专题 2 裂项相消

裂项相消常见推论

第一讲 常见的等差数列与裂项相消：

① $a_n=\frac{1}{(An+B)(An+A+B)}=\frac{1}{A}\left(\frac{1}{An+B}-\frac{1}{A(n+1)+B}\right)$ （接龙型）

$$S_n=\frac{1}{A}\left(\frac{1}{A+B}-\frac{1}{A(n+1)+B}\right)=\frac{n}{(A+B)[A(n+1)+B]}$$

② $a_n=\frac{1}{(An+B)(An+2A+B)}=\frac{1}{2A}\left(\frac{1}{An+B}-\frac{1}{A(n+2)+B}\right)$ （隔项型）

$$S_n=\frac{1}{2A}\left(\frac{1}{A+B}+\frac{1}{2A+B}-\frac{1}{A(n+1)+B}-\frac{1}{A(n+2)+B}\right)$$

③ $a_n=\frac{1}{\sqrt{An+B}+\sqrt{A(n+1)+B}}=\frac{1}{A}\left(\sqrt{A(n+1)+B}-\sqrt{An+B}\right)$ （根式型）

$$S_n=\frac{1}{A}\left(\sqrt{A(n+1)+B}-\sqrt{A+B}\right)$$

第二讲 特殊等差数列与裂项相消：

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}(2An+A+2B)}{(An+B)[A(n+1)+B]}=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{An+B}+\frac{1}{A(n+1)+B}\right)$$

$$S_n=\left(\frac{1}{A+B}+\frac{1}{2A+B}\right)-\left(\frac{1}{2A+B}+\frac{1}{3A+B}\right)+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{An+B}+\frac{1}{A(n+1)+B}\right)=\frac{1}{A+B}+\frac{(-1)^{n-1}}{A(n+1)+B}$$

第三讲 带有等比数列的裂项相消：

$a_n=\frac{q^n}{(q^n+m)(q^{n+1}+m)}=\frac{1}{q-1}\left(\frac{1}{q^n+m}-\frac{1}{q^{n+1}+m}\right)$ （其中 $m\in R$， $q\neq 1$）

$$S_n=\frac{1}{q-1}\left(\frac{1}{q+m}-\frac{1}{q^2+m}+\frac{1}{q^2+m}-\frac{1}{q^3+m}+\cdots+\frac{1}{q^n+m}-\frac{1}{q^{n+1}+m}\right)=\frac{1}{q-1}\left(\frac{1}{q+m}-\frac{1}{q^{n+1}+m}\right)$$

第四讲 平方式递推与裂项相消：

① $a_{n+1}=a_n(a_n+1)\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+1}\Rightarrow\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+1}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}$

② $a_{n+1}=\frac{a_n^{\ 2}}{m}+a_n\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{m}=\frac{a_n}{m}\left(\frac{a_n}{m}+1\right)\Rightarrow\frac{1}{a_n+m}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+m}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}$

③ $a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}\Rightarrow\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}=\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}$

④ $a_{n+1}=\frac{a_n^{\ 2}}{2m}+\frac{m}{2}\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}-m}=\frac{2m}{(a_n-m)(a_n+m)}\Rightarrow\frac{1}{a_n+m}=\frac{1}{a_n-m}-\frac{1}{a_{n+1}-m}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+m}=\frac{1}{a_1-m}-\frac{1}{a_{n+1}-m}$

注意：平方式递推，通常题目的设置求和部分的分母会给出裂项相消的方向，通常紧扣分母即可，无需记忆，太多的变形式子．

第五讲 等差三连项型与裂项相消：

①$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$　　②$a_n=\dfrac{An+B}{n(n+1)(n+2)}=\left[\dfrac{An+\frac{B}{2}}{n(n+1)}-\dfrac{A(n+1)+\frac{B}{2}}{(n+1)(n+2)}\right]$

第六讲 阶乘型与裂项相消：$a_n=\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$

第七讲 等差与等比混合型：①$a_n=\dfrac{q^n[1+(1-q)n]}{n(n+1)}=\dfrac{q^n}{n}-\dfrac{q^{n+1}}{n+1}$；②$a_n=\dfrac{q^n[k+(1-q^k)n]}{n(n+k)}=\dfrac{q^n}{n}-\dfrac{q^{n+k}}{n+k}$

注意：通常采用反推法，就是从右边往左边推导，具体情况将会在例题中说明.

【例 1】设数列$\{a_n\}$是首项为$a_1>0$，公差$d>0$的等差数列，求：$S_n=\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$；

$T_n=\dfrac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}+\dfrac{a_3}{(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)}+\cdots+\dfrac{a_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})(a_1+a_2+\cdots+a_n)}$.

