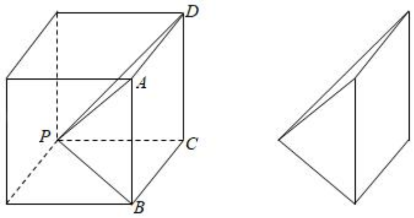
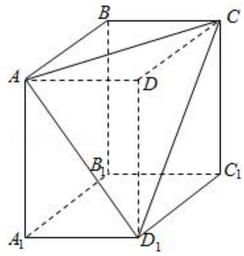
第一章　立体几何

专题 1　三视图还原之俯视图拔高法

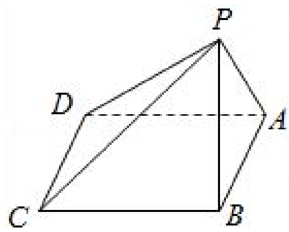
1.【解析】由三视图可得直观图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，最长的棱为 PA，即 $PA=\sqrt{PB^2+PC^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$，故选：B．



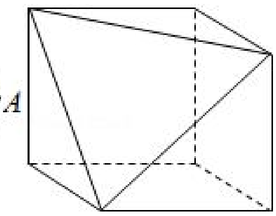
第 1 题



第 2 题



第 5 题


第 6 题

2.【解析】由主视图和俯视图可知切去的棱锥为 $D-AD_1C$，棱 CD_1 在左侧面的投影为 BA_1，故选：B．

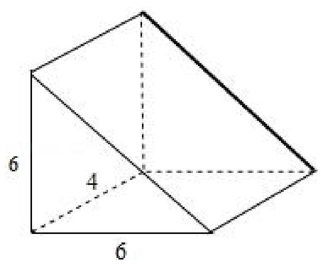
3.【解析】由已知中的三视图可得：该几何体是一个以主视图为底面的直四棱柱，即歪台，其底面面积为：$3\times6=18$，侧面的面积为：$(3\times3+3\times\sqrt{3^2+6^2})\times2=18+18\sqrt{5}$，故棱柱的表面积为：$18\times2+18+18\sqrt{5}=54+18\sqrt{5}$．故选：B．

4.【解析】根据三视图可判断该几何体是底面为直角梯形，高为 2 的直四棱柱，底面的梯形上底 1，下底 2，高为 1，

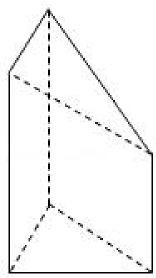
$\therefore$ 侧面为 $(4+\sqrt{2})\times2=8+2\sqrt{2}$，底面为 $\frac{1}{2}\times(2+1)\times1=\frac{3}{2}$，故表面积为 $8+2\sqrt{2}+2\times\frac{3}{2}=11+2\sqrt{2}$，故选：B．

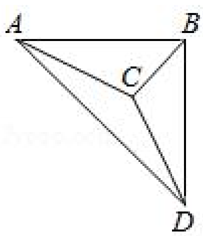
5.【解析】由三视图知：几何体是四棱锥，且四棱锥的一条侧棱与底面垂直，底面为正方形如图：其中 $PB\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为正方形 $\therefore PB=1$，$AB=1$，$AD=1$，$\therefore BD=\sqrt{2}$，$PD=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$．$PC=PA=\sqrt{2}$ 该几何体最长棱的棱长为：$\sqrt{3}$ 故选：C．

6.【解析】设正方体的棱长为 1，由三视图判断，正方体被切掉的部分为三棱锥，$\therefore$ 正方体切掉部分的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{6}$，$\therefore$ 剩余部分体积为 $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$，$\therefore$ 截去部分体积与剩余部分体积的比值为 $\frac{1}{5}$．故选：D．

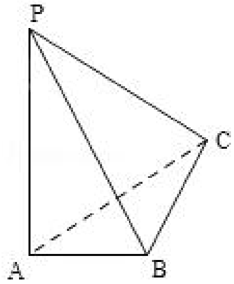


第 7 题


第 8 题



第 9 题



第 10 题

7.【解析】根据网格纸的各小格都是正方形，粗实线画出的是一个几何体的三视图，可知几何体如图：几何体是三棱柱．故选：B．

8.【解析】由三视图知：几何体是三棱柱消去一个同底的三棱锥，如图：三棱柱的高为 5，消去的三棱锥的高为 3，三棱锥与三棱柱的底面为直角边长分别为 3 和 4 的直角三角形，$\therefore$ 几何体的体积 $V=\frac{1}{2}\times3\times4\times5-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4\times3=30-6=24$．故选：C．

9.【解析】几何体的直观图如图：$AB=4$，$BD=4$，C 到 BD 的中点的距离为：4，$\therefore BC=CD=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$．$AC=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=6$，$AD=4\sqrt{2}$，显然 AC 最长．长为 6．故选：B．

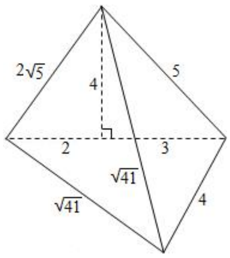
10.【解析】由三视图可知：该几何体是一个三棱锥，其中 $PA\perp$ 底面 ABC，$PA=2$，$AB\perp BC$，$AB=BC=1$．$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times BC=\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}$．因此 $V=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times PA=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{3}$．故选：B．

11．【解析】由三视图知，几何体是一个三棱锥，底面是直角边长为 $1cm$ 和 $2cm$ 的直角三角形，面积是 $\frac{1}{2}\times 1\times 2=1cm^2$，三棱锥的一条侧棱与底面垂直，且长度是 $3cm$，这是三棱锥的高，$\therefore$ 三棱锥的体积是 $\frac{1}{3}\times 1\times 3=1cm^3$，故选：A．

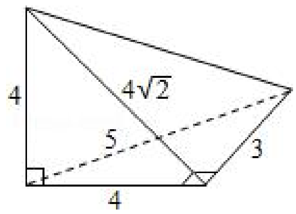
12．【解析】该几何体是三棱锥，底面是俯视图，三棱锥的高为 3．底面三角形斜边长为 6，高为 3 的等腰直角三角形，此几何体的体积为 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 6\times 3\times 3=9$．故选：B．

13．【解析】三视图复原的几何体是底面为直角边长为 4 和 5 的三角形，一个侧面垂直底面的等腰三角形，高为 4，底边长为 5，如图，所以 $S_{底}=\frac{1}{2}\times 4\times 5=10$，$S_{后}=\frac{1}{2}\times 5\times 4=10$，$S_{右}=\frac{1}{2}\times 4\times 5=10$，

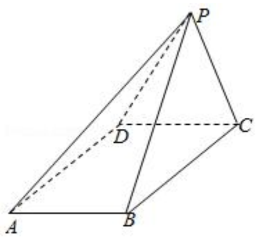
$S_{左}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\sqrt{(\sqrt{41})^2-(\sqrt{5})^2}=6\sqrt{5}$．几何体的表面积为：$S=S_{底}+S_{后}+S_{右}+S_{左}=30+6\sqrt{5}$．故选：B．



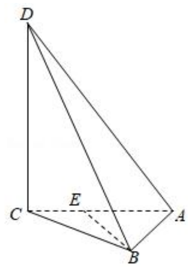
第 13 题



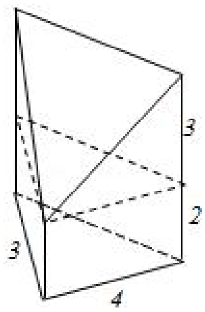
第 14 题



第 16 题



第 20 题



第 21 题

14．【解析】三视图复原的几何体是一个三棱锥，如图，四个面的面积分别为：8，6，$6\sqrt{2}$，10，显然面积的最大值，10．故选：C．

15．【解析】此几何体为一个三棱锥，其底面是边长为 6 的等腰直角三角形，顶点在底面的投影是斜边的中点

由底面是边长为 6 的等腰直角三角形知其底面积是 $\frac{1}{2}\times 6\times 6=18$，又直角三角形斜边的中点到两直角边的距离都是 3，棱锥高为 4，所以三个侧面中与底面垂直的侧面三角形高是 4，底面边长为 $6\sqrt{2}$，其余两个侧面的斜高为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$，故三个侧面中与底面垂直的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times 4\times 6\sqrt{2}=12\sqrt{2}$，另两个侧面三角形的面积都是 $\frac{1}{2}\times 6\times 5=15$，故此几何体的全面积是 $18+2\times 15+12\sqrt{2}=48+12\sqrt{2}$，故选：A．

16．【解析】如图，几何体是四棱锥，一个侧面 $PBC\perp$ 底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是正方形，$V=\frac{1}{3}\times 20\times 20\times 20=\frac{8000}{3}$．

故选：B．

17.【解析】由三视图可知几何体为三棱锥，底面为俯视图三角形，底面积$S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 1=\sqrt{3}$，棱锥的高为$h=1$，$\therefore$棱锥的体积$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{3}$．故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{3}$．

18.【解析】由已知中的三视图可得：该几何体上部是一个以俯视图为底面四棱柱，棱柱的底面面积$S=\frac{1}{2}\times(1+2)\times 1=\frac{3}{2}$，棱柱的高为 1，故棱柱的体积$V=\frac{3}{2}$，故答案为：$\frac{3}{2}$

