\therefore \lambda<\frac{3}{2}$，若 n 为奇数时，$-\lambda<2-\frac{2}{2^n}$ 恒成立，$\because c_1=1$，$\therefore -\lambda<1$，$\therefore \lambda>-1$．综上，

λ 的取值范围是 $(-1,\frac{3}{2})$．

15.【解析】（1）当 $n=1$ 时，$2a_1=3a_1{}^2+a_1-2$，即 $3a_1{}^2-a_1-2=0$，$(3a_1+2)(a_1-1)=0$，

由 $a_1>0$ 得 $a_1=1$；当 $n\geqslant 2$ 时，由 $2S_n=3a_n{}^2+a_n-2$ 得 $2S_{n-1}=3a_{n-1}{}^2+a_{n-1}-2$，

所以两式相减得 $2a_n=3a_n{}^2+a_n-3a_{n-1}{}^2-a_{n-1}$，所以 $3(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})=a_n+a_{n-1}$，

由 $a_n>0$ 知 $a_n+a_{n-1}>0$ 所以 $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{3}$，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=1$，公差 $d=\frac{1}{3}$ 的等差数列．

（2）由（1）得 $a_n=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}$，由 $a_{b_1}=a_1=1, a_{b_2}=a_4=2$，所以数列 $\{a_{b_n}\}$ 是首项为 1，公比为 2

的等比数列所以 $a_{b_n}=2^{n-1}$，又 $a_{b_n}=\frac{1}{3}b_n+\frac{2}{3}$，所以 $a_{b_n}=\frac{1}{3}b_n+\frac{2}{3}=2^{n-1}$，即 $b_n=3\times 2^{n-1}-2$．

（3）由 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{1}{6}(n^2+5n)$，所以 $\frac{S_n}{b_n+2}=\frac{\frac{n^2+5n}{6}}{3\times 2^{n-1}}=\frac{n^2+5n}{9\times 2^n}$，设 $f(n)=\frac{S_n}{b_n+2}=\frac{n^2+5n}{9\times 2^n}$，

则 $\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{\frac{(n+1)^2+5(n+1)}{9\times 2^{n+1}}}{\frac{n^2+5n}{9\times 2^n}}=\frac{n^2+7n+6}{2n^2+10n}=\frac{1}{2}(1+\frac{2n+6}{n^2+5n})$，令 $\frac{f(n+1)}{f(n)}>1$ 得 $\frac{n^2+7n+6}{2n^2+10n}>1$，即 $n^2+3n-6<0$，

由 $n\in N^*$ 得 $n=1$，所以 f（1）$<f$（2）$>f$（3）$>f$（4）$>\ldots>f(n)>\ldots$，又因为 $f(1)=\dfrac{S_1}{b_1+2}=\dfrac{6}{18}=\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{4}$，

$f(2)=\dfrac{S_2}{b_2+2}=\dfrac{14}{36}=\dfrac{7}{18}>\dfrac{1}{4}$，$f(3)=\dfrac{S_3}{b_3+2}=\dfrac{24}{72}=\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{4}$，$f(4)=\dfrac{S_4}{b_4+2}=\dfrac{36}{144}=\dfrac{1}{4}$，

$f(5)=\dfrac{S_5}{b_5+2}=\dfrac{50}{288}=\dfrac{25}{144}<\dfrac{1}{4}$，所以当 $n\geqslant5$ 时，$f(n)<\dfrac{1}{4}$，所以满足 $\dfrac{S_n}{b_n+2}<\dfrac{1}{4}$ 的最小正整数 n 为 5.

16．解（1）$b_1=\dfrac{3}{4}$，$b_2=\dfrac{4}{5}$，$b_3=\dfrac{5}{6}$，$b_4=\dfrac{6}{7}$；

（2）因为 $1-a_n=b_n$，$1+a_n=2-b_n$，所以 $b_{n+1}=\dfrac{b_n}{(1-a_n)(1+a_n)}=\dfrac{b_n}{b_n(2-b_n)}=\dfrac{1}{2-b_n}$.令 $x=\dfrac{1}{2-x}$，得 $x=1$，

故 $\dfrac{1}{b_{n+1}-1}-\dfrac{1}{b_n-1}=-1$.又 $\dfrac{1}{b_1-1}=\dfrac{1}{\frac{3}{4}-1}=-4$，$\dfrac{1}{b_n-1}=-4+(n-1)(-1)=-(n+3)$，所以 $b_n=-\dfrac{1}{n+3}+1=\dfrac{n+2}{n+3}$.

（3）因为 $a_n=1-b_n=1-\dfrac{n+2}{n+3}=\dfrac{1}{n+3}$，所以 $a_n\cdot a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}=\dfrac{1}{n+3}-\dfrac{1}{n+4}$，

$S_n=(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5})+(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6})+\cdots+(\dfrac{1}{n+3}-\dfrac{1}{n+4})=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{n+4}=\dfrac{n}{4(n+4)}$，$4aSn=4a\cdot\dfrac{n}{4(n+4)}<nb_n+1=\dfrac{n(n+3)}{n+4}$，所以 $a<n+3$.又所以当 $a<4$ 时，$4aS_n<nb_{n+1}$ 恒成立.

17.（1）【解析】对于数列 $\{a_n\}$，$a_{n+m}=a_n\bullet a_m=\dfrac{5}{3}\times(5\times3^{n+m-1})\neq a_n$，所以 $\{a_n\}$ 不是指数型数列.

对于数列 $\{b_n\}$，对任意 n，$m\in N^*$，因为 $b_{n+m}=4^{n+m}=4^n\bullet4^m=b_n\bullet b_m$，所以 $\{b_n\}$ 是指数型数列.

（2）证明：由题意，$\{\dfrac{1}{a_n}+1\}$，是"指数型数列"，$a_n=2a_na_{n+1}+3a_{n+1}$，$\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3}{a_n}+2\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}+1=3(\dfrac{1}{a_n}+1)$，所以数列 $\{\dfrac{1}{a_n}+1\}$ 是等比数列，$\dfrac{1}{a_n}+1=(\dfrac{1}{a_n}+1)\times3^{n-1}=3^n$，$(\dfrac{1}{a_n}+1)(\dfrac{1}{a_m}+1)=3^n\bullet3^m=3^{m+n}=(\dfrac{1}{a_{n+m}}+1)$，数列 $\{\dfrac{1}{a_n}+1\}$ 是"指数型数列".

（3）证明：因为数列 $\{a_n\}$ 是指数数列，故对于任意的 n，$m\in N^*$，有 $a_{n+m}=a_n\bullet a_m$，$\Rightarrow a_{n+1}=a_n\bullet a_1\Rightarrow a_n=a_1^n=(\dfrac{a+1}{a+2})^n$，假设数列 $\{a_n\}$ 中存在三项 a_u，a_v，a_w 构成等差数列，不妨设 $u<v<w$，

则由 $2a_v=a_u+a_w$，得 $2(\dfrac{a+1}{a+2})v=(\dfrac{a+1}{a+2})u+(\dfrac{a+1}{a+2})w$，所以 $2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}=(a+2)^{w-u}+(a+1)^{w-u}$，

当 t 为偶数时，$2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}$ 是偶数，而 $(a+2)^{w-u}$ 是偶数，$(a+1)^{w-u}$ 是奇数，故 $2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}=(a+2)^{w-u}+(a+1)^{w-u}$ 不能成立；当 t 为奇数时，$2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}$ 是偶数，而 $(a+2)^{w-u}$ 是奇数，$(a+1)^{w-u}$ 是偶数，故 $2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}=(a+2)^{w-u}+(a+1)^{w-u}$ 也不能成立．所以，对任意 $a\in N^*$，$2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}=(a+2)^{w-u}+(a+1)^{w-u}$ 不能成立，即数列 $\{a_n\}$ 的任意三项都不成构成等差数列.

18.【解析】(1) 数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数公比为 q 的等比数列，$a_1=2$，$a_2a_4=64$．则：$a_2\bullet a_4=a_3^2$，

解得：$a_3=8$，故：$q=2$，所以：$a_n=a_1\bullet q^{n-1}=2^n$．数列$\{b_n\}$满足：对任意的正整数$n$，都有

$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=(n-1)\bullet 2^{n+1}+2$①．所以：$2a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_{n-1}b_{n-1}=(n-2)\bullet 2^n+2$②，

①－②得：$a_nb_n=n\bullet 2^n$，所以：$b_n=n$，由于：$a_1b_1=2$，则：$b_1=1$（首项符合通项），故：$b_n=n$．

（2）由于$1-\dfrac{1}{2b_n}=1-\dfrac{1}{2n}>0$，所以：当$\lambda\leqslant 0$时，不等式成立．当$\lambda>0$时，原不等式可化为：

$\dfrac{1}{\lambda}>\sqrt{2n+1}(1-\dfrac{1}{2})(1-\dfrac{1}{4})\ldots(1-\dfrac{1}{2n})$，设$t_n=\sqrt{2n+1}(1-\dfrac{1}{2})(1-\dfrac{1}{4})\ldots(1-\dfrac{1}{2n})$，则：$t_n>0$，

故：$t_{n+1}>\sqrt{2n+1}(1-\dfrac{1}{2})(1-\dfrac{1}{4})\ldots(1-\dfrac{1}{2n})(1-\dfrac{1}{2n+2})$，所以：$\dfrac{t_{n+1}}{t_n}=\dfrac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}}\bullet\dfrac{2n+1}{2n+2}=\sqrt{\dfrac{4n^2+8n+3}{4n^2+8n+4}}<1$，

所以：数列$\{a_n\}$单调递减．则：$\dfrac{1}{\lambda}>t_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得：$0<\lambda<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．

（3）由题意知：设b_k是数列$\{C_n\}$中的项为c_t，由题意可知：$t=2+2^2+\ldots+2^{k-1}+k=2^k+k-2$，

所以：当$m=2^k+k-2$时，$T_m=2(2^k-2)+1+2+\ldots+k=2^{k+1}+\dfrac{k^2+k}{2}-4$，

设$2^{k+1}+\dfrac{k^2+k}{2}-4>2019$，解得：$k>10$，当$k=9$时，$m=2^9+9-2=2^9+7$，所以：$T_m=2^{10}+\dfrac{9^2+9}{2}-4=1065$，

因为$2019-1065=954=2\times 477$，且$2^9+7+477=996$，所以，当$m=996$时，$T_m=2019$．

专题6　经典的二阶递推

1.【解析】$\because$数列$\{a_n\}$满足$a_1=l$，$a_2=2$，$a_na_{n-2}=a_{n-1}(n\geqslant 3)$，$\therefore a_3=\dfrac{a_2}{a_1}=2$，$a_4=\dfrac{a_3}{a_2}=1$，同理可得：$a_5=\dfrac{1}{2}$，

$a_6=\dfrac{1}{2}$，$a_7=1$，$a_8=2$，……，可得$a_{n+6}=a_n$．$\therefore$数列$\{a_n\}$是周期为6的数列．

$\therefore T_n$有最大值，a_n有最大值，$T_{2019}=(a_1a_2\bullet\ldots\bullet a_6)^{336}\bullet(a_1a_2a_3)=4$．$a_{2019}=a_3=2$．下列说法错误的是$A$．故选$A$．

2.【解析】$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=1$，$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}(n\in N^*,n\geqslant 2)$，可得$a_3=\dfrac{3}{2}$，$a_4=\dfrac{5}{2}$，$a_5=\dfrac{8}{2}$，$a_6=\dfrac{13}{2}$，$a_7=\dfrac{21}{2}$，$\ldots$，

$$\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\frac{1}{a_3a_5}+\ldots+\frac{1}{a_{2018}a_{2020}}=\frac{1}{a_2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}\right)+\frac{1}{a_3}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\frac{1}{a_{2019}}\left(\frac{1}{a_{2018}}-\frac{1}{a_{2020}}\right)=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2019}a_{2020}}$$

$=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{2019}a_{2020}}=2-\dfrac{1}{a_{2019}a_{2020}}$由于$\dfrac{1}{a_{2019}a_{2020}}\in(0,1)$，则$\dfrac{1}{a_1a_3}+\dfrac{1}{a_2a_4}+\dfrac{1}{a_3a_5}+\ldots+\dfrac{1}{a_{2018}a_{2020}}$的整数部分为1．故选$B$．

3.【解析】$\because$数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=2$，且$2na_n=(n-1)a_{n-1}+(n+1)a_{n+1}(n\geqslant 2$且$n\in N^*)$，$\therefore$令$b_n=na_n$，

则由 $2na_n=(n-1)a_{n-1}+(n+1)a_{n+1}$，得 $2b_n=b_{n-1}+b_{n+1}$，$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 构成以 1 为首项，以 $2a_2-a_1=3$ 为公差的等差数列，则 $b_n=1+3(n-1)=3n-2$，即 $na_n=3n-2$，$\therefore a_n=\dfrac{3n-2}{n}$，$\therefore a_{18}=\dfrac{3\times18-2}{18}=\dfrac{26}{9}$．故选 B．

4.【解析】$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$，此可以理解为从第二项开始是斐波那契数列，根据

$a_{n+2}=S_{n+2}-S_{n+1}=(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_1=S_n+a_1=S_n$，

$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2n-2}+a_{2n-1})=S_{2n-1}=a_{2n+1}$，故选 D．

注意：此题代入前 6 项也可以看出规律．

5.【解析】根据题意，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n-a_{n-1}$，则有 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$，又由 $a_1=2018$，$a_2=2017$，则

$a_3=a_2-a_1=2017-2018=-1$，$a_4=a_3-a_2=(-1)-2017=-2018$，$a_5=a_4-a_3=(-2018)-(-1)=-2017$，

$a_6=a_5-a_4=(-2017)-(-2018)=1$，$a_7=a_6-a_5=1-(-2017)=2018=a_1$，$a_8=a_7-a_6=2018-1=2017=a_2$，

则数列 $\{a_n\}$ 是周期为 6 的数列，且 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0$，

则 $S_{100}=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12})+\ldots\ldots(a_{97}+a_{98}+a_{99}+a_{100})=a_1+a_2+a_3+a_4=2016$．故选 A．

6.【解析】:法一：$\because$ 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n(n\in N^*)$，$\therefore a_3=a_2+2a_1=6$，$a_4=a_3+2a_2=10$，

$a_5=a_4+2a_3=22$，$a_6=a_5+2a_4=42$，$a_7=a_6+2a_5=86$，… $\therefore a_1+a_2=4=2^2$，$a_2+a_3=8=2^3$，

$a_3+a_4=16=2^4$，

$a_4+a_5=32=2^5$，$a_5+a_6=64=2^6$，$a_6+a_7=128=2^7$，…由此猜想：$a_{2019}+a_{2020}=2^{2020}$，

$\therefore \log_2(a_{2019}+a_{2020})=log_2 2^{2020}=2020$．故答案为：2020．

法二：特征根法：构造方程 $x^2-x-2=0$，$x_1=2$，$x_2=-1$，$\{a_{n+1}+a_n\}$ 是以 $a_1+a_2=4$ 为首项，2 为公比的等比数列，即 $a_{n+1}+a_n=2^{n+1}$，$\therefore a_{2019}+a_{2020}=2^{2020}$，$\therefore \log_2(a_{2019}+a_{2020})=log_2 2^{2020}=2020$．故答案为 2020．

7.【解析】$\because a_n=\dfrac{1}{\sqrt5}[(\dfrac{1+\sqrt5}{2})^n-(\dfrac{1-\sqrt5}{2})^n]$，$\therefore a_1=\dfrac{1}{\sqrt5}(\dfrac{1+\sqrt5}{2}-\dfrac{1-\sqrt5}{2})=\dfrac{1}{\sqrt5}\times\dfrac{2\sqrt5}{2}=1$，

同理可得：$a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=3$，$a_5=5$．故选 B．

8.【解析】由题意可得：$b_1=1$，$b_2=1$，$b_3=2$，$b_4=3$，$b_5=1$，$b_6=0$；$b_7=1$，$b_8=1$，$b_9=2$，$b_{10}=3$，

$b_{11}=1$，$b_{12}=0$，…….

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是周期为 6 的数列，由 $c_1=b_1$，$c_2=b_2$，$c_n=b_n-b_{n-1}(n\geqslant 3,n\in N^*)$，则 $c_1=b_1=1$，$c_2=b_2=1$，$c_3=1$，

$c_4=1$，$c_5=-2$，$c_6=-1$，$c_7=1$，$c_8=0$，$c_9=1$，$c_{10}=1$，$c_{11}=-2$，$c_{12}=-1$，$c_{13}=1$，$c_{14}=0$，…….

$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ 从第三项开始为周期是 6 的周期数列.

$\therefore c_1+c_2+c_3+\ldots+c_{2019}=1=1+(1+1-2-1+1+0)\times 336+1=3$．故答案为 3.

9.【解析】由 $a_1=1$，$a_n\bullet a_{n+2}=3a_{n+1}(n\in N^*)$，得：$n=1$ 时，$a_3=3a_2$，$n=2$ 时，$a_2\bullet a_4=3a_3$，即 $a_4=\dfrac{3a_3}{a_2}=\dfrac{9a_2}{a_2}=9$；

$n=3$ 时，$a_3a_5=3a_4$，即 $a_5=\dfrac{3a_4}{a_3}=\dfrac{3\times 9}{3a_2}=\dfrac{9}{a_2}$；$n=4$ 时，$a_4a_6=3a_5$，即 $a_6=\dfrac{3a_5}{a_4}=\dfrac{3\times\frac{9}{a_2}}{9}=\dfrac{3}{a_2}$；

$n=5$ 时，$a_5a_7=3a_6$，即 $a_7=\dfrac{3a_6}{a_5}=\dfrac{\frac{9}{a_2}}{\frac{9}{a_2}}=1$；$n=6$ 时，$a_6a_8=3a_7$，即 $a_8=\dfrac{3a_7}{a_6}=\dfrac{3}{\frac{3}{a_2}}=a_2$．…由上可知，数列

$\{a_n\}$ 是以 6 为周期的周期数列，则 $a_{2019}=a_{371\times 6+3}=a_3=3a_2$．$\therefore a_5\bullet a_{2019}=\dfrac{9}{a_2}\times 3a_2=27$．故答案为 27.

10.【解析】$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=9$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}(n\in N^*,n\geqslant 4)$，

即 $a_n+a_{n-3}=a_{n-1}+a_{n-2}(n\in N^*,n\geqslant 4)$，$a_4=a_3+a_2-a_1=12$，同理可得：$a_5=17$．$a_6=20$，$a_7=25$，$a_8=28$，

$a_9=33$，……．$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的奇数项与偶数项分别成等差数列，公差都为 8.

则 $a_{2018}=a_2+(1009-1)\times 8=4+4064=4068$．故答案为 4068.

11.【解析】由 $a_{n+1}+\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}=\dfrac{2n}{n+1}a_n(n\geqslant 2$ 且 $n\in N^*)$，变形为：$(n+1)a_{n+1}+(n-1)a_{n-1}=2na_n(n\geqslant 2$ 且 $n\in N^*)$，

$\therefore$ 数列 $\{na_n\}$ 为等差数列，首项为 1，公差为 $2a_2-a_1=3$．$\therefore na_n=1+3(n-1)$，化为：$a_n=3-\dfrac{2}{n}$．

不等式 $a_{n+1}-a_n>0.02$ 化为：$3-\dfrac{2}{n+1}-(3-\dfrac{2}{n})>0.02$，化为：$n(n+1)<100$，解得 $n<10$，

则满足不等式 $a_{n+1}-a_n>0.02$ 的正整数 n 的最大值为 9．故答案为 9.

12.【解析】由 $2a_{n+1}=4a_n-2a_{n-1}+3$，得 $2(a_{n+1}-a_n)-2(a_n-a_{n-1})=3$，即 $(a_{n+1}-a_n)-(a_n-a_{n-1})=\dfrac{3}{2}(n\geqslant 2)$，

又 $a_2-a_1=-\dfrac{1}{2}-(-1)=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ 数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 构成以 $\dfrac{1}{2}$ 为首项，以 $\dfrac{3}{2}$ 为公差的等差数列，

则 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}(n-1)=\dfrac{3}{2}n-1$，$\therefore a_2-a_1=\dfrac{3}{2}\times 1-1$，$a_3-a_2=\dfrac{3}{2}\times 2-1$，… $a_n-a_{n-1}=\dfrac{3}{2}(n-1)-1$．

累加得：$a_n-a_1=\dfrac{3}{2}[1+2+\ldots+(n-1)]-(n-1)=\dfrac{3}{2}\bullet\dfrac{n(n-1)}{2}-(n-1)$，$\therefore a_n=\dfrac{3n^2-7n}{4}$．

则 $na_n=\frac{3}{4}n^3-\frac{7}{4}n^2$．令 $f(n)=\frac{3}{4}n^3-\frac{7}{4}n^2$，则 $f'(n)=\frac{9n^2-14n}{4}$，$f(n)$ 在 $(2,+\infty)$ 上为增函数，

$\because f$（1）$=-\frac{5}{4}$，f（2）$=2$．$\therefore na_n$ 的最小值为 $-\frac{5}{4}$．故答案为：$-\frac{5}{4}$．

13．【解析】令 $x^2=2x+3$，$x_1=3$，$x_2=-1$，$a_{n+2}+a_{n+1}+1=3(a_{n+1}+a_n+1)$，$a_2+a_1+1=4$．

$\therefore$ 数列 $\{a_{n+1}+a_n+1\}$ 为首项为 4，公比为 3 的等比数列，．$\therefore a_{n+1}+a_n+1=4\times 3^{n-1}$①．

$a_{n+2}-3a_{n+1}-1=-(a_{n+1}-3a_n-1)$，$a_2-3a_1-1=-2$．$\therefore$ 数列 $\{a_{n+1}-3a_n-1\}$ 为首项为 -2，公比为 -1 的等比数列．$\therefore a_{n+1}-3a_n-1=-2\cdot(-1)^{n-1}$②．由①和②得 $\therefore a_n=3^{n-1}+\frac{(-1)^{n-1}-1}{2}$．或者写成 $a_n=\begin{cases}3^{n-1},n\text{为奇数}\\3^{n-1}-1,n\text{为偶数}\end{cases}$．

故答案为：$\begin{cases}3^{n-1},n\text{为奇数}\\3^{n-1}-1,n\text{为偶数}\end{cases}$．

14．【解析】$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$，两边同加 a_{n+1}，得 $a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$，又 $a_1=1$，$a_2=4$，$\therefore\{a_{n+1}+a_n\}$ 是首项为 5，公比为 2 的等比数列，$\therefore a_{n+1}+a_n=5\bullet 2^{n-1}$①；$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$，两边同减 $2a_{n+1}$，得 $a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$，$\therefore\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是首项为 2，公比为 -1 的等比数列，$\therefore a_{n+1}-2a_n=2\bullet(-1)^{n-1}$②，

由①②得 $a_n=\frac{5}{3}\bullet 2^{n-1}-\frac{2}{3}\bullet(-1)^{n-1}$．

15．【解析】采用暴力特征方程法求解．$\because a_{n+2}=\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n$，$\therefore$ 特征方程：$t^2-\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}=0$

解得：$t_1=1$，$t_2=-\frac{1}{3}$，设 $a_n=pt_1^n+qt_2^n$，$\because a_1=1$，$a_2=2$，$\therefore a_1=p-\frac{1}{3}q=1$，$a_2=p+\frac{1}{9}q=2$

解得：$p=\frac{7}{4}$，$q=\frac{9}{4}$，故有 $a_n=\frac{7}{4}+\frac{9}{4}\bullet(-\frac{1}{3})^n$．

16．【解析】$(I)a_2+a_1=3+a$，$a_2-3a_1=3-3a$，由 $a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}$ 得

$a_n+a_{n-1}=3(a_{n-1}+a_{n-2})a_n-3a_{n-1}=-(a_{n-1}-3a_{n-2})$

所以 $a_{n+1}+a_n=3^{n-1}(a_1+a_2)=(a+3)3^{n-1}a_{n+1}-3a_n=(-1)^{n-1}(3-3a)$

（2）由以上两式得 $a_n=\frac{1}{4}[(a+3)3^{n-1}-(-1)^{n-1}(3-3a)]$，$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}[(a+3)3^{n-1}+(-1)^{n-1}(3-3a)]$

当 n 为奇数时 $(a+3)3^{n-1}+(-1)^{n-1}(3-3a)=(3^{n-1}-3)a+3^n+3$，所以 $a_{n+1}-a_n>0\Rightarrow(3^{n-1}-3)a+3^n+3>0$

当 $n=1$ 时 $a<3$，当 $n\geqslant 3$ 时 $a>-\frac{3^n+3}{3^{n-1}-3}=-3-\frac{12}{3^{n-1}-3}$ 关于 n 递增，所以 $-3\leqslant a<3$．

当 n 为偶数时 $(a+3)3^{n-1}+(-1)^{n-1}(3-3a)=(3^{n-1}+3)a+3^n-3$，所以 $a_{n+1}-a_n>0\Rightarrow a>-\frac{3^n-3}{(3^{n-1}+3)}=\frac{12}{3^{n-1}+3}-3$

关于 n 递减，所以 $a>-1$，综上 $a\in(-1，1)\cup(1，3)$．

17.【解析】(1) 因为 $a_{n+1}=a_n+2a_{n-1}(n\geq 2)$，$a_{n+1}+a_n=2(a_n+a_{n-1})$，所以数列 $\{a_{n+1}+a_n\}$ 是以 $a_1+a_2=4$，2 为公比的等比数列，所以 $a_{n+1}+a_n=2^{n+1}$①，又由 $a_{n+1}+a_n=2(a_n+a_{n-1})$，得 $a_{n+1}-2a_n=-(a_n-2a_{n-1})(n\geq 2)$，所以数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是以 $a_1-2a_2=-2$ 为首项、-1 为公比的等比数列，所以 $a_{n+1}-2a_n=-2\cdot(-1)^n-1=2\cdot(-1)^n$②，联立①②消去 a_{n+1}，得 $a_n=\frac{2}{3}[2^n-(-1)^n]$，当 $n=1$ 时也适合，所以 $a_n=\frac{2}{3}[2^n-(-1)^n]$.

(2) 当 n 为偶数时，$\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}=\frac{3}{2}(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^n-1})=\frac{3}{2}\cdot\frac{2^n+2^{n-1}}{(2^{n-1}+1)(2^n-1)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2^n+2^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 2^n-2^{n-1}+2^n-1}=$

$\frac{3}{2}\cdot\frac{2^n+2^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 2^n+2^{n-1}-1}<\frac{3}{2}\cdot\frac{2^n+2^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 2^n}=\frac{3}{2}\cdot(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n})(n\geq 2)$，所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{3}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}++\frac{1}{2^n})=$

$3-\frac{3}{2^n}<3$.当 n 为奇数是=时，$a_n=\frac{3}{2}[2^n-(-1)^n]>0$，所以 $a_{n+1}>0$.又 $n+1$ 为偶数，由 (1) 知

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}<3$.

(3) 因为 $f(n+1)-f(n)=[f(n)]^2\geq 0$，所以 $f(n+1)\geq f(n)$，由此得 $f(n+1)\geq f(n)\geq\cdots\geq f(1)=2>0$.又

$\frac{1}{f(n+1)}=\frac{1}{[f(n)]^2+f(n)}=\frac{1}{f(n)[f(n)+1]}=\frac{1}{f(n)}-\frac{1}{f(n)+1}$，所以 $\frac{1}{f(n)+1}=\frac{1}{f(n)}-\frac{1}{f(n+1)}$，所以

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)+1}=\sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{f(k)}-\frac{1}{f(k+1)}]=\frac{1}{f(1)}-\frac{1}{f(n+1)}<\frac{1}{f(1)}=\frac{1}{2}$，即 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)+1}<\frac{1}{2}$.（参考裂项相消的部分）

18.【解析】令 $x^2-10x+21=0$，解得 $x=3或x=7$.所以有 $\begin{cases}a_{n+1}-3a_n+1=7(a_n-3a_{n-1}+1)\\ a_{n+1}-7a_n+3=3(a_n-7a_{n-1}+3)\end{cases}$

所以数列 $\{a_{n+1}-3a_n+1\}$ 是 $a_2-3a_1+1=5$ 为首项，7 为公比的等比数列，则 $a_{n+1}-3a_n+1=5\cdot 7^{n-1}$ ①

数列 $\{a_{n+1}-7a_n+3\}$ 是 $a_2-7a_1+3=3$ 为首项，3 为公比的等比数列. $a_{n+1}-7a_n+3=3^n$ ②

①-②得 $4a_n-2=5\cdot 7^{n-1}-3^n$，化简得 $a_n=\frac{5\cdot 7^{n-1}-3^n+2}{4}$.

19.【解析】(1) $a_{n+1}-2a_n=3(a_n-2a_{n-1})+2^{n+1}$，$a_{n+1}-3a_n=2(a_n-3a_{n-1})+2^{n+1}$，故 $p=-3,q=3$ 时，$\{a_{n+1}-3a_n+3\cdot 2^{n+1}\}$是以4为首项,3为公比的等比数列.

(2) $a_{n+1}-2a_n=3(a_n-2a_{n-1})+2^{n+1}$ $\frac{a_{n+1}-3a_n}{2^{n+1}}-\frac{(a_n-3a_{n-1})}{2^n}=1$，故存在实数 $\lambda=-3$，使得 $\left\{\frac{a_{n+1}+\lambda a_n}{2^{n+1}}\right\}$ 为等差数列；$\frac{(a_n-3a_{n-1})}{2^n}=n-\frac{7}{2}$，$a_n-3a_{n-1}=(2n-7)\cdot 2^{n-1}$

20.【解析】(1) $k=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+a_{n+2})$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\because a_1=1$，$a_2=a$，$\therefore$ 公差 $d=a-1$.

$\therefore S_{18}=171=18+\dfrac{18\times17}{2}\times(a-1)$，解得 $a=2$．

（2）设数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，则它的公比 $q=\dfrac{a_2}{a_1}=a$，

$\therefore a_m=a^{m-1}$，$a_{m+1}=a^m$，$a_{m+2}=a^{m+1}$，任意相邻三项 a_m，a_{m+1}，a_{m+2} 按某顺序排列后成等差数列，

①a_{n+1} 为等差中项，则 $2a_{m+1}=a_m+a_{m+2}$．即 $a^{m-1}+a^{m+1}=2a^m$，解得 $a=1$，不合题意；

②a_m 为等差中项，则 $2a_m=a_{m+1}+a_{m+2}$，即 $2a^{m-1}=a^{m+1}+a^m$，化简 $a^2+a-2=0$，解得 $a=-2$ 或 $a=1$（舍去）；

③若 a_{m+2} 为等差中项，则 $2a_{m+2}=a_{m+1}+a_m$，即 $2a^{m+1}=a^m+a^{m-1}$，化简得：$2a^2-a-1=0$，解得 $a=-\dfrac{1}{2}$；

$\therefore k=\dfrac{a_{m+1}}{a_m+a_{m+2}}=\dfrac{a^m}{a^{m-1}+a^{m+1}}=\dfrac{a}{1+a^2}=-\dfrac{2}{5}$．综上可得，满足要求的实数 k 有且仅有一个 $-\dfrac{2}{5}$．

（3）$k=-\dfrac{1}{2}$，则 $a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(a_n+a_{n+2})$，$\therefore a_{n+2}+a_{n+1}=-(a_{n+1}+a_n)$，$a_{n+3}+a_{n+2}=-(a_{n+2}+a_{n+1})=a_{n+1}+a_n$，

当 n 是偶数时，$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=(a_1+a_2)+\ldots+(a_{n-1}+a_n)=\dfrac{n}{2}(a_1+a_2)=\dfrac{n}{2}(a+1)$．

当 n 是奇数时，$S_n=a_1+(a_2+a_3)+\ldots+(a_{n-1}+a_n)=1+\dfrac{n-1}{2}(a_2+a_3)=1+\dfrac{n-1}{2}[-(a_1+a_2)]=1-\dfrac{n-1}{2}(a+1)(n\geqslant1)$，

$n=1$ 也适合上式，综上可得，$S_n=\begin{cases}1-\dfrac{n-1}{2}(a+1),n\text{为奇数}\\ \dfrac{n}{2}(a+1),n\text{为偶数}\end{cases}$．

专题 7　数列的本质

1.【答案】A.

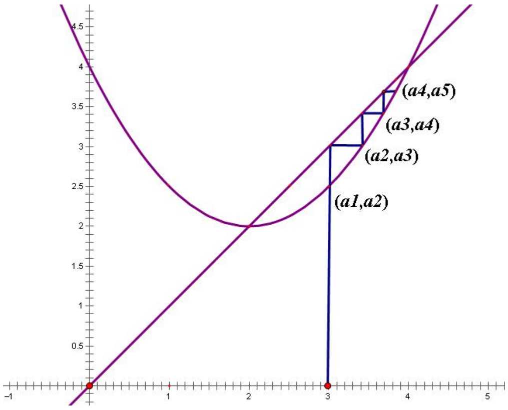
【解析】做一条 $y=x$ 的直线，和 $f(x)$ 交于不动点（0,0），（1，1），当 $a_1\in(0,1)$ 时，在这两个不动点之间只有 A 选项图象是凸起的，故选 A.

2.【答案】B.

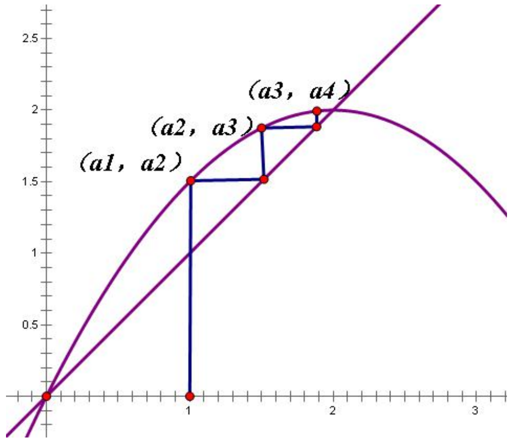
【解析】该函数通过分离常数法可以判断出来这是一个反比例函数变化过来的，画出反比例函数的图象。再画出 $y=x$ 的直线，相交于一个不动点（0,0），当 $x>0$ 时，因为是凸函数，所以递减. 故选 B.

3.【答案】2 .

【解析】令 $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+4$，当 $y=x$ 时，如下图所示函数的不动点有 $x_0=2\text{或}x_0=4$，两个不动点 $(2,2)$，$(4,4)$，$x_1=3$ 时，数列 $\{x_n\}$ 单调递减，此情况下 A=2.



（第 3 题图）



（第 4 题图）

4.【答案】2.

【解析】令 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$ ，当 $y=x$ 时，函数的不动点有 $x_0=0或x_0=2$，两个不动点 $(0，0),(2,2)$ ，$x_1=1$ 时，数列 $\{x_n\}$ 单调递增，此情况下 A=2.

5.【答案】3.

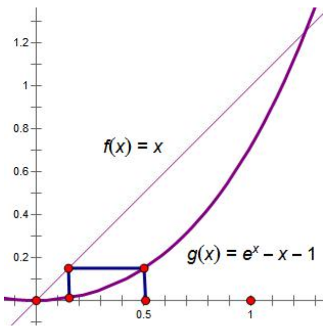
【解析】由定理 3 可知，a+d=0 的时候，符合题意，此时 $a-3=0$，$a=3$.