【解析】有已知得$a_{n+1}-a_n=d$，则$a_{n+1}=a_1+nd$　　$\therefore\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{d}(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}})$

$\therefore S_n=\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{d}(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}})=\dfrac{1}{d}(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{n+1}})=\dfrac{n}{a_1a_{n+1}}$

$$
\begin{aligned}
T_n&=\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}+\frac{a_3}{(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)}+\cdots+\frac{a_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})(a_1+a_2+\cdots+a_n)}\\
&=\frac{a_1+a_2-a_1}{a_1(a_1+a_2)}+\frac{a_1+a_2+a_3-(a_1+a_2)}{(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)}+\cdots+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}{(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})(a_1+a_2+\cdots+a_n)}\\
&=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_1+a_2}-\frac{1}{a_1+a_2+a_3}+\cdots+\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}-\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n}\\
&=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n}
\end{aligned}
$$

【例 2】（2019•岳阳二模）已知数列$\{a_n\}$，若$a_1+2a_2+\ldots+na_n=2n$，则数列$\{a_na_{n+1}\}$前n项和为_________.

【解析】数列$\{a_n\}$，若$a_1+2a_2+\ldots+na_n=2n$　①　　当$n\geqslant 2$时，$a_1+2a_2+\ldots+(n-1)a_{n-1}=2(n-1)$　②

①$-$②得：$na_n=2n-2n+2=2$，整理得：$a_n=\dfrac{2}{n}$，当$n=1$时，$a_1=2$，符合通项，故：$a_n=\dfrac{2}{n}$，

所以：$a_na_{n+1}=\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{2}{n+1}=4(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$，则：$T_n=4(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=4(1-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{4n}{n+1}$.

【例 3】（2019• 武汉期中）已知数列$\{a_n\}$中，$a_2a_6=64$，且$\log_2 a_n$，$\dfrac{1}{2}\log_2 a_{n+1}$，$1(n\in N^*)$成等差数列.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_n=\dfrac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求$T_n$.

【解析】（1）$\because\log_2 a_n$，$\dfrac{1}{2}\log_2 a_{n+1}$，1 成等差数列，$\therefore 2\times\dfrac{1}{2}\log_2 a_{n+1}=\log_2 a_n+1$，$\therefore a_{n+1}=2a_n$，且$a_n>0$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$是等比数列，由$a_2a_6=64$得，$a_4=8$，$\therefore a_1=1$，公比$q=2$，$\therefore a_n=2^{n-1}$；

（2）由（1）知，$b_n=\dfrac{2^{n-1}}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)}=\dfrac{1}{2^{n-1}+1}-\dfrac{1}{2^n+1}$，

$\therefore T_n=(\dfrac{1}{2^0+1}-\dfrac{1}{2^1+1})+(\dfrac{1}{2^1+1}-\dfrac{1}{2^2+1})+(\dfrac{1}{2^2+1}-\dfrac{1}{2^3+1})+\ldots+(\dfrac{1}{2^{n-2}+1}-\dfrac{1}{2^{n-1}+1})+(\dfrac{1}{2^{n-1}+1}-\dfrac{1}{2^n+1})=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^n+1}$.

【例 4】（2019•东莞市期末）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\frac{}{2}$，$a_{n+1}=a_n\ \ +a_n$，用$[x]$表示不超过x的最大整数，则$[\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_{2011}+1}]$的值等于（　　）

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

【解析】又因为$a_{n+1}=a_n{}^2+a_n$，即$a_{n+1}-a_n=a_n{}^2>0$，所以数列是增数列，并且$\frac{1}{a_n}>0$，又因为$a_{n+1}=a_n{}^2+a_n$，

即$a_{n+1}=a_n(1+a_n)$，$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n\bullet(1+a_n)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{1+a_n}$，所以$\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$，即$\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$，

$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_{2011}+1}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{2010}}-\frac{1}{a_{2012}}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2012}}<\frac{1}{a_1}=2$，

$a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{3}{4}$，$a_3=\frac{16}{21}$，$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}=\frac{2}{3}+\frac{4}{7}>1$．所以$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_{2011}+1}\in(1,2)$．

所以$[\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_{2011}+1}]=1$．故选$B$．

【例 5】（2018•徐州期末）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$2a_{n+1}=a_n^2+1$，$n\in N^*$，设$b_n=\frac{2a_n-1}{a_n+1}$，若数列$\{b_n\}$的前 2018 项和$S_{2018}>t$，则整数t的最大值为________．