19.【解析】由已知中的三视图可得：该几何体是一个以俯视图为底面的四棱锥，棱锥的底面是底为 2，高为 1 的平行四边形，故底面面积$S=2\times 1=2m^2$，棱锥的高$h=3m$，故体积$V=\frac{1}{3}Sh=2m^3$，故答案为：2

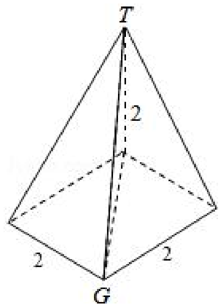
20.【解析】由主视图知$CD\perp$平面ABC，设AC中点为E，则$BE\perp AC$，且$AE=CE=1$．由主视图知$CD=2$由左视图知$BE=1$，在$Rt\triangle BCE$中，$BC=\sqrt{2}$，在$Rt\triangle BCD$中，$BD=\sqrt{6}$，在$Rt\triangle ACD$中，$AD=2\sqrt{2}$．三棱锥中最长棱的长为$2\sqrt{2}$．故答案为：$2\sqrt{2}$．

21.【解析】几何体为三棱柱去掉一个三棱锥后的几何体，底面是直角三角形，直角边分别为 3，4，侧面的高为 5，被截取的棱锥的高为 3．如图：$V=V_{棱柱}-V_{棱锥}=\frac{1}{2}\times 3\times 4\times 5-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times 4\times 3=24(cm^3)$故答案为：24．

22.【解析】几何体为底面边长为 3 的正方形，高为 1 的四棱锥，所以体积$V=\frac{1}{3}\times 3^2\times 1=3$．故答案为：3．

23.【解析】由三视图知，几何体是一个三棱锥，底面是直角边长为$1cm$和$3cm$的直角三角形，面积是$\frac{1}{2}\times 1\times 3=\frac{3}{2}cm^2$，三棱锥的一条侧棱与底面垂直，且长度是$2cm$，这是三棱锥的高，$\therefore$三棱锥的体积是$\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times 2=1cm^3$，故答案为：1．

24.【解析】由三视图可知，此多面体是一个底面边长为 2 的正方形，且有一条长为 2 的侧棱垂直于底面的四棱锥，所以最长棱长为$\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$．



25.【解析】根据三视图可知，几何体的体积为：$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 5\times 6\times h=5h$，又因为$V=20$，所以$h=4$，故答案为：4

26.【解析】这是一个三棱锥，高为 2，底面三角形一边为 4，这边上的高为 3，体积等于$\frac{1}{6}\times 2\times 4\times 3=4$，故答案为：4

专题 2 多面体的外接球

基础自测

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	A	C	C	C	D	D	C	C	D	A	B	A	C	A
题号	15	16	17	18	19									
答案	C	C	A	C	D									

【部分解析】

15．$R_1=R_2=\dfrac{l}{2}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow R=\dfrac{5}{2}$，故 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{125\pi}{6}$，故选 C.

16．球顶高最大原理，底面为直角三角形，典型的切瓜模型，$R_1=1$，$R=\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{l}{2}=1$，故根据双半径单交线公式定理可得 $R_2=\dfrac{5}{4}$，$(h-R_2)^2=R_2{}^2-R_1{}^2\Rightarrow h=2$，故 $V_{\max}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2=\dfrac{2}{3}$，故选 C.

17．切瓜模型，BAC 的外接圆半径为 $R_1=1$，且交线 $AC=2\Rightarrow\dfrac{l}{2}=1$，故 $R=R_2=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，故选 A.

18．和 3 题一样，属于 $\dfrac{l}{2}=R_1$ 模型，故选 C.

19．$R_1=\dfrac{l}{2}=1$，$R=R_2\Rightarrow 2R=\dfrac{2}{\sin 60^\circ}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\Rightarrow R=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，故 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32\sqrt{3}\pi}{27}$，故选 D.

达标训练

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	D	C	C	D	B	C	D	C	B	D	D	B	D	C

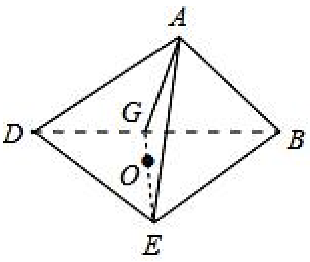
15. 52π　　16. $\dfrac{630\pi}{13}$　　17. $2\sqrt{2}$　　18. 12π

【部分解析】

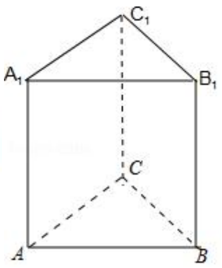
1.【解析】法一：按照直三棱柱切割体模型理解，$h=2$，且 $r=1$，$R=\sqrt{(\dfrac{h}{2})^2+r^2}=\sqrt{2}$，该几何体外接球的表面积为 $4\pi\times(\sqrt{2})^2=8\pi$．故选 D．

法二：垂直平面模型，按照双半径单交线公式 $R_1=1=\dfrac{l}{2}$，$R_2=R=\sqrt{2}$，故选 D．

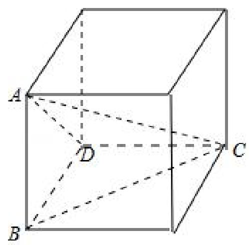
2.【解析】如图，由 $AB=1,DA=\sqrt{3}$，$BD=2$，得 $AD\perp AB$，取 BD 中点 G，则 G 为 ΔABD 的外心，设正三角形 BDE 得外心为 O，可知当平面 $ABD\perp$ 平面 BDE 时，满足球顶高最大模型，此时三棱锥 $E-ABD$ 的外接球的半径有最小值为 $OE=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$．$\therefore$ 三棱锥 $E-ABD$ 的外接球的最小表面积为 $4\pi\times(\dfrac{2\sqrt{3}}{3})^2=\dfrac{16\pi}{3}$．故选 C．



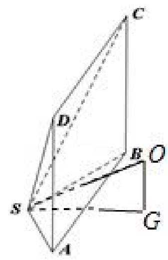
第 2 题



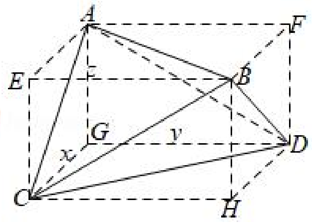
第 3 题



第 4 题



第 5 题



第 6 题

3. 【解析】如图，两两垂直为长方体切割体模型，设 $AB=AC=x$， $AA_1=y$，则三棱柱的侧面积为 $2xy+\sqrt{2}xy=\sqrt{2}+1$，得 $xy=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．把三棱锥补形为长方体，则其对角线长为 $\sqrt{2x^2+y^2}\geqslant\sqrt{2\sqrt{2}xy}=\sqrt{2}$．当且仅当 $\sqrt{2}x=y$，即 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $y=1$ 时上式取“=”．$\therefore$ 三棱锥外接球半径的最小值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，表面积的最小值为 $4\pi\times(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2=2\pi$．故选：$C$．

4. 【解析】鳖臑模型，由题意，四面体有四个面都为直角三角形，四面体放到长方体中，$AB\perp$ 平面 BCD，$AB=BD=CD=2$，可得长方体的对角线为 $\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$．$\therefore$ 球 O 的半径 $R=\sqrt{3}$．球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=12\pi$．故选 D．

5. 【解析】法一：由于四边形 $ABCD$ 为矩形，得 $AB\perp AD$，又 $SA\perp AD$，且 $SA\cap AB=A$，$\therefore AD\perp$ 平面 SAB，则平面 $SAB\perp$ 平面 $ABCD$，设三角形 SAB 的外心为 G，则 $r=GA=\dfrac{AB}{2\sin\angle ASB}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sin120^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$．过 G 作 $GO\perp$ 底面 SAB，且 $OG=\dfrac{h}{2}=1$，则 $OS=\sqrt{r^2+(\dfrac{h}{2})^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$．$\therefore S=4\pi\times(\sqrt{5})^2=20\pi$．故选 B．

法二：双半径交单线模型：设三角形 SAB 的外接圆 $R_1=\dfrac{AB}{2\sin\angle ASB}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sin120^\circ}=2$， $ABCD$ 为矩形，故其外接圆 $R_2=2$， $\dfrac{l}{2}=\sqrt{3}$，故 $R^2={R_1}^2+{R_2}^2-\dfrac{l^2}{4}=5$， $\therefore S=4\pi\times5=20\pi$．故选 B．

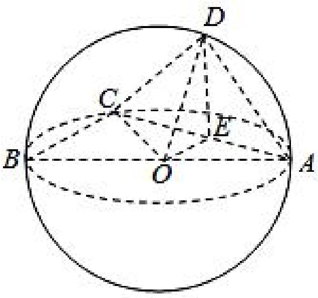
6. 【解析】对边相等的四面体，还原为长方体，如图所示，将四面体 $ABCD$ 放在长方体 $AEBF-GCHD$ 内，

7. 设该长方体的长、宽、高分别为 x、y、z，则长方体的体对角线长即为长方体的外接球直径，设该长方体的外接球半径为 R，由勾股定理得 $\begin{cases}AB^2=x^2+y^2=3\\AC^2=x^2+z^2=4\\AD^2=y^2+z^2=5\end{cases}$，上述三个等式全加得 $2(x^2+y^2+z^2)=12$，所以，该四面体的外接球直径为 $2R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{6}$，因此，四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=\pi\times(2R)^2=6\pi$，故选 C．