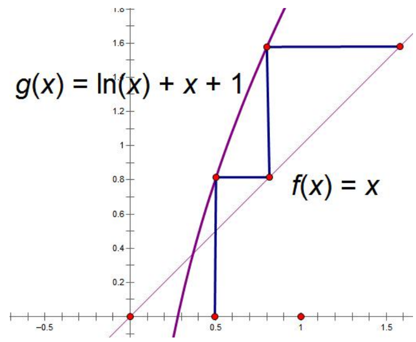
6.【答案】D

【解析】对 A． $f(x)=x^2$，$\therefore a_{n+1}=(a_n)^2$，可以算出不动点为（1,1)，根据蛛网图，$a_1=\frac{1}{2}$ 时，故 $\{a_n\}$ 为递减数列，$S_{100}<\frac{1}{2}\times 100=50<100$．也可以取对数：$lna_{n+1}=2lna_n$，$\therefore$ 数列 $\{lna_n\}$ 是等比数列，首项为 $-ln2$，公比为 2． $S_{100}=\frac{-ln2(2^{100}-1)}{2-1}=-(2^{100}-1)ln2<0<100$．

对 B． $f(x)=x+\frac{1}{x}-2$， $\therefore a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}-2$， 可得不动点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$， 以此可得： $a_n=\frac{1}{2}$， 可得： $S_{100}=\frac{1}{2}\times 100=50<100$．

对 C． $f(x)=e^x-x-1$，$f'(x)=e^x-1$，$x<0$ 时，单调递减．令 $g(x)=e^x-x-1-x$，可得 $g(0)=0$，$g(1)<0$，$g(2)>0$，故不动点为 $x_1=0$，x_2 位于区间 $(1,2)$ 内，此函数为下凹函数，故数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，$a_1=\frac{1}{2},a_{n+1}=f(a_n)$，$n\in N^*$，则 $a_1>a_2>a_3>\cdots>a_{100}$，可得 $S_{100}<100$．

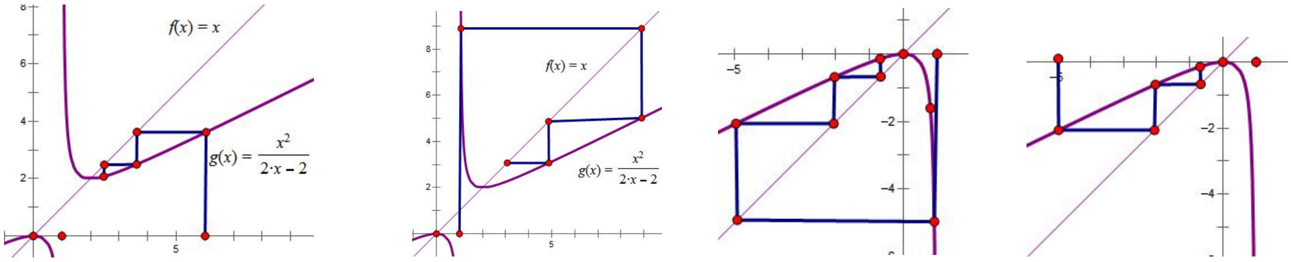




对 D． $f(x)=lnx+x+1$， 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， $a_1=\frac{1}{2},a_{n+1}=f(a_n)$， $n\in N^*$， 根据蛛网图， 则 $a_n>\cdots>a_3>a_2>a_1$，并且 $a_3>1$，以此类推可得 $S_{100}>100$．因此不满足 $S_{100}<100$．故选 D.

7.【答案】A

【解析】$f(x)=\dfrac{x^2}{2x-2}=\dfrac{(x-1+1)^2}{2(x-1)}=\dfrac{1}{2}[(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+2]$，可得不动点为 $x_1=0$，$x_2=2$，$f(x)$ 在 $x>2$，或 $x<0$ 时递增，在 $1<x<2$，或 $0<x<1$ 时递减，如图所示，则当 $x\geqslant 2$ 时，根据蛛网图 1，$f(x)\geqslant\dfrac{1}{2}\times 4=2$，$f_1(x)\geqslant 2$，$f_2(x)\geqslant 2$，…，不等式 $f_{2018}(x)\geqslant 2$ 恒成立；当 $0<x\leqslant 2$ 时，根据蛛网图 2 和 3，$f_{2018}(x)$ 不单调；当 $x\leqslant 0$，根据蛛网图 4，$f(x)$ 递增，即有 $f(x)\leqslant 0$，可得 $f_1(x)\leqslant 0$，$f_2(x)\leqslant 0$，…，不等式 $f_{2018}(x)>0$ 无解．综上可得 B，C，D 均不正确；A 正确．故选 A．



8.【答案】

【解析】周期数列模型，由于 $(a+d)^2=ad-bc$，$T=3$，$a_1=0$，$a_2=\dfrac{0-\sqrt{3}}{0+1}=-\sqrt{3}$，$a_3=\dfrac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-3+1}=\sqrt{3}$，$a_4=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{3+1}=0$ $\therefore a_{2008}=a_{669\times 3+1}=a_1=0$，故选 A．

9.【答案】B

【解析】$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{a_n-1}{a_n}(n\in N^*)$，$(a+d)^2=ad-bc$，$T=3$，$\therefore a_2=1-\dfrac{1}{a_1}=-1$，$a_3=1-\dfrac{1}{a_2}=2$，$a_4=1-\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{1}{2}$，又 $a_1+a_2+a_3=\dfrac{1}{2}-1+2=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{3}{2}\times 66=99$，$99+\dfrac{1}{2}<100$，$99+\dfrac{1}{2}-1<100$，$99+\dfrac{1}{2}-1+2=100.5>100$，$\therefore$ 则使 $a_1+a_2+\ldots+a_k<100$ 成立的最大正整数，$k=66\times 3+2=200$．故选 B．

10.【答案】A

【解析】根据题意，数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{2}{2-a_n}(n\in N^*)$，$(a+d)^2=2(ad-bc)$，$T=4$

则 $a_2=\dfrac{2}{2-a_1}=\dfrac{2}{2-\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{3}$，$a_3=\dfrac{2}{2-a_2}=\dfrac{2}{2-\frac{4}{3}}=3$，$a_4=\dfrac{2}{2-a_3}=\dfrac{2}{2-3}=-2$，$a_5=\dfrac{2}{2-a_4}=\dfrac{2}{2-(-2)}=\dfrac{1}{2}=a_1$，

进而可得：$a_6=a_2=\dfrac{4}{3}$，$a_7=a_3=3$，$a_8=a_4=-2$，…则 $a_n=a_{n+4}$，

则 $6S_{100}=6(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots+a_{100})=6\times 25\times(a_1+a_2+a_3+a_4)=6\times 25\times(\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{3}+3-2)=425$，故选 A．

11.【答案】A

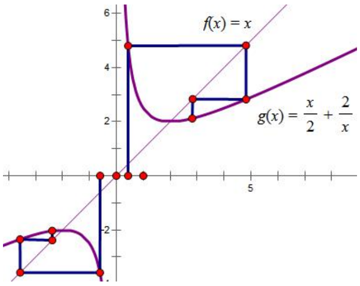
【解析】由于 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+(2-\sqrt{3})}{-(2-\sqrt{3})a_n+1}$，$a+d$ 与 $ad-bc$ 关系不满足常规套路，但是

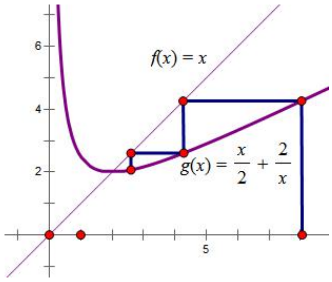
$a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+(2-\sqrt{3})}{-(2-\sqrt{3})a_{n+1}+1}=\dfrac{\sqrt{3}x+1}{-x+\sqrt{3}}$，所以 $(a+d)^2=3(ad-bc)$，故 $\dfrac{T}{2}=6\Rightarrow T=12$，

$\therefore a_{2018}=a_{12\times 168+2}=a_2=\dfrac{a_1+(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})a_1}=\dfrac{5\sqrt{3}-6}{3}$．故选 A．

12.【答案】D

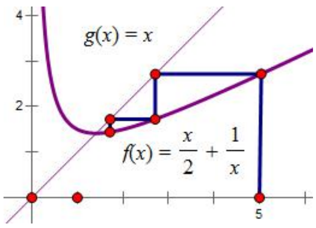
【解析】$\because a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{2}{a_n}$，不动点为 $x_1=2,x_2=-2$，根据蛛网图可得：递减区间会出现摆动数列，单调不确定，（1）$a_1=t\in(-2,0)$ 时，$a_2=\frac{a_1}{2}+\frac{2}{a_1}<-2$，可得：$a_n<-2(n\geqslant2)$．$\therefore a_2-a_1<0$，但是 $a_{n+1}-a_n>0(n\geqslant2)$，不合题意，舍去．同理，$a_1=t\in(-2,0)$ 时也属于函数递减区间，数列属于局部摆动数列，也不满足题意；（2）$a_1=t>2$ 时，$a_2=\frac{a_1}{2}+\frac{2}{a_1}>2$，可得：$a_n>2(n\geqslant2)$．$\therefore a_{n+1}-a_n<0$，符合题意．$a_1=t<-2$，数列属于递增数列，故选 D．

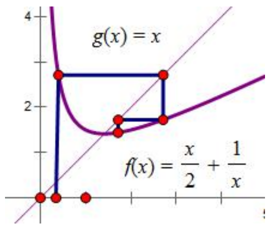




13.【答案】D

【解析】不动点为 $x_1=\sqrt{2},x_2=-\sqrt{2}$，不动点为顶点，根据蛛网图，故当 $a>0$ 时，数列极限为 $\sqrt{2}$，且 $a_n>\sqrt{2}$ 因此 A 不正确．$a>\sqrt{2}$ 时，数列为递减数列，$0<a<\sqrt{2}$ 时，数列前两项摆动，即 $a_1<a_2>a_3>a_4>\cdots>a_n$，因此 B 不正确．C 不正确．D：由 $a_1=a>0$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}(n\in N^*)$，$a_2=\frac{a}{2}+\frac{1}{a}$，令 $\frac{a}{2}+\frac{1}{a}=a$，解得 $a=\sqrt{2}$，则 $a_n=\sqrt{2}$，即为不动点，因此结论成立．故选 D．





14.【答案】B

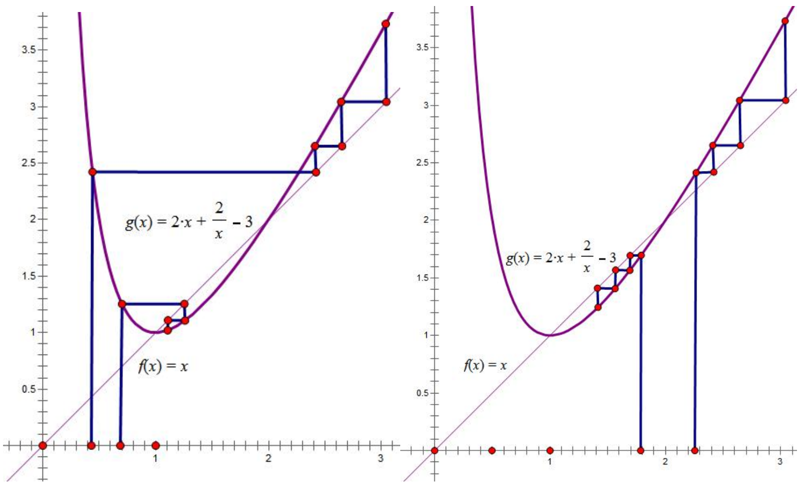
【解析】对于 A．不动点为 $x_1=0,x_2=1$ $\because a_1\in(0,1)$，$f(x)=\sqrt{x}$ 在区间 $(0,1)$ 为上凸区间，$\therefore$ $a_{n+1}=\sqrt{a_n}>a_n$，可得数列 $\{a_n\}$ 是递增数列；对于 B．不动点为 $x_1=0,x_2=1$，$\because a_1\in(0,1)$，$f(x)=2^x-1$ 在区间 $(0,1)$ 为下凹区间，不妨取 $a_1=\frac{1}{2}$，$f(x)=2^x-1$ 在区间 $a_2=2^{\frac{1}{2}}-1=\sqrt{2}-1<\frac{1}{2}$，因此数列 $\{a_n\}$ 是递减数列；对于 C：$f(x)=\sqrt{2x-x^2}$，属于一个圆心为 $(1,0)$，半径为 1 的圆的上半部分，不动点为 $x_1=0,x_2=1$，显然在区间 $(0,1)$ 为上凸区间，可知：当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $1\leqslant x\leqslant2$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减．$\because a_1\in(0,1)$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列；对于 D．画出图象 $y=\log_2(x+1)$，$y=x$，可知不动点为 $x_1=0,x_2=1$，在区间 $(0,1)$ 为上凸区间，在 $x\in(0,1)$ 时，$\log_2(x+1)>x$，$\therefore a_{n+1}=\log_2(a_n+1)>a_n$，因此数列 $\{a_n\}$ 是递增数列．故选 B．

15.【答案】A

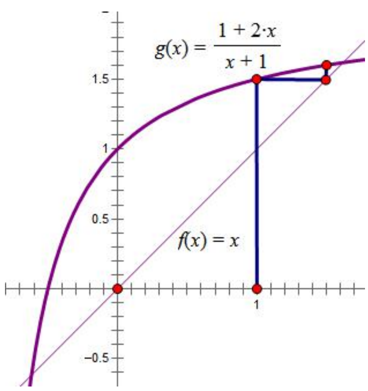
【解析】法一：数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2a_n+\frac{2}{a_n}-3$，首项 $a_1=a$，若数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，所以

$a_{n+1}-a_n=a_n+\dfrac{2}{a_n}-3>0$，则 $a_1+\dfrac{2}{a_1}-3>0$，即 $a+\dfrac{2}{a}-3>0$，当 $a>0$ 时，解得 $a\in(0，1)\cup(2，+\infty)$．当 $a<0$ 时，不等式无解．若 $a_1=\dfrac{1}{2}$，此时 $a_2=a_3=\ldots=2$，不满足题意，排除 B，C，若 $a_1=\dfrac{1}{4}$，此时 $a_2=\dfrac{11}{2}$，$a_3=8+\dfrac{4}{11}$，满足题意，排除 D．故选 A．

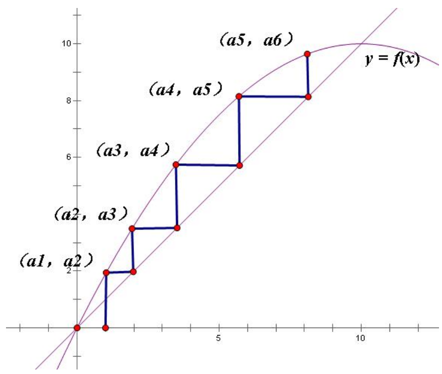
法二：蛛网图上来，令 $f(x)=2x+\dfrac{2}{x}-3$，可得不动点为 $x_1=1,x_2=2$，故根据函数的区间可知，在 $a\in(0，1)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，故数列属于摆动数列区间，由于函数有极值，故需分类讨论，显然，考虑数列的另一个不动点(2,2)，则当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$y=2$，故当 $a\in(0，\dfrac{1}{2})$，如图所示，数列从 a_2 开始弹到递增数列区间，当 $a\in(\dfrac{1}{2}，1)$时，数列处于从 a_2 开始弹到递减数列区间；$a\in(1，2)$时，函数属于下凹区间，此时数列为递减数列，而当 $a\in(2，+\infty)$ 时，函数属于上凸区间，数列为单调递增，故选 A.



16.解：$y=\dfrac{1+2x}{1+x}$ 当 $y=x$ 时，联立 $x^2-x-1=0$，解得不动点为 $x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$a_1=1$，根据蛛网图可得，此数列位于函数的上凸区间，为递增数列，所以 $a_1<a_2<\cdots<a_n<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



16 题图



17 题图

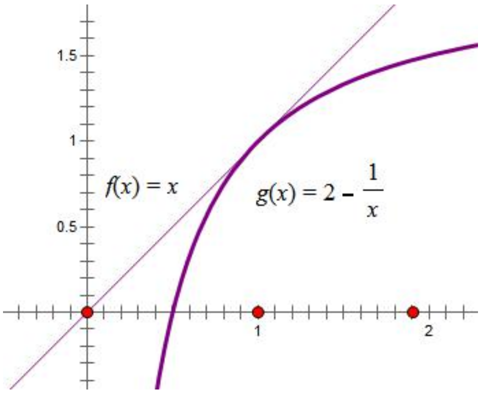
17.解：$y=-\dfrac{1}{10}x^2+2x$，当 $y=x$ 的时，联立解得不动点为 $x_1=0$或$x_2=10$，$x_1=1$ 时候，通过蛛网图可以发现 $\{x_n\}$ 单调递增，且小于 x_2，即证 $10>x_{n+1}>x_n$

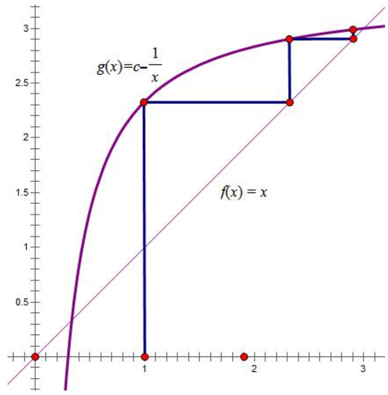
18.（1）$f(x)=\dfrac{4x-2}{x+1}$　$x_1=\dfrac{11}{19}$　$x_2=\dfrac{1}{5}$ $x_3=-1$ ，（2）x_0=1 或 2

（3）$f(x)=\dfrac{4x-2}{x+1}$ ，令 $y=x$　解得 $x^2-3x+2=0$ ，$x_1=1$，$x_2=2$，要满足 $x_n<x_{n+1}$，只需要 $1<x_0<2$

19. 解：令 $y=c-\dfrac{1}{x}$ ，由 $y=x$ 得不动点 $x_{1,2}=\dfrac{c\pm\sqrt{c^2-4}}{2}$ ，要 $a_n<a_{n+1}$，即数列 $\{a_n\}$ 递减

$\Rightarrow\dfrac{c-\sqrt{c^2-4}}{2}<1<\dfrac{c+\sqrt{c^2-4}}{2}\Rightarrow c>2$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_2=\dfrac{c+\sqrt{c^2-4}}{2}\le3\Rightarrow c\le\dfrac{10}{3}$，综上知，$2<c\le\dfrac{10}{3}$



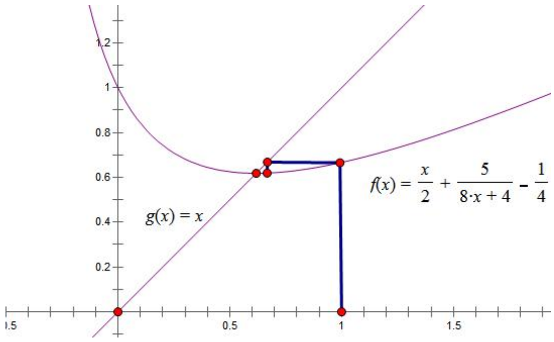


20.解：（1）$\because f(x)=x^2+x-1$，α，β 是方程 $f(x)=0$ 的两个根 $(\alpha>\beta)$，$\therefore\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\beta=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$；

（2）$f'(x)=2x+1$，$a_{n+1}=a_n-\dfrac{a_n^2+a_n-1}{2a_n+1}=a_n-\dfrac{\frac{1}{2}a_n(2a_n+1)+\frac{1}{4}(2a_n+1)-\frac{5}{4}}{2a_n+1}=\dfrac{1}{4}(2a_n+1)+\dfrac{\frac{5}{4}}{2a_n+1}-\dfrac{1}{2}$，

法一：$\because a_1=1$，$\therefore$有基本不等式可知 $a_2\geqslant\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}>0$（当且仅当 $a_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时取等号），$\therefore a_2>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}>0$，同样 $a_3>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$a_n>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\alpha(n=1,2)$，

法二：构造蛛网图 $a_{n+1}=F(a_n)=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{5}{8a_n+4}-\dfrac{1}{4}$，不动点为 $x_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},x_2=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$，由于 $a_1=1$，故根据蛛网图可知 $a_1>a_2>\cdots>a_n>x_1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$a_n>\alpha$



（3）$a_{n+1}-\beta=a_n-\beta-\dfrac{(a_n-\alpha)(a_n-\beta)}{2a_n+1}=\dfrac{a_n-\beta}{2a_n+1}(a_n+1+\alpha)$ 而 $\alpha+\beta=-1$，即 $\alpha+1=-\beta$，$a_{n+1}-\beta=\dfrac{(a_n-\beta)^2}{2a_n+1}$，

同理 $a_{n+1}-\alpha=\dfrac{(a_n-\alpha)^2}{2a_n+1},b_{n+1}=2b_n$，又 $b_1=ln\dfrac{1-\beta}{1-\alpha}=ln\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=2ln\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}s_n=2(2^n-1)ln\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

21．证明：（1）由 $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}$，$\therefore x_2=\dfrac{2}{3},x_3=\dfrac{3}{5},x_4=\dfrac{5}{8}$，$x_5=\dfrac{8}{13},x_6=\dfrac{13}{21}$，…

由 $x_2>x_4>x_6$ 猜想：数列 $\{x_{2n}\}$ 是递减数列，下面用数学归纳法证明：

（1）当 $n=1$ 时，已证命题成立

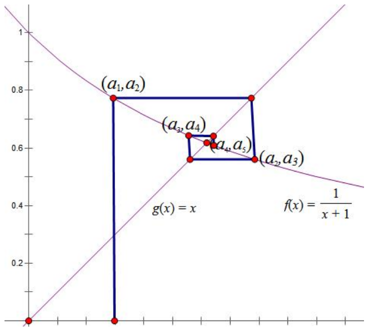
（2）假设当 $n=k$ 时命题成立，即 $x_{2k}>x_{2k+2}$ 易知 $x_{2k}>0$，

那么 $x_{2k+2}-x_{2k+4}=\dfrac{1}{1+x_{2k+1}}-\dfrac{1}{1+x_{2k+3}}=\dfrac{x_{2k+3}-x_{2k+1}}{(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+3})}=\dfrac{x_{2k}-x_{2k+2}}{(1+x_{2k})(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+2})(1+x_{2k+3})}>0$

即 $x_{2(k+1)}>x_{2(k+1)+2}$ 也就是说，当 $n=k+1$ 时命题也成立，结合（1）和（2）知，命题成立

由蛛网图可知，不动点为 $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\beta=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$，由于 $x_1=\dfrac{1}{2}$，故根据蛛网图可知 $x_1<x_3<\cdots<x_{2n-1}<\alpha$，

$x_2>x_4>\cdots>x_{2n}>\alpha$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，



（2）当 $n=1$ 时，$|x_{n+1}-x_n|=|x_2-x_1|=\dfrac{1}{6}$，结论成立

当 $n\geqslant 2$ 时，易知 $0<x_{n-1}<1$，$\therefore 1+x_{n-1}<2,x_n=\dfrac{1}{1+x_{n-1}}>\dfrac{1}{2}$ $\therefore (1+x_n)(1+x_{n-1})=(1+\dfrac{1}{1+x_{n-1}})(1+x_{n-1})=2+x_{n-1}\geqslant\dfrac{5}{2}$

$\therefore |x_{n+1}-x_n|=|\dfrac{1}{1+x_n}-\dfrac{1}{1+x_{n-1}}|=\dfrac{|x_n-x_{n-1}|}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}\leqslant\dfrac{2}{5}|x_n-x_{n-1}|\leqslant(\dfrac{2}{5})^2|x_{n-1}-x_{n-2}|\leqslant\ldots\leqslant(\dfrac{2}{5})^{n-1}|x_2-x_1|=\dfrac{1}{6}(\dfrac{2}{5})^{n-1}$.

第三章　不等式参考答案

专题 1　一元二次不等式解法

1．D；2．B；3．C；4．D；5．B；6．C；7．B；8．D；9．D；10．D；11．C；12．B；

13．$a=-3,b=-2$；$bx^2+ax<-9$ 的解集为 $\{x\,|\,x<-3$ 或 $x>\frac{3}{2}\}$．

14．$a=1,b=2$；$\frac{f(x)}{x}>x$ 的解集为 $\{x\,|\,0<x<2\}$．

15．（1）当 $a=-4$ 时，不等式 $f(x)\ge 2$ 的解集为 $\{x\,|\,x\le -1$ 或 $x\ge 6\}$；

（2）对任意 $x\in R$，若 $f(x)\ge -2$ 恒成立，即 $x^2-5x+a+2\ge 0\Rightarrow a\ge -x^2+5x-2$ 恒成立

而 $(-x^2+5x-2)_{\max}=\frac{17}{4}$，所以 $a\ge\frac{17}{4}$．

16．A；17．A；18．A；19．B；20．B；21．B；22．D；23．C；24．B；25．B；26．D；27．B；

28．$a=\frac{5}{2}$；　29．②；

30．B；31．C；32．A；33．C；34．A；35．D；36．B；37．D；38．C；39．B；40．B；41．B；

42．$[0,\frac{3}{4})$；43．$a=-\frac{5}{4}$．

44．由 $-\frac{1}{2}+4=-\frac{7}{a}\Rightarrow a=-2$（1）原不等式即为 $-2mx^2+(m-2)x+3-2>0\Rightarrow(mx+1)(2x-1)<0$

因为 $m\ge 0$，所以解集为 $\{x\,|-\frac{1}{m}<x<\frac{1}{2}\}$；（2）关于 x 的不等式 $ma\cdot x^2+(m+a)x+3+a>0$ 恒成立，即为 $2mx^2+(2-m)x-1<0$，当 $m=0$ 时，解集为 $\{x\,|\,x<\frac{1}{2}\}$，不满足条件；当 $m\ne 0$ 时，$\Delta=(2-m)^2+8m<0\Rightarrow(2+m)^2<0$，解集为 ϕ，故 m 的取值范围是 ϕ．

专题 2　含参一元二次不等式

1．A；2．A；3．D；4．A；5．C；

6．原不等式即为 $(x-3a)(x+a)>0$；

（1）$a>0$ 时，解集为 $\{x|x<-a$ 或 $x>3a\}$

（2）$a=0$ 时，解集为 $\{x|x\ne 0\}$

（3）$a<0$ 时，解集为 $\{x\,|\,x<3a$ 或 $x>-a\}$

7．解集为 $(\frac{-a-\sqrt{a^2+4}}{2},\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2})$；

8．B；9．D；10．$\{x\,|-1<x<\frac{4}{5}\}$；

11．原不等式即为 $(ax+1)(x-1)>0$

（1）$a=0$ 时，解集为 $\{x\,|\,x>1\}$；

（2）$a>0$ 时，解集为 $\{x\,|\,x>1$ 或 $x<-\frac{1}{a}\}$；

（3）$a<0$ 时，①$-1<a<0$ 时，解集为 $\{x|1<x<-\frac{1}{a}\}$

②$a<-1$ 时，解集为 $\{x|-\frac{1}{a}<a<1\}$

③$a=1$ 时，解集为 ϕ

12.（1）$a=0$ 时，解集为 $\{x|x>0\}$；

（2）$a>0$ 时，①$0<a<1$，解集为 $(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a},\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a})$

②$a\geq 1$，解集为 ϕ

（3）$a<0$ 时，①f $<a<1$,解集为 $(-\infty,\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a})\cup(\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a},+\infty)$

②$a<-1$，解集为 R

③$a=1$，解集为 $\{x|x\neq\frac{1}{a}\}$

13. C；14．B；15．$[\frac{3}{4},2)$；

16. $\frac{ax}{x-1}<1\Rightarrow\frac{(a-1)x+1}{x-1}<0$,解集为 $\{x|x<1$ 或 $x>2\}$,所以 $\frac{-1}{a-1}=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

17.（1）解集为 $(-\infty,-2)\cup(-1,0)\cup(1,2)$；　（2）解集为 $(-\infty,-2)\cup[-1,4]\cup(5,+\infty)$

18.原不等式即为 $\frac{x^2-x-2}{x+a}\geq 0\Rightarrow\frac{(x-2)(x+1)}{x+a}\geq 0$

（1）$a>1$ 时，解集为 $(-a,-1]\cup[2,+\infty)$

（2）$0<a<1$ 时，解集为 $[-1,-a)\cup[2,+\infty)$

（3）$a=1$ 时，解集为 $[2,+\infty)$

专题 3　对勾函数解决恒成立和实根分布问题

1. $x^2+ax+6-a>0\Leftrightarrow(x-1)a>-x^2-6$，$x=1$ 时满足；$x\in[-5,1)$ 时，不等式 $(x-1)a>-x^2-6\Leftrightarrow a<\frac{-x^2-6}{x-1}$，所以 $a<(\frac{-x^2-6}{x-1})_{\min}=2\sqrt{7}-2$.

2.(1)不等式 $x^2-(a+1)x+a<0(1<x<3)\Leftrightarrow a>\frac{x^2-x}{x-1}=x$，不等式有解，则 $a\geq 1$；

(2)不等式 $x^2-(a+1)x+a<0(1<x<3)\Leftrightarrow a>\frac{x^2-x}{x-1}=x$，恒成立，则 $a\geq 3$.

3.（1）不等式 $f(x)<0\Leftrightarrow g(k)=(2x+1)k+3x^2-2x+5<0$，$k\in(-1,1)$ 恒成立,则 $\begin{cases}g(-1)<0\\g(1)<0\end{cases}\Rightarrow k\in\phi$；

（2）$f(x)=3x^2+2(k-1)x+k+5=0(x\in(0,2))\Leftrightarrow a=\frac{-3x^2+2x-5}{2x+1}(x\in(0,2))$，

而函数 $y=\dfrac{-3x^2+2x-5}{2x+1}(x\in(0,2))$ 的值域为 $(-5,-2]$，故 a 的取值范围为 $(-5,-2]$.

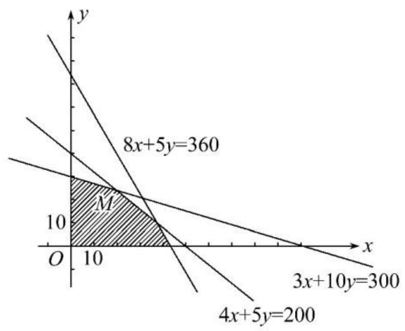
4. $a=0$ 时不符合题意，故 $a\neq 0$，从而 $f(x)=2ax^2+2x-3-a=0$ 在 $[-1,1]$ 有解 $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a}=\dfrac{2x^2-1}{3-2x}$ 在 $[-1,1]$ 有解，

而函数 $y=\dfrac{2x^2-1}{3-2x}(x\in[-1,1])$ 的值域为 $[\sqrt{7}-3,1]$，由 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{2x^2-1}{3-2x}\in[\sqrt{7}-3,1]\Rightarrow a\geq 1$ 或 $a\leq -\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$.

专题 4　线性规划参考答案

1．C；2．D；3．D；4．C；5．C；6.C　7．3；8．－2；8；9．9；10．3；11．6；12．216000；13．15；

14.(1)由已知 x,y 满足的数学关系式为 $\begin{cases}4x+5y\leq 200\\ 8x+5y\leq 360\\ 3x+10y\leq 300\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{cases}$ 该二元一次不等式组所表示的平面区域为图中的阴影部分.



（2）设利润为 z 万元，则目标函数 $z=2x+3y$，这是斜率为 $-\dfrac{2}{3}$，随 z 变化的一族平行直线. $\dfrac{z}{3}$ 为直线在 y 轴上的截距，当 $\dfrac{z}{3}$ 取最大值时，z 的值最大. 又因为 x,y 满足约束条件，所以当直线 $z=2x+3y$ 经过可行域中的点 M 时，截距 $\dfrac{z}{3}$ 的值最大，即 z 的值最大. 解方程组 $\begin{cases}4x+5y=200\\ 3x+10y=300\end{cases}$ 得点 M 的坐标为 $M(20,24)$，

所以 $z_{\max}=2\times 20+3\times 24=112$.

答：生产甲种肥料 20 车皮，乙种肥料 24 车皮时利润最大，且最大利润为 112 万元.

专题 5　基本不等式与柯西不等式

1．C；2．B；3．C；4．B；5．B；6．C；7．B；8．D；9．B；10．B；11．D；12．C；13．B；

14．$\frac{3\sqrt{14}}{7}$；15．9；16．－2；17．$a\ge\frac{1}{5}$；18．18；19．8；20．4；21．$\sqrt{5}$；22．－2；23．$\frac{\sqrt{6}}{3}$；24．$\frac{3}{4}$；

25．$[\frac{1}{5},+\infty)$）；26．9；27．$\frac{2\sqrt{10}}{5}$；

28．（I）$a^2+b^2\ge 2ab, b^2+c^2\ge 2bc, a^2+c^2\ge 2ac$ 得

$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$

由题设得 $(a+b+c)^2=1$，即 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=1$．

所以 $3(ab+bc+ac)\le 1$，即 $ab+bc+ac\le\frac{1}{3}$

（II）$\because \frac{a^2}{b}+b\ge 2a, \frac{b^2}{c}+c\ge 2b, \frac{c^2}{a}+a\ge 2c$

$\therefore \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+(a+b+c)\ge 2(a+b+c)$

即 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$

$\therefore \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge 1$

29．由柯西不等式，得 $(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+2^2)\ge(x+2y+2z)^2$

因为 $x+2y+2z=6$，所以 $x^2+y^2+z^2\ge 4$，

当且仅当 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$ 时，不等式取等号，此时 $x=\frac{2}{3}, y=\frac{4}{3}, z=\frac{4}{3}$，

所以 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值为 4．

专题 6　糖水不等式

1．D；2．A；3．A；4．$(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},+\infty)$；

5．$\log_n(n+1)=\frac{\ln(n+1)}{\ln n}>\frac{\ln(n+1)+\ln\frac{n+1}{n}}{\ln n+\ln\frac{n+1}{n}}=\frac{\ln(n+2+\frac{1}{n})}{\ln(n+1)}>\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}=\log_{n+1}(n+2)$；

6．证明：$\because b+c>a \therefore \frac{a}{a+1}<\frac{b+c}{1+b+c}=\frac{b}{1+b+c}+\frac{c}{1+b+c}<\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$

7．（1）$x=\frac{n}{n+1}$；

（2）$T_n={x_1}^2{x_3}^2\cdots{x_{2n-1}}^2=(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\frac{2n-1}{2n})^2\ge(\frac{1}{2})^2\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}=\frac{1}{4n}$，当仅当 $n=1$ 时等号成立．

8. $\because S_{n+2}>S_{n+1}>S_n$，$\therefore \dfrac{S_{n+2}}{S_{n+1}}=\dfrac{a_1+qS_{n+1}}{a_1+qS_n}=\dfrac{\dfrac{a_1}{q}+S_{n+1}}{\dfrac{a_1}{q}+S_n}<\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$

$\therefore S_{n+1}{}^2>S_nS_{n+2}$

$\therefore \dfrac{\log_{0.5}S_n+\log_{0.5}S_{n+2}}{2}-\log_{0.5}S_{n+1}=\log_{0.5}\dfrac{\sqrt{S_nS_{n+2}}}{S_{n+1}}>\log_{0.5}1=0$

9.（1）$a_n=2\cdot 3^{n-1}$；（2）$\because S_{n+2}>S_{n+1}>S_n$ $\therefore \dfrac{S_{n+2}}{S_{n+1}}=\dfrac{a_1+qS_{n+1}}{a_1+qS_n}=\dfrac{\dfrac{a_1}{q}+S_{n+1}}{\dfrac{a_1}{q}+S_n}<\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$；

$\therefore S_{n+1}{}^2>S_nS_{n+2}$

10.（1）$r=-1$；

（2）$b_n=2n(n\in N^*)$，

$\dfrac{b_1+1}{b_1}\cdot\dfrac{b_2+1}{b_2}\cdots\cdots\dfrac{b_n+1}{b_n}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\cdots\dfrac{2n+1}{2n}=\sqrt{(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\cdots\dfrac{2n+1}{2n})^2}>\sqrt{\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\cdots\dfrac{2n+1}{2n}\cdot\dfrac{2n+2}{2n+1}}=\sqrt{n+1}$

11.（1）$b_n=3n-2(n\in N^*)$；

（2）$S_n=\log_a[(1+1)\cdot(1+\dfrac{1}{4})\cdots\cdots(1+\dfrac{1}{3n-2})]=\log_a\sqrt[3]{(\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\cdots\dfrac{3n-1}{3n-2})^3}$

$\because \dfrac{3n-1}{3n-2}>\dfrac{3n}{3n-1}>\dfrac{3n+1}{3n}$ $(\dfrac{2}{1}\dfrac{5}{4}\cdots\cdots\dfrac{3n-1}{3n-2})^3>\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdots\cdots\dfrac{3n-1}{3n-2}\cdot\dfrac{3n}{3n-1}\cdot\dfrac{3n+1}{3n}=3n+1$

故当 $a>1$ 时，$S_n>\dfrac{1}{3}\log_a(1+\dfrac{1}{b_n})$；当 $0<a<1$ 时，$S_n<\dfrac{1}{3}\log_a(1+\dfrac{1}{b_n})$

12.（1）根据糖水不等式：$\dfrac{n}{m}<\dfrac{n-1}{m-1}<\dfrac{n-2}{m-2}<\cdots<\dfrac{n-i+1}{m-i+1}$，故

13. $\dfrac{n^i}{m^i}=(\dfrac{n}{m})^i<\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{m(m-1)(m-2)\cdots(m-i+1)}=\dfrac{A_n{}^i}{A_m{}^i}$，即 $n^iA_m{}^i<m^iA_n{}^i$；

（3）要证 $(1+m)^n>(1+n)^m$，只需证 $n\ln(1+m)>m\ln(1+n)$，只需证 $\dfrac{\ln(1+m)}{m}>\dfrac{\ln(1+n)}{n}$，构造函

$f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，$f'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)}{x^2}$，令 $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)$，$g(0)=0$；

$g'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{-x}{(x+1)^2}$，

故当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)<g(0)=0$，故 $f'(x)<0$，

$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)\downarrow$，$\therefore n>m>1$ 时，$\dfrac{\ln(1+m)}{m}>\dfrac{\ln(1+n)}{n}$，命题得证.

