专题 3　经典的一阶递推方法

第一讲 迭加迭乘迭代法

1．迭加：$a_{n+1}=a_n+f(n)$（一阶迭加）

【例 1】设数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=\frac{8}{3}$，满足$a_n=a_{n-1}-\frac{7}{4n^2-1}(n=2,3,\cdots)$，求$\{a_n\}$通项公式.

【解析】因为$a_n-a_{n-1}=-\frac{7}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

所以$a_n=a_1+\sum_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})=\frac{8}{3}-\sum_{k=2}^{n}\frac{7}{2}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1})=\frac{8}{3}-\frac{7}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1})=\frac{3n+5}{2n+1}$.

2．迭乘：$a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$（一阶迭乘）

【例 2】已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=2$，满足$a_n=5^{1-n}a_{n-1}$，求$\{a_n\}$通项公式.

【解析】因为$a_n=5^{1-n}a_{n-1}$，所以$\frac{a_n}{a_{n-1}}=5^{1-n}$，$\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{1}{5^{(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot1}}\cdot2=\frac{2}{5^{\frac{n(n-1)}{n}}}$.

3．迭代：$a_{n+1}\cdot f(n+1)=a_n\cdot f(n)=\cdots=a_1\cdot f(1)$（一阶迭代之构造常数数列法）

【例 3】已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$na_{n+1}=2(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，求$\{a_n\}$的通项公式.

【解析】$na_{n+1}-(n-1)a_n=2a_n$，$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}=\cdots=\frac{a_1}{1}$，$a_n=n$.

【例 4】已知数列$\{a_n\}$满足：$na_{n+1}=(2n+1)a_n-(n+1)a_{n-1}$，$a_1=1$，$a_2=3$，求$\{a_n\}$的通项公式.

【解析】因为$n(a_{n+1}-a_n)=(n+1)(a_n-a_{n-1})$，所以$\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1}=\frac{a_n-a_{n-1}}{n}$. 所以$\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1}=\frac{a_n-a_{n-1}}{n}=\cdots=\frac{a_2-a_1}{2}=1$，

$\therefore a_{n+1}-a_n=n+1$，所以$a_n=a_1+\sum_{k=2}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$.

4．迭代法之辅助数列模型：$f(n)=\frac{h(n+1)}{h(n)}\left(或f(n)=\frac{h(n)}{h(n+1)}\right)$，则$\frac{a_{n+1}}{h(n+1)}=\frac{a_n}{h(n)}(a_{n+1}h(n+1)=a_nh(n))$

$\left\{\frac{a_n}{h(n)}\right\}$(或$\{a_nh(n)\}$)是常数数列，$\frac{a_n}{h(n)}=\frac{a_1}{h(1)}(或a_nh(n)=a_1h(1))$ $\therefore a_n=a_1\cdot\frac{h(n)}{h(1)}\left(或a_n=a_1\cdot\frac{h(1)}{h(n)}\right)$

注意：如果$f(n)=\frac{h(n+1)}{h(n-1)}\left(或f(n)=\frac{h(n-1)}{h(n+1)}\right)$，则$\frac{a_{n+1}}{h(n)h(n+1)}=\frac{a_n}{h(n)h(n-1)}(a_{n+1}h(n)h(n+1)=a_nh(n)h(n-1))$

【例 5】设数列$\{a_n\}$的前 n 项和S_n，若$3S_n=a_n(n+2)$，$a_1=2$，求数列$\{a_n\}$的通项.

【解析】$\because 3S_n=a_n(n+2)$ $\therefore 3S_{n-1}=a_{n-1}(n+1)$，$\therefore 3a_n=3S_n-3S_n=(n+2)a_n-(n+1)a_{n-1}$ $\therefore\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，

法一：由迭乘得：$\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdots\frac{3}{1}=\frac{(n+1)n}{2}=\frac{a_n}{a_1}$ $\therefore a_n=n^2+n$.

法二：由迭代常数数列得$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{(n-1)n}\Rightarrow\frac{a_n}{n(n+1)}=\frac{a_{n-1}}{(n-1)n}$，故$\left\{\frac{a_n}{n(n+1)}\right\}$是常数数列，即

$\frac{a_n}{n(n+1)}=\frac{a_1}{1\times2}=1$，$\therefore a_n=n^2+n$.

有的时候需要添加一项，有的时候需要添加两项，具体题目按需要去添加.