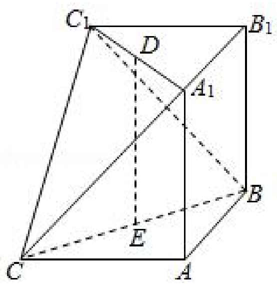
8. 【解析】法一：如图：$AB=4$，$AD=CD=2$，$\therefore AC=2\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{2}$，取 AC 的中点 E，AB 的中点 O，连结 DE，OE，$\because$ 平面 $DCA\perp$ 平面 ACB，$DE\perp AC$ $\therefore DE\perp$ 平面 ACB，$\because DE=\sqrt{2}$，$OE=\sqrt{2}$，$\therefore OD=2$，$\therefore OB=OA=OC=OD$，$\therefore OB=2$，即外接球的半径为 2，此时三棱锥外接球的表面积为 $4\pi\cdot 2^2=16\pi$．

故选 D．

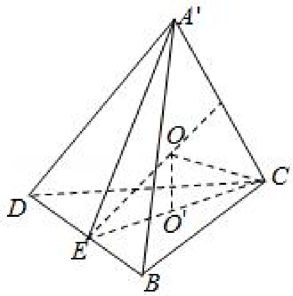
法二：两半平面垂直用双半径单交线模型：$R_1=\dfrac{l}{2}=\sqrt{2}$，故 $R=R_2=\dfrac{AB}{2}=2$，$S=4\pi\cdot 2^2=16\pi$，故选 D·



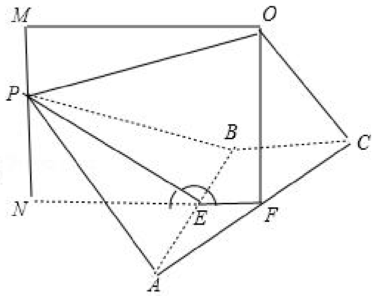
第 7 题



第 8 题



第 9 题



第 10 题

8.【解析】由题意，多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 为棱长为 $\sqrt{2}$ 的正方体，切去一个角，$\therefore$ 多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的直径为 $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}$，半径为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\therefore$ 多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\cdot(\dfrac{\sqrt{6}}{2})^2=6\pi$．

故选：C．

9. 【解析】法一：如图，由题意可知，$A'B=A'D=BD=BC=CD=2$，$A'C=\sqrt{3}$，取 BD 的中点 E，连接 EC，设球心为 O，连接 EO，CO，O' 为底面 BCD 的中心，连接 OO'，$OO'\perp$ 底面 BCD，可得 $OO'\perp CE$，且 $CE=A'E=A'C=\sqrt{3}$，即有 $OE\perp A'C$，且直角三角形 OEO' 中，$\angle OEC=30^\circ$，$O'E=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$O'C=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$OO'=O'E\tan 30^\circ=\dfrac{1}{3}$，即有 $R=OC=\sqrt{(\dfrac{1}{3})^2+(\dfrac{2\sqrt{3}}{3})^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$，则 $A'-BCD$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=\dfrac{52\pi}{9}$，

故选 A．

法二：此为两个全等的等腰三角形共底边构成的外接球模型，且二面角 $\alpha=60^\circ$，底面 BCD 外接圆半径 $r=\dfrac{BD}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，高为 $h=\sqrt{3}$，故 $R=\sqrt{r^2+(h-r)^2\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$，故选 A.

10.【解析】法一：取 AB 中点 E，AC 中点 F，易知 $AB\perp EF$，$AB\perp EP$，$\therefore\angle PEF=150^\circ$，且平面 $PEF\perp$ 平面 ABC，$\therefore$ 作 $PN\perp EF$ 交 FE 的延长线于 N，则 $PN\perp$ 平面 ABC，球心 O 在过 F 与平面 ABC 垂直的直线上如图：作 $OM\perp PN$ 于 M，设 $OF=x$，由已知条件可得 $FC=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$，$EF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$EN=PE\cos 30^\circ=2\sqrt{3}$，$PN=PE\sin 30^\circ=2$，从而 $PM=x-2$，$OM=EF+EN=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$，在直角三角形 OMP 中，$OP^2=(x-2)^2+(\dfrac{5\sqrt{3}}{2})^2$，在直角三角形 OFC 中，$OC^2=x^2+(\dfrac{\sqrt{11}}{2})^2$ 由 $OP^2=OC^2$ 解得 $x=5$，

$\therefore OC^2=\dfrac{111}{4}$，$\therefore S_{球}=4\pi OC^2=111\pi$，故选 D．

法二：二面角模型用双距离单交线公式，以法一的图为基准，可以发现 $m=|EF|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$R_2=\dfrac{|PB|}{2\sin\angle PAB}=\dfrac{9}{4}$，$n=h-R_2=\dfrac{7}{4}$，$\dfrac{l}{2}=\sqrt{2}$，$\alpha=150^\circ$，故 $R^2=\dfrac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{l^2}{4}=\dfrac{111}{4}$，故 $S=4\pi R^2=111\pi$，故选：D．

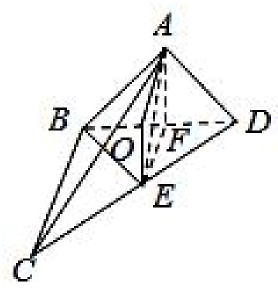
11.【解析】法一：取 AC 中点 D，连接 SD，BD，则由 $AB=BC$，$SA=SC$ 得出 $SD\perp AC$，$BD\perp AC$，$\therefore\angle SDB$ 为 $S-AC-B$ 的平面角，且 $AC\perp$ 面 SBD．$\because AB=BC=\sqrt{2}$，$AC=2$，易得：ΔABC 为等腰直角三角形，又 $\because BD\perp AC$，故 $BD=AD=\frac{1}{2}AC$，在 ΔSBD 中，$BD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 2=1$，在 ΔSAC 中，$SD^2=SA^2-AD^2=3$，在 ΔSBD 中，由余弦定理得 $SB^2=SD^2+BD^2-2SD\cdot BD\cos\angle SDB=3+1-2\times\sqrt{3}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2$，满足 $SB^2=SD^2-BD^2$，$\therefore\angle SBD=90^\circ$，$SB\perp BD$，又 $SB\perp AC$，$BD\cap AC=D$，$\therefore SB\perp$ 面 ABC．

以 SB，BA，BC 为棱可以补成一个棱长为 $\sqrt{2}$ 的正方体，S、A、B、C 都在正方体的外接球上，正方体的对角线为球的一条直径，所以 $2R=\sqrt{3}\times\sqrt{2}$，$R=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\therefore$ 球的表面积 $S=4\pi\times(\frac{\sqrt{6}}{2})^2=6\pi$．故选：$D$．

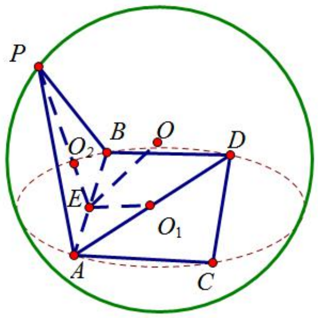
法二：根据双距离单交线公式，$m=0$，$n=\frac{1}{3}|SD|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{l}{2}=1$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 故 $R^2=\frac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{l^2}{4}=\frac{3}{2}$，故 $S=4\pi R^2=6\pi$，故选 D．

12.【解析】法一：取 CD 中点 E，BD 中点 F，连结 BE、AF、EF，$\because$ 四面体 $ABCD$ 中，面 ABD 和面 BCD 都是等腰 $Rt\triangle$，$AB=\sqrt{2}$，$\angle BAD=\angle CBD=\frac{\pi}{2}$，且二面角 $A-BD-C$ 的大小为 $\frac{5\pi}{6}$，$\therefore AF\perp BD$，$EF\perp BD$，$\therefore\angle AFE$ 是二面角 $A-BD-C$ 的平面角，$\angle AFE=\frac{5\pi}{6}$，$BD=BC=\sqrt{2+2}=2$，$CD=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$，$CE=DE=\sqrt{2}$，$AF=BF=DF=EF=1$，$EF=\frac{1}{2}BC=1$，则点 E 为 ΔBCD 外接圆的圆心，点 F 为 ΔABD 外接圆的圆心，过点 E 作平面 BCD 的垂线 EO，过点 F 作平面 ABD 的垂线 FO，且直线 EO 与直线 FO 交于点 O，则点 O 为四面体 $ABCD$ 外接球的球心，易知 $\angle AFO=\angle OEF=\frac{\pi}{2}$，$\angle OFE=\angle AFE-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$，所以，$OF=\frac{EF}{\cos\angle OFE}=2$，所以，$OA=\sqrt{AF^2+OF^2}=\sqrt{5}$，则四面体 $ABCD$ 的外接球半径为 $\sqrt{5}$，因此，球 O 的表面积为 $4\pi\cdot(\sqrt{5})^2=20\pi$，故选 B．

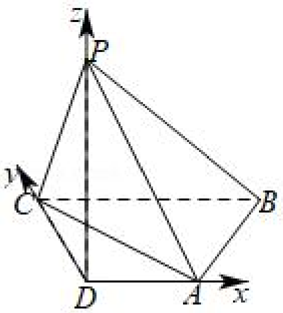
法二：双距离单交线公式，$m=|EF|=1$，，$n=0$，$\frac{l}{2}=1$，$\alpha=\frac{5\pi}{6}$，故 $R^2=\frac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{l^2}{4}=5$，故 $S=4\pi R^2=20\pi$，故选 B．