14. 根据糖水不等式，$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{b+a}<\dfrac{2a}{a+b+c}+\dfrac{2b}{a+b+c}+\dfrac{2c}{a+b+c}=2$，再令 $a+b=x$，$b+c=y\ c+a=z$，$a=\dfrac{x+z-y}{2}$，$b=\dfrac{x+y-z}{2}$，$c=\dfrac{y+z-x}{2}$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}=\frac{x+z-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}+\frac{y+z-x}{2x}$$

$$=\frac{x}{2y}+\frac{z}{2y}+\frac{x}{2z}+\frac{y}{2z}+\frac{y}{2x}+\frac{z}{2x}-\frac{3}{2}\geq 2\sqrt{\frac{x}{2y}\frac{y}{2x}}+2\sqrt{\frac{z}{2y}\frac{y}{2z}}+2\sqrt{\frac{x}{2z}\frac{z}{2x}}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$（当仅当 $x=y=z$ 时等号成立）

14. 令 $x=\dfrac{b}{a}$，$y=\dfrac{c}{b}$，$z=\dfrac{a}{c}$，

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{c+b}{a+b+c}=2;$$

根据 13 题结论，$\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}\geq\dfrac{3}{2}>1$

15. 证明：

$$T_n=\frac{4}{3^{2^0}-1}+\frac{4}{3^{2^1}-1}+\frac{4}{3^{2^2}-1}+\cdots+\frac{4}{3^{2^{n-1}}-1}<2+\frac{4+1}{3^{2^1}}+\frac{4+1}{3^{2^2}}+\cdots+\frac{4+1}{3^{2^{n-1}}}=2+5(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n})$$

$$=2+5\cdot\frac{\frac{1}{9}-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}<2+\frac{5}{6}<3$$

16. 证明：$\dfrac{A+a+C+c}{A+a+C+c+r+b}<\dfrac{A+a+C+c}{A+a+C+c+r}=\dfrac{A+a}{A+a+C+c+r}+\dfrac{B+b}{A+a+C+c+r}$，

根据糖水不等式可得

$$\frac{A+a}{A+a+C+c+r}<\frac{A+a+B+b}{A+a+C+c+r+B+b}(1)\quad\frac{C+c}{A+a+C+c+r}<\frac{C+c+B+b}{A+a+C+c+r+B+b}(2)$$

两式相加得：$\dfrac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+r}+\dfrac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+r}>\dfrac{A+a+C+c}{A+a+C+c+r}>\dfrac{A+a+C+c}{A+a+C+c+r+b}$

专题 7　权方和不等式

1. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{(2-\lambda)y}+\dfrac{2}{\lambda y}\geq\dfrac{1}{x}+\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2}{2y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\geq\dfrac{(1+2)^2}{x+y}=3$

2. $\dfrac{x^2}{a^2(2y-1)}+\dfrac{4y^2}{a^2(x-1)}\geq\dfrac{(x+2y)^2}{a^2(x+2y-2)}\geq 1$，令 $t=x+2y-2$，即

$$\frac{(t+2)^2}{a^2t}\geq 1\Rightarrow\frac{1}{a^2}(t+\frac{4}{t}+4)\geq\frac{8}{a^2}\geq 1\Rightarrow a^2\leq 8\Rightarrow -2\sqrt{2}\leq a\leq 2\sqrt{2}$$

3. 令$\begin{cases}\dfrac{1}{1+a^2}=\dfrac{x}{x+y+z}\\ \dfrac{1}{1+4b^2}=\dfrac{y}{x+y+z}\\ \dfrac{1}{1+9c^2}=\dfrac{z}{x+y+z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=\dfrac{y+z}{x}\\ 4b^2=\dfrac{x+z}{y}\\ 9c^2=\dfrac{x+y}{z}\end{cases}\Rightarrow 6abc=\sqrt{\dfrac{(y+z)(x+z)(x+y)}{xyz}}=\sqrt{2+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{z}}\geq 2\sqrt{2}$

故$|6abc-1|\geq 2\sqrt{2}-1$

4.根据权方和不等式，$\dfrac{64}{a+b+c}\geq\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{25}{c}\geq\dfrac{64}{a+b+c}\Rightarrow\dfrac{64}{a+b+c}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{25}{c}$,根据取等号的条件$\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{5}{c}$，即$\dfrac{a+b+c}{a}=8$.

5. 由线性规划问题易知$a+2b=1$，$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}\geq\dfrac{(1+1)^2}{(a+2b)^2}=4$.

6. $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{c^2}{b}+\dfrac{a^2}{c}\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{a+b+c}=a+b+c=3$.

7. $\begin{cases}x+y\geq 2\sqrt{xy}\\ x+z\geq 2\sqrt{xz}\\ z+y\geq 2\sqrt{yz}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}\leq x+y+z$

$$\frac{x^2}{x+\sqrt{yz}}+\frac{y^2}{y+\sqrt{zx}}+\frac{z^2}{z+\sqrt{xy}}\geq\frac{(x+y+z)^2}{x+y+z+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}}\geq\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{3}{2}$$

8. （1）由柯西不等式得：$(\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y})(x+y)\geq(a+b)^2\Rightarrow\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}\geq\dfrac{(a+b)^2}{x+y}$，由柯西不等式取等号的条件可以知道 $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}\Rightarrow\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$；（2）$\dfrac{1}{3-\sin^2 x}+\dfrac{9}{8-\cos^2 x}\geq\dfrac{(1+3)^2}{11-1}=\dfrac{8}{5}$.

9. 根据权方和不等式得：$\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-d}\geq\dfrac{(1+1+1)^2}{a-d}$

10. （1）$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{(1+1)^2}{a+b}=4$ （2）$\dfrac{1}{a^{2016}}+\dfrac{1}{b^{2016}}\geq\dfrac{(1+1)^{2017}}{a+b}=2^{2017}$

11. $\dfrac{2x^2}{y+z}+\dfrac{2y^2}{z+x}+\dfrac{2z^2}{x+y}\geq\dfrac{2(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=1$

12. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^4}+\dfrac{1}{c^6}\geq\dfrac{(1+1+1)^3}{(a+b^2+c^3)}=27$

13. $\dfrac{a^2}{1+a}+\dfrac{b^2}{1+b}+\dfrac{c^2}{1+c}+\dfrac{d^2}{1+d}\geq\dfrac{(a+b+c+d)^2}{4+a+b+c+d}=\dfrac{1}{5}$

14. $\frac{1}{x^3y}+\frac{1}{y^3z}+\frac{1}{z^3x}=\frac{z}{x^2}+\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}$

$(\frac{z}{x^2}+\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2})(xy+yz+zx)\ge(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})^2=(yz+xz+xy)^2\Rightarrow\frac{z}{x^2}+\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}\ge yz+xz+xy$

15. （1）$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\ge\frac{(1+1+1)^3}{(x+y+z)^2}=27$

（2）$\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}\ge\frac{(x+y+z)^3}{(x+y+z)^2}\ge1\ge\lambda$，故 λ 的最大值为 1.

16. $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\ge\frac{(1+1+1)^3}{3+a+b+c}\ge\frac{3}{4}$.

17. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{8}{c^2}=\frac{1^3}{a^2}+\frac{1^3}{b^2}+\frac{2^3}{c^2}\ge\frac{(1+1+2)^3}{(a+b+c)^2}=8$

18. $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}=\frac{a^2}{(b+1)a}+\frac{b^2}{(c+1)b}+\frac{c^2}{(a+1)c}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+ab+ac+bc}=\frac{1}{1+ab+ac+bc}$

$a+b+c=1\Rightarrow(a+b+c)^2=1\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=1$

$$\begin{cases}a^2+b^2\ge2ab\\a^2+c^2\ge2ac\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge ac+ab+bc\\b^2+c^2\ge2bc\end{cases}$$

原不等式等价于：$1=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\ge3(ab+bc+ac)\Rightarrow ab+bc+ac\le\frac{1}{3}$

$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}=\frac{a^2}{(b+1)a}+\frac{b^2}{(c+1)b}+\frac{c^2}{(a+1)c}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+ab+ac+bc}=\frac{1}{1+ab+ac+bc}\ge\frac{3}{4}$

19. $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=\frac{a^2}{a(a+1)}+\frac{b^2}{b(b+1)}+\frac{c^2}{c(c+1)}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+a+b+c}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2+1}$ 又因为

$a+b+c=1\Rightarrow(a+b+c)^2=1\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=1$

$$\begin{cases}a^2+b^2\ge2ab\\a^2+c^2\ge2ac\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge ac+ab+bc\\b^2+c^2\ge2bc\end{cases}$$

即原不等式等价于 $1=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\le3(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}$

20. $\frac{a}{\sqrt{a^2+3b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+3a^2}}=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^3+3ab^2}}+\frac{b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{b^3+3a^2b}}\ge\frac{(a+b)^{\frac{3}{2}}}{(a^3+b^3+3ab^2+3a^2b)^{\frac{1}{2}}}=1$

21. $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}\geq\frac{2}{1+x}+\frac{2}{1+y}+\frac{2}{1+z}$ 等价于证明

$\frac{2}{y+z}+\frac{2}{x+z}+\frac{2}{x+y}\geq\frac{4}{1+x}+\frac{4}{1+y}+\frac{4}{1+z}$ 又因为

$$\begin{cases}\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}\geq\frac{4}{1+z}\\ \frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\geq\frac{4}{1+y}\\ \frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}\geq\frac{4}{1+x}\end{cases}\Rightarrow\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{x+z}\geq\frac{4}{1+z}+\frac{4}{1+y}+\frac{4}{1+z}$$，即

$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}\geq\frac{2}{1+x}+\frac{2}{1+y}+\frac{2}{1+z}$ 成立.

22. 令 $a=\frac{x}{y},b=\frac{z}{x},c=\frac{y}{z}$，则

$$\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b}+\frac{1}{1+2c}=\frac{y}{y+2x}+\frac{x}{x+2z}+\frac{z}{z+2y}=\frac{y^2}{y^2+2xy}+\frac{x^2}{x^2+2zx}+\frac{z^2}{z^2+2yz}$$

$$\geq\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+2zx+2yz}=1$$

23.令 $a=\frac{x}{x+y+z}$， $b=\frac{y}{x+y+z}$， $c=\frac{z}{x+y+z}$

所以原不等式为 $\frac{2x+y+z}{y+z}+\frac{2y+x+z}{z+x}+\frac{2z+x+y}{x+y}\leq\frac{2x}{y}+\frac{2y}{z}+\frac{2z}{x}$

只需证 $3\leq\frac{2xz}{y^2+yz}+\frac{2yz}{z^2+xz}+\frac{2zy}{x^2+xy}=\frac{2x^2z^2}{y^2xz+z^2xy}+\frac{2x^2y^2}{z^2xy+x^2zy}+\frac{2y^2z^2}{x^2yz+y^2xz}$

而 $\frac{2x^2z^2}{y^2xz+z^2xy}+\frac{2x^2y^2}{z^2xy+x^2zy}+\frac{2y^2z^2}{x^2yz+y^2xz}\geq\frac{2(xz+yz+xy)^2}{2(y^2xz+z^2xy+x^2yz)}\geq\frac{(xz+yz+xy)^2}{\frac{1}{3}(xz+yz+xy)^2}=3$

24.令 $\begin{cases}\sqrt{a-1}=x\\ \sqrt{b-1}=y\\ \sqrt{c-1}=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=x^2+1\\ b=y^2+1\\ c=z^2+1\end{cases}$

原等式等价于 $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}=2\Rightarrow 1=\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{y^2}{y^2+1}+\frac{z^2}{z^2+1}\geq\frac{(x+y+z)^2}{(x^2+y^2+z^2+3)}$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2+3}\geq x+y+z\Rightarrow\sqrt{a+b+c}\geq\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}$$

专题 8 绝对值不等式

1. A; 2. C; 3. D; 4. $[-1,\frac{1}{2}]$; 5. $(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)$; 6. R; 7. $[0,4]$; 8. $(-\infty,8]$; 9. $(-\infty,-\frac{1}{2}]$; 10. $\{x\,|\,x>\frac{1}{4}\}$;

11. $[0,+\infty)$;

12.（1）当 $a=-3$ 时，$f(x)\ge 3 \Leftrightarrow |x-3|+|x-2|\ge 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ 3-x+2-x\ge 3 \end{cases} \text{或} \begin{cases} 2<x<3 \\ 3-x+x-2\ge 3 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x\ge 3 \\ x-3+x-2\ge 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x\le 1$ 或 $x\ge 4$

（2）原命题 $\Leftrightarrow f(x)\le |x-4|$ 在 $[1,2]$ 上恒成立

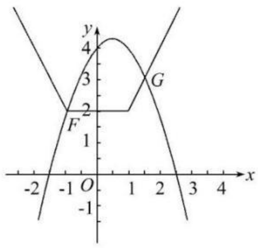
$\Leftrightarrow |x+a|+2-x\le 4-x$ 在 $[1,2]$ 上恒成立

$\Leftrightarrow -2-x\le a\le 2-x$ 在 $[1,2]$ 上恒成立

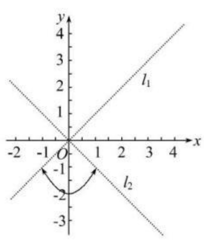
$\Leftrightarrow -3\le a\le 0$

13. 将函数 $g(x)=|x+1|+|x-1|$ 化简,可得 $g(x)=\begin{cases} 2x, x>1 \\ 2, -1\le x\le 1 \\ -2x, x<-1 \end{cases}$

(1) 当 $a=1$ 时,作出函数图象可得 $f(x)\ge g(x)$ 的范围在 F 和 G 点中间,联立 $\begin{cases} y=2x \\ y=-x^2+x+4 \end{cases}$ 可得点 $G(\frac{\sqrt{17}-1}{2},\sqrt{17}-1)$,因此可得解集为 $[-1,\frac{\sqrt{17}-1}{2}]$.



(2) 即 $f(x)\ge g(x)$ 在 $[-1,1]$ 内恒成立,故而可得 $-x^2+ax+4\ge 2 \Rightarrow x^2-2\le ax$ 恒成立,根据图象可得:函数 $y=ax$ 必须在 l_1,l_2 之间,故而可得 $-1\le a\le 1$.



14．(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=\begin{cases}2x+4,x\le -1\\ 2,-1<x<2\\ -2x+6,x\ge 2\end{cases}$，$f(x)\ge 0$ 的解集为 $\{x|-2\le x\le 3\}$

(2) $f(x)\le 1$ 等价于 $|x+a|+|x-2|\ge 4$.而 $||x+a|+|x-2|\ge|a+2|$ 且当 $x=2$ 时等号成立.

故 $f(x)\le 1$ 等价于 $|a+2|\ge 4$.由 $||a+2|\ge 4$ 可得 $a\le -6$ 或 $a\ge 2$

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,-6]\cup[2,+\infty)$.

15(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=|x+1|-|x-1|$，即 $f(x)=\begin{cases}-2,x\le -1\\ 2x,-1<x<1\\ 2,x\ge 1\end{cases}$ 结合函数图象可知，不等式 $f(x)>1$ 的解集为

$\{x|x>\frac{1}{2}\}$

(2)当 $x\in(0,1)$ 时 $|x+1|-|ax-1|>x$ 成立等价于当 $x\in(0,1)$ 时 $|ax-1|<1$ 成立.

若 $a\le 0$，则当 $x\in(0,1)$ 时 $|ax-1|\ge 1$；若 $a>0$，$|ax-1|<1$ 的解集为 $0<x<\frac{2}{a}$

所以 $\frac{2}{a}\ge 1$，故 $0<a\le 2$，综上，a 的取值范围为 $(0,2]$.

16．(1)当 $x\le -1$ 时，$f(x)=-(x+1)+(x-2)=-3<1$ 无解.

当 $-1<x<2$ 时，$f(x)=(x+1)+(x-2)=2x-1$ 令 $2x-1\ge 1$，得 $x\ge 1$，所以 $1\le x<2$.

当 $x\ge 2$ 时，$f(x)=(x+1)-(x-2)=3>1\Rightarrow x\ge 2$.

综上所述，$f(x)\ge 1$ 的解集为 $[1,+\infty)$.

(2)原式等价于存在 $x\in R$，使 $f(x)-x^2+x\ge m$ 成立，即 $[f(x)-x^2+x]_{\max}\ge m$

设 $g(x)=f(x)-x^2+x$，由(1)知 $g(x)=\begin{cases}-x^2+x-3,x\le -1\\ -x^2+3x-1,-1<x<2\\ -x^2+x+3,\ge 2\end{cases}$

当 $x\le -1$ 时，$g(x)=-x^2+x-3$，其开口向下，对称轴为 $x=\frac{1}{2}>-1$，所以 $g(x)\le g(-1)=-5$.

当 $-1<x<2$ 时 $g(x)=-x^2+3x-1$，其开口向下，对称轴为 $x=\frac{3}{2}$，所以 $g(x)\le g(\frac{3}{2})=\frac{5}{4}$.

当 $x\ge 2$ 时 $g(x)=-x^2+x+3$，其开口向下，对称轴为 $x=\frac{1}{2}$，所以 $g(x)\le g(2)=1$ 1.

综上：$g(x)_{\max}=\frac{5}{4}$，即 m 的取值范围为 $(-\infty,\frac{5}{4}]$.

17．(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=|2x-2|+2$，解不等式 $|2x-2|+2\le 6$ 得 $-1\le x\le 3$.

因此 $f(x)\le 6$ 的解集为 $\{x|-1\le x\le 3\}$.

(2)当 $x\in R$ 时，$f(x)+g(x)=|2x-a|+a+|1-2x|\geq|2x-a+1-2x|+a=|1-a|+a$

所以当 $x\in R$ 时，$f(x)+g(x)\geq 3$ 等价于 $|1-a|+a\geq 3$　①

当 $a\leq 1$ 时，①等价于 $1-a+a\geq 3$　无解

当 $a>1$ 时，①等价于 $a-1+a\geq 3\Rightarrow a\geq 2$

所 a 的取值范围是 $[2,+\infty)$.

18．(1)当 $x<-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=-2x<2$2，解得 $-1<x<-\frac{1}{2}$；

当 $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=1<2$ 恒成立；当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=2x<2$，解得 $\frac{1}{2}<x<1$.

综上可得，$M=\{x|-1<x<1\}$.

(2)当 $a,b\in(-1,1)$)时，有 $(a^2-1)(b^2-1)>0$，即 $a^2b^2+1>a^2+b^2$2，

则 $a^2b^2+2ab+1>a^2++2ab+b^2$，则 $(ab+1)^2>(a+b)^2$2，即 $|a+b|<|ab+1|$.

19．原不等式可化为 $\begin{cases}x<-\frac{3}{2},\\-x-3\geq 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geq-\frac{3}{2},\\3x+3\geq 2\end{cases}$ 解得 $x\leq-5$ 或. $x\geq-\frac{1}{3}$

综上，原不等式的解集是 $\{x|x\leq-5$ 或. $x\geq-\frac{1}{3}\}$

20．(1)当 $a=1$ 时，$f(x)>1$ 化为 $|x+1|-2|x-1|-1>0$.

当 $x\leq 1$ 时，不等式化为 $x-4>0$，无解；

当 $-1<x<1$ 时，不等式化为 $3x-2>0$，解得 $\frac{2}{3}<x<1$；

当 $x\geq 1$ 时，不等式化为 $-x+2>0$，解得 $1\leq x<2$.

所以 $f(x)>1$ 的解集为 $\{x|\frac{2}{3}<x<2\}$.

(2)由题设可得，$f(x)=\begin{cases}x-1-2a,x<-1\\3x+1-2a,-1\leq x\leq a\\-x+1+2a,x>a\end{cases}$

所以函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形的三个顶点分别为 $A(\frac{2a-1}{3},0)$，$B(2a+1,0)$，$C(a,a+1)$)，ΔABC 的面积为 $\frac{2}{3}(a+1)^2$. 由题设得 $\frac{2}{3}(a+1)^2>6$ 故 $a>2$. 所以 a 的取值范围为 $(2,+\infty)$.

21．(1)由 $a>0$，有 $f(x)=|x+\frac{1}{a}|+|x-a|\geq|x+\frac{1}{a}-(x-a)|=\frac{1}{a}+a\geq 2$. 所以 $f(x)\geq 2$.

（2）$f(3)=|3+\frac{1}{a}|+|3-a|$.

当 $a>3$ 时，$f(3)=\frac{1}{a}+a$,由 $f(3)<5\Rightarrow 3<a<\frac{5+\sqrt{21}}{2}$

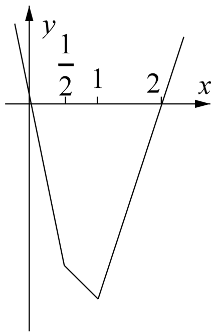
当 $0<a\le 3$ 时，$f(3)=6-a+\frac{1}{a}$ 由 $f(3)<5\Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}<a\le 3$.

综上，a 的取值范围是 $(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{5+\sqrt{21}}{2})$.

22．(1)当 $a=-2$ 时，不等式 $f(x)<g(x)$ 化为 $|2x-1|+|2x-2|-x-3<0$，

设函数 $y=|2x-1|+|2x-2|-x-3$，$y=\begin{cases}-5x,x<-\frac{1}{2}\\-x-2,\frac{1}{2}\le x\le 1,\\3x-6,x>1\end{cases}$

其图像如图所示，从图像可知，当且仅当 $x\in(0,2)$ 时，$y<0$，



$\therefore$ 原不等式解集是 $\{x|0<x<2\}$.

（2）当 $x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2})$ 时，$f(x)=1+a$，不等式 $f(x)<g(x)$ 化为 $1+a\le x+3$，

$\therefore x\ge a-2$ ∴ $x\geqslant a-2$ 对 $x\in[-\frac{a}{2},\frac{1}{2})$ 都成立，故 $-\frac{a}{2}\ge a-2$，即 $a\le\frac{4}{3}$，

∴ a 的取值范围为 $(-1,\frac{4}{3}]$.

23．（1）因为 $\{x|1\le x\le 2\}$，且 $\frac{1}{2}\notin A$，所以 $|\frac{3}{2}-2|<a$，且 $|\frac{1}{2}-2|\ge a$

解得 $\frac{1}{2}<a\le\frac{3}{2}$，又因为 $a\in N^*$，所以 $a=1$ $a=1$

（2）因为 $|x+1|+|x-2|\ge|(x+1)-(x-2)|=3$

当且仅当 $(x+1)(x-2)\le 0$ 即 $-1\le x\le 2$ 时取到等号,所以 $f(x)$ 的最小值为 3.

24．（1） $f(x)=|x-2|-|x-5|=\begin{cases}-3,x\le 2\\2x-7,2<x<5\\3,x\ge 5\end{cases}$

当 $2<x<5$ 时，$-3<2x-7<3$，所以 $-3\le f(x)\le 3$

（2）由（I）可知，

当 $x \le 2$ 时，$f(x) \ge x^2 - 8x + 15$ 的解集为空集；

当 $2 < x < 5$ 时，$f(x) \ge x^2 - 8x + 15$ 的解集为 $\{x \mid 5 - \sqrt{3} \le x < 5\}$；

当 $x \ge 5$ 时，$f(x) \ge x^2 - 8x + 15$ 的解集为 $\{x \mid 5 \le x \le 6\}$

综上，不等式 $f(x) \ge x^2 - 8x + 15$ 的解集为 $\{x \mid 5 - \sqrt{3} \le x \le 6\}$.

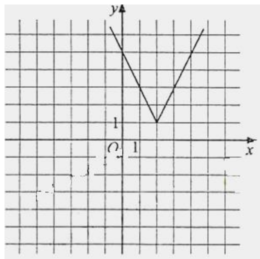
25．(1) 当 $a = 1$ 时，$f(x) \ge 3x + 2$ 可化为 $|x - 1| \ge 2$.

由此可得 $x \ge 3$ 或 $x \le 1$.

故不等式 $f(x) \ge 3x + 2$ 的解集为 $\{x \mid x \ge 3$ 或 $x \le -1\}$.

(2) 由 $f(x) \le 0$ 得 $|x - a| + 3x \le 0$，

此不等式化为不等式组 $\begin{cases} x \ge a \\ x - a + 3x \le 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < a \\ a - x + 3x \le 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x \ge a \\ x \le \dfrac{a}{4} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > a \\ x \le -\dfrac{a}{2} \end{cases}$，



因为 $a > 0$，所以不等式组的解集为 $\{x \mid x \le -\dfrac{a}{2}\}$，

由题设可得 $-\dfrac{a}{2} = -1$，故 $a = 2$.

26．(1) 由于 $f(x) = \begin{cases} -2x + 5, x < 2 \\ 2x - 3, x \ge 2 \end{cases}$ 则函数 $y = f(x)$ 的图像如图所示.

(2) 由函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = ax$ 的图像可知，当且仅当 $a \ge \dfrac{1}{2}$ 或 $a < -2$ 时，函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = ax$ 的图像有交点．故不等式 $f(x) < ax$ 的解集非空时，a 的取值范围为 $(-\infty, -2) \cup [\dfrac{1}{2}, +\infty)$.

第四章　圆锥曲线参考答案

专题1　直线方程

1．C；　2．C；　3．B；　4．C；　5．B；　6．D；　7．D；　8．D；　9．C；　10．C；11．A；12．D；13．C；14．D；15．B；16．C；17．B；18．C；19．C；20．C；21．B；22．B；23．C；24．D；25．A；26．D；27．A；28．D；29．C；30．C；31．$P(\frac{8}{9},\frac{17}{9})$，最小值为$\sqrt{41}$；

32．$x-3y-10=0$；33．$3x-2y+4=0$．

专题2　圆的方程

1．B　【解析】圆心 C 与点 M 的距离即为圆的半径，$\sqrt{(2-5)^2+(-3+7)^2}=5$.

2．C　【解析】解析一：由圆心在直线 $x+y-2=0$ 上可以得到 A，C 满足条件，再把 A 点坐标 $(1，-1)$代入圆方程．A 不满足条件．∴选 C.

解析二：设圆心 C 的坐标为$(a，b)$，半径为 r，因为圆心 C 在直线 $x+y-2=0$ 上，∴$b=2-a$．由$|CA|=|CB|$，得$(a-1)^2+(b+1)^2=(a+1)^2+(b-1)^2$，解得 $a=1$，$b=1$．因此所求圆的方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

3．B　【解析】∵与 x 轴相切，∴$r=4$．又圆心$(-3，4)$，∴圆方程为$(x+3)^2+(y-4)^2=16$.

4．B　【解析】∵$x+y+m=0$ 与 $x^2+y^2=m$ 相切，∴$(0，0)$到直线距离等于$\sqrt{m}$．∴$\frac{|m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{m}$，∴$m=2$.

5．A　【解析】令 $y=0$，∴$(x-1)^2=16$．∴ $x-1=\pm4$，∴$x_1=5$，$x_2=-3$．∴弦长$=|5-(-3)|=8$.

6．B　【解析】由两个圆的方程 C_1：$(x+1)^2+(y+1)^2=4$，C_2：$(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 可求得圆心距 $d=\sqrt{13}\in(0，4)$，$r_1=r_2=2$，且 $r_1-r_2<d<r_1+r_2$ 故两圆相交，选 B.

7．A　【解析】对已知圆的方程 $x^2+y^2-2x-5=0$，$x^2+y^2+2x-4y-4=0$，经配方，得$(x-1)^2+y^2=6$，$(x+1)^2+(y-2)^2=9$．圆心分别为 $C_1(1，0)$，$C_2(-1，2)$．直线 C_1C_2 的方程为 $x+y-1=0$.

8．C　【解析】将两圆方程分别配方得$(x-1)^2+y^2=1$ 和 $x^2+(y+2)^2=4$，两圆圆心分别为 $O_1(1，0)$，$O_2(0，-2)$，$r_1=1$，$r_2=2$，$|O_1O_2|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，又 $1=r_2-r_1<\sqrt{5}<r_1+r_2=3$，故两圆相交，所以有两条公切线，应选 C.

9．C　【解析】①②③错，④对．选 C.

10．D 【解析】利用空间两点间的距离公式.

11.C

12.A

13.B

14.C

15.C　【解析】因为直线与圆相离，所以最大距离与最小距离的差应为直径。因为半径为 $\mathbf{3\sqrt{2}}$

16．2.【解析】圆心到直线的距离 $d=\frac{|3+4+8|}{5}=3$，∴动点 Q 到直线距离的最小值为 $d-r=3-1=2$.

17．$(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

【解析】画图后可以看出，圆心在$(1，1)$，半径为 1．故所求圆的方程为：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

18．$(x+2)^2+(y-3)^2=4$．

【解析】因为圆心为$(-2，3)$，且圆与 y 轴相切，所以圆的半径为 2．故所求圆的方程为$(x+2)^2+(y-3)^2=4$．

19．0 或$\pm2\sqrt{5}$．

【解析】当两圆相外切时，由$|O_1O_2|=r_1+r_2$知$\sqrt{4^2+a^2}=6$，即 $a=\pm2\sqrt{5}$．

当两圆相内切时，由$|O_1O_2|=r_1-r_2(r_1>r_2)$知$\sqrt{4^2+a^2}=4$，即 $a=0$．∴a 的值为 0 或$\pm2\sqrt{5}$．

19．$(x-3)^2+(y+5)^2=32$．

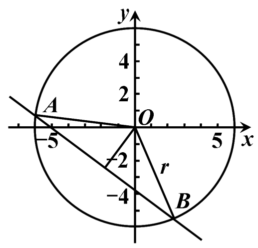
【解析】圆的半径即为圆心到直线 $x-7y+2=0$ 的距离；

20．$x+y-4=0$．

【解析】圆 $x^2+y^2-4x-5=0$ 的圆心为 $C(2，0)$，$P(3，1)$为弦 AB 的中点，所以直线 AB 与直线 CP 垂直，即 $k_{AB}\cdot k_{CP}=-1$，解得 $k_{AB}=-1$，又直线 AB 过 $P(3，1)$，则所求直线方程为 $x+y-4=0$．

22. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$

23. $\frac{\sqrt{2}}{2}$（要想圆心角最小，即圆心到直线的距离为圆心与点$(1,\sqrt{2})$的距离，即直线 l 垂直于圆心与点的连线。



(第 24 题)

24．$x^2+y^2=36$．

【解析】设直线与圆交于 A，B 两点，则$\angle AOB=120°$，设所求圆方程为：$x^2+y^2=r^2$，则圆心到直线距离为$\frac{r}{2}=\frac{|15|}{5}$，所以 $r=6$，所求圆方程为 $x^2+y^2=36$．

25．$x^2+y^2-ax-by=0$．

【解析】∵圆过原点，∴设圆方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey=0$．

∵圆过$(a，0)$和$(0，b)$，∴$a^2+Da=0$，$b^2+bE=0$．

又∵$a\neq0$，$b\neq0$，∴$D=-a$，$E=-b$．故所求圆方程为 $x^2+y^2-ax-by=0$．

26．$x^2+y^2-2x-12=0$．

【解析】设所求圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$．

∵A，B 两点在圆上，代入方程整理得：$D-3E-F=10$　　①$4D+2E+F=-20$　②

设纵截距为 b_1，b_2，横截距为 a_1，a_2．在圆的方程中，令 $x=0$ 得 $y^2+Ey+F=0$，

∴$b_1+b_2=-E$；令 $y=0$ 得 $x^2+Dx+F=0$，∴$a_1+a_2=-D$．由已知有$-D-E=2$．③

①②③联立方程组得 $D=-2$，$E=0$，$F=-12$．故所求圆的方程为 $x^2+y^2-2x-12=0$．

27．【解析】设所求圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$．根据题意：$r=\frac{10-6}{2}=2$，圆心的横坐标 $a=6+2=8$，所以圆的方程可化为：$(x-8)^2+(y-b)^2=4$．又因为圆过$(8，3)$点，所以$(8-8)^2+(3-b)^2=4$，解得 $b=5$ 或 $b=1$，所求圆的方程为$(x-8)^2+(y-5)^2=4$ 或$(x-8)^2+(y-1)^2=4$．

28.【解析】由圆心在直线 x-y-1=0 上，可设圆心为（a,a-1）,半径为 r，由题意可得

$$\begin{cases}\frac{|4a+3(a-1)+14|}{5}=r\\ r^2=9+\left(\frac{3a+4(a-1)+10}{5}\right)^2\end{cases}$$

，经计算得 a=2, r=5. 所以所求圆的方程为（x-2）^{2}+（y-1）^{2}=25

29.【解析】将 $x=3-2y$ 代入方程 $x^2+y^2+x-6y+m=0$，得 $5y^2-20y+12+m=0$ 设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，则 y_1y_2

满足条件：$y_1+y_2=4, y_1y_2=\frac{m+12}{5}$ ∵ $OP\perp OQ$，∴ $k_{OP}\cdot k_{OQ}=-1$，即 $\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-1$，从而 $x_1x_2+y_1y_2=0$，

又 $x_1=3-2y_1$，$x_2=3-2y_2$，∴ $x_1x_2=9-6(y_1+y_2)+4y_1y_2$，∴$m=3$，此时$\Delta>0$，圆心坐标为 $(-\frac{1}{2}, 3)$，半径 $r=\frac{5}{2}$．

专题3 对称问题

1.【答案】$\sqrt{41}$；$(\frac{17}{5}，0)$．

2.【解析】$N(a，-b)$，$P(-a，-b)$，则 $Q(b，a)$．答案：B；

3.【解析】直线 l_1 关于 y 轴对称的直线方程为 $(-x)+my+5=0$，即 $x-my-5=0$，与 l_2 比较，∴$m=-n$ 且 $p=-5$．反之亦验证成立．答案：C

4.【解析】对称轴是以两对称点为端点的线段的中垂线．答案：$3x-y+3=0$

5.【解析】数形结合．答案：$\pi-\theta$

6.【解析】由 $M(x，y)$ 关于 $y=-x$ 的对称点为 $(-y，-x)$，即得 $x^2+(y+1)^2=1$．答案：C

7.【解析】将 $x+2y-1=0$ 中的 x、y 分别代以 $2-x$，$-2-y$，得 $(2-x)+2(-2-y)-1=0$，即 $x+2y+3=0$．故选 C．答案：C

8.【解析】l 上的点为到两直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 与 $x=1$ 距离相等的点的集合，即 $\frac{|x-\sqrt{3}y|}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}=|x-1|$，化简得 $x+\sqrt{3}y-2=0$ 或 $3x-\sqrt{3}y-2=0$．答案：$x+\sqrt{3}y-2=0$ 或 $3x-\sqrt{3}y-2=0$

9.【解析】易知 $A(4，-1)$、$B(3，4)$ 在直线 l：$2x-y-4=0$ 的两侧．作 A 关于直线 l 的对称点 $A_1(0，1)$，当 A_1、B、P 共线时距离之差最大．答案：$(5，6)$

10.【解析】设点 $A(-1，-4)$ 关于直线 $y+1=0$ 的对称点为 $A'(x_1，y_1)$，则 $x_1=-1$，$y_1=2\times(-1)-(-4)=2$，即 $A'(-1，2)$．在直线 BC 上，再设点 $A(-1，-4)$ 关于 l_2：$x+y+1=0$ 的对称点为 $A''(x_2，y_2)$，