【解析】在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$2a_{n+1}=a_n^2+1$，$n\in N^*$，可得$2(a_{n+1}-1)=a_n^2-1=(a_n-1)(a_n+1)$，

$2a_{n+1}=a_n^2+1\geqslant 2a_n$，即有数列$\{a_n\}$递增，可得$\frac{1}{2(a_{n+1}-1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n+1})$，即有$\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}$，

$b_n=\frac{2a_n-1}{a_n+1}=2-\frac{3}{a_n+1}$，则$S_{2018}=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{2018}=2\times 2018-3(\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_{2018}+1})$

$=4036-3(\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_2-1}+\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_3-1}+\ldots+\frac{1}{a_{2018}-1}-\frac{1}{a_{2019}-1})=4036-3(1-\frac{1}{a_{2019}-1})=4033+\frac{3}{a_{2019}-1}$，

而数列$\{a_n\}$递增，$a_1=2$，$a_2=\frac{5}{2}$，$a_3=\frac{29}{8}$，$a_4=\frac{841}{128}>4$，…，$a_{2019}>4$，由数列$\{b_n\}$的前 2018 项和$S_{2018}>t$，

可得整数t的最大值为 4033．故答案为 4033．

【例 6】求和：$S_n=\frac{3}{(1\times 2)^2}+\frac{5}{(2\times 3)^2}+\cdots+\frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$．

【解析】设$a_n=\frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$，

则$S_n=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{2n+1}{(n+1)^2}$．

【例 7】求和：$S_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$

【解析】$\because\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$ $\therefore S_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$

【例 8】求和：$\frac{4}{1\times 2\times 3}+\frac{5}{2\times 3\times 4}+\cdots+\frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}$．

【解析】$\because\frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{2n+3}{n(n+1)}-\frac{2n+5}{(n+1)(n+2)}\right]$

$\therefore\frac{4}{1\times 2\times 3}+\frac{5}{2\times 3\times 4}+\cdots+\frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(3-\frac{n+3}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{3n^2+8n+5}{2n^2+6n+4}$．

【例 9】求和：$\frac{3}{1\times 3},\frac{7}{2\times 4}\times 3,\frac{11}{3\times 5}\times 3^2,\cdots,\frac{4n-1}{n\times(n+2)}\times 3^{n-1}$．

【解析】本题适合反推：$\because\frac{3^{n-1}}{n}-\frac{3^{n+1}}{n+2}=\frac{-8n+2}{n\times(n+2)}\times 3^{n-1}$，$\therefore\frac{4n-1}{n\times(n+2)}\times 3^{n-1}=-\frac{1}{2}\left(\frac{3^{n-1}}{n}-\frac{3^{n+1}}{n+2}\right)$，

令$S_n=\frac{3}{1\times 3}+\frac{7}{2\times 4}\times 3+\frac{11}{3\times 5}\times 3^2+\cdots+\frac{4n-1}{n\times(n+2)}\times 3^{n-1}$，$\therefore S_n=-\frac{1}{2}(1+\frac{3}{2}-\frac{3n}{n+1}-\frac{3n+1}{n+2})$．

【例 10】已知函数 $f(x)=\dfrac{2x+3}{3x}$，数列 $\{a_n\}$满足 $a_1=1,\ a_{n+1}=f\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$的通项；

（2）令 $T_n=a_1a_2-a_2a_3+a_3a_4-a_4a_5+\cdots+a_{2n-1}a_{2n}-a_{2n}a_{2n+1}$, 求 T_n

（3）令 $b_n=\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}(n\geq 2), b_1=3, S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$, 若 $S_n<\dfrac{m-2000}{2}$ 对于任意的 $n\in N^*$ 都成立，求最小正整数 m 的值．

【解析】（1） $a_{n+1}=f\left(\dfrac{1}{a_n}\right)=\dfrac{\frac{2}{a_n}+3}{\frac{3}{a_n}}=a_n+\dfrac{2}{3}$， $a_n=\dfrac{2n+1}{3}$

（2） $T_n=a_1a_2-a_2a_3+a_3a_4-a_4a_5+\cdots+a_{2n-1}a_{2n}-a_{2n}a_{2n+1}=a_2(a_1-a_3)+a_4(a_3-a_5)+\cdots+a_{2n}(a_{2n-1}-a_{2n+1})$

$=-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{n(\frac{5}{3}+\frac{4}{3}n+\frac{1}{3})}{2}=-\dfrac{4}{9}(2n^2+3n)\therefore T_n=-\dfrac{4}{9}(2n^2+3n)$

（3） $b_n=\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{9}{(2n-1)(2n+1)}(n\geq 2),\because b_1=3,\therefore b_n=\dfrac{9}{(2n-1)(2n+1)}$， $\therefore S_n=\dfrac{9n}{2n+1}<\dfrac{m-2000}{2}$ 对于任意的 $n\in N^*$ 都成立， $\therefore S_n=\dfrac{9n}{2n+1}\in\left[3,\dfrac{9}{2}\right)$， $\therefore\dfrac{m-2000}{2}\geq\dfrac{9}{2}\therefore m\geq 2009$.