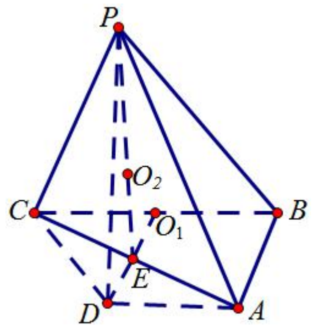
12 题图



13 题图



14 题图 1



14 题图 2

13.【解析】作出直观图，易知底面为一个矩形，故 $R_1=|AO_1|=2\sqrt{2}$，$m=|O_1E|=2$，在 ΔPAB 中，$|PE|=4$，

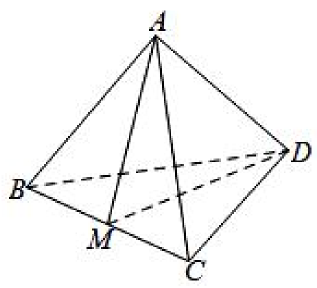
$|PA|=\sqrt{PE^2+AE^2}=2\sqrt{5}$，$R_2=\dfrac{|PA|}{2\sin\angle PBA}=\dfrac{5}{2}$，$n=|PE|-R_2=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{l}{2}=2$，根据正视图可知：$\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$，$R^2=\dfrac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{l^2}{4}=\dfrac{49}{3}$，故 $S=4\pi R^2=\dfrac{196}{3}\pi$，故选 D．

14.【解析】法一：作出该棱锥的实物图如图 1 所示，该几何体为三棱锥 $P-ABC$，且 ΔABC 为等腰直角三角形，腰长为 $BC=2$，过点 P 作 $PD\perp$ 平面 ABC，则 $AD\perp CD$，以点 D 为坐标原点，DA、DC、DP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyx$，则点 $A(1，0，0)$、$B(2，1，0)$、$C(0，1，0)$、$P(0，0，2)$，设球心的坐标为 $(x，y，z)$，则 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+z^2=(x-2)^2+(y-1)^2+z^2\\x^2+(y-1)^2+z^2=(x-2)^2+(y-1)^2+z^2\\x^2+y^2+(z-2)^2=(x-2)^2+(y-1)^2+z^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=\dfrac{5}{4}\end{cases}$，

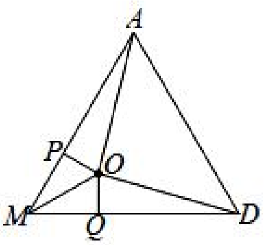
所以，该棱锥的外接球的半径为 $R=\sqrt{0^2+1^2+(\dfrac{5}{4})^2}=\dfrac{\sqrt{41}}{4}$，因此，该棱锥的外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=\dfrac{41}{4}\pi$．故选：$C$．

法二：如图 2 所示，根据俯视图可知 O_1 位于 BC 边中点位置，E 为 AC 边中点，$m=|O_1E|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，在 ΔPAC 中，$|PE|=\sqrt{PD^2+DE^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$|CE|=\dfrac{l}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{O_2C^2-O_2E^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2}-n\right)^2-n^2}\Rightarrow n=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，根据 PED 可知：$\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$，$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$R^2=\dfrac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{l^2}{4}=\dfrac{41}{16}$，故 $S=4\pi R^2=\dfrac{41}{4}\pi$，故选：$C$．

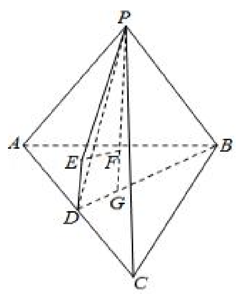
15.【解析】如图 1 所示，取 BC 的中点 M，连接 AM、DM，则 $AM\perp BC$，且 $DM\perp BC$，所以，二面角 $A-BC-D$ 的平面角为 $\angle AMD=60^\circ$，且 $AM=DM=AB\sin 60^\circ=3\sqrt{3}$，则 ΔADM 是边长为 $3\sqrt{3}$ 的正三角形，



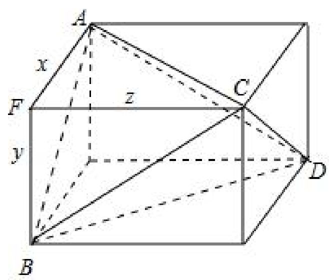
15 题图 1



15 题图 2



16 题图



17 题图

法一：如图 2 所示，符合两全等的等腰三角形共底边模型，设 ΔABC 和 ΔBCD 的外心分别为点 P、Q，则 $h-r=PM=QM=\dfrac{1}{3}AM=\sqrt{3}$，过点 P、Q 在平面 ADM 内作 AM 和 DM 的垂线交于点 O，则 O 为该三棱锥的外接球球心，易知，$\dfrac{\alpha}{2}=\angle OMP=30^\circ$，所以，$OP=PM\cdot\tan 30^\circ=1$，$PA=\dfrac{2}{3}AM=2\sqrt{3}$，所以，球 O 的半径为 $OA=\sqrt{(h-r)^2\tan^2\dfrac{\alpha}{2}+r^2}=\sqrt{OP^2+PA^2}=\sqrt{13}$，因此，$S=4\pi\times(\sqrt{13})^2=52\pi$．故答案为 52π．

法二：$m=n=\frac{1}{3}|AM|=\sqrt{3}$，$\frac{l}{2}=|MC|=3$，$\alpha=60°$，$R^2=\frac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{l^2}{4}=13$，

$S=4\pi\times(\sqrt{13})^2=52\pi$．故答案为 52π．

16.【解析】法一：取 AC 中点 D，连结 BD，PD，$\because$ 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$AB=BC=3\sqrt{2}$，侧面 PAC 为正三角形，且顶点 P 在底面上的射影落在 ΔABC 的重心 G 上，

$\therefore AD=DC=BD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2}=3$，$\therefore DG=1$，$BG=2$，$PD=\sqrt{PA^2-AD^2}=3\sqrt{3}$，

$PG=\sqrt{PD^2-DG^2}=\sqrt{26}$，设三棱锥 $P-ABC$ 外接球球心为 E，由 $ED\perp$ 平面 ABC，作 $EF\perp PG$ 交 PG 于 F，

则 $PE=AE=R$，设 $DE=x$，$PF=\sqrt{26}-x$，$\therefore\sqrt{1^2+(\sqrt{26}-x)^2}=\sqrt{3^2+x^2}$，解得 $x=\frac{9}{\sqrt{26}}$，

$\therefore R=\sqrt{9+\frac{81}{26}}=\sqrt{\frac{315}{26}}$，$\therefore$ 该三棱锥的外接球的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times\frac{315}{26}=\frac{630\pi}{13}$．故答案为：$\frac{630\pi}{13}$．

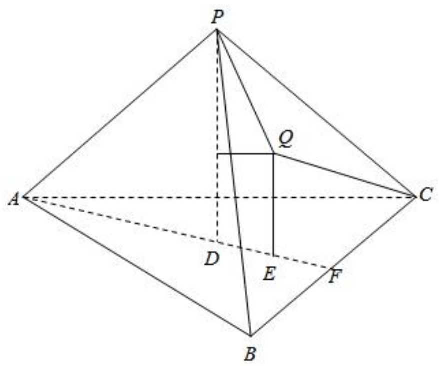
法二：显然底面的 $m=0$，$n=\frac{1}{3}|PD|=\sqrt{3}$，二面角大小 $\cos\alpha=\frac{|DG|}{|PD|}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$，$\sin^2\alpha=\frac{26}{27}$，$\frac{l}{2}=|AC|=3$，

$R^2=\frac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{l^2}{4}=\frac{315}{26}$，$S=4\pi R^2=4\pi\times\frac{315}{26}=\frac{630\pi}{13}$．故答案为：$\frac{630\pi}{13}$．

17.【解析】由题意可知，四面体 $ABCD$ 的对棱都相等，故该四面体可以通过补形补成一个长方体，如图所示：设 $AF=x$，$BF=y$，$CF=z$，则 $\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{5}$，又 $4\pi\times(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2})^2=9\pi$，

可得 $x=y=2$，$\therefore a=\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{2}$．故答案为：$2\sqrt{2}$．

18.【解析】如图，三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=BC=AC=3$，$\angle PAC=\angle PAB$，$PA=2$，E 为 ΔABC 外接圆的圆心，则 $AE=\frac{2}{3}\sqrt{3^2-(\frac{3}{2})^2}=\frac{2}{3}\bullet\frac{3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$PA$ 与平面 ABC 所成角 $\angle PAF$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，即



$\cos\angle PAF=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AD$ 的长度为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$．则 PA 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，$PD=PA\bullet\sin\angle PAD=2\bullet\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$．设外接球的球心为 O 半径为 r，则 $r^2=EO^2+AE^2$，……①$(PD-OE)^2+ED^2=r^2$……②

由①②解得：$r=\sqrt{3}$，三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为

$S=4\pi r^2=12\pi$．故答案为：12π．(此题依然可以用双距离单交线公式，此处省略具体过程)

专题3 多面体的内切球

1．A； 2．C； 3．A； 4．$\frac{4\pi}{81}$； 5．$\frac{32\pi}{81}$；

6．$\sqrt{15}-2\sqrt{3}$； 7．$24\pi-8\sqrt{2}\pi$； 8．$\sqrt{6}\pi$； 9．$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$； 10．$\frac{2\pi}{3}$.