则有 $\begin{cases}\frac{y_2+4}{x_2+1}\cdot(-1)=-1\\ \frac{x_2-1}{2}+\frac{y_2-4}{2}+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=3\\ y_2=0\end{cases}$ 即 $A''(3，0)$ 也在直线 BC 上，由直线方程的两点式得 $\frac{y-2}{0-2}=\frac{x+1}{3+1}$，

即 $x+2y-3=0$ 为边 BC 所在直线的方程．

11.【解析】因为 $y=\sqrt{(x-0)^2+(0-3)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(0-5)^2}$，所以函数 y 是 x 轴上的点 $P(x，0)$ 与两定点 $A(0，3)$、$B(4，3)$ 距离之和．y 的最小值就是$|PA|+|PB|$的最小值．由平面几何知识可知，若 A 关于 x 轴的对称点为 $A'(0，-3)$，则$|PA|+|PB|$的最小值等于$|A'B|$，即 $\sqrt{(4-0)^2+(5+3)^2}=4\sqrt{5}$． 所以 $y_{min}=4\sqrt{5}$．

12.【解析】由题意，点 A 关于直线 $y=2x$ 的对称点 A'在 BC 所在直线上，设 A'点坐标为 $(x_1，y_1)$，则 x_1、y_1 满足

$\frac{y_1-2}{x_1+4}=-\frac{1}{2}$，即 $x_1=-2y_1$． ① $\frac{y_1+2}{2}=2\cdot\frac{x_1-4}{2}$，即 $2x_1-y_1-10=0$．②

解①②两式组成的方程组，得 $\begin{cases}x_1=4\\ y_1=-2\end{cases}$ ∴BC 所在直线方程为 $\frac{y-1}{-2-1}=\frac{x-3}{4-3}$，即 $3x+y-10=0$．解方程组

$\begin{cases}3x+y-10=0\\y=2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$ ∴所求 C 点坐标为（2，4）．由题意$|AB|^2=50$，$|AC|^2=40$，$|BC|^2=10$，

∴$\triangle ABC$ 为直角三角形．

13.【解析】(1）可判断 A、B 在直线 l 的同侧，设 A 点关于 l 的对称点 A_1 的坐标为（x_1，y_1）．

$\begin{cases}\dfrac{x_1+2}{2}-2\cdot\dfrac{y_1+3}{2}-2=0\\\dfrac{y_1-3}{x_1-2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{2}{5}\\y_1=-\dfrac{9}{5}\end{cases}$ 由两点式求得直线 A_1B 的方程为 $y=\dfrac{7}{11}$（$x-4$）+1，直线 A_1B 与 l 的交点可求得为 P（$\dfrac{56}{25}$，$-\dfrac{3}{25}$）．由平面几何知识可知$|PA|+|PB|$最小．

（2）由两点式求得直线 AB 的方程为 $y-1=-$（$x-4$），即 $x+y-5=0$．直线 AB 与 l 的交点可求得为 P（8，-3），它使$|PA|-|PB|$最大．

专题4 直线系和圆系方程

1.【答案】$\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$

2.【答案】(1）$x+2y-4=0$；(2）$4x+3y-6=0$．

3.【解析】方程 $x^2+y^2-2x=0$ ①可化为 $(x-1)^2+y^2=1$，即曲线 C 是一个圆，记圆心为 C．

因为 PA、PB 分别切圆 C 于 A、B 所以 P、A、B、C 四点在以 PC 为直径的圆 $C'=(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$ 即 $x^2+y^2-4x-y+3=0$ ②上，两圆公共弦所在直线即为所求，由①-②，得直线 AB 的方程为 $2x+y-3=0$．故选 A．

4.【解析】曲线 $(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+(6-4\lambda)x-16-6\lambda=0$ 可化为 $(x^2+y^2+6x-16)+\lambda(x^2+y^2-4x-6)=0$，∴ $x^2+y^2+6x-16=0$ 且 $x^2+y^2-4x-6=0$，可得恒过定点 $(2,\pm2\sqrt{2})$．故答案为：$(2,\pm2\sqrt{2})$．

5.【解析】由题可设所求圆的方程为：$(x^2+y^2+3x-y-2)+\lambda(3x^2+3y^2+2x+y+1)=0$，因为 $(0,0)$ 在所求的圆上，∴有 $-2+\lambda=0$．从而 $\lambda=2$，故所求的圆的方程为：
$(x^2+y^2+3x-y-2)+2(3x^2+3y^2+2x+y+1)=0$ 即 $7x^2+7y^2+7x+y=0$．

6.【解析】 构造方程 $x^2+y^2+6x-4+\lambda(x^2+y^2+6y-28)=0$ 即 $(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+6x+6\lambda y-(4+28\lambda)=0$．此方程的曲线是过已知两圆交点的圆，且圆心为 $(-\frac{3}{1+\lambda},-\frac{3\lambda}{1+\lambda})$ 当该圆心在直线 $x-y-4=0$ 上时，即 $\frac{-3}{1+\lambda}+\frac{3\lambda}{1+\lambda}-4=0$，得 $\lambda=-7$．∴ 所求圆方程为 $x^2+y^2-x+7y-32=0$．

7. 【解析】解过 $A(-1,-3)$ 的圆的切线为 $3x+4y+15=0$，构造圆 $x^2+y^2-4x-2y-20+\lambda(3x+4y+15)=0$，代入 $(2,0)$ 得 $\lambda=\frac{8}{7}$，所以所求圆方程为 $7x^2+7y^2-4x+18y-20=0$．

8. 【解析】圆 $x^2+y^2=5$ 和 $(x-1)^2+(y-1)^2=16$ 的公共弦方程为 $2x+2y-11=0$ 过直线 $2x+2y-11=0$ 与圆 $x^2+y^2=5$ 的交点的圆系方程为 $x^2+y^2-25+\lambda(2x+2y-11)=0$，即 $x^2+y^2+2\lambda x+2\lambda y-(11\lambda+25)=0$ 依题意，欲使所求圆面积最小，只需圆半径最小，则两圆的公共弦必为所求圆的直径，圆心 $(-\lambda,-\lambda)$ 必在公共弦

所在直线 $2x+2y-11=0$ 上，即 $-2\lambda-2\lambda+11=0$，则 $\lambda=-\dfrac{11}{4}$ 代回圆系方程得所求圆方程 $(x-\dfrac{11}{4})^2+(y-\dfrac{11}{4})^2=\dfrac{79}{8}$.

9.【解析】设圆的方程为：$x^2+y^2+2x-4y+1+\lambda(2x+y+4)=0$

即 $x^2+y^2+2(1+\lambda)x+(\lambda-4)y+(1+4\lambda)=0$，则 $r^2=\dfrac{1}{4}\left[4(1+\lambda)^2+(\lambda-4)^2-4(1+4\lambda)\right]=\dfrac{5}{4}(\lambda-\dfrac{8}{5})^2+\dfrac{4}{5}$，当 $\lambda=\dfrac{8}{5}$ 时，r^2 最小，从而圆的面积最小，故所求圆的方程为：$5x^2+5y^2+26x-12y+37=0$

10.【解析】(1) 设圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，把点 $(0,-1)$，$(3+\sqrt{2},0)$，$(3-\sqrt{2},0)$ 分别代入，

得：$\begin{cases}1-E+F=0\\ 11+6\sqrt{2}+\left(3+\sqrt{2}\right)D+F=0\\ 11-6\sqrt{2}+\left(3-\sqrt{2}\right)D+F=0\end{cases}$，解得 $D=-6$，$E=8$，$F=7$，∴圆 C 的方程为 $x^2+y^2-6x+8y+7=0$.

(2) 过直线 $x+y+a=0$ 与圆 $x^2+y^2-6x+8y+7=0$ 的交点的圆系方程为：

$x^2+y^2-6x+8y+7+\lambda(x+y+a)=0$，即 $x^2+y^2+(\lambda-6)x+(\lambda+8)y+7+\lambda a=0$ ①

依题意，O 在以 AB 为直径的圆上，则圆心 $(-\dfrac{\lambda-6}{2},-\dfrac{\lambda+8}{2})$ 显然在直线 $x+y+a=0$ 上，则 $-\dfrac{\lambda-6}{2}-\dfrac{\lambda+8}{2}+a=0$，解之可得 $a=\lambda+1$，又 $O(0,0)$ 满足方程①，$7+\lambda a=0$，故 $a^2-a+7=0$ 无解，故不存在 a，使得 $OA\perp OB$.

11.【解析】(1) 证明：l 的方程可化为 $(x+y-4)+m(2x+y-7)=0$，∵ $m\in R$，∴ $\begin{cases}2x+y-7=0\\ x+y-4=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}$，即 l 恒过定点 $A(3,1)$，∵圆心 $C(1,2)$，$|AC|=\sqrt{5}<5$（半径），∴点 A 在圆 C 内，从而直线 l 恒与圆 C 相交于两点.（2）弦长最小时，$l\perp AC$，由 $k_{AC}=-\dfrac{1}{2}$，∴ l 的方程为 $2x-y-5=0$.

12.【解析】(1) 由题意得，$C(-2,1)$，$K_l=1$，由 $m\perp l$ 得，$k_m\cdot k_l=-1$，∴ $k_m=-1$. ∵直线过圆心 $(-2,1)$，∴直线 m 的方程为 $x+y+1=0$.

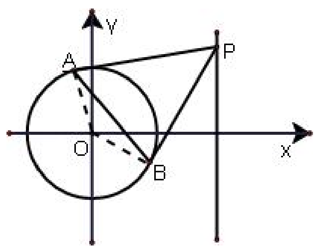
(2) 过直线 $x-y-3=0$ 与圆 $x^2+y^2+4x-2y+a=0$ 的交点的圆系方程为：

$x^2+y^2+4x-2y+a+\lambda(x-y-3)=0$，即 $x^2+y^2+(4+\lambda)x-(\lambda+2)y+a-3\lambda=0$ ①

依题意，O 在以 MN 为直径的圆上，则圆心 $(-\dfrac{4+\lambda}{2},\dfrac{\lambda+2}{2})$ 显然在直线 $x-y-3=0$ 上，则 $-\dfrac{4+\lambda}{2}-\dfrac{\lambda+2}{2}-3=0$，解之可得 $\lambda=-6$，又 $O(0,0)$ 满足方程①，则 $a-3\lambda=0$，故 $a=-18$.

13.【解析】(1) 依题意得：圆心 $(0,0)$ 到直线 $x+y+4\sqrt{3}=0$ 的距离 $d=r$，∴ $r=d=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{6}$，∴圆 C 的方程为 $x^2+y^2=24$ ①；

(2) 连接 OA、OB，∵ PA、PB 是圆 C 的两条切线，∴ $OA\perp AP$，$OB\perp BP$，∴ A、B 在以 OP 为直径的圆上，设点 P 的坐标为 $(8,b)$，则线段 OP 的中点坐标为 $\left(4,\dfrac{b}{2}\right)$，∴以 OP 为直径的圆方程为 $(x-4)^2+\left(y-\dfrac{b}{2}\right)^2=16+\dfrac{b^2}{4}$，②∵ AB 为两圆的公共弦，∴①－②得：直线 AB 的方程为 $8x+by=24$，即 $8(x-3)+by=0$，则直线 AB 恒过定点 $(3,0)$.



专题 5　圆系和曲线系

1.【解析】设直线 AB 为 l，由题意可得，直线 l 和坐标轴不垂直，$y^2=2px$ 的焦点 $F(\frac{p}{2}，0)$，

设 l 的方程为 $x=my+\frac{p}{2}(m\neq 0)$，代入抛物线方程可得 $y^2-2mpy-p^2=0$，显然判别式 $\Delta=4p^2m^2+4p^2>0$，

$y_1+y_2=2mp$，$y_1\bullet y_2=-p^2$．$\therefore AB$ 的中点坐标为 $D(pm^2+\frac{p}{2}，mp)$，

又直线 l' 的斜率为 $-m$，$\therefore$ 直线 l' 的方程为 $x=-\frac{1}{m}y+pm^2+\frac{3p}{2}$．

过 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点，若 AB 的垂直平分线 l' 与 C 相交于 M、N 两点，

把线 l' 的方程代入抛物线方程可得 $y^2+\frac{2p}{m}y-p^2(2m^2+3)=0$，

A、M、B、N 四点的曲线系方程为 $y^2-2px+\lambda\ \ x-my-\frac{p}{2}\ \ \ x+\frac{1}{m}y-pm^2-\frac{3p}{2}\ \ =0$，即

$y^2(1-\lambda)+\lambda x^2+\lambda\ \ \frac{1}{m}-m\ \ xy+x\left(-2p-2p\lambda-\lambda pm^2\right)+y\ \ p\lambda m^2+\frac{3pm\lambda}{2}-\frac{p\lambda}{2m}\ \ =0$，由于 xy 的系数为零，故

$m=\pm 1$，$\lambda=\frac{1}{2}$；故存在 $ABCD$ 四点共圆，$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $x-y-\frac{P}{2}=0$，或 $x+y-\frac{P}{2}=0$．

2.【解析】(1)依题意，记 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则有 $\begin{cases}{x_1}^2-\frac{{y_1}^2}{2}=1①;{x_2}^2-\frac{{y_2}^2}{2}=1②\\ \frac{x_1+x_2}{2}=1③;\frac{y_1+y_2}{2}=2④\\ k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}⑤\end{cases}$　①－②,代入③④⑤$\Rightarrow k=1$

所以直线 AB 的方程为 $y=x+1$

（2）由于 CD 的方程为 $y-2=-(x-1)$，即 $x+y-3=0$．设 A、B、C、D 四点的曲线系方程为

$x^2-\frac{y^2}{2}-1+\lambda(x-y+1)(x+y-3)=0$，即 $x^2(1+\lambda)+y^2\ \ -\frac{1}{2}-\lambda\ \ -2\lambda x+4\lambda y-1-3\lambda=0$，当 $\lambda=-\frac{3}{4}$ 时，曲线

系方程为 $x^2+y^2+6x-12y+5=0$，$4R^2=6^2+(-12)^2-4\times 5>0$，所以 A、B、C、D 四点共圆．

3.【解析】(1) 设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则有 $\begin{cases}3x_1^2+y_1^2=\lambda\\ 3x_2^2+y_2^2=\lambda.\end{cases}\Rightarrow 3\ (x_1-x_2)\ (x_1+x_2)+(y_1-y_2)=0$．

依题意，$x_1\neq x_2$，$\therefore k_{AB}=-\frac{3(x_1+x_2)}{y_1+y_2}$．$\because N(1,3)$ 是 AB 的中点，$\therefore x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=6$，从而 $k_{AB}=-1$．

又由 $N(1,3)$ 在椭圆内，$\therefore \lambda>3\times 1^2+3^2=12$，$\therefore \lambda$ 的取值范围是 $(12,+\infty)$．

直线 AB 的方程为 $y-3=-(x-1)$，即 $x+y-4=0$．直线 CD 的方程为 $y-3=x-1$，即 $x-y+2=0$

（2）A、B、C、D 四点的曲线系方程为 $3x^2+y^2-\lambda+\mu(x+y-4)(x-y+2)=0$．

即 $x^2(3+\mu)+y^2(1-\mu)-2\mu x+6\mu y-\lambda-8\mu=0$，当 $\mu=-1$ 时，方程转化为 $x^2+y^2+x-3y-\frac{\lambda}{2}+4=0$

故当 $4R^2=1^2+(-3)^2-4\times\left(-\frac{\lambda}{2}+4\right)>0\Rightarrow\lambda>3$，故当 $\lambda>12$ 时符合题意，A、B、C、D 四点共圆.

4.【解析】(1) 依题意知，$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$|AB|=\sqrt{7}$，即 $a^2+b^2=7$，又 $a^2-b^2=c^2$，解得 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2) 设直线 PQ 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+m$，根据点 P 在第一象限可知，$-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$ 由于 AB 方程为

$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}$，$A$、$P$、$B$、$Q$ 四点的曲线系方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-1+\lambda\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-y+m\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+y-\sqrt{3}\right)=0$，

即 $x^2\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\lambda\right)+y^2\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)+x\lambda\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}-\frac{3}{2}\right)+y\lambda\left(\sqrt{3}+m\right)-1-\sqrt{3}m\lambda=0$，当 $\lambda=\frac{1}{21}$ 时，方程可以转化为

$$x^2+y^2+x\left(\frac{\sqrt{3}m}{12}-\frac{1}{4}\right)+y\left(\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{m}{6}\right)-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{3}m}{6}=0$$

$4R^2=\left(\frac{\sqrt{3}m}{12}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{m}{6}\right)^2-4\left(-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{3}m}{6}\right)$　$7m^2+50\sqrt{3}m+885>0$ 对 $m\in R$ 恒成立，所以 A，P，B，Q 四点共圆.

5.【解析】(1) 易知 $a=2$，令椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$，代入点 $C\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 得 $b=\sqrt{3}$，椭圆 E 的方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2) 设 $MN:x=ky+n$，故我们只需要求出 n；

TA：$y=\frac{m}{6}(x+2)$

已知 TB：$y=\frac{m}{2}(x-2)$ 因为椭圆过二次曲线 $TA\cdot TB$ 与二次曲线 $AB\cdot MN$ 的四个交点 A，B，M，N，有

AB：$y=0$

$$\left[y-\frac{m}{6}(x+2)\right]\left[y-\frac{m}{2}(x-2)\right]+\mu y(x-ky-n)=\lambda\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-1\right)$$

对比两边 xy 项系数，得 $-\frac{m}{6}-\frac{m}{2}+\mu=0$，对比两边 y 项系数，得 $-\frac{m}{3}+m-\mu n=0$

联立以上两式，解得 $n=1$，故直线 MN 恒过（1，0）.

6.【解析】(1) $\because\triangle F_1PQ$ 的周长是 $4\sqrt{2}$，$\therefore 4a=4\sqrt{2}$，即 $a=\sqrt{2}$，又由离心率是 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $c=1$，

故 $b^2=a^2-c^2=1$，故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

(2) ①设 $l_{A_1P}:x=k_1y-\sqrt{2}$，$l_{A_2Q}:x=k_2y+\sqrt{2}$，$l_{PQ}:x=ky+1$，$l_{A_1A_2}:y=0$

以 A_1PA_2Q 四点曲线系方程为 $[(x-k_1y+\sqrt{2})][(x-k_2y-\sqrt{2})]+uy[x-ky-1]=\lambda(\frac{x^2}{2}+y^2-1)$

xy 的系数为 0，　$-k_1-k_2+u=0$

y 的系数为 0，　$\sqrt{2}k_1-\sqrt{2}k_2-u=0$

$l_{AP}: x=k_1y-\sqrt{2}$，l_{QN}： $x=k_2y+\sqrt{2}$

相加可以得到，$2x=k_1y+k_2y$ ，相减可以得到 $k_1y-k_2y-2\sqrt{2}=0$

联立可得 $x=1$，即点 M 在定直线 $x=1$ 上.

②由直线 $l:x=2$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右准线，F_2 为椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右顶点，故 $\dfrac{|PF_2|}{|PN|}=e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7.【解析】(1) $F_2(1,0)$，$\therefore c=1$，由题目已知条件知 $\begin{cases}a^2=1+b^2\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{\frac{9}{4}}{b^2}=1\end{cases}$，$\therefore a=2,b=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 椭圆的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

(2) 设 $l_{A_1M}: x=k_1y-2$，l_{A_2N}： $x=k_2y+2$，$l_{MN}: y=k(x-4)$，l_{MN}： $y=0$

以 A_1MA_2N 四点曲线系方程为 $[(x-k_1y+2)][(x-k_2y-2)]+uy[y-kx+4k]=\lambda(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}-1)$

xy 的系数为 0， $-k_1-k_2-ku=0$

y 的系数为 0， $2k_1-2k_2+4ku=0$

$l_{A_1M}: x=k_1y-2$，l_{A_2N}： $x=k_2y+2$

相加可以得到，$2x=k_1y+k_2y$ ，相减可以得到 $k_1y-k_2y-4=0$

联立可得 $x=1$，即点 Q 在定直线 $x=1$ 上.

8.【解析】(1)设 $N(x_0,y_0)$，由于 $A(-\sqrt{2},0),B(\sqrt{2},0)$，所以 $k_2\cdot k_3=\dfrac{y_0}{x_0-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y_0}{x_0+\sqrt{2}}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-2}$，因为 $N(x_0,y_0)$ 在椭圆 C 上，于是 $\dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$，即 $x_0^2-2=-2y_0^2$，所以 $k_2\cdot k_3=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-2}=-\dfrac{1}{2}$.

(1) 整体向右平移 $\sqrt{2}$ 个单位，$C^*:\dfrac{(x-\sqrt{2})^2}{2}+y^2=1$ ，设平移后的动直线为 $mx+ny=1$（直线过($\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,0)，代入解得 $m=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$） 展开 C^*，得到 $x^2-2\sqrt{2}x+2+2y^2-2=0$，

$x^2-2\sqrt{2}x(mx+ny)+2y^2=0$ ，∵$x\neq0$，同除 x^2，得到 $1-2\sqrt{2}(m+nk)+2k^2=0$

$2k^2+(1-2\sqrt{2}m)-2\sqrt{2}nk=0$，由韦达定理可知，$k_1\cdot k_3=\dfrac{1-2\sqrt{2}m}{2}=-\dfrac{1}{6}$

(3) 设 $l_{AM}: x=k_1y-\sqrt{2}$，l_{QN}： $x=k_2y+\sqrt{2}$，$l_{MN}: x=ky+t$，l_{MN}： $y=0$

以 $AMBN$ 四点曲线系方程为 $[(x-k_1y+\sqrt{2})][(x-k_2y-\sqrt{2})]+uy[x-ky-t]=\lambda(\dfrac{x^2}{2}+y^2-1)$

xy 的系数为 0， $-k_1-k_2+u=0$

y 的系数为 0， $\sqrt{2}k_1-\sqrt{2}k_2-ut=0$

$l_{AM}: x=k_1y-\sqrt{2}$，l_{QN}： $x=k_2y+\sqrt{2}$

相加可以得到，$2x=k_1y+k_2y$ ，相减可以得到 $k_1y-k_2y-2\sqrt{2}=0$

联立可得 $x=\frac{2}{t}$，即点 Q 在定直线 $x=\frac{2}{t}$ 上.

9.【解析】(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 直线 $AM:y=k_1x+\sqrt{3}$ ， 直线 $BN:y=k_2x-\sqrt{3}$，直线 $AB:y=k\ x+1$，直线 MN： $x=0$

以 A,B， M,N 四点的曲线系方程为：$(k_1x+\sqrt{3}-y)(k_2x-\sqrt{3}-y)+\mu x(kx-y+1)=\lambda(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-1)$

xy 的系数为 0 ： $-k_1-k_2-\mu=0\Rightarrow\mu=-k_1-k_2$

x 的系数为 0 ： $-\sqrt{3}k_1+\sqrt{3}k_2+\mu=0\Rightarrow\mu=\sqrt{3}k_1-\sqrt{3}k_2$

$$\begin{cases}y=k_1x+\sqrt{3}\\ y=k_2x-\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x==\dfrac{2\sqrt{3}}{k_2-k_1}\\ y=\dfrac{k_2+k_1}{2}x=\dfrac{\sqrt{3}(k_2+k_1)}{k_2-k_1}=3\end{cases}$$

10.【解析】(1) 设点 $P(x,y)$，则： $F(2,0)$、$B(3,0)$、$A(-3,0)$. 由 $PF^2-PB^2=4$，得 $(x-2)^2+y^2-[(x-3)^2+y^2]=4$，化简得 $x=\frac{9}{2}$. 故所求点 P 的轨迹为直线 $x=\frac{9}{2}$.

(2) 将 $x_1=2,x_2=\frac{1}{3}$ 分别代入椭圆方程，以及 $y_1>0$， $y_2<0$，得 $M(2,\frac{5}{3})$、$N(\frac{1}{3}, -\frac{20}{9})$

直线 MTA 方程为：$\dfrac{y-0}{\frac{5}{3}-0}=\dfrac{x+3}{2+3}$，即 $y=\frac{1}{3}x+1$，直线 NTB 方程为：$\dfrac{y-0}{-\frac{20}{9}-0}=\dfrac{x-3}{\frac{1}{3}-3}$，

即 $y=\frac{5}{6}x-\frac{5}{2}$. 联立方程组，解得：$\begin{cases}x=7\\ y=\dfrac{10}{3}\end{cases}$，所以点 T 的坐标为 $(7,\frac{10}{3})$.

(3) 设 l_{AM}:$y=k_1(x+3)$ l_{BN}: $y=k_2(x-3)$ l_{MN} : $x=ky+m$

以 A,M,B,N 四点的曲线系方程为

$(y-k_1x-3k_1)(y-k_2x+3k_2)+u(x-ky-m)=\lambda(x^2+\frac{y^2}{2}-1)$

xy 的系数： $-3k_1+3k_2-um=0$

y 的系数：$-k_1-k_2+u=0$

由过点 T 可知， $m=12k_1$ $m=6k_2$

联立解得 $m=1$ ，则直线 MN 必过 x 轴上的一定点 (1,0)

11.【解析】 设 P 的坐标为 (x_p, 0) Q 的坐标为 (x_Q, y_Q)，l_{AC}: $x=k_1y-1$ l_{BD}: $x=k_2y+1$ l_{CD}: $\frac{x}{x_P}+y=1$

以 A,C,B,D 四点的曲线系方程为$(x-k_1y+1)(x-k_2y-1)+uy(\frac{x}{x_P}+y-1)=\lambda\ (x^2+\frac{y^2}{2}-1)$

xy 的系数：$-k_1-k_2+\frac{u}{x_P}=0$，y 的系数：$k_1-k_2-u=0$

联立 l_{AC}: $x=k_1y-1$　　l_{BD}: $x=k_2y+1$

解得（k_1-k_2）$x_Q=k_1+k_2$　　$x_Q=\frac{1}{x_p}$　　则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_p x_Q=1$

12.【解析】(1) 由已知得 $b=1,\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a=2$，所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$．椭圆的右焦点为 $(\sqrt{3},0)$，此时直线 l 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$，代入椭圆方程得，$7x^2-8\sqrt{3}x=0$，解得 $x_1=0,\ x_2=\frac{8\sqrt{3}}{7}$．代入直线 l 的方程得经一部得到 $y_1=1,\ y_2=-\frac{1}{7}$，所以 $D(\frac{8\sqrt{3}}{7},-\frac{1}{7})$．故 $|CD|=\sqrt{(\frac{8\sqrt{3}}{7}-0)^2+(-\frac{1}{7}-1)^2}=\frac{16}{7}$．

（2）设 P 的坐标为（x_p，0）Q 的坐标为（x_Q，y_Q）

l_{AC}: $x=k_1y+2$　　l_{BD}: $x=k_2y-2$　　l_{CD}: $\frac{x}{x_P}+y=1$

以 A,C,B,D 四点的曲线系方程为$(x-k_1y\text{-}2)(x-k_2y+2)+uy(\frac{x}{x_P}+y-1)=\lambda\ (\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-1)$

xy 的系数：$-k_1-k_2+\frac{u}{x_P}=0$

y 的系数：$-2k_1+2k_2-u=0$

联立 l_{AC}: $x=k_1y+2$　　l_{BD}: $x=k_2y-2$

解得（k_1-k_2）$x_Q=-2$（k_1+k_2）　　$x_Q=\frac{4}{x_p}$，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_p x_Q=4$

极点与极线参考答案

1.【解析】由定理 1（2），可知点 $P(-3,4)$ 所对应的极线方程 $-3x+4y=4$，即为直线 AB 的方程，故选 B．

2.【解析】设过点 A 椭圆的另一条与椭圆在 x 轴上方相切于点 C，因为点 $A(4,3)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的准线 $x=4$ 上，故点 $A(4,3)$ 对应的极线 $BC:\frac{4x}{4}+\frac{3y}{3}=1$，即直线 $x+y=1$ 经过右焦点 F，所以直线 BF 的斜率为 -1

3.【解析】由已知得 $-\frac{p}{2}=-2$，则 $p=4$，$F(2,0)$，则抛物线方程为 $y^2=8x$，设过点 A 作直线与抛物线 C 在

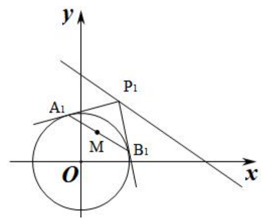
第四象限相切与另一点D，则经过这两个切点的连线BD，就是点A对应的极线，其方程是$3y=(x-2)$，由于点A在抛物线的追线上，则焦点F在点A的极线上，则$k_{BF}=k_{BD}=\dfrac{4}{3}$，故选D.

4.【解析】两切点所在直线即为点$P(1,3)$的极线，其方程为$1\times x+3\times y=9$，即$x+3y=9$.

5.【解析】对于抛物线$C:y^2=4x$，因为点(x_0,y_0)对应的极线恰好是直线$l:y_0y=2(x+x_0)$，根据定理1知，当极点(x_0,y_0) 在在抛物线的内部时，极线与抛物线相离，故选D.

6.【解析】设点P的坐标是$(4-2y_0,y_0)$，则切点弦AB的方程为$(4-2y_0)x+4y_0y=4$，化简得$(4y-2x)y_0=4-4x$,令$4y-2x=4-4x=0$，可得$x=1,y=\dfrac{1}{2}$，故直线AB过定点$\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.

7.【解析】如图过圆内一点$M(x_0,y_0)$作圆的弦A_1B_1，过A_1，B_1作圆的切线交于$P_1(x_1,y_1)$；再过点$M(x_0,y_0)$做圆的弦A_2B_2，过A_2，B_2作圆的切线交于$P_2(x_2,y_2)$，按照相同的方法可得P_3，$P_4,\cdots$.



易知切点A_1B_1所在的直线的方程为$\dfrac{x_1x}{8}+\dfrac{y_1y}{8}=1$，又$A_1B_1$过点$M(x_0,y_0)$，所以$\dfrac{x_1x_0}{8}+\dfrac{y_1y_0}{8}=1$．同理，有$\dfrac{x_2x_0}{8}+\dfrac{y_2y_0}{8}=1$．所以$P_1,P_2$都在直线$\dfrac{x_2x_0}{8}+\dfrac{y_2y_0}{8}=1$上．同理$P_3$，$P_4,\cdots$都在$\dfrac{x_2x_0}{8}+\dfrac{y_2y_0}{8}=1$上．反之，点$P$在直线$l:\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{4}=1$上，对照$\dfrac{x_2x_0}{8}+\dfrac{y_2y_0}{8}=1$，可得弦$AB$必过$(1,2)$，易得圆$O$：$x^2+y^2=8$上，过$(1,2)$的最短的弦长为$2\sqrt{3}$.

8.【解析】设P在(x_0,y_0)，因为点P在直线$l:y=kx-1$上，所以$y_0=kx_0-1$，点P对应的极线就是直线AB，其方程为$y_0+y=x_0x$，由此，得到$kx_0-1+y=x_0x$，即$x_0(x-k)-(y-1)=0$对任意的$x_0\in R$恒成立，故有$\begin{cases}x-k=0\\y-1=0\end{cases}$，由此解得直线$MN$恒过顶点$Q(k,1)$.

9.【解析】点N的轨迹为点$M(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$对应的极线$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$.

10.【解析】(1)设所求圆的半径为r，则圆的方程可设为$(x-2)^2+y^2=r^2$．由题意，所求圆与直线$l:y=x+m$相切于点$P(0,m)$，则有$\begin{cases}4+m^2=r^2\\\dfrac{|2-0+m|}{\sqrt{2}}=r\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=2\\r=2\sqrt{2}\end{cases}$，所以圆的方程为$(x-2)^2+y^2=8$.

（2）由于直线l的方程为$y=x+m$，所以直线l'的方程为$y=-x-m$，由$\begin{cases}y=-x-m\\x^2=4y\end{cases}$消去$y$得到$x^2+4x+4m=0$，$\triangle=4^2-4\times4m=16(1-m)$.

①当$m=1$时，即$\triangle=0$时，直线l'与抛物线$C:x^2=4y$相切；

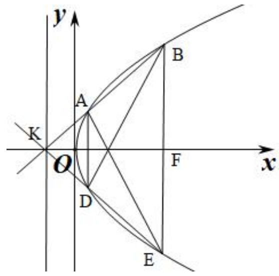
②当$m\neq1$时，即$\triangle\neq0$时，直线l'与抛物线$C:x^2=4y$不相切.

综上，当$m=1$时，直线l'与抛物线$C:x^2=4y$相切；当$m\neq1$时，直线l'与抛物线$C:x^2=4y$不相切.

11.【解析】证法1 设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$D(x_1,-y_1)$，直线l的方程为$x=my-1$（$m\neq0$）．将$x=my-1$代入$y^2=4x$整理得$y^2-4my+4=0$，从而$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=4$．直线BD的方程为$y-y_2=\dfrac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$，

即 $y-y_2=\dfrac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-\dfrac{y_2^2}{4})$，令 $y=0$，得 $x=\dfrac{y_1y_2}{4}=1$，即知点 $F(1,0)$ 在直线 BD 上.

证法 2　如图，注意到在抛物线 $C:y^2=4x$ 中，焦点 $F(1,0)$ 的极线即为准线 $x=-1$，因此点 $K(-1,0)$ 在点 F 的极线上，由定理 2，点 F 也在点 K 的极线上.



作点 B 关于 x 轴的对称点 E．一方面，由于对称性，AE,BD 的交点一定在对称轴 x 轴上；另一方面，由定理 2，点 F 也在点 K 的极线上.

因此，该点即为点 K 的极线与 x 轴的交点，也就是点 F，因此，点 F 在直线 BD

12.【解析】(1) 设点 $P(x,y)$，则：$F(2,0)$、$B(3,0)$、$A(-3,0)$．由 $PF^2-PB^2=4$，

得 $(x-2)^2+y^2-[(x-3)^2+y^2]=4$，化简得 $x=\dfrac{9}{2}$．故所求点 P 的轨迹为直线 $x=\dfrac{9}{2}$.

(2) 将 $x_1=2,x_2=\dfrac{1}{3}$ 分别代入椭圆方程，以及 $y_1>0$，$y_2<0$，得 $M(2,\dfrac{5}{3})$、$N(\dfrac{1}{3}，-\dfrac{20}{9})$

直线 MTA 方程为：$\dfrac{y-0}{\frac{5}{3}-0}=\dfrac{x+3}{2+3}$，即 $y=\dfrac{1}{3}x+1$，直线 NTB 方程为：$\dfrac{y-0}{-\frac{20}{9}-0}=\dfrac{x-3}{\frac{1}{3}-3}$，

即 $y=\dfrac{5}{6}x-\dfrac{5}{2}$．联立方程组，解得：$\begin{cases}x=7\\ y=\dfrac{10}{3}\end{cases}$，所以点 T 的坐标为 $(7,\dfrac{10}{3})$.

(3) 点 T 的坐标为 $(9,m)$．当 $t=9$ 时，点 T 的坐标为 $(9，m)$，连接 MN 交 AB 于点，有极点极线的定义可知，点 T 对应的极线经过点 K，而点 T 的对应的极线方程为 $\dfrac{9\cdot x}{9}+\dfrac{m\cdot y}{5}=1$，该直线即为 MN 与直线 AB（x 轴）交点的轨迹，令 $y=0$，得到 $x=1$，从而直线 MN 比经过 x 轴上的定点 K $(1,0)$．接下来验证 $k_{MD}=k_{ND}$ 即可（略）.

13.【解析】(1) 动点 C 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(x\neq\pm2)$.

(2) 设 $P(x_0,y_0)$，则曲线 C 点 P 处的切线 $PQ:\dfrac{x_0x}{4}+\dfrac{y_0y}{3}=1$，令 $x=4$，得 $Q(4,\dfrac{3-3x_0}{y_0})$，设 $R(t,0)$．则由 $\overrightarrow{RP}\bullet\overrightarrow{RQ}=0$ 得 $(x_0-t)(4-t)+3--3x_0=0$，即 $(1\text{-}t)x_0+t^2-4t+3=0$，由 x_0 的任意性 $1-t=0$ 且 $t^2-4t+3=0$，解得 $t=1$．综上知，以 PQ 为直径的圆过 x 轴上一定点 $(1,0)$.