【例 6】设数列$\{a_n\}$的前 n 项和S_n，若$a_1=1$，$2S_n=n(3n-1)a_n$，求数列$\{a_n\}$的通项.

【解析】$\because 2S_n=n(3n-1)a_n$，$\therefore 2S_{n-1}=(n-1)(3n-4)a_{n-1}$，$\therefore\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(n-1)(3n-4)}{(n-1)(3n+2)}=\frac{(3n-4)}{(3n+2)}(n\ge2)$

法一：$\therefore\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_3}{a_2}=\frac{(3n-4)}{(3n+2)}\cdot\frac{(3n-7)}{(3n-1)}\cdots\frac{5}{11}\cdot\frac{2}{8}=\frac{10}{(3n+2)(3n-1)}=\frac{a_n}{a_1}$，$a_n=\frac{10}{(3n-1)(3n+2)}$.

法二：$\because \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{(3n-4)}{(3n+2)}=\dfrac{(3n-1)(3n-4)}{(3n-1)(3n+2)}\Rightarrow a_n(3n-1)(3n+2)=a_{n-1}(3n-1)(3n-4)$，故 $\{a_n(3n+2)(3n-1)\}$ 为常数数列，

即 $a_n(3n-1)(3n+2)=a_1\times 10=10$，$\therefore a_n=\dfrac{10}{(3n-1)(3n+2)}$.

第二讲 递推式 $a_{n+1}=f(n)a_n+g(n)$，$a_1=a$

迭代法之辅助数列模型：$f(n)=\dfrac{h(n+1)}{h(n+1)}$，则 $\dfrac{a_{n+1}}{h(n+1)}=\dfrac{a_n}{h(n)}+\dfrac{g(n)}{h(n+1)}$，再用迭加法求出

$$\frac{a_n}{h(n)}=\frac{g(n-1)}{h(n)}+\frac{g(n-2)}{h(n-1)}+\cdots+\frac{g(1)}{h(2)}+\frac{a_1}{h(1)}\Rightarrow a_n=h(n)\left[\frac{g(n-1)}{h(n)}+\frac{g(n-2)}{h(n-1)}+\cdots+\frac{g(1)}{h(2)}+\frac{a}{h(1)}\right]$$

注意：如果 $f(n)=\dfrac{h(n+1)}{h(n-1)}$，则 $\dfrac{a_{n+1}}{h(n)h(n+1)}=\dfrac{a_n}{h(n)h(n-1)}+\dfrac{g(n)}{h(n)h(n+1)}$，再用迭加法求出.

【例 7】已知数列 $\{a_n\}$是首项为 $a_1=4$，$a_{n+1}=\dfrac{5n+7}{5n+2}a_n+7(5n+7)$，求 $\{a_n\}$通项公式.

【解析】$\because \dfrac{a_{n+1}}{5n+7}=\dfrac{a_n}{5n+2}+7, \therefore \dfrac{a_{n+1}}{5n+7}-\dfrac{a_n}{5n+2}=7$，故 $\dfrac{a_n}{5n+2}=\dfrac{4}{7}+7(n-1)\therefore a_n=\dfrac{1}{7}(245n^2-127n-90)$.

【例 8】已知数列 $\{a_n\}$是首项为 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{3n+4}{3n-2}a_n+9$，求 $\{a_n\}$通项公式.

【解析】$\because \dfrac{a_{n+1}}{3n+4}=\dfrac{a_n}{3n\text{-}2}+9$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{(3n+4)(3n+1)}=\dfrac{a_n}{(3n+1)(3n-2)}+\dfrac{9}{(3n+4)(3n+1)}$，故 $\dfrac{a_{n+1}}{(3n+4)(3n+1)}-$ $\dfrac{a_n}{(3n+1)(3n-2)}=\dfrac{9}{(3n+4)(3n+1)}$，使用累加法可得，$\dfrac{a_{n+1}}{(3n+4)(3n+1)}-\dfrac{a_1}{(3+1)(3-2)}=\dfrac{9n}{(3n+4)(3+1)}$，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{(3n+4)(3n+1)}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{9n}{4(3n+4)}$，$\therefore a_{n+1}=(3n+1)^2$，$\therefore a_n=(3n-2)^2$

第三讲 递推式 $a_{n+1}=ka_n+f(n)(k\neq 0,1)$

递推式 $a_{n+1}=ka_n+f(n)(k\neq 0,1)$ 转化为 $a_{n+1}+g(n+1)=k[a_n+g(n)]$，$g(n)$为待定系数

1．当 $f(n)=A$ 时，$a_{n+1}+\dfrac{A}{k-1}=k\left(a_n+\dfrac{A}{k-1}\right)$，$\left\{a_n+\dfrac{A}{k-1}\right\}$是以 $a_1+\dfrac{A}{k-1}$ 为首项，k为公比的等比数列.