专题4 线面平行和面面平行的判定及性质

达标训练 1

一．选择题（共19小题）

1．B； 2．D； 3．B； 4．D； 5．D； 6．B； 7．C； 8．B； 9．A； 10．D； 11．C； 12．D； 13.C； 14．C； 15．B； 16．D； 17．D； 18．D； 19．B；

二．填空题（共1小题）

20．<u>P是CC_1中点</u>；

达标训练 2

一．选择题（共6小题）

1．A； 2．A； 3．B； 4．C； 5．D； 6．D；

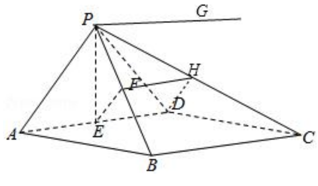
二．填空题（共1小题）

7．$\sqrt{2}$；

专题5 线面平行与面面平行解答题

1.【证明】(1) 平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB//A_1B_1$，$AB//A_1B_1$，$AB\not\subset$平面A_1B_1C，$A_1B_1\subset//$平面$A_1B_1C\Rightarrow AB//$平面A_1B_1C.

2.【解析】存在P是AM的中点，理由：连接BD交AC于O，取AM的中点P，连接 OP，可得$MC//OP$，$MC\not\subset$平面BDP，$OP\subset$平面BDP，所以$MC//$平面PBD.



3.【解析】取PC的中点H，连接DH，FH，在三角形PCD中，FH为中位线，

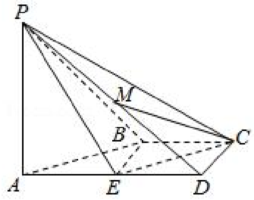
可得$FH//BC$，$FH=\frac{1}{2}BC$，由$DE//BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$，可得$DE=FH$，$DE//FH$，

四边形$EFHD$为平行四边形，可得$EF//DH$，$EF\not\subset$平面PCD，$DH\subset$平面PCD，即有$EF//$平面PCD.

4.【证明】取B_1D_1中点G，连结A_1G、CG，$\because$四边形$ABCD$为正方形，O为AC与BD 的交点，$\therefore$四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$截去三棱锥$C_1-B_1CD_1$后，$A_1G\underline{\parallel}OC$，$\therefore$四边形$OCGA_1$是平行四边形，$\therefore A_1O//CG$，$\because A_1O\not\subset$平面$B_1CD_1$，$CG\subset$平面$B_1CD_1$，$\therefore A_1O//$平面$B_1CD_1$.

5.【证明】$\because D$，E分别为AB，BC的中点，$\therefore DE$为ΔABC的中位线，$\therefore DE//AC$，$\because ABC-A_1B_1C_1$为棱柱，$\therefore AC//A_1C_1$，$\therefore DE//A_1C_1$，$\because A_1C_1\subset$平面A_1C_1F，且$DE\not\subset$平面A_1C_1F，$\therefore DE//A_1C_1F$.

6.【证明】M 为 PD 的中点，直线 $CM//$ 平面 PAB．取 AD 的中点 E，连接 CM，ME，CE，则 $ME//PA$，



$\because ME \not\subset$ 平面 PAB，$PA \subset$ 平面 PAB，$\therefore ME//$ 平面 PAB．

$\because AD//BC$，$BC = AE$，$\therefore ABCE$ 是平行四边形，$\therefore CE//AB$．

$\because CE \not\subset$ 平面 PAB，$AB \subset$ 平面 PAB，$\therefore CE//$ 平面 PAB．

$\because ME \cap CE = E$，$\therefore$ 平面 $CME//$ 平面 PAB，

$\because CM \subset$ 平面 CME，$\therefore CM//$ 平面 PAB

若 M 为 AD 的中点，连接 CM，由四边形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$\angle ADC = \angle PAB = 90°$，$BC = CD = \dfrac{1}{2}AD$．

可得四边形 $ABCM$ 为平行四边形，即有 $CM//AB$，$CM \not\subset$ 平面 PAB，$AB \subset$ 平面 PAB，$\therefore CM//$ 平面 PAB．

7.【证明】连接 A_1B，在△ A_1BC 中，$\because E$ 和 F 分别是 BC 和 A_1C 的中点，$\therefore EF//A_1B$，

又 $\because A_1B \subset$ 平面 A_1B_1BA，$EF \not\subset$ 平面 A_1B_1BA，$\therefore EF//$ 平面 A_1B_1BA．

8.【证明】证法一：如图所示，连接 DG，CD，设 $CD \cap GF = M$，连接 MH．

在三棱台 $DEF - ABC$ 中，$AB = 2DE$，G 为 AC 的中点．$\therefore DF \underset{=}{//} GC$，$\therefore$ 四边形 $CFDG$ 是平行四边形，

$\therefore DM = MC$．又 $BH = HC$，$\therefore MH//BD$，又 $BD \not\subset$ 平面 FGH，$MH \subset$ 平面 FGH，$\therefore BD//$ 平面 FGH．

证法二：在三棱台 $DEF - ABC$ 中，$AB = 2DE$，H 为 BC 的中点．$\therefore BH \underset{=}{//} EF$，

$\therefore$ 四边形 $BHFE$ 为平行四边形．$\therefore BE//HF$．在 ΔABC 中，G 为 AC 的中点，H 为 BC 的中点，$\therefore GH//AB$，

又 $GH \cap HF = H$，$\therefore$ 平面 $FGH//$ 平面 $ABED$，$\because BD \subset$ 平面 $ABED$，$\therefore BD//$ 平面 FGH．

9.【证明】$\because D$、E 为 PC、AC 的中点，$\therefore DE//PA$，又 $\because PA \not\subset$ 平面 DEF，$DE \subset$ 平面 DEF，$\therefore PA//$ 平面 DEF．

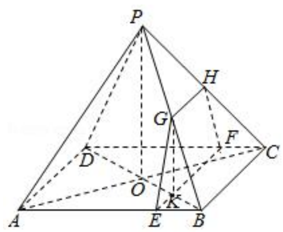
10.【证明】连接 CE，则 $\because AD//BC$，$BC = \dfrac{1}{2}AD$，E 为线段 AD 的中点，$\therefore$ 四边形 $ABCE$ 是平行四边形，

$BCDE$ 是平行四边形，

设 $AC \cap BE = O$，连接 OF，则 O 是 AC 的中点，$\because F$ 为线段 PC 的中点，$\therefore PA//OF$，

$\because PA \not\subset$ 平面 BEF，$OF \subset$ 平面 BEF，$\therefore AP//$ 平面 BEF．

11.【证明】(1) $\because BC//$ 平面 $GEFH$，平面 $GEFH \cap$ 平面 $ABCD = EF$，$BC \subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore BC//EF$，$\because EF \not\subset$ 平面 PBC，$BC \subset$ 平面 PBC，$\therefore EF//$ 平面 PBC，



$\because$ 平面 $EFGH \cap$ 平面 $PBC = GH$，$\therefore EF//GH$．

【解析】(2) 连接 AC，BD 交于点 O，BD 交 EF 于点 K，连接 OP，GK．

$\because PA = PC$，O 为 AC 中点，$\therefore PO \perp AC$，同理可得 $PO \perp BD$，

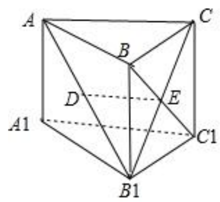
又 $\because BD \cap AC = O$，$AC \subset$ 底面 $ABCD$，$BD \subset$ 底面 $ABCD$，$\therefore PO \perp$ 底面 $ABCD$，

又 $\because$ 平面 $GEFH \perp$ 平面 $ABCD$，$PO \not\subset$ 平面 $GEFH$，$\therefore PO//$ 平面 $GEFH$，

$\because$ 平面 $PBD \cap$ 平面 $GEFH = GK$，$\therefore PO//GK$，且 $GK \perp$ 底面 $ABCD$ $\therefore GK$ 是梯形 $GEFH$ 的高

$\because AB = 8$，$EB = 2$，$\therefore \dfrac{EB}{AB} = \dfrac{KB}{DB} = \dfrac{1}{4}$，$\therefore KB = \dfrac{1}{4}DB = \dfrac{1}{2}OB$，即 K 为 OB 中点，

又 $\because PO//GK$，$\therefore GK = \dfrac{1}{2}PO$，即 G 为 PB 中点，且 $GH = \dfrac{1}{2}BC = 4$，



由已知可得 $OB = 4\sqrt{2}$，$PO = \sqrt{PB^2 - OB^2} = \sqrt{68 - 32} = 6$，$\therefore GK = 3$，

故四边形 $GEFH$ 的面积 $S = \dfrac{1}{2}(GH + EF) \times GK = \dfrac{1}{2}(4 + 8) \times 3 = 18$．

12.【证明】如上图所示，由据题意得，E 为 B_1C 的中点，D 为 AB_1 的中点，所以 $DE//AC$．

又因为 $DE \not\subset$ 平面 AA_1C_1C，$AC \subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $DE//$ 平面 AA_1C_1C．

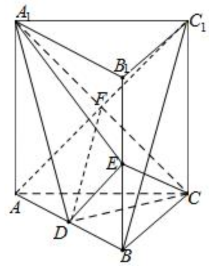
13．【证明】(1) 证明：连接 AC_1 交 A_1C 于点 F，则 F 为 AC_1 的中点.