14.【解析】设点 M 的坐标为 $(m,0)$，注意到点 N 在点 M 对应的极线上，该极线的方程为 $\dfrac{m\bullet x}{a^2}+\dfrac{0\bullet y}{b^2}=1$，即 $x=\dfrac{a^2}{m}$，据此可设点 N 的坐标为 $(\dfrac{a^2}{m},y_N)$，于是 $\overrightarrow{OM}\bullet\overrightarrow{ON}=(m,0)\bullet(\dfrac{a^2}{m},y_N)=a^2$.

15.

【解析】(1) ∵椭圆的焦点在 y 轴上，设椭圆的标准方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由已知得 $b=1$，$c=1$，

所以 $a=\sqrt{2}$，椭圆的方程为 $\dfrac{y^2}{2}+x^2=1$，

当直线 l 与 x 轴垂直时与题意不符，设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，$C(x_1，y_1)$，$D(x_2，y_2)$，

将直线 l 的方程代入椭圆的方程化简得 $(k^2+2)x^2+2kx-1=0$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{2k}{k^2+2}$，$x_1\bullet x_2=-\dfrac{1}{k^2+2}$，

$\therefore|CD|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(-\dfrac{2k}{k^2+2})^2+4\dfrac{1}{k^2+2}}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}(k^2+1)}{k^2+2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$，解得 $k=\pm\sqrt{2}$．$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y=\pm\sqrt{2}x+1$；

（2）对椭圆 $\dfrac{y^2}{2}+x^2=1$，若以点 P 为极点，则其对应的极线过点 Q，设 $P(m,o)$，及其极线方程为 $\dfrac{0\times y}{2}+mx=1$，

即 $x=\dfrac{1}{m}$，故可设点 Q 的坐标为 $(\dfrac{1}{m},y_Q)$，所以 $\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ}=(m,0)\bullet(\dfrac{1}{m},y_Q)=1$，即 $\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OQ}$ 为定值 1．

16.【解析】（1）由抛物线方程得其准线方程为 $y=-\dfrac{p}{2}$，根据抛物线定义，点 $A(m,4)$ 到焦点的距离等于它到准线的距离，即 $4+\dfrac{p}{2}=\dfrac{17}{4}$，解得 $p=\dfrac{1}{2}$，所以，抛物线方程为 $x^2=y$，将 $A(m,4)$ 代入抛物线方程，解得 $m=\pm 2$．

（2）设点 P 的坐标为 (t,t^2)，由题设，直线 PQ 的斜率存在且不为 0，设其为 k，由于直线 PQ 的方程为 $y-t^2=k(x-t)$，令 $y=0$，得 $x=t-\dfrac{t^2}{k}$，则 $M(t-\dfrac{t^2}{k},0)$．因为 MN 和 MO 是 C 的切线，故直线 ON 是点 M 对应的极线，其方程为 $(t-\dfrac{t^2}{k})x=\dfrac{0+y}{2}$，即 $y=2(t-\dfrac{t^2}{k})x$①

另一方面，联立方程 $\begin{cases}y-t^2=k(x-t)\\x^2=y\end{cases}$，整理得 $x^2-kx+t(k-t)=0$，即 $(x-t)[x-(k-t)]=0$，解得 $x=t$，或 $x=k-t$，所以 $Q(k-t,(k-t)^2)$，又 $QN\perp QP$，故直线 NQ 方程为 $y-(k-t)^2=-\dfrac{1}{k}[x-(k-t)]$．

17.【解析】设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，及直线 l 的方程为 $y=kx-p^2$（易知 l 的斜率必存在），

由 $\begin{cases}x^2=2py,\\y=kx-p^2\end{cases}$ 得 $x^2-2kpx+2p^3=0$，所以 $x_1+x_2=2kp$，$x_1x_2=2p^3$，①因为 $k_1k_2=1$，所以 $\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=1$，

即 $x_1x_2=y_1y_2$，又 $y_1y_2=(kx_1-p^2)(kx_2-p^2)$，即 $(k^2-1)x_1x_2-kp^2(x_1+x_2)+p^4=0$，　②

将①带入②，整理得 $p^4-2p^3=0$，又 $p>0$，解得 $p=2$．

注：亦可由 $x_1x_2=y_1y_2=\dfrac{x_1^2}{2p}\cdot\dfrac{x_2^2}{2p}$，得 $x_1x_2=4p^2$，所以 $4p^2=2p^3$，所以 $p=2$．

由于切点弦 T_1T_2 所在的直线为点 $M(0,-p^2)$ 所对应的极线，故其方程为 $0\times x=2p\cdot\dfrac{y-p^2}{2}$，即 $y=p^2$．

设 $N(x_3,x_3)$，因为点 N 为直线 T_1T_2 与弦 AB 的交点，所以 $\begin{cases}y_3=p^2,\\y_3=kx_3-p^2\end{cases}$，所以 $x_3=\dfrac{2p^2}{k}$　③

因为 $\overrightarrow{MA}=\lambda\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{MB}=\mu\overrightarrow{MN}$，显然 $\lambda>0$，$\mu>0$，所以 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{MA}|}+\dfrac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{MB}|}=\dfrac{|x_3|}{|x_1|}+\dfrac{|x_3|}{|x_2|}$，

又 x_1，x_2，x_3 显然同号，所以 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{x_3}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}=x_3\cdot\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$，

由①、③可知，$x_3\cdot\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{2p^2}{k}\cdot\dfrac{2kp}{2p^3}=2$，所以 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=2$，即 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}$ 为定值 2．

18.（1）由题意得$\begin{cases}c^2=2\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\\ c^2=a^2-b^2\end{cases}$，解得$a^2=4,b^2=2$，所求椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$．

（2）解法1：（定比点差法，参考秒1）设点Q,A,B的坐标分别为$(x,y),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$．

由题设知$|\overrightarrow{AP}|,|\overrightarrow{PB}|,|\overrightarrow{AQ}|,|\overrightarrow{QB}|$均不为零，记$\lambda=\dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$,则$\lambda>0$，且$\lambda\neq1$．

又A,P,B,Q四点共线，从而$\overrightarrow{AP}=-\lambda\overrightarrow{PB},\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{QB}$．于是$4=\dfrac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda},1=\dfrac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda},x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$．

从而$\dfrac{x_1^2-\lambda^2x_2^2}{1-\lambda^2}=4x$ ①

$\dfrac{y_1^2-\lambda^2y_2^2}{1-\lambda^2}=y$ ②

又点A,B在椭圆C上，

即 $x_1^2+2y_1^2=4$ ③ $x_2^2+2y_2^2=4$ ④

由①+②×2并结合③，④式，得$4x+2y=4$．即点$Q(x,y)$总在定直线$2x+y-2=0$．

法二：已知$\dfrac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}|}=\dfrac{|\overrightarrow{QB}|}{|\overrightarrow{QA}|}$，说明点$P,Q$关于椭圆调和共轭，根据定理3，点$Q$在点$P$对应的极线上，此极线方程为$\dfrac{4\cdot x}{4}+\dfrac{1\cdot y}{2}=1$，化简得$2x+y-2=0$．故点$Q$总在直线$2x+y-2=0$．

19.【解析】(1)设$N(x_0,y_0)$，由于$A(-\sqrt2,0),B(\sqrt2,0)$，所以$k_2\cdot k_3=\dfrac{y_0}{x_0-\sqrt2}\cdot\dfrac{y_0}{x_0+\sqrt2}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-2}$，因为$N(x_0,y_0)$在椭圆$C$上，于是$\dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$，即$x_0^2-2=-2y_0^2$，所以$k_2\cdot k_3=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-2}=-\dfrac12$．

（2）设直线$MN:x=my+\dfrac{\sqrt2}{2}$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，由$\begin{cases}x=my+\dfrac{\sqrt2}{2}\\ x^2+2y^2=2\end{cases}$得$(m^2+2)y^2+\sqrt2my-\dfrac32=0$，于是

$y_1+y_2=-\dfrac{\sqrt2m}{m^2+2},y_1\cdot y_2=-\dfrac{3}{2(m^2+2)}$，

$$k_1\cdot k_3=\frac{y_1}{x_1+\sqrt2}\cdot\frac{y_2}{x_2+\sqrt2}=\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+\frac{3\sqrt2}{2}m(y_1+y_2)+\frac92}$$

$$=\frac{-\frac{3}{2(m^2+2)}}{-m^2\cdot\frac{3}{2(m^2+2)}-\frac{3\sqrt2}{2}\cdot m\cdot\frac{\sqrt2m}{m^2+2}+\frac92}=\frac{-\frac32}{-\frac32m^2-3m^2+\frac92(m^2+2)}=-\frac16.$$

（3）由于直线MN与x轴的交点为$(t,0)$，于是$MN:x=my+t$，联立直线$MN:x=my+t$与椭圆$C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的方程，可得$(m^2+2)y^2+2mty+t^2-2=0$，于是$y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{m^2+2},y_1\cdot y_2=\dfrac{t^2-2}{m^2+2}$．

因为直线$AM:y=\dfrac{y_1}{x_1+\sqrt2}(x+\sqrt2)$，直线$BN:y=\dfrac{y_2}{x_2-\sqrt2}(x-\sqrt2)$，

两式相除可知，$\dfrac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}=\dfrac{x_1+\sqrt{2}}{x_2-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{my_1+t+\sqrt{2}}{my_2+t-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{my_1y_2+(t+\sqrt{2})y_2}{my_1y_2+(t-\sqrt{2})y_1}$

$$=\frac{m\cdot\dfrac{t^2-2}{m^2+2}+(t+\sqrt{2})(-\dfrac{2mt}{m^2+2}-y_1)}{m\cdot\dfrac{t^2-2}{m^2+2}+(t-\sqrt{2})y_1}=\frac{-m(t+\sqrt{2})^2-(t+\sqrt{2})(m^2+2)y_1}{m(t^2-2)+(t-\sqrt{2})(m^2+2)y_1}$$

$$=\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\cdot\frac{-m(t+\sqrt{2})-(m^2+2)y_1}{m(t+\sqrt{2})+(m^2+2)y_1}=\frac{t+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-t},$$

于是 $xt=2$，所以 $x=\dfrac{2}{t}$，即直线 AM 与直线 BN 的交点 Q 落在定直线 $x=\dfrac{2}{t}$ 上.

注　根据极点、极线定义，AM 与直线 BN 的交点 Q 落在点 $(t,0)$ 对应的极线上，此极线的方程 $\dfrac{tx}{2}+0\cdot y=1$，即点 Q 在定直线 $x=\dfrac{2}{t}$ 上.

20.【解析】设 $M(x_0,y_0)$，则 $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$，对于圆 $x^2+y^2=b^2$，点 M 所对应的极线为直线 PQ，其方程是 $x_0x+y_0y=b^2$，其中 $x_0y_0\neq0$，得到 $E(\dfrac{b^2}{x_0},0),F(0,\dfrac{b^2}{y_0})$，则 $S_{EOF}=\dfrac{1}{2}|OE|\cdot|OF|=\dfrac{b^4}{2|x_0y_0|}$．又由基本不等式得 $a^2b^2=b^2x_0^2+a^2y_0^2\geq2ab|x_0y_0|$，当且仅当 $b^2x_0^2=a^2y_0^2=\dfrac{a^2b^2}{2}$ 时取等号，则 $S_{EOF}=\dfrac{b^4}{2|x_0y_0|}\geq\dfrac{b^4}{2}\cdot\dfrac{2ab}{a^2b^2}=\dfrac{b^3}{a}$．即 EOF 面积最小值为 $\dfrac{b^3}{a}$．

抛物线切线方程及性质答案

1. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$　2. A　3. B　4. D　5. $y=x-1$　6. 3　7. 3　8. 3　9. D　10. A　11. B　12. D

阿基米德三角形与焦点弦

1. A　2. D　3. B　4. ①③　5. D　6. 4　7. $-4k^2-4k^4$

8. 【提示】由定理可知 $yy_P=6(x+x_P)$，代入 P 点坐标可知 $k_{AB}=3$．

9.【提示】(1) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB 中点 N，$\therefore x_M=x_N=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$\therefore A$，$M$，$B$ 横坐标成等差

(2) 设 $AB:y=kx+1$ 由定理可知 $M(pk,-m)$，即 $M(2k,-1)$．$\therefore k_{MF}=\dfrac{2}{-2k}=-\dfrac{1}{k}$

$\therefore|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4(k^2+1)$，同理 $|CD|=4\left(\dfrac{1}{k^2}+1\right)$

$\therefore S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}|AB||CD|=8\left(\dfrac{1}{k^2}+1\right)(k^2+1)\geq32$

10.【提示】(1) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $k_{PA}=\dfrac{x_1}{p}=\dfrac{x_1}{2}$，$k_{PB}=\dfrac{x_2}{2}$，$\therefore k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{x_1x_2}{4}=-1$

$\therefore x_1x_2=-4=-2pm$，$\therefore m=1$，由定理 $P(pk,-m)$，$\therefore y_P=-1$，$\therefore P$ 轨迹方程 $y=-1$

(2) $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=-2-\dfrac{x_1^2+x_2^2}{4}$，$(\overrightarrow{FP})^2=\dfrac{(x_1+x_2)^2}{4}+4=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{4}+2$，　$\therefore\lambda=1$．

11.【提示】(1) $x^2=4y$ (2) AB 过定点 $F(0,1)$，即 $AB:y=kx+1$，由定理 $M(pk,-m)$ 可知 $M(pk,-1)$．

所以 M 轨迹 $y=-1$.

12.【提示】(1) 过 P 的切线 $y-1=k(x-4)$， $\therefore\begin{cases}y-1=k(x-4)\\ y=x^2\end{cases}\Rightarrow x^2-kx+4k-1=0$，$\because\Delta=0$

$\therefore k^2-16k+4=0$，$\therefore k_1+k_2=16$.

(2) 焦点 $(0,\frac{1}{4})$， 设 $MN:y=kx+m$， $m=\frac{1}{4}$，由定理：$P(pk,-m)$，$\therefore P(k,-\frac{1}{4})$

又 $\because$ P 在 l 上 $\therefore k=\frac{3}{2}$　$\therefore P(\frac{3}{2},-\frac{1}{4})$

13.【提示】(1) 由定理可知 $\begin{cases}y=x+2\\ y=ax^2\end{cases}\Rightarrow ax^2-x-2=0$

(2) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 M 是 AB 中点，$\therefore|MN|=\frac{1}{2}|AB|$，由 $MN\perp x$ 轴

$\therefore|MN|=\left|\frac{1}{2a}+2-\frac{1}{4a}\right|=\frac{1}{4a}+2$， $|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{8}{a}}$

由 $|MN|=\frac{1}{2}|AB|$，得 $a=\frac{7}{8}$，所以 $a=\frac{7}{8}$ 时，$NA\perp NB$ 成立.

专题 7　抛物线切线与阿基米得三角形

阿基米德三角形的极点极线性质：

1. $\sqrt{2}$　　2. $\frac{5}{3}$

3.【提示】由定理可知，C 在 N 处的导数与 AB 的斜率相等，即抛物线 C 在点 N 处的切线与 AB 平行

4.【提示】设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 由题意可知 AB 中点的横坐标为 $\frac{x_1+x_2}{2}$，由定理可知，M 点横坐标与 AB 中点的横坐标相等，所以 A，M，B 三点的横坐标成等差数列.

5.【提示】(1) $PQ:2x+y-6=0$

(2) 将坐标系上移 3 个单位，得过动点 $A'(a,-3)$ 向 $y=x^2$ 引切线 $A'P'$， $A'Q'$，切点为 P'， Q'

由定理 1，易知 $P'Q':ax=\frac{1}{2}(y-3)$，$\therefore$ 直线 PQ 定点 $(0,6)$.

6.【提示】(1) $y=\frac{1}{4}x^2(x\neq 0)$，由定理可知 $x_M=x_P$，$\therefore PM//y$ 轴或与 y 轴重合.

(2) 设 $AB:y=kx+m$，由定理 $P(pk,-m)$，即 $P(2k,-m)$，$\therefore -m=2\times 2k-5\Rightarrow l_{AB}:y=kx-4k+5$

$\therefore AB$ 过定点 $(4,5)$

7.【提示】(1). 略

(2) 由 M 为 AB 的中点，则由定理 1 可知抛物线 C 在点 N 处的切线与直线 AB 平行

（3）联立$\begin{cases} y=2x^2 \\ y=kx+2 \end{cases} \Rightarrow 2x^2-kx-2=0$ $x_1+x_2=\dfrac{k}{2},x_1x_2=-1$，$\therefore N\left(\dfrac{k}{4},\dfrac{k^2}{8}\right)$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$，代入韦达定理可得$k=\pm 2$

8.【提示】(1) $y^2=2x$

(2)设$N(x_0,y_0)$，由定理可知$l_{AB}:y_0y=x+x_0$ 又$\because y_0=x_0+1$ AB过定点$(1,1)$，则当原点O到直线AB的距离最大时，$l_{AB}:y=-x+2$此时易得，$S_{\triangle OAB}=2\sqrt{5}$.

9.【提示】（1） $k=\dfrac{y_0}{p}=1,y_0=2$，　∴（1，2）

(2) 假设AB的方程为$y=kx+m$ 由定理得：$M(pk,-m)$,又因为M在直线l上，所以$-m=2k+4$

$\therefore m=-2k-4$,$\therefore$ $y=kx-2k-4$,所以直线l过$(2,-4)$.

10.【提示】(1) $x^2=2y$

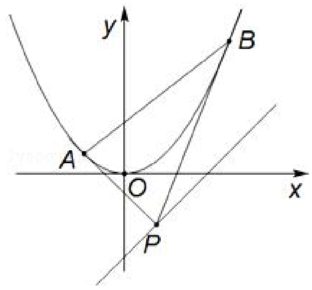
（2）设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，　$l_{MN}:y=kx+m$，联立$\begin{cases} x^2=2y \\ y=kx+1 \end{cases} \Rightarrow x^2-2kx-2=0$

由题意可知$x_1x_2+y_1y_2=-1$，即$x_1x_2+\dfrac{1}{4}(x_1x_2)^2=-1$，$\therefore x_1x_2=-2=-2pm$ $\therefore m=1$，所以MN过定点$(0,1)$

由定理可知，得$S_{\triangle PMN}=\dfrac{|x_1-x_2|^3}{8p}=\dfrac{\left(\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\right)^3}{8}=\dfrac{\left(\sqrt{4k^2+8}\right)^3}{8}\le 2\sqrt{2}$.

11.【提示】（1）假设直线AB方程为$y=kx+m$由定理可知：$P(\dfrac{1}{2}k,-m)$

又因为P在直线l上∴$-m=\dfrac{1}{2}k-1$ ∴ $y=kx-\dfrac{1}{2}k+1$ ∴（$\dfrac{1}{2}$,1）



（2）联立$\begin{cases} y=kx-\dfrac{1}{2}k+1 \\ x^2=y \end{cases}$　　∴ $x^2-kx+\dfrac{1}{2}k-1=0$

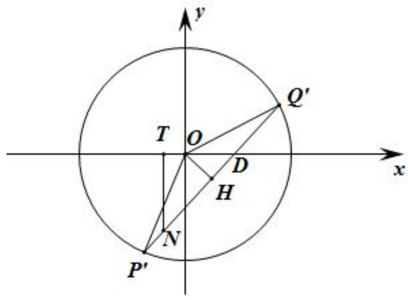
$S_{\triangle PAB}=\dfrac{|x_1-x_2|^3}{8p}=\dfrac{1}{4}|x_1-x_2|^3=\dfrac{\left(\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\right)^3}{4}=\dfrac{\left(\sqrt{k^2-2k+4}\right)^3}{4}$

12.【提示】（1） $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，∴ $x^2=-2y$

（2)(i)由定理设AB：$y=kx+b$，$m(pk,-m)$，即$m(-k,-m)$，由M在直线上,，∴ $-2k+4m+3=0$．$\therefore m=\dfrac{1}{2}k-\dfrac{3}{4}$，

$\therefore AB$： $y=kx+\dfrac{1}{2}k-\dfrac{3}{4}$，过定点$(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{4})$.

(ii)作仿射变换$\begin{cases}x'=x\\y'=2y\end{cases}$, $A\to A', B\to B'$



则 $A'B'$ 过定点 $N(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$,过 N 作 $NT\perp x$ 轴于 T, $OH\perp P'Q'$ 于 H

设 l' 与 x 轴交于 D, 令 $\angle TND$ 为 θ, 则 $OH=\dfrac{3\sin\theta-\cos\theta}{2}$

$$P'Q'=2\sqrt{4-(OH)^2}\le\sqrt{|OH|^2\left(4-|OH|^2\right)}\le 2$$

$|OH|^2=2$ 时取等号, 此时 $\tan\theta=7$ 或-1

$\therefore k=\frac{1}{2}k'=\frac{1}{2}\cot\theta=\frac{1}{14}$ 或 $\frac{1}{2}$

$l_{AB}: x+2y+2=0$ 或 $x-14y-10=0$

13.【提示】(1) $l_{AB}: y-1=k(x-1)$, 令 $x=0$, $y=1-k$, 焦点 $F(0,\frac{1}{4})$, $-k>\frac{1}{4}\longrightarrow 0<k<\frac{3}{4}$

(2) 由定理, $l_{BD}: xx_B=\frac{1}{2}(y+y_B)$, $l_{CD}: xx_C=\frac{1}{2}(y+y_C)$, $\therefore k_{BD}=2x_B \quad k_{CD}=2x_L$

由$\begin{cases}y-1=k(x-1)\\y=x^2\end{cases}$, $\Rightarrow x^2-kx+k-1=0$, 由韦达定理得: $1\cdot x_B=k-1$, 同理 $x_C=-\frac{1}{k}-1$

若四边形 $ABDC$ 为梯形, 则 $k_{BD}=k_{AC}$ 或 $k_{AB}=k_{CD}$, 此时方程无解$\therefore ABDC$ 不能为梯形.

14.【提示】设 AB: $y=kx+m$,由定理可知 $m(\frac{1}{2}k,-m)$,$\because$圆与直线相切, $\therefore d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$

$m^2=1+k^2=1+4(1+\frac{1}{2}k)^2\ge1$, $\therefore m^2-4(\frac{1}{2}k)^2=1$, 即: M 轨迹 $y^2-4x=1$,又因为 $m^2\ge1$,

$\begin{cases}y=kx+m\\y=x^2\end{cases}\Rightarrow x^2-kx-m=0, \Delta>0$, 所以 $m<-2-\sqrt{5}$ 或 $m\ge1$, 即 $y\le-1$ 或 $y>2+\sqrt{5}$

M 轨迹 $y^2-4x=1$ ($y\le-1$ 或 $y>2+\sqrt{5}$, $x\in R$).

阿基米德三角形面积问题:

1. B 2. D 3. B 4. C

5.【提示】(1) $p=\frac{1}{2}$, $F(0,\frac{1}{4})$

(2) 由定理得, 直线 PA 的斜率为 $k_1=2x_1$, 直线 PB 的斜率为 $k_2=2x_2$, $\therefore k_1\cdot k_2=4x_1\cdot x_2=-1$, 即得 $PA\perp PB$.

6.【提示】(1) 设 $E(t,0)$ $t\ne0$, $C(0,m)$, $\because \overrightarrow{EA}=\lambda_1\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{EB}=\lambda_2\overrightarrow{EC}$, $\therefore\begin{cases}(x_1-t,y_1)=\lambda_1(-t,m)\\(x_2-t,y_2)=\lambda_2(-t,m)\end{cases}$,

解得$\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{t-x_1}{t}\\ \lambda_2=\dfrac{t-x_2}{t}\end{cases}$，设直线$l$的斜率为$k$，方程为$y=k(x-t)$，由$\begin{cases}y=k(x-t)\\ x^2=4y\end{cases}$得$x^2-4kx+4kt=0$，

当$\Delta=16k^2-16kt>0$时，设$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=4kt$，

$\therefore \lambda_1\lambda_2=\dfrac{t^2-(x_1+x_2)t+x_1x_2}{t^2}=\dfrac{t^2-4kt+4kt}{t^2}=1$.

（2）$x^2=4y$　　$l_{AB}:y=k(x-4)$，由定理$M(pk,-m)$ $\therefore M(2k,4k)$，所以M在$y=2x$上.

7.【提示】（1）$x^2=4y$　，设直线AB方程为：$y=kx+m$所以$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$

$x_1x_2+\dfrac{1}{16}{x_1}^2{x_2}^2=0$，$\therefore x_1x_2=-16=-2pm$，$\therefore m=4$，直线$AB$过定点（4，0）.

（2）联立由$x_1+x_2=2pk$　$x_1x_2=-16$，由定理可知：$S=\dfrac{|x_1-x_2|^2}{8p}=\dfrac{\left(\sqrt{(4k^2+64)}\right)^3}{16}\geq 32$.

7.【提示】（1）$x^2=4y$　；设直线AB方程为：$y=kx+m$，所以$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$

$x_1x_2+\dfrac{1}{16}{x_1}^2{x_2}^2=0$，$\therefore x_1x_2=-16=-2pm$，$\therefore m=4$，直线$AB$过定点（4，0）

（2）联立由$x_1+x_2=2pk$　$x_1x_2=-16$，由定理可知：$S=\dfrac{|x_1-x_2|^2}{8p}=\dfrac{\left(\sqrt{(4k^2+64)}\right)^3}{16}\geq 32$

8.【提示】（1）$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$

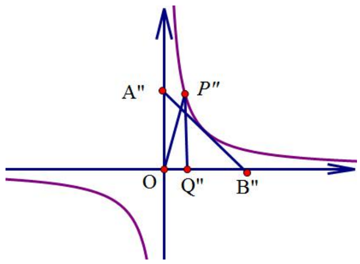
（2）$y^2=\dfrac{1}{2}x$，$\therefore\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\ y^2=\dfrac{1}{2}x\end{cases}\Rightarrow Q\left(1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，由定理可知切线方程为：$yy_0=\dfrac{1}{4}(x+x_0)$

即$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x+1)$，$\therefore x=0,y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$y=0,x=-1$，$\therefore S=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

9.（1）因为抛物线的焦点到准线的距离为2，所以$p=2$，所以所求抛物线C的方程为$x^2=4y$；设$A(x_0,y_0)$，$B(x_1,y_1)$，则$|AF|=y_0+1=2$，即$y_0=1$，同理$y_1=1$，代入抛物线方程可得$A(2,1),B(-2,1)$.

（2）由推论2知$\lambda=\dfrac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle DEH}}$=2为定值.

专题 8 双曲线的仿射与旋转



1.【解析】如图，$\dfrac{x^2}{9}-y^2=1\Rightarrow x'^2-y'^2=9\Rightarrow x''y''=\dfrac{9}{2}$，$|OA|=|OB|=3\sqrt{2}$，$S_{OA''B''}=9$ ， 设 P 在 x 轴的射影为 Q ,则

$S_{OP''Q''}=\dfrac{xy}{2}=\dfrac{9}{4}\Rightarrow\dfrac{a|OA''|\cdot b|OB''|}{2}=\dfrac{9}{4}\Rightarrow ab=\dfrac{1}{4}\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，选 C.

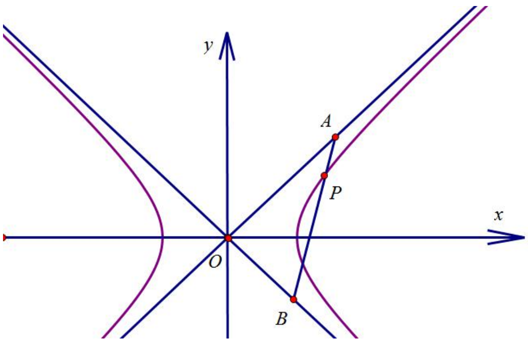
另解：根据图形可知，$\overline{OP''}=a\overline{OA''}+b\overline{OB''}$，根据向量的等和线知识，当 P'' 在 $A\ B$ 中点时 $a+b=1$，当 P'' 位于双曲线其它任何位置时，$a+b>1$ 选 C

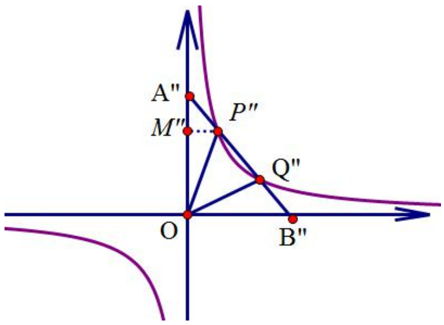
2.【解析】根据双曲线仿射定理可知，MN 中点一定为切点，$S_{\Delta MON}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta M''ON''}=\dfrac{a^2}{2}=2$，选 D.

3.【解析】如图，经过仿射和旋转后，设 $A''B''$ 与双曲线的另一个交点为 Q''，过 P'' 作

$P\ M\ \perp OA''$,则$|A\ M\ |=\dfrac{1}{2}|OM\ |$ $S_{\Delta A''OB''}=3S_{\Delta A''OP''}=\dfrac{9}{2}S_{\Delta M''OP''}=\dfrac{9}{4}k=\dfrac{9}{8}a^2$，又

$S_{\Delta AOB}=\dfrac{b}{a}S_{\Delta A''OB''}=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{9}{8}a^2=2b\Rightarrow a=\dfrac{16}{9}$，故 $2a=\dfrac{32}{9}$，选 A.





4.【解析】因为 $\vec{e}_1=(2,1)$、$\vec{e}_2=(2,-1)$ 是渐近线方向向量，所以双曲线渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$，

又 $c=\sqrt{5}$，$\therefore a=2$，$b=1$ 双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$，作仿射和旋转后，$\vec{e}_1''=(0,2\sqrt{2})$ $\vec{e}_2''=(2\sqrt{2},0)$，

设 P 在 x 轴的射影为 Q ,则 $S_{OP''Q''}=\dfrac{xy}{2}=1\Rightarrow\dfrac{a|e_1''|\cdot b|e_2''|}{2}=1\Rightarrow ab=\dfrac{1}{4}$.

5.【解析】根据仿射原理，$\angle AOB$ 始终小于一条渐近线 OM 到另一条 ON 的之间的角，$\overline{OA}$ $\overline{OB}$ 0 $MON>90$ ，则 $e>\sqrt{2}$.

6.【解析】(1) 双曲线的渐近线：$y=\pm\dfrac{1}{2}$，设 $P(x,y)$，则 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$，即 $\dfrac{x^2-4y^2}{4}=1$. 则 $x^2-4y^2=4$，

P 到两条渐近线的距离乘积 $\dfrac{|x-2y|}{\sqrt{5}}\bullet\dfrac{|x+2y|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|x^2-4y^2|}{5}=\dfrac{4}{5}$ 为常数.

(2) 设 $P(x,y)$，则 $\dfrac{x^2}{4}-1=y^2$，则 $|PA|=\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{\dfrac{5}{4}x^2-6x+8}=\sqrt{\dfrac{5}{4}(x-\dfrac{12}{5})^2+\dfrac{4}{5}}$

当 $x=\dfrac{12}{5}$ 时，PA 的最小值为 $\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

7.【解析】(1) 由题意可得 $2c=2\sqrt{5}$，即 $c=\sqrt{5}$，即有 $a^2+b^2=5$，又点 $P(2\sqrt{5}$，$2)$ 在双曲线上，

可得$\frac{20}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$，解得$a=2$，$b=1$，即有双曲线的方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$；

（2）作$\begin{cases}x'=x\\y'=2y\end{cases}\Rightarrow x^{2}-y^{2}=4$，再将双曲线沿逆时针旋转45°得：$x\ y\ =2$；$M"N"$与双曲线切于点

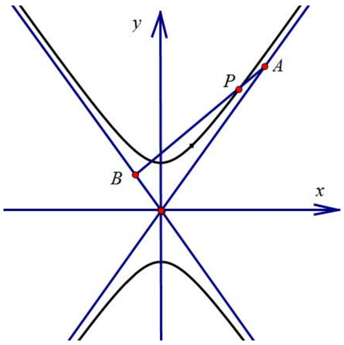
$Q\ \ x_0,\frac{2}{x_0}$，令$f(x)=\frac{2}{x}$，则$k_{M"N"}=f'(x_0)-\frac{2}{x_0{}^2}$，故$M"N"$方程为$y-\frac{2}{x_0}=-\frac{2}{x_0{}^2}(x-x_0)$，

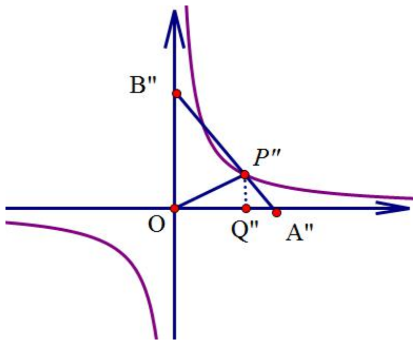
$\therefore|OM"|=2x_0,|ON"|=\frac{4}{x_0}$，

$\therefore S_{\Delta OM"N"}=\frac{|OM"||ON"|}{2}=4,\therefore S_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}S_{\Delta OM"N"}=2=\frac{1}{2}|OM||ON|\sin\ \ MON\ \ \ \frac{1}{2}\overrightarrow{OM}\ \ \overrightarrow{ON}\tan\ \ MON$，令渐近线的倾斜角为$\theta\ \ \frac{\pi}{2}>\theta>0$，$\tan\angle MON=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{4}{3}$，故$\overrightarrow{OM}\bullet\overrightarrow{ON}$的值为定值3.

8.【解析】（1）由题意知，双曲线C的顶点(O,a)到渐近线$ax-by=0$的距离为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,即$\frac{ab}{c}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，由$\begin{cases}\frac{ab}{c}\cdot\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=1\\c^2=a^2+b^2\end{cases}$，得$\begin{cases}a=2\\b=1\\c=\sqrt{5}\end{cases}$ $\therefore$双曲线C的方程为$\frac{y^2}{4}-x^2=1$.





（2）由（1）知双曲线C的两条渐近线方程为$y=\pm 2x$．作$\begin{cases}x'=2x\\y'=y\end{cases}\Rightarrow y^{2}-x^{2}=4$，再将双曲线沿顺时针旋转45°得$x\ y\ =2$，设$P"\ \ x_0,\frac{2}{x_0}\ \ ,Q"(x_0,0),\overrightarrow{A\ P"}=\lambda\overrightarrow{P\ B}\ ,\therefore\overrightarrow{OP"}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA"}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB"}$,故$\left|\overrightarrow{OA"}\right|=x_0(1+\lambda)$，

$\left|\overrightarrow{OB"}\right|=\frac{2(1+\lambda)}{\lambda x_0}\ S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}S_{\Delta OA"B"}=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{OA"}\right|\left|\overrightarrow{OB"}\right|=\frac{1}{4}x_0(1+\lambda)\frac{2(1+\lambda)}{\lambda x_0}=\frac{1}{2}\ \ \lambda+\frac{1}{\lambda}+2$

$\lambda\in[\frac{1}{3},2]$，根据基本不等式和对勾函数性质得$\lambda=1$，$S_{\min}=2$，$S(\frac{1}{3})=\frac{8}{3}$，$S(2)=\frac{9}{4}$，当$\lambda=1$时，$\Delta AOB$的面积取得最小值2，当$\lambda=\frac{1}{3}$时，$\Delta AOB$的面积取得最大值$\frac{8}{3}$．$\therefore\Delta AOB$面积的取值范围是$[2,\frac{8}{3}]$.

