专题 3　多面体内切球

第一讲 等体积法求内切球的半径

题设：正三棱锥求内切球半径（如图 1 所示）

第一步、先画出内切球的截面图如左图，E、H 分别为两个三角形的外心.

第二步、求 $DH=\frac{1}{3}BD$, $PO=PH-r$， PD 为侧面 ΔPAC 的高.

第三步、由 ΔPOE 相似于 ΔPDH ，建立等式：$\frac{OE}{DH}=\frac{PO}{PD}\Rightarrow$ 解出 r

正四面体（棱长为 a ）的外接球半径 R 与内切球半径 r 之比为 $R:r=3:1$.

外接球半径：$R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$，内切球半径：$r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$

正三棱柱的外接圆与内切圆：外接圆与内切圆圆心在同一条高上，但不重合.

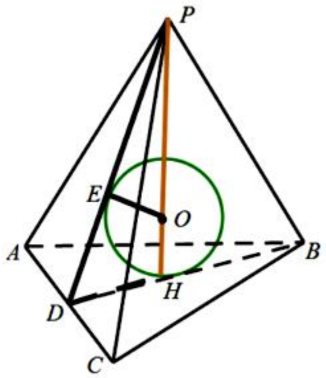


图 1

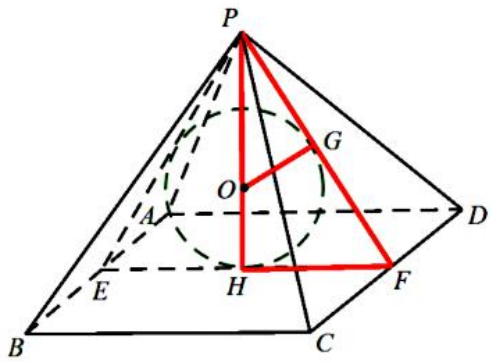


图 2

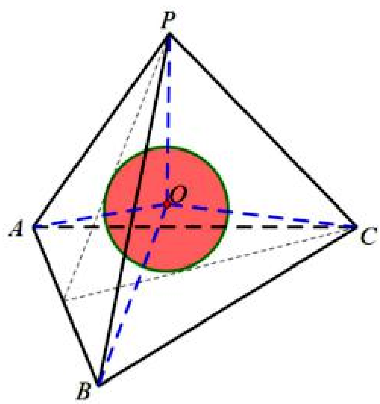


图 3

题设：正四棱锥求内切球半径（如图 2 所示）

第一步、先画出内切球的截面图如左图， P， O， H 三点共线.

第二步、求 $HF=\frac{1}{2}BC$, $PO=PH-r$， PF 为侧面 ΔPCD 的高.

第三步、由 ΔPOG 相似于 ΔPFH ，建立等式：$\frac{OG}{HF}=\frac{PO}{PF}\Rightarrow$ 解出 r .

题设：求任意三棱锥的内切球半径：等体积法（如图 3 所示）

第一步、先求出四个表面的面积和整个锥体的体积.

第二步、设内切球半径为 r ，建立等式：

$$V_{P-ABC}=V_{O-ABC}+V_{O-PAB}+V_{O-PAC}+V_{O-PBC}\Rightarrow V_{P-ABC}=\frac{1}{3}(S_{\Delta ABC}+S_{\Delta PAB}+S_{\Delta PAC}+S_{\Delta PBC})\cdot r .$$

第三步、解出 $r=\frac{3V_{P-ABC}}{S_{\Delta ABC}+S_{\Delta PAB}+S_{\Delta PAC}+S_{\Delta PBC}}$.

【例 1】已知正四面体 $A-BCD$，H 为底面的中心，O 为外接球的球心，设棱长为 a，外接球半径为 R，内切球半径为 r，求 R．

【解析】易知 $R+r=AH=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$，由等积法得：$V_{A-BCD}=V_{O-ACD}+V_{O-ABC}+V_{O-BCD}+V_{O-DAB}$

所以：$\dfrac{1}{3}h\cdot S_{\Delta BCD}=4\cdot\dfrac{1}{3}r\cdot S_{\Delta BCD}$ 故 $r=\dfrac{1}{4}h$，$R=\dfrac{3}{4}h$ 所以 $R=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$．

【例 2】（2013•江苏）一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$，四个顶点在同一球面上，则此球的表面积为（　　）