$\because$ 直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D，E 分别是 AB，BB_1 的中点，故 DF 为三角形 ABC_1 的中位线，故 $DF//BC_1$．

由于 $DF \subset$ 平面 A_1CD，而 BC_1 不在平面 A_1CD 中，故有 $BC_1//$ 平面 A_1CD．

【解析】(2) $\because AA_1=AC=CB=2$，$AB=2\sqrt{2}$，故此直三棱柱的底面 ABC 为等腰直角三角形.

由 D 为 AB 的中点可得 $CD \perp$ 平面 ABB_1A_1，$\therefore CD=\dfrac{AC \bullet BC}{AB}=\sqrt{2}$．



$\because A_1D=\sqrt{A_1A^2+AD^2}=\sqrt{6}$，同理，利用勾股定理求得 $DE=\sqrt{3}$，$A_1E=3$．

再由勾股定理可得 $A_1D^2+DE^2=A_1E^2$，$\therefore A_1D \perp DE$．

$\therefore S_{\triangle A_1DE}=\dfrac{1}{2}\bullet A_1D \bullet DE=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore V_{C-A_1DE}=\dfrac{1}{3}\bullet S_{\triangle A_1DE}\bullet CD=1$．

专题 6 线面垂直的判定与证明

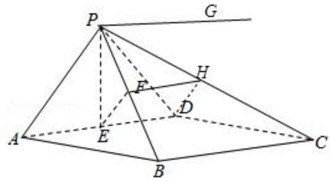
1．【证明】在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB$，$\Rightarrow$ 四边形 ABB_1A_1 是菱形，$\perp AB_1 \perp A_1B$．

在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB$，$AB_1 \perp B_1C_1 \Rightarrow AB_1 \perp BC$．

$$\therefore \begin{cases} AB_1 \perp A_1B, AB_1 \perp BC \\ A_1B \cap BC=B \\ A_1B \subset 面A_1BC, BC \subset 面A_1BC \end{cases} \Rightarrow AB_1 \perp 面\ A_1BC，且\ AB_1 \subset 平面\ ABB_1A_1 \Rightarrow 平面\ ABB_1A_1 \perp 平面\ A_1BC．$$

2．【证明】矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弦 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直，所以 $AD \perp$ 半圆弦 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面，$CM \subset$ 半圆弦 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面，$\therefore CM \perp AD$，M 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C，D 的点. $\therefore CM \perp DM$，$DM \cap AD=D$，$\therefore CM \perp$ 平面 AMD，$CM \subset$ 平面 CMB，$\therefore$ 平面 $AMD \perp$ 平面 BMC；

3．【证明】(1) $PA=PD$，E 为 AD 的中点，可得 $PE \perp AD$，底面 $ABCD$ 为矩形，可得 $BC//AD$，则 $PE \perp BC$；



(2) 由于平面 PAB 和平面 PCD 有一个公共点 P，且 $AB//CD$，在平面 PAB 内过 P 作直线 $PG//AB$，

可得 $PG//CD$，即有平面 $PAB \cap$ 平面 $PCD=PG$，

由平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$，又 $AB \perp AD$，可得 $AB \perp$ 平面 PAD，即有 $AB \perp PA$，

$PA \perp PG$；同理可得 $CD \perp PD$，即有 $PD \perp PG$，

可得 $\angle APD$ 为平面 PAB 和平面 PCD 的平面角，由 $PA \perp PD$，可得平面 $PAB \perp$ 平面 PCD；

4．【证明】(1) $\because$ 在平行四边形 $ABCM$ 中，$\angle ACM=90°$，$\therefore AB \perp AC$，又 $AB \perp DA$．且 $AD \cap AC=A$，$\therefore AB \perp$ 面 ADC，$\therefore AB \subset$ 面 ABC，$\therefore$ 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC；

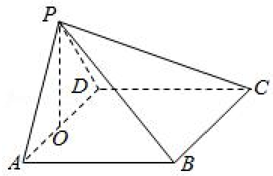
(2) $\because AB=AC=3$，$\angle ACM=90°$，$\therefore AD=AM=3\sqrt{2}$，$\therefore BP=DQ=\dfrac{2}{3}DA=2\sqrt{2}$，

由 (1) 得 $DC \perp AB$，又 $DC \perp CA$，$\therefore DC \perp$ 面 ABC，$\therefore$ 三棱锥 $Q-ABP$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABP}\times\dfrac{1}{3}DC$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}S_{\Delta ABC}\times\dfrac{1}{3}DC=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times3\times\dfrac{1}{3}\times3=1$．

5.【证明】(1) $\because$ 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$，$\therefore AB\perp PA$，$CD\perp PD$，

又 $AB//CD$，$\therefore AB\perp PD$，$\because PA\cap PD=P$，$\therefore AB\perp$ 平面 PAD，



$\because AB\subset$ 平面 PAB，$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PAD．

(2) 设 $PA=PD=AB=DC=a$，取 AD 中点 O，连结 PO，

$\because PA=PD=AB=DC$，$\angle APD=90^\circ$，平面 $PAB\perp$ 平面 PAD，

$\therefore PO\perp$ 底面 $ABCD$，且 $AD=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$，$PO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

$\because$ 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\dfrac{8}{3}$，由 $AB\perp$ 平面 PAD，得 $AB\perp AD$，$\therefore V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}\times S_{四边形ABCD}\times PO$

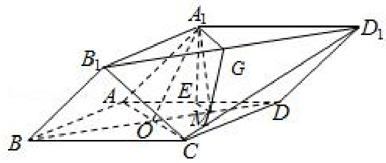
$=\dfrac{1}{3}\times AB\times AD\times PO=\dfrac{1}{3}\times a\times\sqrt{2}a\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=\dfrac{1}{3}a^3=\dfrac{8}{3}$，解得 $a=2$，$\therefore PA=PD=AB=DC=2$，$AD=BC=2\sqrt{2}$，

$PO=\sqrt{2}$，$\therefore PB=PC=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$，$\therefore$ 该四棱锥的侧面积：$S_{侧}=S_{\Delta PAD}+S_{\Delta PAB}+S_{\Delta PDC}+S_{\Delta PBC}$

$=\dfrac{1}{2}\times PA\times PD+\dfrac{1}{2}\times PA\times AB+\dfrac{1}{2}\times PD\times DC+\dfrac{1}{2}\times BC\times\sqrt{PB^2-(\dfrac{BC}{2})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\times2\times2+\dfrac{1}{2}\times2\times2+\dfrac{1}{2}\times2\times2+\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{8-2}=6+2\sqrt{3}$．

6.【证明】四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 后，$BD\underset{=}{//}B_1D_1$，



$\because M$ 是 OD 的中点，O 为 AC 与 BD 的交点，E 为 AD 的中点，$A_1E\perp$ 平面 $ABCD$，

又 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore BD\perp A_1E$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，O 为 AC 与 BD 的交点，$\therefore AO\perp BD$，

$\because M$ 是 OD 的中点，E 为 AD 的中点，$\therefore EM\perp BD$，

$\because A_1E\cap EM=E$，$\therefore BD\perp$ 平面 A_1EM，

$\because BD//B_1D_1$，$\therefore B_1D_1\perp$ 平面 A_1EM，

$\because B_1D_1\subset$ 平面 B_1CD_1，$\therefore$ 平面 $A_1EM\perp$ 平面 B_1CD_1．

7.【证明】在 $ABC-A_1B_1C_1$ 的直棱柱中，$\therefore AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，$\therefore AA_1\perp A_1C_1$，

又 $\because A_1C_1\perp A_1B_1$，且 $AA_1\cap A_1B_1=A_1$，AA_1、$A_1B_1\subset$ 平面 AA_1B_1B，$\therefore A_1C_1\perp$ 平面 AA_1B_1B，

$\because DE//A_1C_1$，$\therefore DE\perp$ 平面 AA_1B_1B，

又 $\because A_1F\subset$ 平面 AA_1B_1B，$\therefore DE\perp A_1F$，

又 $\because A_1F\perp B_1D$，$DE\cap B_1D=D$，且 DE、$B_1D\subset$ 平面 B_1DE，$\therefore A_1F\perp$ 平面 B_1DE，

又 $\because A_1F\subset$ 平面 A_1C_1F，$\therefore$ 平面 $B_1DE\perp$ 平面 A_1C_1F．

8.【证明】$\because PA\perp CD$，$\angle PAB=90^\circ$，AB 与 CD 相交，$\therefore PA\perp$ 平面 $ABCD$，

$\because BD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp BD$，

由 $BC=CD=\dfrac{1}{2}AD$，可得 $\angle BAD=\angle BDA=45^\circ$，$\therefore\angle ABD=90^\circ$，$\therefore BD\perp AB$，

$\because PA\cap AB=A$，$\therefore BD\perp$ 平面 PAB，$\because BD\subset$ 平面 PBD，$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PBD．(此题第一问参考线面平行部分)

9.【证明】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，$\therefore AC\perp BD$，

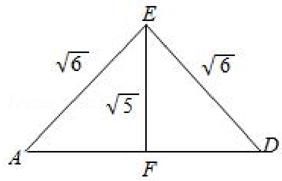
$\because BE\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore AC\perp BE$，则 $AC\perp$ 平面 BED，