9.【解析】（1） 双曲线$x^2-y^2=\frac{27}{4}$的焦点在x轴上， 所以①不是双曲线c的方程，双曲线$xy=9$不经过点$(3,\frac{3}{2})$，所以②不是双曲线C的方程，所以③$xy=\frac{9}{2}$是等轴双曲线C的方程，等轴双曲线$xy=\frac{9}{2}$的焦点F_1、F_2在直线$y=x$上，所以双曲线的顶点也在直线$y=x$上，联立方程$\begin{cases}xy=\frac{9}{2}\\y=x\end{cases}$，解得双曲线$xy=\frac{9}{2}$的两顶点

坐标为 $(\frac{3\sqrt{2}}{2}，\frac{3\sqrt{2}}{2})(-\frac{3\sqrt{2}}{2}，-\frac{3\sqrt{2}}{2})$，所以双曲线 $xy=\frac{9}{2}$ 的实轴长为 6

（2） 所求问题即为： 在双曲线 $xy=\frac{9}{2}$ 求一点 P，使 $|PA|+|PB|$ 最小 ．首先， 点 P 应该选择在等轴双曲线的 $xy=\frac{9}{2}$ 中第一象限的那一支上等轴双曲线的 $xy=\frac{9}{2}$ 的长轴长为 6 ，所以其焦距为 $6\sqrt{2}$

又因为双曲线的两个焦点 F_1、F_2 在直线 $y=x$ 上，线段 F_1F_2 的中点是原点， 所以 $A(3,3)$ 是 $xy=\frac{9}{2}$ 的一个焦点，设双曲线的另一个焦点为 $F_2(-3,-3)$，由双曲线的定义知：$|PA|=|PF_2|-6$

所以 $|PA|+|PB|=(|PF_2|-6+|PB|)$，要求 $|PA|+|PB|$ 的最小值， 只需求 $|PF_2|+|PB|$ 的最小值

直线 BF_2 的方程为 $3x-4y-3=0$，所以直线 BF_2 与双曲线 $xy=\frac{9}{2}$ 在第一象限的交点为 $(3,\frac{3}{2})$

所以码头应在建点 $P(3,\frac{3}{2})$ 处， 才能使修建两条公路的总费用最低

（3）① $f(-x)=\frac{\sqrt{3}}{3}(-x)+\frac{1}{-x}=-(\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{x})=-f(x)$，此双曲线是中心对称图形， 对称中心是原点 $(0,0)$；

②渐近线是 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 和 $x=0$． 当 $x>0$ 时，当 x 无限增大时，$\frac{1}{x}$ 无限趋近于 0 ，$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{x}$ 与 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 无限趋近；当 y 无限增大时，x 无限趋近于 0 ．③双曲线的对称轴是 $y=\sqrt{3}x$ 和 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$．

④实轴在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上， 实轴长为 $2\sqrt[4]{12}$，虚轴在直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$，虚轴长为 $2\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$

⑤焦点坐标为 $((\sqrt[4]{\frac{4}{3}},\sqrt[4]{12}),(-\sqrt[4]{\frac{4}{3}},-\sqrt[4]{12}))$，焦距 $2\sqrt[4]{\frac{64}{3}}$．

专题 9　平移坐标系构造齐次式

1.【提示】（1） $k_{AB}=\frac{x_1+x_2}{2p}=1$；

（2）由阿基米德三角形定理可知，$M(2,1)$，所以将抛物线按 $\overrightarrow{MO}$ 方向平移即可．由 $k_{AM}\cdot k_{BM}=-1$ 即可求得直线 AB 方程为 $x-y+7=0$．

2.【提示】（1） $\frac{3x^2}{4}+3y^2=1$；

（2）由题意可知， $\frac{x^2}{2}+y^2=1$．将椭圆按 $\overrightarrow{F_1O}$ 方向平移，$k_{OP'}\cdot k_{OQ'}=k_{F_1P}\cdot k_{F_1Q}=-1$ 即可求得直线方程为 $x+\sqrt{7}y-1=0$ 或 $x-\sqrt{7}y-1=0$．

3.【提示】（1） $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（2）将椭圆按 $\overrightarrow{PO}$ 方向平移，设 $A'B'$ 方程为 $mx+ny=1$， 可得 $k_1'+k_2'=-\frac{3n+6m}{2+6n}$， 由直线过定点可求得

$n=-\frac{2}{3}$，将 M' 横坐标代入直线 $A'B'$ 求出纵坐标即可表示出 k_3，此时可求得 $\lambda=2$.

4.【提示】(1) $\sqrt{a}x+y+a=0$ 或 $\sqrt{a}x-y-a=0$；

(2) 假设 P 点坐标为 $(0,t)$，将椭圆按照 $\overrightarrow{PO}$ 方向平移，令 $k_1'+k_2'=k_{PM}+k_{PN}=0$，即可求得 $P(0,-a)$ 符合题意.

5.【提示】(1) $x^2=2y$；

(2) 将椭圆按 $\overrightarrow{CO}$ 方向平移，求得 k_1k_2 的表达式，由平移后直线方程为 $mx+ny=1$ 可知，$k=-\frac{m}{n}$，所以即可求得 $k_1k_2+k^2=-4$.

6.【提示】(1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

(2) 设直线 AB 方程为 $mx+ny=1$，由直线过 $(-1,0)$ 可知，$m=-1$，构造齐次式，由 $k_{OA}\cdot k_{OB}=\frac{1}{4}$ 可知，$n=\pm2$，所以直线 l 斜率 $k=\pm\frac{1}{2}$，所以直线方程为 $x+2y+1=0$ 或 $x-2y+1=0$.

第五章导数

专题 1 函数的切线问题

选择题答案

1—5：$DBABA$ 6—10：$ABDAA$ 11—15 $DDAAC$ $16-20:ABDDD$ 21—25：$BBCCC$
26—27：AD

填空题答案

28：$-2<a<\frac{1}{4}$ 29：$13x-y-15=0$ 30：$\frac{\pi^2}{4}$ 31：$n\cdot 2^{n+1}$ 32：-4 33：$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$

34：$\frac{56}{27}$ 35：$x-y-2=0$ 或 $5x+4y-1=0$ 36：0 37：$\frac{n}{n+1}$ 38：$\frac{1}{e}$ 39：$x+ey+1=0$

40：$\frac{1}{4}$ 41：$\frac{1}{10}$ 42：-1 43：$\frac{\sqrt{10}}{2}$ 44：$\frac{1}{30}$

专题 2 指数切线放缩

1.【解析】函数 $f(x)=e^{x-1}-ax\ge x-ax=0$，解得 $x=1$，$a=1$．故选 A．

2.【解析】$\because$ 函数 $f(x)=x^3-ke^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore f'(x)=3x^2-ke^x\leqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

$e^{\frac{x}{2}}\ge e\cdot(\frac{x}{2})\Rightarrow e^x\ge\frac{e^2}{4}x^2\Rightarrow k\ge\frac{12}{e^2}$．故选 C.

3.【解析】法一：设直线 l 与曲线 $C_1:y=e^x$ 的切点为 (x_1,e^{x_1})，与曲线 $C_2:y=\frac{1}{4}e^2x^2$ 的切点为 $(x_2,\frac{1}{4}e^2{x_2}^2)$，

由 $y=e^x$，得 $y'|_{x=x_1}=e^{x_1}$，由 $y=\frac{1}{4}e^2x^2$，得 $y'|_{x=x_2}=\frac{1}{2}e^2x_2$，$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y-e^{x_1}=e^{x_1}(x-x_1)$，或

$y-\frac{1}{4}e^2{x_2}^2=\frac{1}{2}e^2x_2(x-x_2)$，则 $\begin{cases}e^{x_1}=\frac{1}{2}e^2x_2\\ e^{x_1}-x_1e^{x_1}=\frac{1}{4}e^2{x_2}^2-\frac{1}{2}e^2{x_2}^2\end{cases}$，解得 $x_1=x_2=2$．$\therefore$ 直线 l 的方程为：

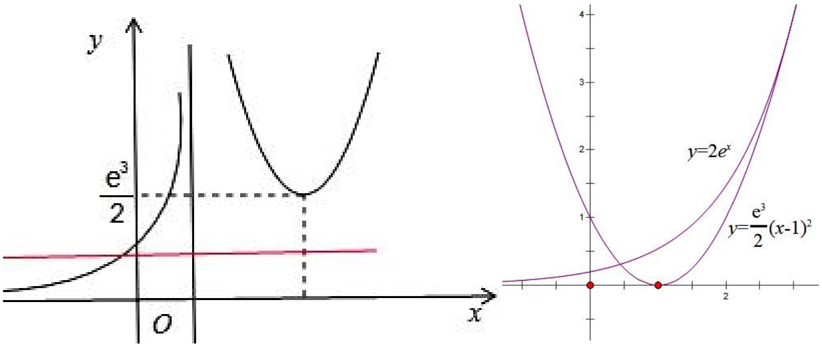
$y-e^2=e^2(x-2)$，取 $y=0$，可得 $x=1$．$\therefore$ 直线 l 在 x 轴上的截距为 1．故选：B．

法二：根据 $e^{\frac{x}{2}}\ge e(\frac{x}{2})\Rightarrow e^2\ge\frac{e^2}{4}x^2$，切点为 $(2，e^2)$，$\therefore$ 直线 l 的方程为：$y-e^2=e^2(x-2)$，取 $y=0$，可得 $x=1$．$\therefore$ 直线 l 在 x 轴上的截距为 1．故选 B．

4.【解析】法一：$f(x)=2e^x-a(x-1)^2=0$，$x=1$ 时不成立，$x\ne 1$ 时，化为：$a=\frac{2e^x}{(x-1)^2}=g(x)(x\ne 1)$．

$g'(x)=\frac{2e^x(x-3)}{(x-1)^3}$．可得：$x<1$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增；$1<x<3$ 时，$g'(x)<0$ 时，函数 $g(x)$ 单调递减；$x>3$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增．画出图象．g（3）$=\frac{e^3}{2}$．可得：当且仅当 $0<a<\frac{e^3}{2}$ 时，

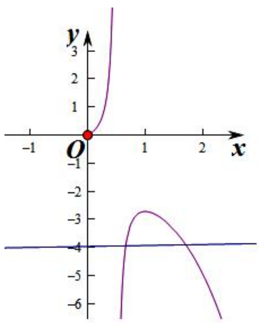
函数 $y=a$ 与函数 $y=g(x)$ 由且仅有一个交点．即函数 $f(x)=2e^x-a(x-1)^2$ 有且只有一个零点，则实数 a 的取值范围是 $(0,\dfrac{e^3}{2})$．故选：C．



法二：$f(x)=2e^x-a(x-1)^2=0$，根据 $e^x\geq\dfrac{e^2}{4}x^2$ 可得 $e^{x-1}\geq\dfrac{e^2}{4}(x-1)^2$，故 $2e^x=2e\cdot e^{x-1}\geq\dfrac{e^3}{2}(x-1)^2$，$\therefore a=\dfrac{e^3}{2}$ 时，$y=2e^x$ 与 $y=a(x-1)^2$ 相切，画出图形，如上右图所示，显然 $a<0$ 无交点，当 $a\geq\dfrac{e^3}{2}$ 有两个交点，当且仅当 $0<a<\dfrac{e^3}{2}$ 时，$y=2e^x$ 与 $y=a(x-1)^2$ 仅有一个交点，则实数 a 的取值范围是 $(0,\dfrac{e^3}{2})$．故选：C．

5．【解析】函数的导数 $f'(x)=e^x-\dfrac{m+1}{x}+2(m+1)$，$x>0$ 因为函数 $f(x)$ 恰有两个极值点，所以函数 $f(x)$ 有两个不同的零点．令 $f'(x)=e^x-\dfrac{m+1}{x}+2(m+1)=0$，得 $\dfrac{xe^x}{1-2x}=m+1$ 有两个不同的实数根，

法一：记：$h(x)=\dfrac{xe^x}{1-2x}$，所以 $h'(x)=\dfrac{(xe^x)'(1-2x)-xe^x(1-2x)'}{(1-2x)^2}=\dfrac{e^x(2x+1)(x-1)}{(1-2x)^2}$，当 $x\in(0,\dfrac{1}{2})$ 时，$h'(x)>0$，此时函数 $h(x)$ 在此区间上递增，当 $x\in(\dfrac{1}{2}$，1) 时，$h'(x)>0$，此时函数 $h(x)$ 在此区间上递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，此时函数 $h(x)$ 在此区间上递减，即当 $x=1$ 时，$h(x)$ 取得极大值 h（1）$=-e$．作出 $h(x)$ 的简图如下：要使得 $h(x)=m+1$ 有两个不同的实数根，则 $m+1<-e$，即 $m<-e-1$．故选 D．



法二：$\dfrac{xe^x}{1-2x}=m+1$ 有两个不同的实数根，即 $e^{x-1}=-\dfrac{m+1}{e}(2-\dfrac{1}{x})$ 有两个交点，故 $-\dfrac{m+1}{e}>1$，即 $m<-e-1$．故选：D．

6．【解析】（1）函数的导数 $f'(x)=e^x-2x$，函数在在点 $x=0$ 处的切线斜率 $k=f'(0)=e^0-2\times0=1$，

$f(0)=1+a$，则过切点$(0,1+a)$的切线方程为$y-(1+a)=x$，即$y=x+1+a$，$\because$在点$x=0$处的切线为$y=bx$，

$\therefore b=1$，$1+a=0$，即$a=-1$，则$f(x)=e^x-x^2-1$；

（2）证明：设$g(x)=f(x)-(-x^2+x)=e^x-x^2-1-(-x^2+x)=e^x-x-1$，函数的导数$g'(x)=e^x-1$，

由$g'(x)>0$得$x>0$，此时函数$g(x)$为增函数，由$g'(x)<0$得$x<0$，此时函数$g(x)$为减j函数

即当$x=0$时，函数$g(x)$取得极小值同时也是最小值$g(0)=e^0-0-1=1-1=0$，则$g(x)\geqslant g(0)=0$，

即$f(x)-(-x^2+x)\geqslant 0$，即$f(x)\geqslant -x^2+x$恒成立.

7.【解析】(1) 根据题意，$f(x)=ae^x-2x^2$，其导数$f'(x)=ae^x-4x$，当$a=1$时，f（2）$=e^2-8$，f'（2）$=e^2-8$，所以$f(x)$在$x=2$处的切线方程为$y-(e^2-8)=(e^2-8)(x-2)$，即$y=(e^2-8)(x-1)$，

（2）(指数找基友) 根据题意，若函数$f(x)$为R上的单调递增函数，则$f'(x)=ae^x-4x\geqslant 0$恒成立，即$a\geqslant \dfrac{4x}{e^x}$恒成立，则有$a\geqslant g(x)_{max}$，令$g(x)=\dfrac{4x}{e^x}$，则$g'(x)=\dfrac{4(1-x)}{e^x}$，当$x>1$时，$g'(x)<0$；当$x<1$时，$g'(x)>0$，

$\therefore g(x)_{max}=g(1)=\dfrac{4}{e}$，$\therefore a$的取值范围是$a\geqslant \dfrac{4}{e}$.

8.【解析】(1) 当$a=0$时，$f(x)=e^x$，当$x=0$时，$e^0>0$显然成立；当$x>0$时，$e^x>x^2\Leftarrow \dfrac{x^2}{e^x}<1$；

令$F(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$，$x>0$，则$F'(x)=\dfrac{(2x-x^2)}{e^x}$，可得$x\in(0,2)$，$F'(x)>0$，$F(x)$增；$x\in(2,+\infty)$，$F'(x)<0$，$F(x)$减；故$x>0$时，$F(x)\le F(2)=\dfrac{4}{e^2}<1$，综上，任意$x\in[0，+\infty)$都有$f(x)>x^2$，得证.

（2）法一：函数定义域为R，令$g(x)=f'(x)=e^x-2a(x-1)$，若$f(x)$有两个极值点，则$g(x)$有两个变号零点，且$g'(x)=e^x-2a$，当$a\leqslant 0$时，$g'(x)>0$在R上恒成立，函数$g(x)$在R上单增，$g(x)$至多有一个零点，此时$f(x)$不存在两个极值点；当$a>0$时，令$g'(x)=0$，可得$x=ln(2a)$，且$g'(x)>0\Rightarrow x>ln(2a)$，$g'(x)<0\Rightarrow x<ln(2a)$，即函数$g(x)$在$(-\infty，ln(2a))$单减，在$(ln(2a)，+\infty)$单增，若条件成立，则必有$g(x)_{min}=g(ln(2a))=2a-2a(ln(2a)-1)<0$，此时$a>\dfrac{e^2}{2}$，综上，函数$f(x)$有两个极值点时，$a\in(\dfrac{e^2}{2},+\infty)$.

法二：函数定义域为R，令$g(x)=f'(x)=e^x-2a(x-1)$，若$f(x)$有两个极值点，则$g(x)$有两个变号零点，

构造函数$g(x)=e^x-ex$，显然$g(x)\geq 0$恒成立，当仅当$x=1$时等号成立，要使$e^x>2a(x-1)$恒成立，很明显$a<0$不合题意，$e\cdot e^{x-1}>2a(x-1)\Rightarrow e^{x-1}>\dfrac{2a}{e}(x-1)$，当仅当$x=2$取得相切等号，若$\dfrac{2a}{e}>e$，即$a\in(\dfrac{e^2}{2},+\infty)$，函数$f(x)$有两个极值点.

9.【解析】（1）函数 $f(x)=ax^2-e^x$ 的导数为 $f'(x)=2ax-e^x$，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 y 轴垂直，

可得 $2a-e=0$，即 $a=\frac{1}{2}e$，可得 $f'(x)=ex-e^x$，设 $g(x)=ex-e^x$，$g'(x)=e-e^x$，可得 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 递减，$g(x)$ 的最大值即 $f'(x)$ 的最大值为 g（1）$=0$；

（3）证明：设 $h(x)=\frac{e^x}{x}$，可得 $h'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，$1<a\leqslant\frac{e}{2}$ 时，则 $1\in(0,a)$，令 $h'(x)>0$，可得 $1<x<a$；$h'(x)<0$，可得 $0<x<1$，则 $h(x)$ 的最小值为 h（1）$=e$，又 $2a\in(2,\ e]$，则 $2a\leqslant\frac{e^x}{x}$，即 $2ax-e^x\leqslant0$，

即 $f'(x)\leqslant0$，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 上是递减函数，则命题得证．

10.【解析】（1）函数的导数 $f'(x)=e^x-2x$，函数在在点 $x=0$ 处的切线斜率 $k=f'(0)=e^0-2\times0=1$，

$f(0)=1+a$，则过切点 $(0,1+a)$ 的切线方程为 $y-(1+a)=x$，即 $y=x+1+a$，

$\because$ 在点 $x=0$ 处的切线为 $y=bx$，$\therefore b=1$，$1+a=0$，即 $a=-1$，则 $f(x)=e^x-x^2-1$；

（2）证明：设 $g(x)=f(x)-(-x^2+x)=e^x-x^2-1-(-x^2+x)=e^x-x-1$，函数的导数 $g'(x)=e^x-1$，

由 $g'(x)>0$ 得 $x>0$，此时函数 $g(x)$ 为增函数，由 $g'(x)<0$ 得 $x<0$，此时函数 $g(x)$ 为减 j 函数

即当 $x=0$ 时，函数 $g(x)$ 取得极小值同时也是最小值 $g(0)=e^0-0-1=1-1=0$，则 $g(x)\geqslant g(0)=0$，

即 $f(x)-(-x^2+x)\geqslant0$，即 $f(x)\geqslant-x^2+x$ 恒成立．

11.【解析】(1)证明：当 $a=0$ 时．$f(x)=e^x-x$．　令 $g(x)=f(x)-x=e^x-x-x=e^x-2x$．则 $g'(x)=e^x-2$．令 $g'(x)=0$．得 $x=ln2$．　当 $x<ln2$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>ln2$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ ln\ 2)$ 内是减函数．在 $(ln2,+\infty)$ 内是增函数，所以 $x=ln2$ 是 $g(x)$ 的极小值点，也是最小值，

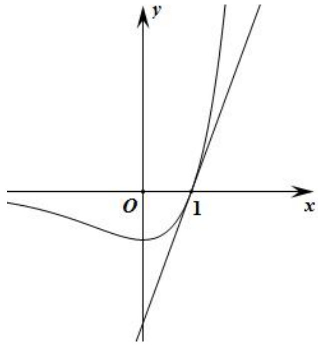
即 $g(x)_{min}=g(ln2)=e^{ln2}-2ln2=2ln\frac{e}{2}>0$．故当 $a=0$ 时，$f(x)>x$ 成立

（2）$f'(x)=e^x-1$，由 $f'(x)=0$．得 $x=0$．当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，在 $(0,\ +\infty)$ 内是增函数，所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值同时也是最小值点，　即 $f(x)_{min}=f(0)=1-a$，当 $1-a>0$，即 $a<1$ 时，$f(x)$ 在 R 上没有零点，当 $1-a=0$，即 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 R 上只有 1 个零点，当 $1-a<0$，即 $a>1$ 时，因为 $f(-a)=e^{-a}-(-a)-a=e^{-a}>0$．所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内只有一个零点，由（1）得 $e^x>2x$，令 $x=a$，则得 $e^a>2a$．所以 f（a）$=e^a-a-a=e^a-2a>0$．于是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有一个零点；因此．当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 R 上有两个零点．综上当 $a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在 R 上没有零点，当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 在 R 上有一个零点；当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 在 R 上有两个零点．

12.【解析】(1) $\because$ 函数 $f(x)=(x-1)e^{x}$． $\therefore f'(x)=e^{x}+(x-1)e^{x}=xe^{x}$，由 $f'(x)=xe^{x}=0$ 时，$x=0$，

由 $f'(x)>0$，得 $x>0$，$\therefore f(x)$ 的增区间为 $[0，+\infty)$，当 $f'(x)<0$ 时，$x<0$，$\therefore f(x)$ 的减区间为 $(-\infty，0]$，

由 $f(x)=(x-1)e^{x}=0$，得 $x=1$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的零点是 $x=1$．



(2) $\because f(x)\geqslant ax-e$ 恒成立，即 $y=f(x)$ 的图象恒不在 $y=ax-e$ 的图象下方，

当它们相切时，设切点 $(x_0，y_0)$，$\therefore x_0e^{x_0}=a$，且 $a=\dfrac{(x_0-1)e^{x_0}+e}{x_0}$，联立解

得 $x_0=1$，$\therefore a=e$，由图可知 $0\leqslant a\leqslant 1$，a 的取值范围 $[0，1]$

13.【解析】(1) 由 $f(x)=e^{x}+ax+b$，得 $f'(x)=e^{x}+a$，由 $f'(0)=1+a=2$，解得 $a=1$．由 $f(0)=1+b=1$，

解得 $b=0$． $\therefore f(x)=e^{x}+x$．

(2) 法一：当 $x>0$ 时，$e^{x}+x\geqslant x^{2}+mx+1$，即 $m\leqslant\dfrac{e^{x}}{x}-x-\dfrac{1}{x}+1$．令 $h(x)=\dfrac{e^{x}}{x}-x-\dfrac{1}{x}+1(x>0)$，

则 $h'(x)=\dfrac{e^{x}(x-1)-x^{2}+1}{x^{2}}=\dfrac{(x-1)(e^{x}-x-1)}{x^{2}}$．令 $t(x)=e^{x}-x-1(x>0)$，则 $t'(x)=e^{x}-1>0$．

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$t(x)$ 单调递增，$t(x)>t(0)=0$．则当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增．$\therefore h(x)_{min}=h$（1）$=e-1$，$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $(-\infty，e-1]$．

法二：构造函数 $h(x)=\dfrac{ex+(x-1)^{2}}{e^{x}}$，求导可得 $h'(x)=\dfrac{-(x-1)(x+e-3)}{e^{x}}$，易知 $h(x)_{\max}=h(1)=1$，故

$e^{x}\geq ex+(x-1)^{2}$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成 $\therefore e^{x}+x\geq ex+x+(x-1)^{2}=x^{2}+(e-1)x+1\geq x^{2}+mx+1$，即 $m\leq e-1$．

14.【解析】(1) 设切点为 $P(x_0，y_0)$，$f'(x)=e^{x}-x$，$\therefore f'(x_0)=e^{x_0}-x_0=1$，$e^{x_0}-\dfrac{1}{2}x_0^{2}-1=x_0+a$，解得 $x_0=0$，

$a=0$．

法一：(洛必达法则之隐零点护航) 构造 $g(x)=e^{x}-\dfrac{1}{2}x^{2}-bx-1$，$g(0)=0$，$g'(x)=e^{x}-x-b$，$g'(0)=1-b$，

$g''(x)=e^{x}-1$，$g''(0)=0$，且 $x\geq 0$ 时，$g'(x)$ 单调递增，

①显然当 $g'(0)=1-b\geq 0$，即 $g'(x)\geq g(0)\geq 0$ 恒成立，故 $g(x)=e^{x}-\dfrac{1}{2}x^{2}-bx-1$ 在区间 $[0,+\infty)$ 单调递增，且

$g(x)\geq g(0)=0$ 恒成立，故 $b\leq 1$ 时 $f(x)\geqslant bx$ 恒成立；

②当 $b>1$ 时，$g'(0)=1-b<0$，故 $\exists x_0\in[0,+\infty)$，使 $g'(x_0)=e^{x_0}-x_0-b=0$，由于 $x\geq 0$ 时，$g'(x)$ 单调递增，

故当 $x\in[0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)=e^{x}-\dfrac{1}{2}x^{2}-bx-1$ 在区间 $[0，x_0)$ 单调递减，$g(x)<g(0)=0$ 成立，与题

意矛盾，故不成立；综上可得：$b\leqslant 1$．

法二:（切线放缩）注意：直接用第一问结论显然不严谨，首先只是知道在（0,1）处的切线，但没有说明这个函数的单调性，所以需要证明，这里不做详细说明；

15.【解析】(I) 由 $a=0$，得 $f(x)=(x-3)e^x$，所以 $f'(x)=(x-2)e^x$，由 $f'(x)<0$ 得 $x<2$，由 $f'(x)>0$ 得 $x>2$，所以，函数 $f(x)$ 的单调增区间是 $(2,+\infty)$；单调减区间是 $(-\infty,2)$．

（II）法一：$f(x)=(x-3)[e^x+a(x-3)]$，易得函数 $f(x)$ 有一个零点 $x=3$．令 $g(x)=e^x+a(x-3)$．

（1）若 $a=0$，则 $g(x)=e^x>0$，$g(x)$ 无零点，所以函数 $f(x)$ 只有一个零点；

（2）若 $a\neq 0$，则 $g'(x)=e^x+a$，

①当 $a>0$ 时，有 $g'(x)>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，而 $g(-\frac{1}{a})=e^{-\frac{1}{a}}=3a=1<0$，$g$（3）$=e^3>0$，此时函数 $g(x)$ 在 $(-\frac{1}{a},3)$ 内有一个零点，所以 $f(x)$ 有两个零点．

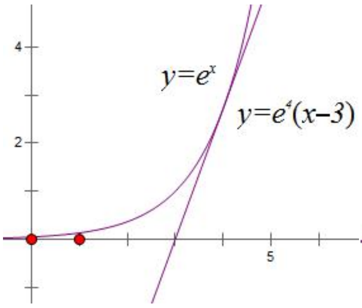
②当 $a<0$ 时，由 $g'(x)=e^x+a=0$，得 $x=ln(-a)$，所以函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty$，$ln(-a))$ 单调递减，在区间 $(ln(-a)$，$+\infty)$ 单调递增，所以函数 $g(x)_{min}=g(ln(-a))=a[ln(-a)-4]$．

（i）当 $ln(-a)-4<0$，即 $-e^4<a<0$ 时，$g(x)_{min}=g(ln(-a))=a[ln(-a)-4]>0$，此时函数 $g(x)$ 在其定义域内无零点，所以函数 $f(x)$ 只有一个零点．

（ii）当 $ln(-a)-4=0$，即 $a=-e^4<0$，此时函数 $g(x)$ 有一个零点为 4，所以函数 $f(x)$ 有两个零点．

（iii）当 $ln(-a)-4>0$，即 $a<-e^4$ 时，$g(x)_{min}<0$，此时函数 $g(x)$ 有两个零点，因为 g（3）$\neq 0$，所以这两个零点均不为 3．所以函数 $f(x)$ 有三个零点．综上述，当 $a=0$ 或 $-e^4<a<0$ 时，函数 $f(x)$ 只有一个零点；当 $a>0$ 或 $a=-e^4$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点；当 $a<-e^4$ 时，函数 $f(x)$ 有三个零点．

法二：$f(x)=(x-3)[e^x+a(x-3)]$，易得函数 $f(x)$ 有一个零点 $x=3$．令 $g(x)=e^x+a(x-3)$．构造函数 $h(x)=e^x-ex$，易证 $h(x)\geq 0$ 恒成立，当仅当 $x=1$ 时等号成立，故 $e^x=e^3\cdot e^{x-3}\geq e^4(x-3)$，当仅当 $x=4$ 时等号成立，$\therefore a=-e^4$ 时，$g(x)=e^x+a(x-3)$ 有一个零点，如图 1；当 $a>0$ 时，显然 $e^x=-a(x-3)$ 一定有一个交点，如图 2；当 $a<-e^4$ 时，$g(x)=e^x+a(x-3)$ 有两个零点，如图 3；当 $0>a>-e^4$，如图 4，$g(x)=e^x+a(x-3)$ 无零点，或者当 $a=0$ 时，无零点；综上述，当 $a=0$ 或 $-e^4<a<0$ 时，函数 $f(x)$ 只有一个零点；当 $a>0$ 或 $a=-e^4$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点；当 $a<-e^4$ 时，函数 $f(x)$ 有三个零点．



15 题图 1

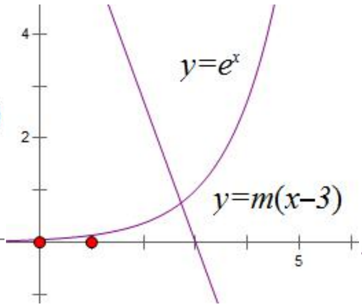


图 2

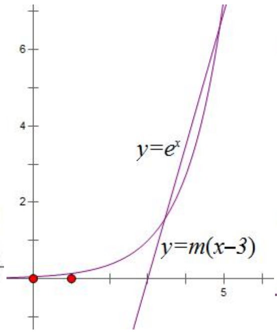


图 3

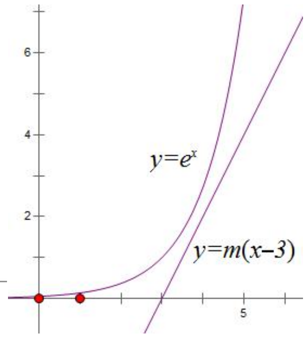


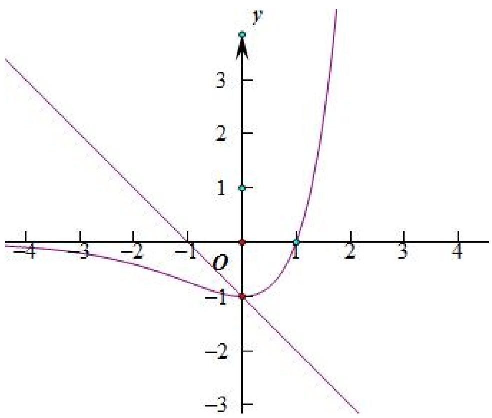
图 4

16.（1）【解析】 $f'(x)=e^x-a$， $a\leqslant 0$ 时， $f'(x)>0$，此时，函数 $f(x)$ 单调递增，无极值． $a>0$ 时，令 $f'(x)=e^x-a=0$，解得 $x_0=lna$．可得：$x_0=lna$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值，$f(x_0)=e^{x_0}-ax_0+2=a-alna+2$．

（2）法一：证明：$f(x)\leqslant g(x)$，即 $e^x-ax+2\leqslant xe^x+3$． $x=0$ 时，成立． $x>0$ 时，化为：$a\geqslant\dfrac{e^x-1-xe^x}{x}=h(x)$，

$h'(x)=\dfrac{-x^2e^x-e^x+1+xe^x}{x^2}$，令 $u(x)=-x^2e^x-e^x+1+xe^x$． $u(0)=0$．

$u'(x)=-2xe^x-x^2e^x-e^x+e^x+xe^x=-xe^x-x^2e^x<0$， $\therefore u(x)<u(0)=0$． $\therefore h'(x)<0$， $\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减． $\therefore$ 利用洛必达法则： $h(0)=\dfrac{e^x-e^x-xe^x}{1}|_{x=0}=0$， $\therefore a\geqslant 0$．



法二：（切线放缩） $f(x)\le g(x)\Leftrightarrow e^x-ax+2\le xe^x+3$，即 $-ax-1\le e^x(x-1)$，令 $g(x)=-ax-1(x\ge 0)$， $h(x)=e^x(x-1)$， $h'(x)=xe^x\ge 0$，$h'(x)=0\Rightarrow x=0$，所以 $h(x)_{\min}=-1$ 画出 $g(x)$ 和 $h(x)$ 图像如图所示，当 $x\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$ 恒成立即 $g(x)$ 图像必须在 $h(x)$ 下方， $h(x)=e^x(x-1)$ 在 $x=0$ 时取得极值 $h(0)=-1$，而此时 $g(x)=-ax-1$ 取得极值 -1 时斜率 $-a=0$，所以 $-a\le 0$， $a\ge 0$．

17.【解析】（1） $f(x)=e^x-x^2+2a+b$， $f'(x)=e^x-2x$，由题意得 $\begin{cases}f(0)=1+2a+b=0\\f'(0)=1=b\end{cases}$，即 $a=-1$， $b=1$；

（2）证明：由（I）可知， $f(x)=e^x-x^2-1$．令 $\varphi(x)=f(x)+x^2-x=e^x-x-1$， $\varphi'(x)=e^x-1$，

由 $\varphi'(x)=0$，得 $x=0$．当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $\varphi'(x)<0$， $\varphi(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $\varphi'(x)>0$， $\varphi(x)$ 单调递增． $\therefore\varphi(x)$ 的最小值为 $\varphi(0)=0$，从而 $f(x)\geqslant -x^2+x$；

（3） $f(x)>kx$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，等价于 $\dfrac{f(x)}{x}>k$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立．

令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$， $x>0$． $\therefore g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{x(e^x-2x)-(e^x-x^2-1)}{x^2}=\dfrac{(x-1)(e^x-x-1)}{x^2}$．

由（II）可知，当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $e^x-x-1>0$ 恒成立，令 $g'(x)>0$，得 $x>1$， $g'(x)<0$，得 $0<x<1$，

$\therefore g(x)$ 的单调增区间为 $(1,+\infty)$，单调减区间为 $(0,1)$， $g(x)_{min}=g$ （1） $=e-2$． $\therefore k<e-2$．即实数 k 的取值范围为 $(-\infty,e-2)$．

18.【解析】（1） $\because f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}\ \therefore f'(x)=\dfrac{-x}{e^x}$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减，所以当 $x=0$ 时，函数 $f(x)$ 存在极大值 $f(0)=1$，无极小值；

（2）法一：令 $h(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{x+1}{e^x}+ax^2-1$， $h'(x)=-\dfrac{x}{e^x}+2ax=2ax\bullet\dfrac{e^x-\frac{1}{2a}}{e^x}$

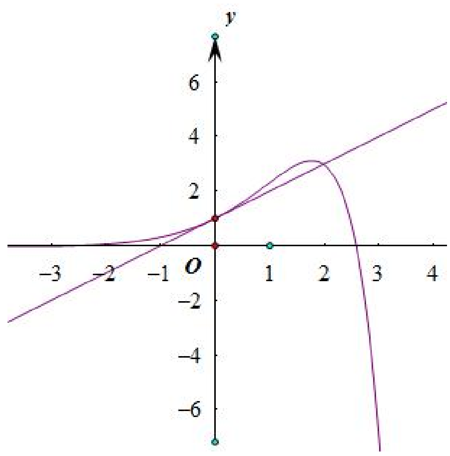
$\because 0<a<\dfrac{1}{2}$， $\therefore \dfrac{1}{2a}>1$，即 $ln\dfrac{1}{2a}>0$，令 $h'(x)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=ln\dfrac{1}{2a}$

当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $h'(x)>0$， $h(x)$ 单调递增；当 $x\in(0,ln\dfrac{1}{2a})$ 时， $h'(x)<0$， $h(x)$ 单调递减；

当时 $x\in(ln\dfrac{1}{2a},+\infty)$， $h'(x)>0$， $h(x)$ 单调递增，又 $h(0)=0$， $h(ln\dfrac{1}{2a})<h(0)=0$，

$h(\dfrac{1}{\sqrt{a}})=\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{a}}}{e^{\frac{1}{\sqrt{a}}}}+a(\dfrac{1}{\sqrt{a}})^2-1=\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{a}}}{e^{\frac{1}{\sqrt{a}}}}>0(ln\dfrac{1}{2a}<\dfrac{1}{\sqrt{a}})$，函数 $h(x)$ 在 R 上连续，所以 $h(x)$ 有一个零点 0，且在 $(ln\dfrac{1}{2a},\dfrac{1}{\sqrt{a}})$ 上有一个零点，即函数 $h(x)$ 有两个零点 $\therefore$ 当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，方程 $f(x)=g(x)$ 的实根个数为 2 个；

法二： $f(x)=g(x)$ 即 $\dfrac{x+1}{e^x}=1-ax^2\Leftrightarrow x+1=\left(1-ax^2\right)e^x$，令 $g\left(x\right)=x+1$， $h\left(x\right)=\left(1-ax^2\right)e^x$ （ $0<a<\dfrac{1}{2}$ ），则 $f(x)=g(x)$ 的实根个数等价于两函数图像交点个数， $h'\left(x\right)=\left(-ax^2-2ax+1\right)e^x$，令 $H\left(x\right)=-ax^2-2ax+1$， $\Delta=4a^2+4a>0$，又对称轴 $x=-1$ 且过 $(0，1)$ 所以 $H\left(x\right)$ 一定存在一个负根 x_1 和一个正根 x_2，当 $x<0$， $h\left(x\right)\to 0$ 此时两函数图像交点个数为零；当 $x=0$， $g\left(0\right)=h\left(0\right)=1$，一交点；



当 $x>0$，由于 $h\left(x\right)$ 在 $x\in\left(0，x_2\right)\uparrow$， $x\in\left(x_2，+\infty\right)\downarrow$，所以两函数图像必定存在一个交点．综上，方程 $f(x)=g(x)$ 的实根个数为 2.