达标训练

1.（2019•思明月考）设满足 $a_1+\dfrac{1}{3}a_2+\dfrac{1}{5}a_3+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}a_n=n$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{\dfrac{1}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}\}$ 的前 84 项和．

2. 已知数列 $\{a_n\}$前 n 项和 S_n ，点 $\left(n,\dfrac{S_n}{n}\right)$ 在直线 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{11}{2}$ 上；数列 $\{b_n\}$满足 $b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n=0$ ，且 $b_3=11$ ，前 9 项和为 153.

（1）求数列 $\{a_n\}$， $\{b_n\}$的通项；

（2）设 $c_n=\dfrac{3}{(2a_n-11)(2b_n-1)}$, 数列 $\{c_n\}$ 前 n 项和 T_n ，求使不等式 $T_n>\dfrac{k}{57}$ 对于任意的 $n\in N^*$ 都成立的最大正整数 k 的值．

3.（2018•云阳期末）已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1=\dfrac{1}{2}$， $a_2=1$， $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}(n\in N^*,n\geqslant 2)$，则 $\dfrac{1}{a_1a_3}+\dfrac{1}{a_2a_4}+\dfrac{1}{a_3a_5}+\ldots+\dfrac{1}{a_{2018}a_{2020}}$ 的整数部分为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4.（2019•韶关模拟）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{3}a_3+\ldots+\dfrac{1}{n}a_n=n^2+n(n\in N^*)$，设数列 $\{b_n\}$ 满足： $b_n=\dfrac{2n+1}{a_na_{n+1}}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，若 $T_n<\dfrac{n}{n+1}\lambda(n\in N^*)$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围为（　　）

A. $[\dfrac{1}{4},+\infty)$　　B. $(\dfrac{1}{4},\infty)$　　C. $[\dfrac{3}{8},+\infty)$　　D. $(\dfrac{3}{8},+\infty)$

5. 已知 $a_n=\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$， 求 $\{a_n\}$的前 n 项和 S_n .

6. 求和：$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$.

7. 已知数列$\{a_n\}$通项公式$a_n=\frac{5n+4}{n(n+1)(n+2)}$，其前$n$项和$S_n$，是否存在常数$a,b$，使得$S_n=\frac{an^2+bn}{2(n+1)(n+2)}$对于任意的$n\in N^*$都成立？证明你的结论.

8. 求和：$S_n=\frac{3}{1\times2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{7}{2\times3}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{n+2}{n\times(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}$.

9.（2019•长沙月考）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_n-\frac{S_n}{2}=1(n\in N^*)$.

（1）求出数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）已知$b_n=\frac{2^n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}(n\in N^*)$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和记为$T_n$，证明：$T_n\in[\frac{2}{3},1)$.

10.（2019•黄山二模）已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{1}{a_1-1}+\frac{2}{a_2-1}+\frac{3}{a_3-1}+\ldots+\frac{n}{a_n-1}=n$，$n\in N^*$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=\frac{2n+1}{(a_n-1)^2(a_{n+1}-1)^2}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求证：$T_n<1$.

11.（2019•蚌山月考）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+1=\frac{a_n+1}{a_n+2}$，$a_n\neq-1$且$a_1=1$.

（1）求证：数列$\left\{\frac{1}{a_n+1}\right\}$是等差数列，并求出数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=a_n+1$，$c_n=(-1)^{n-1}nb_nb_{n+1}$，求数列$\{c_n\}$的前2019项和$S_{2019}$.

12.（2019•郑州二模）数列$\{a_n\}$满足：$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\ldots+\frac{a_n}{n+1}=n^2+n$，$n\in N^*$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\frac{1}{a_n}$，数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，求满足$S_n>\frac{9}{20}$的最小正整数n.

13.（2019•涪城模拟）已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和是S_n，且$S_n=2^{n+1}-b$.

（1）求b的值及数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=\frac{a_n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$，证明：$T_n\geqslant\frac{2}{3}$.

14. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，若$a_{n+1}-a_n=a_n^2$，设$T_m=\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+1}+\ldots+\frac{a_m}{a_m+1}$，若$T_m<2018$，则正整数$m$的最大值为（　　）

A. 2019　　B. 2018　　C. 2017　　D. 2016

15.（2019•河南月考）数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{6}{5}$，$a_n=\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}(n\in N^*)$，若对$n\in N^*$，都有$k>\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$成立，则最小的整数$k$是（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

16.（2018•渝水月考）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{4}{3}$，且$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)(n\in N^*)$，则$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots\frac{1}{a_{2017}}$的整数部分是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

17.（2018•历下月考）用$[x]$表示不超过x的最大整数，例如$[3]=3$，$[1.2]=1$，$[-1.3]=-2$．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n^2+a_n$，则$[\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\ldots+\frac{a_{2018}}{1+a_{2018}}]=$________.

18.（2019•武汉模拟）数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{3}{2}$，$a_{n+1}=a_n^2-a_n+1(n\in N^*)$，则$m=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{2019}}$的整数部分是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

19.（2018•虎林模拟）数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{4}{3}$，$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)(n\in N^*)$，且$S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$，则$S_n$的整数部分的所有可能值构成的集合是（　　）

A．$\{0,1,2\}$　　B．$\{0,1,2,3\}$　　C．$\{1,2\}$　　D．$\{0,2\}$

20.（2019•湖州模拟）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{2018}+a_n(n\in N^*)$，则使$a_n>1$的正整数$n$的最小值是（　　）

A．2018　　B．2019　　C．2020　　D．2021

21.（2019•浙江期中）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=3$，$2a_{n+1}=a_n^2-2a_n+4$．

（1）求证：$a_{n+1}>a_n$；

（2）求证：$\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\leqslant 1-(\frac{2}{3})^n(n\in N^*)$．

22. 已知数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足，$a_1=\frac{1}{2}$，$b_1=\frac{1}{2}$，且对于任意的$m,n\in N^*$，有$a_{m+n}=a_m\cdot a_n,b_{m+n}=b_m+b_n$．

（1）求数列$\{a_n\},\{b_n\}$的通项；

（2）设$b_n=\frac{4c_n+n}{3c_n+n}$，求$\{c_n\}$的通项；

（3）若数列$\{d_n\}$满足$d_n=\frac{a_n}{c_n}$，其前n项和T_n，求证：$n\geq 2$时，$-\frac{5}{2}<T_n<a_n-\frac{5}{2}$．

23. 数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{(n+1)(2a_n-n)}{a_n+4n}$，且$a_1=\frac{1}{2}$．

（1）求a_2,a_3,a_4；

（2）若存在实数a，使数列$\left\{\frac{a_n+an}{a_n+n}\right\}$成为以—1为公差的等差数列，求实数$a$；

（3）记数列$\left\{\frac{1}{3^{\frac{n+2}{2}}a_{n+2}}\right\}$的前$n$项和$S_n$，求证：$S_n>-\frac{2\sqrt{3}+1}{12}$．

24.（2019•静安一模）将n个数a_1，a_2，…，a_n的连乘积$a_1\bullet a_2\bullet\ldots\bullet a_n$记为$\underset{i=1}{\overset{n}{\pi}}a_i$，将$n$个数$a_1$，$a_2$，…，$a_n$的和$a_1+a_2+\ldots+a_n$记为$\sum_{i=1}^{n}a_i$，$n\in N^*)$．

（1）若数列$\{x_n\}$满足$x_1=1$，$x_{n+1}=x_n^2+x_n$，$n\in N^*$，设$P_n=\underset{i=1}{\overset{n}{\pi}}\frac{1}{1+x_i}$，$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}$，求$P_5+S_5$；

（2）用$[x]$表示不超过x的最大整数，例如$[2]=2$，$[3.4]=3$，$[-1.8]=-2$．若数列$\{x_n\}$满足$x_1=1$，$x_{n+1}=x_n^2+x_n$，$n\in N^*$，求$[\sum_{i=1}^{2019}\frac{x_i}{1+x_i}]$的值；

（3）设定义在正整数集N^*上的函数$f(n)$满足，当$\frac{m(m-1)}{2}<n\leqslant\frac{m(m+1)}{2}(m\in N^*)$时，$f(n)=m$，问是否存在正整数$n$，使得$\sum_{i=1}^{n}f(i)=2019$？若存在，求出$n$的值；若不存在，说明理由（已知$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$）．