$\because AC \subset$ 平面 AEC，$\therefore$ 平面 $AEC \perp$ 平面 BED；

（2）设 $AB = x$，在菱形 $ABCD$ 中，由 $\angle ABC = 120°$，得 $AG = GC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，$GB = GD = \dfrac{x}{2}$，

$\because BE \perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore BE \perp BG$，则 ΔEBG 为直角三角形，$\therefore EG = \dfrac{1}{2}AC = AG = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，

则 $BE = \sqrt{EG^2 - BG^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，



$\because$ 三棱锥 $E - ACD$ 的体积 $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} AC \bullet GD \bullet BE = \dfrac{\sqrt{6}}{24}x^3 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$，解得 $x = 2$，即 $AB = 2$，

$\because \angle ABC = 120°$，$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \bullet BC \cos ABC = 4 + 4 - 2 \times 2 \times 2 \times (-\dfrac{1}{2}) = 12$，即 $AC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$，

在三个直角三角形 EBA，EBD，EBC 中，斜边 $AE = EC = ED$，

$\because AE \perp EC$，$\therefore \Delta EAC$ 为等腰三角形，则 $AE^2 + EC^2 = AC^2 = 12$，即 $2AE^2 = 12$，$\therefore AE^2 = 6$，则 $AE = \sqrt{6}$，

$\therefore$ 从而得 $AE = EC = ED = \sqrt{6}$，$\therefore \Delta EAC$ 的面积 $S = \dfrac{1}{2} \times EA \bullet EC = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{6} = 3$，

在等腰三角形 EAD 中，过 E 作 $EF \perp AD$ 于 F，则 $AE = \sqrt{6}$，$AF = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2} \times 2 = 1$，

则 $EF = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - 1^2} = \sqrt{5}$，$\therefore \Delta EAD$ 的面积和 ΔECD 的面积均为 $S = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = \sqrt{5}$，

故该三棱锥的侧面积为 $3 + 2\sqrt{5}$．

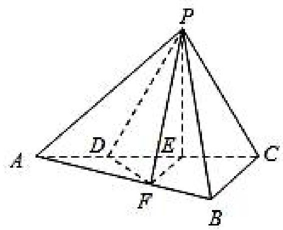
10．【解析】（1）如图，由 $DE = EC$，$PD = PC$ 知，E 为等腰 ΔPDC 中 DC 边的中点，故 $PE \perp AC$，

又平面 $PAC \perp$ 平面 ABC，平面 $PAC \cap$ 平面 $ABC = AC$，$PE \subset$ 平面 PAC，$PE \perp AC$，

所以 $PE \perp$ 平面 ABC，从而 $PE \perp AB$．因为 $\angle ABC = \dfrac{\pi}{2}$，$EF // BC$，故 $AB \perp EF$，

从而 AB 与平面 PEF 内两条相交直线 PE，EF 都垂直，所以 $AB \perp$ 平面 PEF．

（2）设 $BC = x$，则在直角 ΔABC 中，$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{36 - x^2}$，从而 $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \bullet BC = \dfrac{1}{2}x\sqrt{36 - x^2}$，



由 $EF // BC$ 知 $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{2}{3}$，得 $\Delta AFE \backsim \Delta ABC$，故 $\dfrac{S_{\Delta AFE}}{S_{\Delta ABC}} = (\dfrac{2}{3})^2 = \dfrac{4}{9}$，即 $S_{\Delta AFE} = \dfrac{4}{9}S_{\Delta ABC}$，

由 $AD = \dfrac{1}{2}AE$，$S_{\Delta AFD} = \dfrac{1}{2}S_{\Delta AFE} = \dfrac{1}{2} \bullet \dfrac{4}{9}S_{\Delta ABC} = \dfrac{2}{9}S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{9}x\sqrt{36 - x^2}$，

从而四边形 $DFBC$ 的面积为：$S_{DFBC} = S_{\Delta ABC} - S_{AFD} = \dfrac{1}{2}x\sqrt{36 - x^2} - \dfrac{1}{9}x\sqrt{36 - x^2} = \dfrac{7}{18}x\sqrt{36 - x^2}$．

由（I）知，$PE \perp$ 平面 ABC，所以 PE 为四棱锥 $P - DFBC$ 的高．

在直角 ΔPEC 中，$PE = \sqrt{PC^2 - EC^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$，

故体积 $V_{P-DFBC} = \dfrac{1}{3} \bullet S_{DFBC} \bullet PE = \dfrac{1}{3} \bullet \dfrac{7}{18}x\sqrt{36 - x^2} \bullet 2\sqrt{3} = 7$，

故得 $x^4 - 36x^2 + 243 = 0$，解得 $x^2 = 9$ 或 $x^2 = 27$，由于 $x > 0$，可得 $x = 3$ 或 $x = 3\sqrt{3}$．

所以：$BC = 3$ 或 $BC = 3\sqrt{3}$．

11.【解析】(1) 在图 1 中，因为 $AB=BC=\frac{1}{2}AD=a$， E 是 AD 的中点，$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，所以 $BE\perp AC$，

即在图 2 中， $BE\perp A_1O$， $BE\perp OC$，从而 $BE\perp$ 面 A_1OC，由 $CD//BE$，所以 $CD\perp$ 面 A_1OC，

(2) 即 A_1O 是四棱锥 A_1-BCDE 的高，根据图 1 得出 $A_1O=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

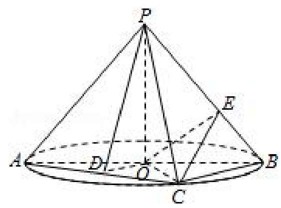
$\therefore$ 平行四边形 $BCDE$ 的面积 $S=BC\bullet AB=a^2$，

$V=\frac{1}{3}\times S\times A_1O=\frac{1}{3}\times a^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$，由 $V=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3=36\sqrt{2}$，得出 $a=6$.

12.【解析】(1) 在 ΔAOC 中，因为 $OA=OC$， D 为 AC 的中点，所以 $AC\perp DO$，
又 PO 垂直于圆 O 所在的平面，所以 $PO\perp AC$，因为 $DO\cap PO=O$，所以 $AC\perp$ 平面 PDO.
(2) 因为点 C 在圆 O 上，所以当 $CO\perp AB$ 时， C 到 AB 的距离最大，且最大值为 1，

又 $AB=2$，所以 ΔABC 面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$，又因为三棱锥 $P-ABC$ 的高 $PO=1$，

故三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为：$\frac{1}{3}\times 1\times 1=\frac{1}{3}$.



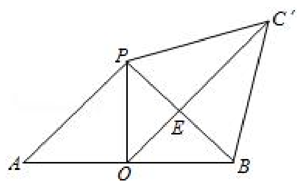
(3) 在 ΔPOB 中， $PO=OB=1$， $\angle POB=90°$，所以 $PB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，
同理 $PC=\sqrt{2}$，所以 $PB=PC=BC$，
在三棱锥 $P-ABC$ 中，将侧面 BCP 绕 PB 旋转至平面 $BC'P$，使之与平面 ABP 共面，如图所示，
当 O， E， C' 共线时， $CE+OE$ 取得最小值，又因为 $OP=OB$， $C'P=C'B$，

所以 OC' 垂直平分 PB，即 E 为 PB 中点. 从而 $OC'=OE+EC'=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

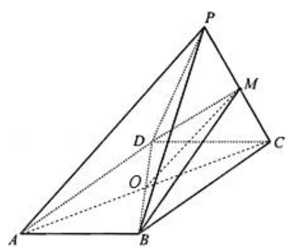
亦即 $CE+OE$ 的最小值为：$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

13.【证明】$\because D$、E 为 PC、AC 的中点，$\therefore DE=\frac{1}{2}PA=3$；又 $\because E$、F 为 AC、AB 的中点，$\therefore EF=\frac{1}{2}BC=4$；

$\therefore DE^2+EF^2=DF^2$， $\therefore\angle DEF=90°$， $\therefore DE\perp EF$； $\because DE//PA$， $PA\perp AC$，
$\therefore DE\perp AC$；



$\because AC\cap EF=E$， $\therefore DE\perp$ 平面 ABC； $\because DE\subset$ 平面 BDE， $\therefore$ 平面 $BDE\perp$ 平面 ABC.
14.【证明】(1) $\because AB\perp$ 平面 BCD， $CD\subset$ 平面 BCD， $\therefore AB\perp CD$，
$\because CD\perp BD$， $AB\cap BD=B$， $\therefore CD\perp$ 平面 ABD；
【解析】(2) $\because AB\perp$ 平面 BCD， $BD\subset$ 平面 BCD， $\therefore AB\perp BD$.



$\because AB=BD=1$， $\therefore S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}$， $\because M$ 为 AD 中点， $\therefore S_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABD}=\frac{1}{4}$，

$\because CD\perp$ 平面 ABD， $\therefore V_{A-MBC}=V_{C-ABM}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABM}\bullet CD=\frac{1}{12}$.