（3）由（2）知，即证：当 $a\geqslant1$ 时，对于任意实数 $x\in[-1,\ +\infty)$，不等式 $h(x)\geqslant0$ 恒成立.

①在 $x\geqslant0$ 时，$\because a\geqslant1\ \therefore\ 0<\dfrac{1}{2a}\leqslant\dfrac{1}{2}$，又 $x\geqslant0$，$e^x\geqslant1$ 得：$h'(x)\geqslant0$，$\therefore h(x)$ 为在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，故 $h(x)\geqslant h(0)=0$；

②在 $-1\leqslant x\leqslant0$ 时，由于 $a\geqslant1$，所以 $ax^2-1\geqslant x^2-1$ 要证明 $h(x)\geqslant0$ 成立，即证 $\dfrac{x+1}{e^x}+x^2-1\geqslant0$，

也即证 $(x+1)[\dfrac{1}{e^x}+x-1]\geqslant0$，由于 $x+1\geqslant0$，只需证 $\dfrac{1}{e^x}+x-1\geqslant0$.

不妨令 $m(x)=\dfrac{1}{e^x}+x-1$，$m'(x)=1-\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{e^x-1}{e^x}$. 由 $-1\leqslant x\leqslant0$，得 $m'(x)\leqslant0$ 且不恒为 0，

所以 $m(x)$ 在区间 $[-1,\ 0]$ 上单调递减，$m(x)\geqslant m(0)=0$，从而 $\dfrac{1}{e^x}+x-1\geqslant0$ 得证.

综上，当 $a\geqslant1$ 时，对于任意实数 $x\in[-1,\ +\infty)$，$h(x)\geqslant0$ 恒成立，即不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立.

19.【解析】(1) $f'(x)=e^x-m$，①若 $m\leqslant0$，则 $f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 无极值，

②若 $m>0$，当 $x>lnm$ 时，$f'(x)>0$，当 $x<lnm$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,lnm)$ 单调递减，在 $(lnm,+\infty)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(lnm)$，由 $m-m(lnm+1)+1=1$，解得 $m=1$.

（3）令 $g(x)=e^x-m(x+1)+1+\dfrac{m}{2}ln(x+1)(x\geqslant0)$，$g'(x)=e^x-m+\dfrac{m}{2(x+1)}$，令 $h(x)=e^x-m+\dfrac{m}{2(x+1)}$，

$h'(x)=\dfrac{2(x+1)^2e^x-m}{2(x+1)^2}$，令 $p(x)=2(x+1)^2e^x-m$，显然 $p(x)$ 在 $[0,\ +\infty)$ 单调递增，$\therefore p(x)\geqslant p(0)=2-m$.

①当 $m\leqslant2$ 时，$p(x)\geqslant0$，$\therefore h'(x)\geqslant0$，$\therefore h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，$\therefore h(x)\geqslant h(0)=1-\dfrac{m}{2}\geqslant0$，即 $g'(x)\geqslant0$，$\therefore g(x)$ 在 $[0,\ +\infty)$ 单调递增，所以 $g(x)\geqslant g(0)=2-m\geqslant0$，此时符合题意；

②当 $m>2$ 时，$p(0)<0$，$\therefore\exists x_0\in(0,+\infty)$，使 $p(x_0)=0$，故 $p(x)$ 在 $(0,x_0)$ 恒为负值，$h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，

此时 $h(x)<h(0)=1-\dfrac{m}{2}<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，所以 $g(x)<g(0)=2-m<0$，此时不符合题意，

故所求 m 的取值范围为 $(-\infty,\ 2]$.

法二：令 $g(x)=e^x-m(x+1)+1+\dfrac{m}{2}ln(x+1)(x\geqslant0)$，$g(0)=2-m\geq0$，则必须有 $m\leq2$，$g'(x)=e^x-m+\dfrac{m}{2(x+1)}$，

构造函数 $h(x)=e^{x-1}-2+\dfrac{1}{x}$，显然 $e^{x-1}-x+x+\dfrac{1}{x}-2\geq0$，当仅当 $x=1$ 时等号成立，故 $e^x\geq2-\dfrac{1}{x+1}$，当 $x=0$ 时取等，当 $m\leq2$ 时，$\dfrac{m}{2}(2-\dfrac{1}{x+1})\leq2-\dfrac{1}{x+1}$（$x>-1$），显然 $g'(x)=e^x-m+\dfrac{m}{2(x+1)}\geq0$，故 $g(x)\geq g(0)$ 恒成立，即所求 m 的取值范围为 $(-\infty,\ 2]$.

20.【解析】(1) 根据题意，$f(x)=x(e^{2x}-a)$，$y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，设切点的坐标为 $(x_1,\ y_1)$，

则 $f'(x)=(e^{2x}-a)+2xe^{2x}=(2x+1)e^{2x}-a$，又由 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，切点为 (x_1,y_1)，则 $f'(x_1)=2$，

则有$\begin{cases} y_1 = 2x_1 \\ y_1 = x_1e^{2x_1} - ax_1 \\ (2x_1+1)e^{2x_1} - a = 2 \end{cases}$，解可得 $a=-1$；

（1）法一：根据题意，$f(x)=x(e^{2x}-a)$，则 $f(x) \geqslant 1+x+lnx$，即 $x(e^{2x}-a) \geqslant 1+x+lnx$，变形可得 $xe^{2x}-(1+lnx) \geqslant (a+1)x$，又由 $x>0$，所以 $a+1 \leqslant e^{2x}-\dfrac{1+lnx}{x}$，设 $g(x)=e^{2x}-\dfrac{1+lnx}{x}$，

其导数 $g'(x)=2e^{2x}+\dfrac{lnx}{x^2}=\dfrac{2x^2e^{2x}+lnx}{x^2}$，设 $h(x)=2x^2e^{2x}+lnx$，其导数 $h'(x)=4xe^{2x}(x+1)+\dfrac{1}{x}>0$，则函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；又由 $h(\dfrac{1}{e})<0$，h（1）>0，则存在 $x_0 \in (\dfrac{1}{e}，1)$，满足 $h(x_0)=0$，即 $2x_0^2e^{2x_0}+lnx_0=0$，故 $g(x)_{min}=g(x_0)=e^{2x_0}-\dfrac{1+lnx_0}{x_0}$，若 $a+1 \leqslant e^{2x}-\dfrac{1+lnx}{x}$，必有 $a+1 \leqslant g(x_0)$，令 $t=x_0^2e^{2x_0}$，变形可得 $2x_0+2lnx_0=lnt$，由 $2x_0^2e^{2x_0}+lnx_0=0$，变形可得 $2t+lnx_0=0$，则有 $2x_0+lnx_0=2t+lnt$，设 $F(x)=2x+lnx$，分析易得 $F(x)=2x+lnx$ 为增函数，则有 $x_0=t$，则 $g(x_0)=e^{2x_0}-\dfrac{1+lnx_0}{x_0}=2$，必有 $a+1 \leqslant 1$，解可得 $a \leqslant 1$，故 a 的取值范围为 $(-\infty，1]$．

法二：$x(e^{2x}-a) \geqslant 1+x+lnx$，变形可得 $xe^{2x}-(1+lnx) \geqslant (a+1)x$，即 $e^{2x+\ln x}-(1+lnx) \geqslant (a+1)x$，构造函数 $h(x)=e^x-x-1$，显然 $h(x) \geq 0$ 恒成立，当仅当 $x=0$ 时等号成立，故 $h(2x+\ln x)=e^{2x+\ln x}-2x-(1+lnx) \geq 0$ 恒成立，当仅 $x=x_0$，且满足 $2x_0+\ln x_0=0$ 时等号成立，故 $e^{2x+\ln x}-(1+lnx) \geq 2x \geq (a+1)x$，又由 $x>0$，必有 $a+1 \leqslant 1$，解可得 $a \leqslant 1$，故 a 的取值范围为 $(-\infty，1]$．

21.【解析】(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x+x-1$，则 $f'(x)=e^x+1$，$f'(1)=e+1$，$f(1)=e$，所以在点 $(1，f(1))$ 处的切线方程为 $y-e=(e+1)(x-1)$，整理为 $y=(e+1)x-1$．

（1）由 $f(x) \geq x^2$，得 $a \geq \dfrac{1-x^2-e^x}{x^2}$，令 $g(x)=\dfrac{1-x^2-e^x}{x^2}$，则 $g'(x)=\dfrac{(x-1)(1+x-e^x)}{x^2}$，令 $h(x)=1+x-e^x$，则 $h'(x)=1-e^x<0$．则 $h(x)$ 在 $(0，1)$ 上单调递减，$h(x)<h(0)=0$；$g'(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增，则有 $g(x)<g(1)=2-e$，所以 $a \in [2-e，+\infty)$．

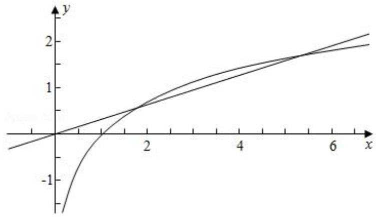
法二：由 $e^x \geq ex+(x-1)^2$（证明略）以及题意 $f(x) \geq x^2 \Leftrightarrow e^x+ax-1 \geq x^2 \Leftrightarrow e^x \geq x^2-ax-1$，即 $e^x \geq (2+a)x+(x-1)^2$，所以 $a \in [2-e，+\infty)$．

专题3 对数切线放缩

1．【解析】法一：当 $a=10$ 时，函数 $f(x)=x-\sqrt{x}-10lnx$ ，$x=e$ 时，$f(e)<0$ ，$x=100$ 时，$f(100)>0$ ，所以函数存在零点，所以 A 、B 不正确；当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=x-\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}lnx$ ，$f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2x}$ ，$x>1$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，函数是增函数，f （1）$=0$ ，所以 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，函数没有零点，所以 C 不正确，故选 D .

法二：令 $\sqrt{x}=t$ ，则 $f(t)=t^2-t-a\ln t^2=t^2-t-2a\ln t$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上存在零点，由于 $\ln x\le x^2-x$ ，切点为 $(1,0)$ ，根据函数图像性质可得，$2a>1$ 时一定存在零点，故选 D .

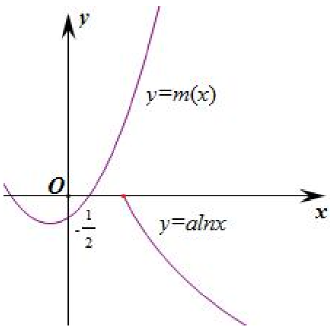
2．【解析】函数 $f(x)=lnx-ax$ 在 R 上有两个不同的零点可化为 $y=lnx$ 与 $y=ax$ 在 R 上有两个不同的交点，作函数 $y=lnx$ 与 $y=ax$ 在 R 上的图象如下，当直线与 $y=lnx$ 相切时，则 $\dfrac{lnx}{x}=\dfrac{1}{x}$ ，解得，$x=e$ ；故直线与 $y=lnx$ 相切时，切线的斜率 $a=\dfrac{1}{e}$ ；故实数 a 的取值范围是 $(0,\ \dfrac{1}{e})$ ；故答案为：$(0\ ,\ \dfrac{1}{e})$.

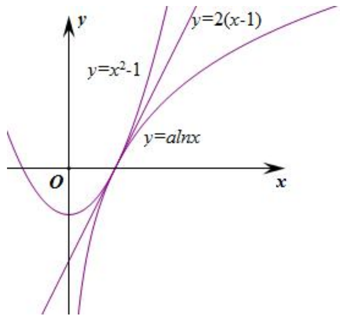


3．【解析】法一：（1）若 $a<0$ ，由 $\dfrac{1}{2}x^2+(1-m)x-\dfrac{1}{2}\geqslant alnx$ ，显然 $y=alnx$ 在 $[1,\ +\infty)$ 上单调递减，且经过点 $(1,0)$ ，而 $y=m(x)=\dfrac{1}{2}x^2+(1-m)x-\dfrac{1}{2}$ 的图象开口向上，且经过点 $(0,-\dfrac{1}{2})$ ，故只需令 m （1）$\geqslant 0$ 即可，即 $1-m\geqslant 0$ ，即 $m\leqslant 1$ ，符合题意.

（2）若 $a\geqslant 0$ ，由 $f(x)\geqslant mx$ 可得 $m\leqslant \dfrac{x}{2}-\dfrac{alnx}{x}+1-\dfrac{1}{2x}$ ，令 $g(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{alnx}{x}+1-\dfrac{1}{2x}(x\geqslant 1)$ ，则 $g'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{a(1-lnx)}{x^2}+\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{x^2+2a(lnx-1)+1}{2x^2}$ ，令 $h(x)=x^2+2a(lnx-1)+1(x\geqslant 1)$ ，则 $h'(x)=\dfrac{2(x^2+a)}{x}$ ，则 $h'(x)>0$ ，故 $h(x)$ 在 $[1,\ +\infty)$ 单调递增，$\therefore h(x)\geqslant h$ （1）$=2-2a=2(1-a)$ ，

①若 $0\leqslant a\leqslant 1$ ，则 $h(x)\geqslant h$ （1）$\geqslant 0$ ，即 $g'(x)\geqslant 0$ ，$\therefore g(x)$ 在 $[1,\ +\infty)$ 上单调递增，$\therefore g(x)\geqslant g$ （1）$=1$ ，故 $m\leqslant 1$ ，符合题意．②若 $a>1$ ，则 $h(x)$ 的最小值 h（1）$=2(1-a)<0$ ，$\therefore$ 存在 $x_0\in[1,+\infty)$ 使得当 $x\in[1,\ x_0)$ 时，$h(x)<0$ ，当 $x\in(x_0,\ +\infty)$ 时，$h(x)>0$ ，$\therefore g(x)$ 在 $[1,\ x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,\ +\infty)$ 上单调递增，$\therefore g(x)$ 的最小值为 $g(x_0)$ ，故 $m\leqslant g(x_0)$ ，而 $g(x_0)<g$ （1）$=1$ ，故 m 的最大值不为1，不符合题意．综上，a 的取值范围是 $(-\infty,\ 1]$ ．故答案为：$(-\infty,\ 1]$.





法二：$f(x)=\frac{1}{2}x^2-alnx+x-\frac{1}{2}\geq mx\Rightarrow x^2-1-2alnx\geq 2(m-1)x$ 对任意 $x\in[1，+\infty)$ 恒成立，且 m 最大值为 1，故 $x^2-1-2alnx\geq 0$ 恒成立，由于 $y=x^2-1$ 与 $y=2alnx$ 均过定点 $(1,0)$，如图所示，根据切线和函数凹凸反转性质可知 $x^2-1\geq 2(x-1)\geq 2lnx$，即 $2a\leq 2$，a 的取值范围是 $(-\infty，1]$．

4.【解析】法一：$\because$ 函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}+k(lnx-x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，

$\therefore f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}+\frac{k(1-x)}{x}=\frac{(e^x-kx)(x-1)}{x^2}$．$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的唯一一个极值点 $\therefore x=1$ 是导函数 $f'(x)=0$ 的唯一根．$\therefore e^x-kx=0$ 在 $(0,+\infty)$ 无变号零点，令 $g(x)=e^x-kx$，$g'(x)=e^x-k$，①$k\leqslant 0$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立．$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 时单调递增的，$g(x)$ 的最小值为 $g(0)=1$，$g(x)=0$ 无解②$k>0$ 时，$g'(x)=0$ 有解为：$x=lnk$，$0<x<lnk$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，$lnk<x$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递，增$\therefore g(x)$ 的最小值为 $g(lnk)=k-klnk$，$\therefore k-klnk>0$，$\therefore k<e$，由 $y=e^x$ 和 $y=ex$ 图象，它们切于 $(1,e)$，综上所述，$k\leqslant e$．故选 A．

法二：（同构式切线放缩法）$f(x)=\frac{e^x}{x}+k(lnx-x)=\frac{e^x}{x}-kln\frac{e^x}{x}=t-klnt$，$f'(t)=1-\frac{k}{t}=\frac{t-k}{t}$，显然 $e^x\geq ex$，当仅当 $x=1$ 时等号成立，故 $t>e$ 时，$f'(t)=0$ 无解，所以必须 $k\leq e$，故选 A．

5．【解析】法一：$f(x)=xlnx-ax^2(x>0)$，$f'(x)=lnx+1-2ax$．令 $g(x)=lnx+1-2ax$，$\because$ 函数 $f(x)=x(lnx-ax)$ 有两个极值点，则 $g(x)=0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有两个实数根．$g'(x)=\frac{1}{x}-2a=\frac{1-2ax}{x}$，当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)>0$，则函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增，因此 $g(x)=0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上不可能有两个实数根，应舍去．当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{2a}$，令 $g'(x)>0$，解得 $0<x<\frac{1}{2a}$，此时函数 $g(x)$ 单调递增；令 $g'(x)<0$，解得 $x>\frac{1}{2a}$，此时函数 $g(x)$ 单调递减．$\therefore$ 当 $x=\frac{1}{2a}$ 时，函数 $g(x)$ 取得极大值．当 x 趋近于 0 与 x 趋近于 $+\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，要使 $g(x)=0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有两个实数根，则 $g(\frac{1}{2a})=ln\frac{1}{2a}>0$，解得 $0<a<\frac{1}{2}$．$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(0,\frac{1}{2})$．故选 A．

法二：（对数切线放缩法）$f(x)=xlnx-ax^2(x>0)$，$f'(x)=lnx+1-2ax$．令 $g(x)=lnx+1-2ax$，由于 $\ln x\leq x-1$，故当 $2a<1$ 时，$lnx=2ax-1$ 有两个交点，$a\leq 0$ 时，由于单调性变化，仅有一个交点，故选 A．

6.【解析】法一：方程 $f(x)=(a+1)x$ 恰有两个不同的解，即方程 $\frac{1}{2}x^2-(a+1)x+alnx=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有 2 个解，令 $g(x)=\frac{1}{2}x^2-(a+1)x+alnx$，其中 $x\in(0,+\infty)$，$g'(x)=x-(a+1)+\frac{a}{x}=\frac{(x-1)(x-a)}{x}$，

（1）$a<0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增，$\because$ 有 2 个零点，故 g（1）<0，即 $-\frac{1}{2}<a<0$，

（2）$a=0$ 时，$g(x)=\frac{1}{2}x^2-x$ 只有 1 个零点 2，舍，

（3）$0<a<1$ 时，$g(x)$ 在 $(0,a)$ 递增，在 $(a,1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增，$\because$ 有 2 个零点，且 g（1）$=-a-\dfrac{1}{2}<0$，故 $g(a)=0$，无解，舍，

（4）$a=1$ 时，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，不可能有 2 个零点，舍，

（5）$a>1$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，在 $(1,a)$ 递减，在 $(a,+\infty)$ 递增，

$\because g$（1）$=-a-\dfrac{1}{2}<0$，不可能有 2 个零点，舍，综上，$a\in(-\dfrac{1}{2}$，$0)$ 时，方程 $f(x)=(a+1)x$ 恰有 2 个解，故选 A．

法二：$\dfrac{1}{2}x^2-(a+1)x+alnx=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有 2 个解，即 $-\dfrac{1}{2a}x+\dfrac{a+1}{a}=-\dfrac{x-2(a+1)}{2a}=\dfrac{lnx}{x}$ 有两交点，由于 $\dfrac{\ln x}{x}\le x-1$，两函数的切点为（1,0），根据题意直线的零点一定满足 $2(a+1)>1\Rightarrow a>-\dfrac{1}{2}$，且直线必须为单调递增，所以 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 时一定有两交点，当 $a\ge 0$ 时，仅有一个交点，不合题意，故选 A．

7.【解析】法一：$\because$ 函数 $f(x)=xlnx+1$ 的图象总在直线 $y=ax$ 的上方，$\therefore xlnx+1-ax>0$ 对任意 $x>0$ 恒成立，令 $F(x)=xlnx-ax+1$，则 $x>0$，$F'(x)=lnx-a+1$，由 $F'(x)=0$，得 $x=e^{1-a}$．当 $x\in(0,e^{1-a})$ 时，$F'(x)<0$，当 $x\in(e^{1-a}$，$+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，$\therefore F(x)_{min}=F(e^{1-a})=e^{1-a}lne^{1-a}-ae^{1-a}+1>0$，解得 $a<1$，$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1)$．故选 A．

法二：（切线放缩）$xlnx\ge x-1>ax-1\Rightarrow a<1$，故选 A．

8.【解析】当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$(ax-lnx)(ax-e^x)\leqslant 0$，$\therefore\begin{cases}ax-lnx\geqslant 0\\ax-e^x\leqslant 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}a\geqslant\dfrac{1}{e}\\a\leqslant e\end{cases}$，（过原点的切线斜率问题）或 $\begin{cases}ax-lnx\leqslant 0\\ax-e^x\geqslant 0\end{cases}$，无解，综上可得：实数 a 的取值范围是：$[\dfrac{1}{e},e]$．故选 B．

9.【解析】法一：根据题意，因为 $f(x)=e^x-a\ln x+2ax-1$，所以 $f'(x)=e^x-\dfrac{a}{x}+2a$．令 $f'(x)=e^x-\dfrac{a}{x}+2a=0$，得 $a=\dfrac{xe^x}{1-2x}$，再令 $g(x)=\dfrac{xe^x}{1-2x}(x>0)$，因为函数 $f(x)=e^x-a\ln x+2ax-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有两个极值点，所以 $g(x)=a$ 有两个零点．又 $g'(x)=-\dfrac{e^x(2x+1)(x-1)}{(1-2x)^2}(x>0)$，令 $g'(x)>0$，得 $0<x<1$，所以 $x\ne\dfrac{1}{2}$；令 $g'(x)<0$，得 $x>1$，所以函数 $g(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2}),(\dfrac{1}{2},1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减．由于 $g(0)=0$，$g(1)=-e$，根据数形结合法可得 $a<-e$，即 $a\in(-\infty,-e)$．故选 D．

法二：（指数切线放缩）$f'(x)=e^x-\dfrac{a}{x}+2a=0\Rightarrow e^x=-a(2-\dfrac{1}{x})$ 有两个交点，根据上一讲到指数与反比例函数切线放缩得 $e^{x-1}\ge 2-\dfrac{1}{x}\Rightarrow e^x\ge e(2-\dfrac{1}{x})$，故当仅当 $-a>e$ 时有两个交点，即 $a\in(-\infty,-e)$．故选 D．

10.【解析】法一：$f'(x)=\dfrac{1-lnx}{x^2}-k$，若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，故 $k\le\dfrac{1-lnx}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，令 $g(x)=\dfrac{1-lnx}{x^2}$，$(x>0)$，$g'(x)=\dfrac{2lnx-3}{x^3}$，令 $g'(x)>0$，解得：$x>e^{\frac{3}{2}}$，令 $g'(x)<0$，解得：$0<x<e^{\frac{3}{2}}$，故 $g(x)$ 在 $(0,e^{\frac{3}{2}})$ 递

减，在 $(e^{\frac{3}{2}}，+\infty)$ 递增，故 $g(x)_{min}=g(e^{\frac{3}{2}})=-\dfrac{1}{2e^3}$，故答案为：$(-\infty,-\dfrac{1}{2e^3}]$.

法二：（同构式）若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，$k\le\dfrac{1-lnx}{x^2}=\dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{e}{x})^2\cdot\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{2e^2}\ln(\dfrac{e}{x})^2\cdot\dfrac{e^2}{x^2}=\dfrac{1}{2e^2}\cdot t\cdot\ln t$，由于 $t\ln t\in(-\infty,-\dfrac{1}{e}]$，故 $k\le\dfrac{1}{2e^2}\cdot(-\dfrac{1}{e})=-\dfrac{1}{2e^3}$，故答案为：$(-\infty,-\dfrac{1}{2e^3}]$.

11.【解析】法一：$f'(x)=2ax-lnx-1$，若 $f(x)$ 在 $[\dfrac{1}{e}，+\infty)$ 递增，则 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $[\dfrac{1}{e}，+\infty)$ 恒成立，则 $a\geqslant\dfrac{lnx+1}{2x}$ 在 $[\dfrac{1}{e}，+\infty)$ 恒成立，令 $g(x)=\dfrac{lnx+1}{2x}$，$x\in[\dfrac{1}{e}，+\infty)$，则 $g'(x)=-\dfrac{2lnx}{4x^2}$，令 $g'(x)>0$，解得：$x<1$，令 $g'(x)<0$，解得：$x>1$，故 $g(x)$ 在 $[\dfrac{1}{e}，1)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 递增，故 $g(x)max=g$（1）$=\dfrac{1}{2}$，故 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$；

法二：$f'(x)=2ax-lnx-1\ge 0$ 在区间 $[\dfrac{1}{e}，+\infty)$ 恒成立，由于 $\ln x\le x-1$，切点在 $(1,0)$，切点在区间内，故 $2a\ge 1$ 时满足条件，故答案为：$[\dfrac{1}{2}，+\infty)$.（口诀：切点在区间内，切点定最值，切点在区间外，端点定最值）

12.【解析】$f'(x)=b+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{bx^2+2x+b}{x^2}$，①$b\geqslant 0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在定义域单调递增，不符合题意；②$b<0$，$\triangle=4-4b^2>0$，$-1<b<0$，所以 $-1<b<0$，故答案为：$(-1,0)$.

13.【解析】法一：不等式 $e^x-1\geqslant kx+lnx$，对于任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立．等价于 $k\leqslant\dfrac{e^x-1-lnx}{x}$ 对于任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立．令 $f(x)=\dfrac{e^x-1-lnx}{x}$，$(x>0)$，$f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)+lnx}{x^2}$，令 $g(x)=e^x(x-1)+lnx$，$(x>0)$，则 $g'(x)=e^x+\dfrac{1}{x}>0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$g(1)=0$，$\therefore x\in(0,1)$ 时，$g(x)<0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)>0$．$\therefore x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$．$\therefore x\in(0,1)$ 时，$f(x)$ 单调递减，$x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增．$\therefore f(x)_{min}=f(1)=e-1$ $\therefore k\leqslant e-1$．故答案为：$e-1$.

法二：（同位同构式构造法）构造函数 $f(x)=e^x-x-1$，故 $e^x-ex+x-1-\ln x=ef(x-1)+f(\ln x)\ge 0$，当仅当 $x=1$ 时等号成立；同构式切线放缩最关键的点就是常数一定要消去，否则构造失败，$\therefore k\leqslant e-1$.

14.【解析】（1）当 $a=2$ 时，$f(x)=lnx-2x$，所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-2$．故切线的斜率 $k=f'$（1）$=-1$，则切线方程为 $y+2=-(x-1)$，即 $x+y+1=0$.

（2）法一：$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a$，①当 $a=0$ 时，$f(x)=lnx$ 有唯一零点 $x=1$，不合题意；

② 当 $a<0$ 时，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的增函数，因为 f（1）$=-a>0$，$f(e^a)=a-ae^a=a(1-e^a)<0$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 有唯一零点，不合题意；

③当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{a}$，所以，当 $x\in(0,\dfrac{1}{a})$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上是增函数；

当 $x\in(\frac{1}{a}$， $+\infty)$ 时， $f'(x)<0$ ，函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}$ ， $+\infty)$ 上是减函数．所以在区间 $(0,+\infty)$ 上，函数 $f(x)$ 有极大值为 $f(\frac{1}{a})=ln\frac{1}{a}-1=-lna-1$ ， $\because e^{a}>a>0$ ，故 $\frac{1}{e^{a}}<\frac{1}{a}$ ，且 $e^{a}>1$ ， $\therefore f(\frac{1}{e^{a}})=-a-\frac{a}{e^{a}}=-a(1+\frac{1}{e^{a}})<0$ ，且当 $x\to+\infty$ 时， $f(x)\to-\infty$ ，若 $f(x)$ 无零点，则 $f(\frac{1}{a})<0$ ，即 $-lna-1<0$ ，解得 $a>\frac{1}{e}$ ，故所求实数 a 的取值范围是 $(\frac{1}{e}$ ， $+\infty)$ ．

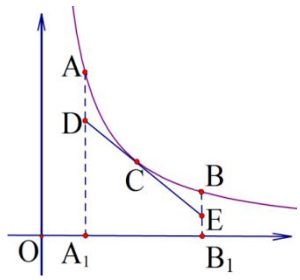
法二：（参变分离） $f(x)=lnx-ax=0$ 时， $a=\frac{\ln x}{x}$ ，令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ ， $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^{2}}$ ， $x=e$ 时， $g'(e)=0$ ，显然 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$ ，故 $a>\frac{1}{e}$ 时， $f(x)=lnx-ax$ 无零点；

（3）法一：设 $x_1>x_2>0$ ，由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 可得 $lnx_1-ax_1=0$ ， $lnx_2-ax_2=0$ ， $\therefore lnx_1-lnx_2=a(x_1-x_2)$ ，

即 $a=\frac{ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$ ，要证： $x_1+x_2>\frac{2}{a}$ ，只需证 $a(x_1+x_2)>2$ ，即证： $ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$ ．令 $t=\frac{x_1}{x_2}>1$ ，于是 $ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}\Leftrightarrow lnt>\frac{2(t-1)}{t+1}$ ．设函数 $h(t)=lnt-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$ ，求导得 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^{2}}=\frac{(t-1)^{2}}{t(t+1)^{2}}>0$ ，所以函数 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数，所以 $h(t)>h$ （1） $=0$ ，即不等式 $lnt>\frac{2(t-1)}{t+1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，故所证不等式 $x_1+x_2>\frac{2}{a}$ 成立．

法二：（对数平均不等式）设 $x_1>x_2>0$ ，由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 可得 $lnx_1-ax_1=0$ ， $lnx_2-ax_2=0$ ， $\therefore lnx_1-lnx_2=a(x_1-x_2)$ ，即 $\frac{1}{a}=\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$ ，故只需证： $\frac{1}{a}=\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$ ，

如图所示，在反比例函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ 上任取两点 $A\left(a,\frac{1}{a}\right),B\left(b,\frac{1}{b}\right)$ ，点 $C\left(\frac{a+b}{2},\frac{2}{a+b}\right)$ 为 AB 在双曲线上的中点， $AA_1\perp x$ 轴交其于 A_1 ， $BB_1\perp x$ 轴交其于 B_1 ，过 C 作双曲线切线交 AA_1 和 BB_1 于 D,E 两点，根据 $S_{ACBB_1A_1}>S_{DEB_1A_1}\Rightarrow\int_a^b\frac{1}{x}dx>\frac{2}{a+b}\cdot(b-a)$ ，即 $\frac{b-a}{\ln b-\ln a}<\frac{a+b}{2}$ ，故 $\frac{1}{a}=\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$ ，即 $x_1+x_2>\frac{2}{a}$ ．



15.【解析】(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $x>0$ ， $f'(x)=a-1-lnx$ ，若 $f'(x)=0$ ，则 $lnx=a-1$ ， $x=e^{a-1}$ ，又 $\because f'(x)$ 是单调递减的， $\therefore$ 当 x 变化时， $f'(x)$ ， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,e^{a-1})$	e^{a-1}	$(e^{a-1}$ ， $+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	增函数	极大值	减函数

$\therefore f(x)$ 在区间 $(0,e^{a-1})$ 内为增函数，在区间 $(e^{a-1}$ ， $+\infty)$ 内为减函数．

（2）法一：$f(1)=0$，$f'(x)=a-1-lnx$．当 $a\leqslant 1$ 时，在 $x\geqslant 1$ 上，$f'(x)\leqslant 0$，故函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$f(x)\leqslant f(1)=0$．当 $a>1$ 时，在 $x\geqslant 1$ 上，$f'(x)=a-1-lnx=0$，解得 $x_1=e^{a-1}>1$．又 $f'(x)=a-1-lnx$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore$ 在 $(1,x_1)$ 上 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(1,x_1)$ 上单调递增，$f(x)\geqslant f$（1）$=0$ 与任意 $x\geqslant 1$，恒有 $f(x)\leqslant 0$ 成立矛盾．综上，实数 a 的取值范围为 $(-\infty，1]$．

法二：（切线放缩）若 $f(x)\leqslant 0$ 成立，则 $a(x-1)\leq xlnx$，过点 $(1,0)$ 作 $g(x)=x\ln x$ 的切线，可得方程 $0-x_0\ln x_0=(1+\ln x_0)(1-x_0)$，即 $0=1-x_0+\ln x_0$，易知 $x_0=1$，$a\leq g'(x_0)=1$，实数 a 的取值范围为 $(-\infty，1]$．

16.【解析】(1) 因为点 $(1,1)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上，所以 $a=1$，$f(x)=\sqrt{x}-lnx$．又 $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$，所以 $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$．在该点处曲线的切线方程为 $y-1=-\dfrac{1}{2}(x-1)$ 即 $x+2y-3=0$

（2）法一：定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{a\sqrt{x}}{2x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{a\sqrt{x}-2}{2x}$ 讨论：(1) 当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又 f（1）$=a\leqslant 0$，不满足 $f(x)\geqslant 2$；（2）当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 可得 $x=\dfrac{4}{a^2}$，列表可得

x	$(0,\dfrac{a^2}{4})$	$\dfrac{a^2}{4}$	$(\dfrac{4}{a^2},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减		单调递增

所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{4}{a^2})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{4}{a^2},+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{最小值}=f\left(\dfrac{4}{a^2}\right)=2-ln\dfrac{4}{a^2}$，所以令 $2-ln\dfrac{4}{a^2}\geqslant 2$ 解得 $a\geqslant 2$，所以 a 的取值范围为 $a\geqslant 2$．

法二：定义域为 $(0,+\infty)$，$f(x)\geqslant 2$ 恒成立即 $a\sqrt{x}-lnx\geqslant 2$ 恒成立，又 $\sqrt{x}>0$，所以 $a\geqslant\dfrac{2+lnx}{\sqrt{x}}$ 恒成立．令 $g(x)=\dfrac{2+lnx}{\sqrt{x}}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=-\dfrac{\sqrt{x}lnx}{2x^2}$，由 $g'(x)>0\Rightarrow 0<x<1$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$g(x)_{max}=g$（1）$=2$，所以 $a\geqslant 2$．

注意：本题的本质就是令 $t=\sqrt{x}$，则 $at-\ln t^2\geq 2\Rightarrow\dfrac{a}{2}t-1\geq\ln t$，显然 $a\geq 2$．

17.【解析】(1) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}+a(x-lnx)$，定义域 $(0,+\infty)$．$f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}+a\dfrac{(x-1)}{x}=\dfrac{(x-1)(e^x+ax)}{x^2}$，当 $a=-e$ 时，$f'(x)=\dfrac{(x-1)(e^x-ex)}{x^2}$，由于 $e^x\geqslant ex$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增．故 $f(x)_{min}=f(1)=a+e=0$．

（2）法一：$f'(x)=\frac{(x-1)(e^x+ax)}{x^2}$，①当 $a=-e$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增.

$\therefore f(x)_{min}=f$（1）$=a+e=0$，$f(x)$ 只有一个零点.