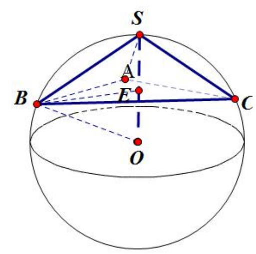
$A.3\pi$　　$B.4\pi$　　$C.3\sqrt{3}\pi$　　$D.6\pi$

【解析】将这个正四面体放入一个正方体中，再将这个正方体放入球中与球相外接．因为正方体的对角线就是球的直径，而正四面体的棱就是正方体的侧面对角线．所以，设正方体的棱长为 a，则有 $\sqrt{2}a=\sqrt{2}$，$a=1$，

$\therefore 2R=\sqrt{3}a=\sqrt{3}$，$\therefore R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{球}=3\pi$．故选 A．

【例 3】正三棱锥 $S-ABC$，底面边长为 3，侧棱长为 2，则其外接球和内切球的半径是多少？

【解析】由于底面边长大于侧棱，故外接球如图所示，O' 为内切球球心



$BE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot 3=\sqrt{3}$，$h=\sqrt{|SB|^2-|BE|^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$，

故 $(R-1)^2+(BE)^2=R^2\Rightarrow R=2$

$V_{S-ABC}=V_{O'-ABC}+V_{O'-BCS}+V_{O'-CSA}+V_{O'-SAB}\Rightarrow r=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{3S_{\Delta SAB}+S_{\Delta ABC}}=\dfrac{\sqrt{21}-3}{4}$．

达标训练

1．如图是棱长为 2 的正八面体（八个面都是全等的等边三角形），球 O 是该正八面体的内切球，则球 O 的表面积为（　　）

A．$\dfrac{8\pi}{3}$　　B．$\dfrac{4\pi}{3}$　　C．$\dfrac{8\sqrt{6}\pi}{27}$　　D．$\dfrac{4\sqrt{6}\pi}{27}$

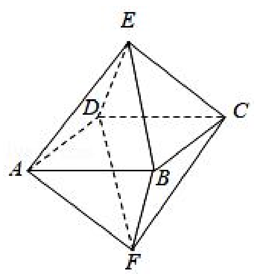
2．若某正四面体内切球的体积为 $\dfrac{4\pi}{3}$，则正四面体外接球的表面积为（　　）

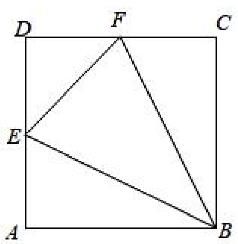
A．4π　　B．16π　　C．36π　　D．64π

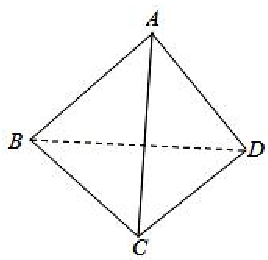
3．底面边长为 6 的正三棱锥的内切球半径为 1，则其外接球的表面积为（　　）

A．49π　　B．36π　　C．25π　　D．16π

4．如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 3，点 E，F 分别在边 AD，CD 上，且 $AE=DF=2$．将此正方形沿 BE，BF，EF 切割得到四个三角形，现用这四个三角形作为一个三棱锥的四个面，则该三棱锥的内切球的体积为__________．







第 1 题图　　　　第 4 题图　　　　第 8 题图

5．已知三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 底面 ABC，$AC=4$，$BC=3$，$AB=5$，$PA=3$，则该三棱锥的内切球的体积为_______.

6．在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中，$BD=2\sqrt{3}$，将菱形 $ABCD$ 沿对角线 AC 对折，使 $BD=\sqrt{6}$，则所得三棱锥 $A-BCD$ 的内切球的半径为_______.

7．在《九章算术》中，将四个面都为直角三角形的三棱锥称之为鳖臑（biē nào）．已知在鳖臑 $M-ABC$ 中，$MA\perp$ 平面 ABC，$MA=AB=BC=2$，则该鳖臑的外接球与内切球的表面积之和为__________.

8．如图，已知正四面体 $A-BCD$ 的高为 $2\sqrt{6}$，则它的内切球的体积为__________.

9．已知三棱锥 $P-ABC$ 的底面 ABC 是等腰三角形，$AB\perp AC$，$PA\perp$ 底面 ABC，$PA=AB=1$，则这个三棱锥内切球的半径为__________.

10．在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中，$BD=2\sqrt{3}$，将菱形 $ABCD$ 沿对角线 AC 对折，使二面角 $B-AC-D$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$，则所得三棱锥 $A-BCD$ 的内切球的表面积为__________.