15.【证明】ΔABD 中， $AD=2$， $AB=1$， $\angle BAD=60°$，所以 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\bullet AD\cos\angle BAD=3$，
所以 $AD^2=AB^2+BD^2$，所以 $AB\perp BD$；
因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB//CD$，所以 $BD\perp CD$；
又因为平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$， $BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $BD\perp$ 平面 PCD；因为 $BD\subset$ 平面 MBD，所以平面 $MBD\perp$ 平面 PCD．

16.【解析】(1) 设 N 为 A_1B_1 的中点，连结 MN，AN、AC、CM，则四边形 $MNAC$ 为所作图形．

由题意知 $MN//A_1C_1$（或 $//EF$），四边形 $MNAC$ 为梯形，且 $MN=\dfrac{1}{2}AC=2\sqrt{2}$，

过 M 作 $MP\perp AC$ 于点 P，可得 $MC=\sqrt{8+4}=2\sqrt{3}$，$PC=\dfrac{AC-MN}{2}=\sqrt{2}$，

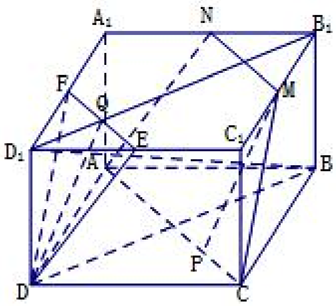
得 $MP=\sqrt{MC^2-QC^2}=\sqrt{10}$，$\therefore$ 梯形 $MNAC$ 的面积 $=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times\sqrt{10}=6\sqrt{5}$．

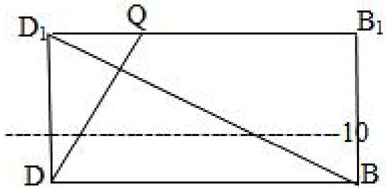
【证明】(2) 证法 1：在长方体中 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，设 D_1B_1 交 EF 于 Q，连接 DQ，

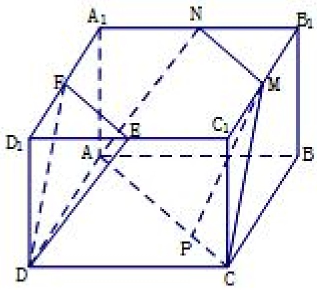
则 Q 为 EF 的中点并且为 D_1B_1 的四等点，如图，$D_1Q=\dfrac{1}{4}\times4\sqrt{2}=\sqrt{2}$，

由 $DE=DF$ 得 $DQ\perp EF$，又 $EF\perp BB_1$，$\therefore EF\perp$ 平面 BB_1D_1D，$\therefore EF\perp D_1B$，$\dfrac{D_1Q}{D_1D}=\dfrac{D_1D}{DB}=\dfrac{1}{2}$，

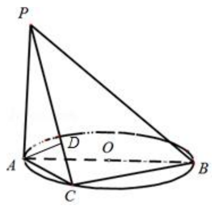
$\therefore\angle D_1QD=\angle BD_1D$，$\therefore\angle QD_1B+\angle D_1QD=\angle DD_1B+\angle BD_1Q=90^\circ$，$\therefore DQ\perp D_1B$，$\therefore D_1B\perp$ 平面 DEF．







17.【证明】因为 $MN\perp A_1C$，又 $MN\perp AA_1$，$AA_1\cap A_1C=A_1$，$AA_1\subset$ 平面 A_1ACC_1，$A_1C\subset$ 平面 A_1ACC_1，所以 $MN\perp$ 平面 A_1ACC_1．因为 $MN\subset$ 平面 A_1MC，所以平面 $A_1MC\perp$ 平面 A_1ACC_1．



18.【证明】(1) $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，点 C 是 $\odot O$ 上的动点，$\therefore\angle ACB=90^\circ$，即 $BC\perp AC$．

又 $\because PA$ 垂直于 $\odot O$ 所在的平面 ABC，$BC\subset$ 平面 $\odot O$，$\therefore PA\perp BC$

又 $PA\cap AC=A$，$\therefore BC\perp$ 平面 PAC．又 $BC\subset$ 平面 PBC，$\therefore$ 平面 $PAC\perp$ 平面 PBC．

【解析】(2) 由 (1) 知平面 $PAC\perp$ 平面 PBC，平面 $PAC\cap$ 平面 $PBC=PC$，过 A 点作 PC 的垂线，垂足为 D，显然 $AD\perp$ 平面 PBC，即 AD 为三棱锥 $A-PBC$ 的高

在 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{PAC}$ 中，$PA=3,AC=\sqrt{3}$，所以 $PC=2\sqrt{3}$，由 $AD\times PC=PA\times AC$，得 $AD=\dfrac{PA\times AC}{PC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

即点 A 到平面 PCB 的距离为 $\dfrac{3}{2}$，三棱锥点 A 到平面 PBC 的距离：$\dfrac{3}{2}$

19.【证明】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore$ 折起后 $PE\perp PA$，且 $PA=AB$，

$\because\angle PAB=60^\circ$，$\therefore\Delta PAB$ 是正三角形，$\therefore PB=PA$，

$\because$ 正方形 $ABCD$ 中，E 为 CD 的中点，$\therefore EA=EB$，$\therefore\Delta PAE\cong\Delta PBE$，$\therefore\angle EPB=\angle EPA$，$\therefore PE\perp PB$，

$\because PA\cap PB=P$，$\therefore PE\perp$ 平面 PAB，又 $PE\subset$ 平面 PEC，$\therefore$ 平面 $PEC\perp$ 平面 PAB．

(2) 设正方形的边长为 a，由 (1) 知 $PE\perp$ 平面 PAB，且 ΔPAB 是边长为 a 的正三角形，

$\because$ 三棱锥 $E-PEC$ 的体积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore V_{E-PAB}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $a=2$．$\therefore$ 该三棱锥的表面积：

$S=S_{\Delta PAE}+S_{\Delta PBE}+S_{\Delta PAB}+S_{\Delta EAB}=\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2+\frac{1}{2}\times2\times2=4+\sqrt{3}$.

20.【证明】(1) 因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$PA\perp AB$，$PA\subset$ 平面 PAB，所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$．又因为 $BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp BC$．

(2) 方法一：取 PD 中点 F，连接 EF，AF．在 ΔPCD 中，E，F 分别为 PC，PD 的中点，

所以 $EF//DC$ 且 $EF=\frac{1}{2}DC$．又因为 $AB//DC$ 且 $AB=\frac{1}{2}DC$，所以 $AB//EF$ 且 $AB=EF$．

所以四边形 $ABEF$ 为平行四边形．所以 $BE//AF$．因为 $AF\subset$ 平面 PAD，$BE\not\subset$ 平面 PAD，

所以 $BE//$ 平面 PAD．

方法二：取 DC 中点 G，连接 BG，EG．在 ΔPCD 中，E，G 分别为 PC，DC 的中点，

所以 $EG//PD$．又因为 $PD\subset$ 平面 PAD，$EG\not\subset$ 平面 PAD，所以 $EG//$ 平面 PAD．

因为 $AB//DG$ 且 $AB=DG$，所以四边形 $ABGD$ 为平行四边形．所以 $BG//AD$．

又因为 $AD\subset$ 平面 PAD，$BG\not\subset$ 平面 PAD，所以 $BG//$ 平面 PAD．

因为 $EG//$ 平面 PAD，$BG//$ 平面 PAD，$EG\cap BG=G$，所以平面 $BGE//$ 平面 PAD．

又因为 $BE\subset$ 平面 BGE，所以 $BE//$ 平面 PAD．

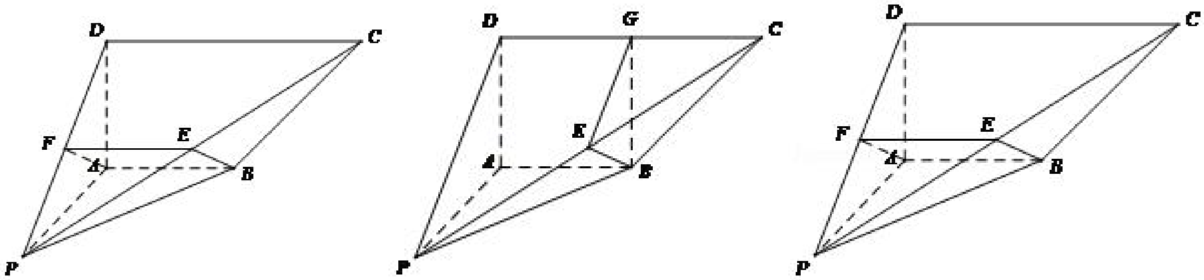
(3) 因为 $AP=AD$，F 为 PD 的中点，所以 $AF\perp PD$．又因为 $BE//AF$，所以 $BE\perp PD$．

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$DC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp DC$．因为 $AB//CD$，$\angle DAB=90^\circ$，所以 $AD\perp DC$．

因为 $DC\perp AD$，$DC\perp PA$，$AD\cap PA=A$，所以 $DC\perp$ 平面 PAD．又因为 $AF\subset$ 平面 PAD，所以 $DC\perp AF$．

又因为 $BE//AF$，所以 $DC\perp BE$．因为 $BE\perp DC$，$BE\perp PD$，$DC\cap PD=D$，所以 $BE\perp$ 平面 PDC．

又因为 $BE\subset$ 平面 PDC，所以平面 $PBC\perp$ 平面 PDC．



专题 7　线面垂直与面面垂直

1．B；　2．C；　3．C；　4．D；　5．C；6．C；7．B；　8．B；　9．C；　10．B；　11．C；　12．A；　13.D；
14．C；　15．C；　16．D；　17．A；　18．C；　19．C；　20．B；　21．B；　22．D；23．A；　24．B；　25.D；
26．D；　27．D；　28．B；　29．B.