②当 $a>-e$ 时，$ax>-ex$，故 $e^x+ax>e^x-ex\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增. $f(x)_{min}=f$（1）$=a+e>0$. 故当 $a>-e$ 时，$f(x)$ 没有零点.

③当 $a<-e$ 时，令 $e^x+ax=0$，得 $\frac{e^x}{x}=-a$，令 $\varphi(x)=\frac{e^x}{x}$，$\varphi'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，$\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增. $\therefore \varphi(x)_{min}=\varphi$（1）$=e$，$\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有两个零点 x_1，x_2，$0<x_1<1<x_2$，

$f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 单调递减，在 $(x_1$，$1)$ 单调递增，在 $(1,x_2)$ 单调递减，在 $(x_2$，$+\infty)$ 单调递增，$f(1)=a+e<0$，又 $x\to 0$ 时，$f(x)\to+\infty$，$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，此时 $f(x)$ 有两个零点，综上 $f(x)$ 有两个零点，则 $a<-e$.

法二：（同构式切线放缩法）$f(x)=\frac{e^x}{x}+a(x-lnx)=\frac{e^x}{x}+aln\frac{e^x}{x}$. 令 $\frac{e^x}{x}=t(x>0)$，则 $x=\frac{1}{e}$ 时，$t_{\min}=e$，当 $\forall x\in(0,\frac{1}{e})\cup(\frac{1}{e},+\infty)$，$\exists t\in(e,+\infty)$，使 $y=\frac{e^x}{x}$与$y=t$ 有两个交点，故当 $f(x)$ 有两个零点时，$f(t)=t+alnt=0$，即 $y=a$与$y=-\frac{t}{\ln t}(t>e)$ 有且只有一个零点，根据函数 $y=-\frac{t}{\ln t}(t>e)$ 图像可得 $y=a<-e$.

18.【解析】(1）函数的定义域为 $(0,+\infty)$，函数的导数 $f'(x)=\frac{-lnx}{x^2}$，由 $f'(x)>0$ 得，$0<x<1$，即函数 $f(x)$ 为增函数，由 $f'(x)<0$ 得 $x>1$，即函数 $f(x)$ 为减函数，即当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 取得极大值，极大值为 f（1）$=1$. 无极小值.

（3）当 $a\geqslant 1$ 时，$ae^x\geqslant e^x$，故要证不等式 $ae^x\geqslant(1+\frac{1}{x})(1+lnx)$ 成立，即证明 $e^x\geqslant(1+\frac{1}{x})(1+lnx)$ 成立，即 $\frac{e^x}{1+x}>\frac{1+lnx}{x}$，令 $g(x)=\frac{e^x}{1+x}$，则 $g'(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2}>0$，$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在区间 $[0$，$+\infty)$ 上为增函数，故 $g(x)>g(0)=1$，即 $\frac{e^x}{1+x}>1$，由（1）得 $\frac{1+lnx}{x}\leqslant 1$，则 $\frac{e^x}{1+x}>\frac{1+lnx}{x}$ 成立，即 $ae^x\geqslant(1+\frac{1}{x})(1+lnx)$ 成立.

19.（1)【解析】$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$. $(x>0)$. 当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $f(1)=0$. 因此 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$. 当 $a>0$ 时，可得函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore x=a$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值即最小值，则 $f(a)=lna+1-a\geqslant 0$. 令 $g(a)=lna+1-a$，$g(1)=0$. $g'(a)=\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}$，可知：$a=1$ 时，函数 $g(a)$ 取得极大值即最大值，而 $g(1)=0$. 因此只有 $a=1$ 时满足 $f(a)=lna+1-a\geqslant 0$. 故 $a=1$. $\therefore$ 实数 a 取值的集合是 $\{1\}$. 注意：此题来自于 $\ln x\le x-1$ 中将 $\frac{1}{x}$ 替换 x 后得到的 $\ln x\ge 1-\frac{1}{x}$，故 $a=1$；

（2）证明：由 (I) 可知：$a=1$ 时，$f(x)\geqslant 0$，即 $lnx\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$ 在 $x>0$ 时恒成立.

要证明：$e^x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2-lnx+x^2+(e-2)x$，即证明：$e^x\geqslant 1+x^2+(e-2)x$，即 $e^x-1-x^2-(e-2)x\geqslant 0$.

故构造 $h(x)=\dfrac{ex+(x-1)^2}{e^x}(x>0)$，则 $h(x)=\dfrac{-(x-1)(x+e-3)}{e^x}$，当 $x\in(0，1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)\uparrow$，当 $x\in(1，+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)\downarrow$，得 $h(x)_{\max}=h(1)=1$，所以 $e^x\geq ex+(x-1)^2$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立

$\therefore\ \forall x>0$，$h(x)\geqslant 0$ 恒成立，即 $e^x-1-x^2-(e-2)x\geqslant 0$．综上可得：$e^x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2-lnx+x^2+(e-2)x$，成立.

22.【解析】(1) 根据题意可得，$f'(x)=\dfrac{a}{x}-e^x=\dfrac{a-xe^x}{x}(x>0)$，当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $y=f(x)$ 是减函数，无极值点；当 $a>0$ 时，令 $f(x)=0$，得 $a-xe^x=0$，即 $xe^x=a$，又 $y=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在一解，不妨设为 x_0，所以函数 $y=f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上是单调递增的，在 $(x_0，+\infty)$ 上是单调递减的；所以函数 $y=f(x)$ 有一个极大值点，无极小值点；总之：当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 无极值点；当 $a>0$ 时，函数 $y=f(x)$ 有一个极大值点，无极小值点；

(2) 法一：证明：$a=2$ 时，$f(x)=2lnx-e^x$，$f'(x)=\dfrac{2-xe^x}{x}(x>0)$，由（1）可知 $f(x)$ 有极大值 $f(x_0)$，且 x_0 满足 $x_0e^{x_0}=2$…①，又 $y=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，且 $0<2<e$，所以 $x_0\in(0,1)$，又知：$f(x)_{min}=f(x_0)=2lnx_0-e^{x_0}$…②；由①可得 $e^{x_0}=\dfrac{2}{x_0}$，代入②得 $f(x)_{min}=f(x_0)=2lnx_0-\dfrac{2}{x_0}$，令 $g(x)=2lnx-\dfrac{2}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2(x+1)}{x^2}>0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数，所以 $g(x_0)<g(1)=-2<0$，即 $g(x_0)<0$，所以 $f(x)<0$.

法二：（思路，详细过程请读者自己完成）$a=2$ 时，$f(x)=2lnx-e^x\leq 2\cdot\dfrac{x}{e}-e^x$，由于 $e^x\geq ex$，故命题得证；

22.【解析】(1) $\because g(x)=\dfrac{lnx-1}{x}(x>0)$，故 $g'(x)=\dfrac{2-lnx}{x^2}$，令 $g'(x)>0$，解得：$0<x<e^2$，令 $g'(x)<0$，解得：$x>e^2$，故 $g(x)$ 在 $(0,e^2)$ 递增，在 $(e^2，+\infty)$ 递减，故 $g(x)$ 极大值 $=g(e^2)=\dfrac{1}{e^2}$；

(2)（放对再放指，不行找基友）证明：要证 $f(x)+1<e^x-x^2$．即证 $e^x-x^2-xlnx-1>0$，

先证明 $lnx\leqslant x-1$，取 $h(x)=lnx-x+1$，则 $h'(x)=\dfrac{1-x}{x}$，易知 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 递减，故 $h(x)\leqslant h$（1）$=0$，即 $lnx\leqslant x-1$，当且仅当 $x=1$ 时取“=”，故 $xlnx\leqslant x(x-1)$，$e^x-x^2-xlnx\geqslant e^x-2x^2+x-1$，故只需证明当 $x>0$ 时，$e^x-2x^2+x-1>0$ 恒成立，构造函数 $t(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{e^x}$，则 $t'(x)=-\dfrac{(2x-1)(x-2)}{e^x}$，

x	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},2)$	2	$(2,+\infty)$

$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减	极小	单调递增	极大	单调递减

根据上表可知，由于 $h(0)=1$， $h(x)_{\max}=h(2)=\frac{7}{e^2}<1$，故 $x>0$ 时， $f(x)+1<e^x-x^2$．

23．【解析】（1） $a=0$ 时， $f(x)=e^x-1-x$， $f'(x)=e^x-1$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $f'(x)<0$；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$，故在单调递减，在单调递增， $f(x)_{min}=f(0)=0$， $\therefore f(x)\geqslant0$

（2） $f'(x)=e^x-1-2ax$，令 $h(x)=e^x-1-2ax$，则 $h'(x)=e^x-2a$．

①当 $2a\leqslant1$ 时，在 $[0，+\infty)$ 上， $h'(x)\geqslant0$， $h(x)$ 递增， $h(x)\geqslant h(0)$，即 $f'(x)\geqslant f'(0)=0$， $\therefore f(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 为增函数， $\therefore f(x)\geqslant f(0)=0$， $\therefore a\leqslant\frac{1}{2}$ 时满足条件；

②当 $2a>1$ 时，令 $h'(x)=0$，解得 $x=ln2a$，当 $x\in[0，ln2a)$ 上， $h'(x)<0$， $h(x)$ 单调递减，

$\therefore x\in(0,ln2a)$ 时，有 $h(x)<h(0)=0$，即 $f'(x)<f'(0)=0$， $\therefore f(x)$ 在区间 $(0,ln2a)$ 为减函数，

$\therefore f(x)<f(0)=0$，不合题意，综上得实数 a 的取值范围为 $(-\infty,\frac{1}{2}]$；

（3）由（2）得，当 $a=\frac{1}{2}$ 时， $x>0$， $e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$，即 $e^x-1>x+\frac{x^2}{2}$，欲证不等式 $(e^x-1)ln(x+1)>x^2$，只需证 $ln(x+1)>\frac{2x}{x+2}$，设 $F(x)=ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}$，则 $F'(x)=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}$， $\because x>0$ 时， $F'(x)>0$ 恒成立，且 $F(0)=0$， $\therefore F(x)>0$ 恒成立．所以原不等式得证．

专题4　三次函数的图象和性质

选择答案

$1-5:ADAAC$　　$6-10:CBBBA$　　$11-15:AB\ CC$　　$16-20:DABCC$

$21-25:ADCBD$　　$26-30:CBACB$　　$31-35:ADCCB$　　$36-39:ADCD$

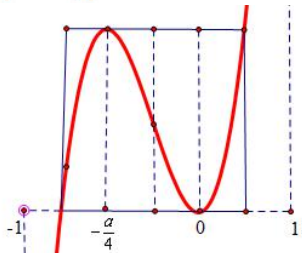
填空题答案：

1. $(0,1)$　　2. -9　　3. $(-1,+\infty)$　　4. 2　　5. $[-1,\frac{1}{2}]$　　6. $(-3,-1)$　　7. $(-\infty,-2)$　　8. $(7,+\infty)$

9. $c<\frac{-10}{3}$

解答题答案：

1.$a=12$．解 $f'(x)=ax^2+4x$，另 $f'(x)=0$ 得 $x_1=-\frac{a}{4}$， $x_2=0$，画出四段论图像：因为 $f(0)=0$，易得 $f(x)_{\min}=f(-1)=\frac{6-a}{3}=-2$，得 $a=12$．

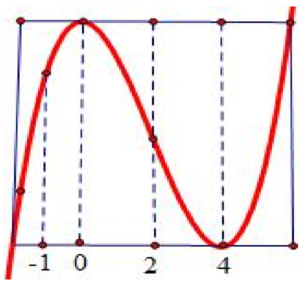


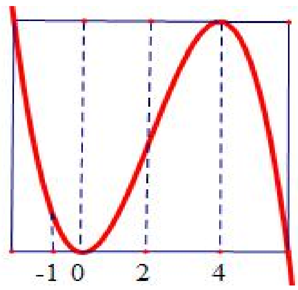
2. $a=2$，$b=3$．

【解析】显然 $a\neq 0$，$f'(x)=3ax^2-12ax=3a\left(x^2-4x\right)$，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=4$（舍去）

当 $a>0$，画出四段论图像左得 $f(x)_{\max}=f(0)=b=3$，$f(x)_{\min}=f(2)=-16a+3=-29$，得 $a=2$；

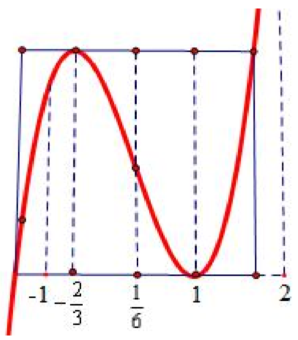
当 $a<0$，画出四段论图像右得 $f(x)_{\min}=f(0)=b=-29$，$f(x)_{\max}=f(2)=-16a-29=3$，得 $a=-2$；





3. (1) $b>\frac{1}{12}$，(2)$c\in(-\infty，-1)\cup(2，+\infty)$

【解析】(1) 由题意得 $f'(x)=3x^2-x+b$，因为 $f(x)$ 在定义域内单调递增，所以 $f'(x)\geq 0$ 恒成立，即 $\Delta=1-2b\leq 0$，解得 $b\geq\frac{1}{12}$；(2) 由题意得 $x=1$ 为 $f'(x)=3x^2-x+b$ 的一个根，设另一个根为 x_0，易得 $x_0=-\frac{2}{3}$，$b=-2$，所以 $f'(x)=3x^2-x-2$，画出四段论图像易得 $f(x)_{\max}=f(2)=2+c$，即 $c^2>2+c$，解得 $c\in(-\infty，-1)\cup(2，+\infty)$．



4.【解析】(1)　导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，过点 $(\frac{1}{3},0)$ 和 $(1,0)$．可得：$x<\frac{1}{3}$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增；$\frac{1}{3}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减；$x>1$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增．

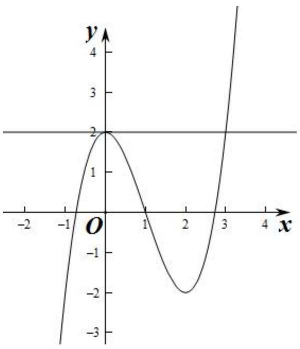
$\therefore$函数$f(x)$的单调递减区间为$(\frac{1}{3},1)$，极大值点为$\frac{1}{3}$．故答案为：$(\frac{1}{3},1)$，$\frac{1}{3}$．

（2）$\because f'(x)=3ax^2+2bx+1$，由题意知，$\begin{cases} f'(\frac{1}{3})=0; \\ f'(1)=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$．

（3）由(II)可得：$f(x)=x^3-2x^2+x+c$，由(I)可得：$\frac{1}{3}$为极大值点，1为极小值点．$\because f(x)$恰有两个零点，$\therefore f(\frac{1}{3})=\frac{1}{27}-2\times\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+c=0$，或$f$（1）$=1-2+1+c=0$，$c=-\frac{4}{27}$或0．

5.【解析】（1）由$g(x)=x^3-3x^2+2$，得$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，令$g'(x)<0$，得$0<x<2$，即$g(x)$的递减区间为$(0,2)$．又$g(x)$在区间$(0,m)$上递减，$\therefore(0,\ m)\subseteq(0,\ 2)$，$\therefore 0<m\leqslant 2$，

（2）由$g'(x)>0$得$x>2$或$x<0$，即$g(x)$在$(-\infty,\ 0]$上递增，在$[0,\ 2]$上递减，在$[2,\ +\infty)$上递增，即当$x=0$时取得极大值，极大值为$f(0)=2$，当$x=2$时，取得极小值，极小值为$f(2)=-2$，令$g(x)=2$，解得$x=0$或$x=3$，若函数$g(x)$在区间$(-\infty,\ n]$上的最大值为2，结合图象观察，得$n\in[0,\ 3]$，即实数n的取值范围是$[0,\ 3]$．



6．【解析】（1）当$a=6$，且$x>0$时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x-1$，所以$f'(x)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$，令$f'(x)=0$，得$x=2$，或$x=3$；当$x$变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(0,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上的单调递增区间是$(0,2)$，$(3,+\infty)$，单调递减区间是$(2,3)$；

（2）当$a<0$时，若$x<0$，则$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-ax-1$，所以$f'(x)=x^2-5x-a=x(x-5)-a$；因为$x<0$，$a<0$，所以$f'(x)>0$；若$x>0$，则$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+ax-1$，所以$f'(x)=x^2-5x+a$；令$f'(x)=0$，$\triangle=25-4a>0$，所以有两个不相等的实根$x_1$，$x_2$，且$x_1x_2<0$；不妨设$x_2>0$，所以当$x$变化时，$f'(x)$，

$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,x_2)$	x_2	$(x_2，+\infty)$
$f'(x)$	+	无定义	−	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

因为函数 $f(x)$ 图象是连续不断的，所以当 $a<0$ 时，$f(x)$ 即存在极大值又有极小值.

7. 【解析】(1) 根据题意，函数 $f(x)=2x^3+3ax^2+1$，其定义域为 R，当 $a=0$ 时，$f(x)=2x^3+1$，其导数 $f'(x)=6x^2$，又由 f'（1）$=6$，f（1）$=3$，则 $f(x)$ 在点 $(1，f$（1）$)$ 的切线方程为 $y-3=6(x-1)$，即 $6x-y-3=0$；

（2）根据题意，函数 $f(x)=2x^3+3ax^2+1$，其导数 $f'(x)=6x^2+6ax=6x(x+a)$，分 3 种情况讨论：

①，当 $a=0$ 时，$f'(x)=6x^2\geqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数；

②，当 $a>0$ 时，若 $f'(x)=6x(x+a)>0$，解可得 $x<-a$ 或 $x>0$，则 $f(x)$ 的递增区间为 $(-\infty,-a)$ 和 $(0,+\infty)$，递减区间为 $(-a,0)$；

③，当 $a<0$ 时，若 $f'(x)=6x(x+a)>0$，解可得 $x<0$ 或 $x>-a$，则 $f(x)$ 的递增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(-a,+\infty)$，递减区间为 $(0,-a)$；

综上可得：当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的递增区间为 $(-\infty,-a)$ 和 $(0,+\infty)$，递减区间为 $(-a,0)$；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的递增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(-a,+\infty)$，递减区间为 $(0,-a)$；

（3）根据题意，分 3 种情况讨论：

①，当 $-a\leqslant 0$ 时，有 $a\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $[0，2]$ 上递增，此时 $f(x)$ 在区间 $[0，2]$ 上的最小值为 $f(0)=1$，

②，当 $0<-a<2$ 时，即 $-2<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $[0，-a]$ 上递减，在 $(-a,2)$ 上递增，此时 $f(x)$ 在区间 $[0，2]$ 上的最小值为 $f(-a)=a^2+1$，

③，当 $-a\geqslant 2$ 时，即 $a\leqslant -2$ 时，$f(x)$ 在 $[0，2]$ 上递减，此时 $f(x)$ 在区间 $[0，2]$ 上的最小值为 f（2）$=17+12a$，

综合可得：当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(0)=1$，

当 $-2<a<0$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(-a)=a^2+1$，

当 $a\leqslant -2$ 时，$f(x)$ 的最小值为 f（2）$=17+12a$.

8.【解析】(1) $f'(x)=6x^2-12x$，则 $6x^2-12x=-6$，所以，$x=1$，当 $x=1$，$y=-3$，所以 $-3=-6\times 1+m$，

解得 $m=3$．（2）$\because f(x)=2x^3-ax^2+1(a\in R$，$x\in(0,+\infty))$ $\therefore$ 由 $f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)=0$，得到 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{a}{3}$，当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)=2x(3x-a)>0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又因为函数 $f(x)$ 的图象过点 $(0,1)$，即 $f(0)=1>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内没有零点，不合题意，当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $x>\dfrac{a}{3}$，即函数 $f(x)$ 在区间 $(\dfrac{a}{3}$，$+\infty)$ 上单调递增，由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<\dfrac{a}{3}$，即函数 $f(x)$ 在区间在 $(0,\dfrac{a}{3})$ 上单调递减，且过点 $(0,1)$，要使函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点，则须 $f(\dfrac{a}{3})=0$，即 $\dfrac{2a^3}{27}-\dfrac{a^3}{9}+1=0$，解得 $a=3$，综上可得函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点时 $a=3$，此时函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,1)$

（4）当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(\dfrac{a}{3}$，$+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,\dfrac{a}{3})$ 上单调递减，此时函数 $f(x)$ 有两个极值点，极大值为 $f(0)=1$，极小值为 $f(\dfrac{a}{3})=1-\dfrac{a^3}{27}$，且 $f(-1)=-a-1$，f（1）$=3-a$．

①当 $\dfrac{a}{3}\geqslant 1$ 即 $a\geqslant 3$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减，$f(x)_{max}=f(0)=1$，又 $f(-1)=-1-a$，f（1）$=3-a$，即 $f(-1)<f$（1），$f(x)_{min}=-1-a$，所以 $1+(-1-a)=1$，解得 $a=-1$（舍）．

②当 $\dfrac{a}{3}<1$ 即 $0<a<3$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,\dfrac{a}{3})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{a}{3},1)$ 上单调递增

$f(-1)=-1-a<0$，即 $f(\dfrac{a}{3})=1-\dfrac{a^3}{27}>0$，所以 $f(x)_{min}=-1-a$．若 $f(0)-f$（1）$=a-2\geqslant 0$，即 $2\leqslant a<3$ 时，$f(x)_{max}=f(0)=1$，所以 $1+(-1-a)=1$，解得 $a=-1$（舍）．若 $f(0)-f$（1）$=a-2<0$，即 $0<a<2$ 时，$f(x)_{max}=f$（1）$=3-a$，所以 $(3-a)+(-1-a)=1$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$．综上，$a=\dfrac{1}{2}$．

8．【解析】（1）函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}$ 的导数为 $f'(x)=x^2$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(1,\dfrac{5}{6})$ 处的切线斜率为 1，可得切线方程为 $y-\dfrac{5}{6}=x-1$ 即 $y=x-\dfrac{1}{6}$，切线与 x 轴和 y 轴的交点为 $(\dfrac{1}{6}$，$0)$，$(0,-\dfrac{1}{6})$，可得切线与 x 轴和 y 轴围成的三角形面积为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{72}$；

（2）$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}$，则 $f'(x)=x^2$，设切点为 $(m,\dfrac{1}{3}m^3+\dfrac{1}{2})$，则 $f'(m)=m^2$．可得过切点处的切线方程为 $y-\dfrac{1}{3}m^3-\dfrac{1}{2}=m^2(x-m)$，把点 $(2,a)$ 代入得 $a-\dfrac{1}{3}m^3-\dfrac{1}{2}=m^2(2-m)$，整理得 $4m^3-12m^2-3+6a=0$，若过点 $(2,a)$ 可作三条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，则方程 $4m^3-12m^2-3+6a=0$ 有三个不同根．令 $g(x)=4x^3-12x^2-3$，则 $g'(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$，当 $x\in(-\infty$，$0)\cup(2$，$+\infty)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(0,2)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,0)$，$(2,+\infty)$；单调减区间为 $(0,2)$．可得当 $x=0$ 时，$g(x)$ 有极

大值为 $g(0)=-3$；当 $x=2$ 时，$g(x)$ 有极小值为 g（2）$=-19$．由 $-19<-6a<-3$，得 $\frac{1}{2}<a<\frac{19}{6}$．

则实数 n 的取值范围是 $(\frac{1}{2},\ \frac{19}{6})$．

10.【解析】(1) $f'(x)=3ax^2-6x$，由已知 f'（2）$=12a-12=0$，得 $a=1$，经检验当 $a=1$ 时，满足题意，故 $a=1$．(2) 由 (1) 可知 $a=1$，f’ $(x)=3x(x-2)$，当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增；当 $0<x<2$ 时，$f(x)<0$，$f(x)$ 递减；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增；因此，$f(x)$ 极大值为 $f(0)=0$，极小值为 f（2）$=-4$，又由 $f(x)=0$ 得 $x=0$ 或 $x=3$，由 $f(x)=-4$ 得 $x=2$ 或 $x=-1$，故 $m-n$ 的最大值为 4．

11.【解析】(1) $f'(x)=3x^2+6ax+3(a^2-1)$．由题意得 f'（1）$=0$，即 $3+6a(a^2-1)=0$，解得 $a=0$ 或 $a=-2$．当 $a=0$ 时，$f'(x)=3x^2-3$，当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，满足题意．当 $a=2$ 时，$f'(x)=3x^2-12x+9$，当 $x<1$ 或 $x>3$ 时，$f'(x)>0$；当 $1<x<3$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，不满足题意．综上，$a=0$．

(2) $g(x)=x^3-3ax^2-3x+5a(a>0)$．所以 $g'(x)=3x^2-6ax-3$，因为 $\triangle=36a^2+36>0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 恒有两个极值点．由题意可知 x_1，x_2 是 $g'(x)=3x^2-6ax-3=0$ 的两根，所以 $x_1+x_2=2a$，$x_1x_2=-1$．由 $g(x_1)+g(x_2)\leqslant 0$，得 $x_1{}^3+x_2{}^3-3a(x_1{}^2+x_2{}^2)-3(x_1+x_2)+10a\leqslant 0$．即 $(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]-3a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-3(x_1+x_2)+10a\leqslant 0$．将 $x_1+x_2=2a$，$x_1x_2=-1$ 代入整理的 $a^3-a\geqslant 0$．因为 $a>0$，所以 $a^2-1\geqslant 0$ 解得 $a\geqslant 1$．所以 a 的最小值 1．

专题 6 同构式下的函数体系

1.【解析】由 $f(x)=x\cdot\ln x-a\cdot e^x$，得 $f'(x)=1+\ln x-a\cdot e^x=0$ 有两解，构造 $g(x)=e^{x-1}+x$，易得 $g(x)$ 在 $(0,\ +\infty\uparrow)$，又 $x\geq \ln x+1$，得 $g(x)\geq g(\ln x+1)$，即 $e^{x-1}+x\geq x+\ln x+1$，解得 $0<a<\frac{1}{e}$，选 A.

2.【解析】由题意得 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cdot\ln x=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1}{x}$，令 $\frac{1}{x}=t$，则 $f(x)=t-t\cdot\ln t$，$f'(x)=-\ln t$，由图像易得选 B．

3.【解析】因为 $f(x)=\frac{e^x}{x}$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 和 $(0,\ 1)$ 上单调递减，在 $(1,\ +\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)=\frac{e^{2x}}{x}=2\cdot\frac{e^{2x}}{2x}$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 上单调递减，选 B．

4.【解析】由 $2x^2e^{2x}+\ln x=0\Rightarrow 2xe^{2x}=-\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}=e^{\ln\frac{1}{x}}\ln\frac{1}{x}\Rightarrow 2x=\ln\frac{1}{x}\Rightarrow 2x_0+\ln x_0=0$．

5.【解析】$\ln a = me^{mb} \Rightarrow b\ln a = mbe^{mb} \Rightarrow b\ln a \le a\ln a = mbe^{mb}$，同构 $x\ln x = mxe^{mx}$，令 $f(x) = xe^{x}$，即 $f(\ln x) = f(mx)$，得 $\ln x \le mx \Rightarrow m \ge \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)_{\max} = \dfrac{1}{e}$. 选 A.

6.【解析】$\log_2 x - k\cdot 2^{kx} \geqslant 0 \Rightarrow \log_2 x \ge k\cdot 2^{kx} \Rightarrow x\cdot\log_2 x \ge kx\cdot 2^{kx} \Rightarrow 2^{\log_2 x}\cdot\log_2 x \ge kx\cdot 2^{kx}$，即 $\log_2 x \ge kx \Rightarrow k \le \left(\dfrac{\log_2 x}{x}\right)_{\min} = \dfrac{\log_2 e}{e}$.

7.【解析】$e^{2\lambda x} - \dfrac{lnx}{2\lambda} \geqslant 0 \Rightarrow 2\lambda xe^{2\lambda x} \ge x\ln x = e^{\ln x}\ln x$，即 $2\lambda x \ge \ln x$ 恒成立，$\lambda \ge \left(\dfrac{\ln x}{2x}\right)_{\max} = \dfrac{1}{2e}$.

8.【解析】由题意得：$m\ln(x+1) - 3x - 3 > mx - 3e^{x} \Rightarrow 3(e^{x} - x - 1) > mx - m\ln(x+1)$，右边凑 1，得 $3(e^{x} - x - 1) > m(x + 1 - \ln(x+1) - 1) \Rightarrow 3(e^{x} - x - 1) > m\left(e^{\ln(x+1)} - \ln(x+1) - 1\right)$，得 $m \le 3$.（说明：定义域大于零，所以 $x > \ln(x+1)$，即 $m = 3$ 成立）.

9.【解析】由 $e^{x} \ge x + 1$ 得 $e^{x-\frac{1}{2}} \ge x + \dfrac{1}{2}$，所以 $2e^{x-\frac{1}{2}} \ge 2x + 1$，即 $\dfrac{2}{\sqrt{e}}\cdot ex \ge 2x + 1$，所以 $0 < a < \dfrac{2}{\sqrt{e}}$（等号为相切，故不取）.

10.【解析】(1) 由题意得 $f(x) + \dfrac{\ln(-x)}{x} > \dfrac{1}{2}$，即 $-x - \ln(-x) + \dfrac{\ln(-x)}{x} > \dfrac{1}{2}$，令 $-x = t$，则 $t \in (0, e)$，只需证 $t - \ln t - \dfrac{\ln t}{t} > \dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{2t^2}{t+1} > \ln t$，当 $t \in (0, 1]$ 时明显成立，当 $t > 1$ 时 $\dfrac{2t}{t+1} > \dfrac{1}{e}$ 成立；

(2) 由 $\ln x \le x - 1$，得 $\ln(e^2 x) \le e^2\cdot x - 1$，即 $\ln x \le e^2 x - 3 \Rightarrow \ln(-x) \le -e^2 x - 3 \Rightarrow -e^2 x - \ln(-x) \ge 3$，当且仅当 $x = -e^{-2}$ 时等号成立，所以 $a = -e^2$.

11.【解析】(1) 略；

(2) 构造 $g(x) = \ln(1+x) - x$，易得 $g(x)$ 在 $-1 < x < 0$ 上 $\uparrow$，$g(x) \le g(0) = 0$，当 $a \leqslant -2$，$f(x) = (x+a)ln(x+1) - ax \ge x\cdot\ln(1+x) - 2(\ln(1+x) - x)$，得 $f(x) \ge (x+2)\cdot\ln(1+x) + 2x$，即证 $(x-2)\cdot\ln(1+x) > -2x\cdot e^{-x}$，构造 $g(x) = x\cdot e^{x}$，易得在 $-1 < x < 0$ 时，$g(x)\downarrow$，又因为 $x \ge \ln(x+1)$，所以 $g(-x) \le g[-\ln(x+1)]$，即 $-x\cdot e^{-x} \le -\ln(x+1)\cdot e^{-\ln(x+1)}$，得 $-2x\cdot e^{-x} \le -2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$，又 $-2x\cdot e^{-x} < (x-2)\cdot\ln(1+x)$，所以只需证 $\dfrac{-2}{x+1} > x + 2$，即 $x^2 - x > 0$，显然成立，得证.

12.【解析】(1) 略；(2) 因为 $e^{x} + x \ge ex + \ln(ex)$，当且仅当 $x = 1$ 时等号成立，所以 $e^{x} - \ln x - 1 \ge (e-1)x$，又 $e^{x} + bx - 1 = \ln x$，所以 $e^{x} - \ln x - 1 = -bx$，要使方程有两个实根，则 $-b > e - 1$，即 $b < 1 - e$.

13．【解析】（1）因为 $\frac{1}{e}x\ge \ln x$，所以 $\frac{1}{e}x^2\ge \ln x^2$，当且仅当 $x=\sqrt{e}$ 取等号，得 $\frac{1}{2e}x^2\ge \ln x$，由题意 $ax\ge \frac{\ln x}{x}\Rightarrow ax^2\ge \ln x$，所以 $a\ge \frac{1}{2e}$；

（2）因为 $x-1\ge \ln x$，所以 $x^2-1\ge 2\ln x$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，得 $\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\ge \ln x$（在 $x=1$ 处相切），依题意 $f(x)=ax-\frac{lnx}{x}$ 与 a 相切等价于 $a\left(x^2-x\right)$ 与 $\ln x$ 相切，得 $a=1$.

14．【解析】（1）略；

（2）由题意得 $f(x)+1<e^x-x^2\Rightarrow x\ln x+1<e^x-x^2$，即证 $\frac{2x^2-x+1}{e^x}<1$，令 $g(x)=\frac{2x^2-x+1}{e^x}$，即证 $g(x)<1$，得 $g'(x)=\frac{-\left(2x^2-3x+2\right)}{e^x}<0$，所以 $g(x)\downarrow$，所以 $g(x)<g(0)=1$，得证.

15.【解析】(1) 略; (2) 由题意得 $kf(x)<\frac{1}{2}x\Rightarrow k\cdot \ln x<\frac{1}{2}x^2\Rightarrow k\cdot 2\ln x<x^2\Rightarrow k\cdot\frac{\ln x^2}{x^2}<1$，构造 $g(x)=\frac{\ln x^2}{x^2}$，易得 $g(x)\in(-\infty,\ 0)\cup\left(0,\ \frac{1}{e}\right)$，所以 $0<k<e$.

16.【解析】(1) 略；(2) 由题意得 $x\cdot e^x>a(x+\ln x)\Rightarrow e^{x+\ln x}>a(x+\ln x)$，因为 $e^x\ge ex$ 得 $e^{x+\ln x}\ge e(x+\ln x)$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，所以等价于证明 $e(x+\ln x)>a(x+\ln x)$，即 $a<e$.

17.【解析】(1) 略；(2) 由题意得 $f(x)=x\cdot e^x+a(\ln x+x)=e^{x+\ln x}+a(\ln x+x)$，令 $\ln x+x=t$，得 $f(x)=g(t)=e^t+at$，$g'(t)=e^t+a$，得 $g'(t)=0\Rightarrow a=\ln(-a)$，所以 $f(x)_{\min}=m=g(\ln(-a))=-a+a\ln(-a)=-a\left(1+\ln\frac{1}{-a}\right)\le -a\cdot\frac{1}{-a}=1$，所以 $m\leqslant 1$.

18.【解析】(1) 略；(2) 由题意得 $xe^x-a(\ln x+x+1)+e\ge 0$，令 $t=\ln x+x$，得 $e^t-a(t+1)+e\ge 0$，又 $e^t\ge et$，所以 $et+e\ge a(t+1)$ 得 $a\le e$.

19.【解析】(2) 由题意得 $f(x)=\frac{e^x}{x}+a(\ln x-x)$，即 $f(x)=e^{x-\ln x}+a(\ln x-x)$，令 $x-\ln x=t(t\ge 1)$，则 $f(x)=e^t-at$，令 $g(t)=e^t-at(t\ge 1)$，则 $g'(t)=e^t-a$，当 $a\le e$ 时，$g'(t)\ge 0$，$g(t)\uparrow$，即 $g(t)\ge g(1)=e-a$；当 $a>e$，令 $g'(t)=0$，得 $t=\ln a$，$g(t)_{\min}=g(\ln a)=a-a\ln a$.

20.【解析】由题意得 $f(x)=\frac{\ln x+a}{x}$，$g(x)=e^{2x}-2$，$f(x)\le g(x)\Rightarrow\frac{\ln x+a}{x}\le e^{2x}-2$，即 $\ln x+a\le e^{\ln x+2x}-2x$，即 $e^{\ln x+2x}-2x-\ln x\ge 1$（当且仅当 $\ln x+2x=0$），$\therefore a\le 1$.

21.【解析】(2) 由题意得 $xe^x+1>f(x)+m$ 即 $xe^x+1>x+\ln x+m=e^{x+\ln x}-(x+\ln a)+1\ge 2$（$x+\ln x=0$ 时

取等），所以$m\in(-\infty,2)$．

22．【解析】（2）由题意得$xe^{x}-ax-a\ln x>1$，$f(x)=e^{x+\ln x}-a(x+\ln x)\geq(1-a)(x+\ln x)+1\geq1$，即$(1-a)(x+\ln x)\geq0$（$a=1$时取等），令$f(x)-1=g(t)=e^{t}-(at+1)$，接下来分类讨论说明单调性．

23．【解析】（2）由题意得$f(x)=e^{x+\ln x}-a(x+\ln x)$，令$t=x+\ln x$，$f(x)=g(t)=e^{t}-at$，接下来分类讨论说明单调性．