2．当 $f(n)=Ak^n$ 时，同除以 k^n，得：$\dfrac{a_{n+1}}{k^n}=\dfrac{a_n}{k^{n-1}}+A$ 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{k^{n-1}}\right\}$ 是以 a_1为首项，A为公差的等差数列，则 $\dfrac{a_n}{k^{n-1}}=a_1+A(n-1)$.

3．当 $f(n)=Aq^n(k\neq q)$ 时，可用待定系数法，$a_{n+1}+xq^{n+1}=k(a_n+xq^n)$，对比系数可知 $A=x(k-q)$，$\therefore$ 数列 $\left\{a_n+\dfrac{A}{k-q}q^n\right\}$是以 $a_1+\dfrac{Aq}{k-q}$ 为首项，k为公比的等比数列.

4．$f(n)=Aq^n+B$ 转化成 $a_{n+1}+xq^{n+1}+y=k(a_n+xq^n+y)$ 即 $\begin{cases}kx-xq=A\\ ky-y=B\end{cases}$ 解出 A,B；可得数列 $\{a_n+xq^n+y\}$是以 a_1+xq+y 为首项，k 为公比的等比数列，$a_n+xq^n+y=(a_1+xq+y)\cdot k^{n-1}$ $\therefore a_n=(a_1+xq+y)\cdot k^{n-1}-xq^n-y$.

5．$a_{n+1}=ka_n+an+b$ 转化成 $a_{n+1}+A(n+1)+B=k(a_n+An+B)$ 即 $\begin{cases}kA-A=a\\ kB-B-A=b\end{cases}$ 解出 A,B；可得数列 $\{a_n+An+B\}$是以 a_1+A+B 为首项，k 为公比的等比数列，$a_n+An+B=(a_1+A+B)\cdot k^{n-1}$ $\therefore a_n=(a_1+A+B)\cdot k^{n-1}-An-B$.

6．$a_{n+1}=ka_n+an^2+bn+c$ 转化成 $a_{n+1}+A(n+1)^2+B(n+1)+C=k(a_n+An^2+Bn+C)$，即 $\begin{cases}kA-A=a\\kB-B-2A=b\\kC-C-B-A=c\end{cases}$ 解出 A,B,C；可得数列 $\{a_n+An^2+Bn+C\}$ 是以 $a_1+A+B+C$ 为首项，k 为公比的等比数列，

$a_n+An^2+Bn+C=(a_1+A+B+C)\cdot k^{n-1}$ $\therefore a_n=(a_1+A+B+C)\cdot k^{n-1}-An^2-Bn-C$.

【例 9】已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1=\frac{2}{3}$，满足 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+1}(n=1,2,\cdots)$.

（1）求 $\{a_n\}$ 通项公式；（2）求数列 $\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

【解析】（1）由已知得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{2}(\frac{1}{a_n}-1)$，且 $\frac{1}{a_1}-1=\frac{1}{2}$，所以 $\{\frac{1}{a_n}-1\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.则 $\frac{1}{a_n}-1=(\frac{1}{2})^n$，即 $a_n=\frac{2^n}{1+2^n}$.

（2）由（1）得 $\frac{n}{a_n}=\frac{n}{2^n}+n$.所以 $S_n=(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n})+(1+2+\cdots+n)$.

令 $T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$①，则 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}$②

①−②得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$，所以 $T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$.

【例 10】设数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1=1$，满足 $a_n=3a_{n-1}+2n+5(n=2,3,\cdots)$，求 $\{a_n\}$ 通项公式.

【解析】令 $a_n+An+b=3[a_{n-1}+A(n-1)+B]$，则 $a_n=3a_{n-1}+2An+2B-3A$. 求得 $A=1$，$B=4$，所以 $a_n=2\cdot 3^n-n-4$.

【例 11】设数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1=3$，且 $a_n=3a_{n-1}+5\cdot 7^{n-2}+2(n=2,3,\cdots)$，求 $\{a_n\}$ 通项公式.

【解析】依题意的，令 $a_n+A\cdot 7^{n-1}+B=3(a_{n-1}+A\cdot 7^{n-1}+B)$，则 $a_n=3a_{n-1}-4A\cdot 7^{n-2}+2B$，又 $a_n=3a_{n-1}+5\cdot 7^{n-2}+2$，比较两式的系数，得 $-4A=5$，$2B=2$，解得 $A=-\frac{5}{4}$，$B=1$.所以 $a_n-\frac{5}{4}\cdot 7^{n-1}+1=3(a_{n-1}-\frac{5}{4}\cdot 7^{n-1}+1)$，所以数列 $\left\{a_n-\frac{5}{4}\cdot 7^{n-1}+1\right\}$ 是以 $a_1-\frac{5}{4}+1=3-\frac{5}{4}+1=\frac{11}{4}$ 为首项:，3 为公比的等比数列，所以 $a_n-\frac{5}{4}\cdot 7^{n-1}+1=\frac{11}{4}\cdot 3^{n-1}$，即 $a_n=\frac{11}{4}\cdot 3^{n-1}+\frac{5}{4}\cdot 7^{n-1}-1$.

【例 12】设数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1=1$，满足 $a_{n+1}=2a_n-n^2+3n(n=1,2,\cdots)$.

（1）是否存在 λ，μ，使得数列 $\{a_n+\lambda n^2+\mu n\}$ 成等比数列？若存在，求出 λ，μ 的值，若不存在，说明项由.

（2）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\frac{1}{a_n+n-2^{n-1}}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n，证明：当 $n\ge 2$ 时，$\frac{6n}{(n+1)(2n+1)}\le S_n<\frac{5}{3}$.

【解析】（1）依题意，令 $a_{n+1}+\lambda(n+1)^2+\mu(n+1)+\gamma=2(a_n+\lambda n^2+\mu n+\gamma)$，所以

$a_{n+1}=2a_n+\lambda n^2+\mu n-2\lambda n+\gamma-\lambda-\mu$，

即 $\begin{cases}\lambda=-1\\\mu-2\lambda=3\\\gamma-\lambda-\mu=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\lambda=-1\\\mu=1\\\gamma=0\end{cases}$.所以数列 $\{a_n-n^2+n\}$ 是以 2 为公比、$a_1-1+1=1$ 为首项等比数列.所以

$a_n-n^2+n=2^{n-1}$，$a_n=n^2+2^{n-1}-n$，即存在 $\lambda=-1$，$\mu=1$，使得数列 $\{a_n-n^2+n\}$ 成等比数列.

（2）$b_n=\dfrac{1}{a_n+n-2^{n-1}}=\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})}=\dfrac{1}{n-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}$，所以当 $n\geq 2$ 时，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$<1+(\dfrac{1}{2-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}})+(\dfrac{1}{3-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{3+\frac{1}{2}})+\cdots+(\dfrac{1}{n-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}})=1+\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}<1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$；

当 $n=2$ 时，$S_2=b_1+b_2=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{6n}{(n+1)(2n+1)}=\dfrac{12}{3\times 5}=\dfrac{4}{5}<\dfrac{5}{4}$；

当 $n=3$，$b_n=\dfrac{1}{n^2}>\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n>(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=1-\dfrac{1}{n}=\dfrac{n}{n+1}$.

又当 $n\geq 3$ 时，$2n+1>6$，即 $1>\dfrac{6}{2n+1}$，所以 $S_n>\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{6}{2n+1}=\dfrac{6n}{(n+1)(2n+1)}$.故 $\dfrac{6n}{(n+1)(2n+1)}\leq S_n<\dfrac{5}{3}$.

达标训练

1. （2018•奎文模拟）已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，且满足 $a_{n+1}-a_n=(-\frac{1}{2})^n(n\in N^+)$，如果存在正整数 n，使得 $(a_n-\lambda)(a_{n+1}-\lambda)<0$ 成立，则实数 λ 的取值范围是（　　）

A．$(\frac{1}{2}，2)$　　B．$(\frac{2}{3}，1)$　　C．$(\frac{1}{2}，1)$　　D．$(\frac{2}{3}，\frac{5}{6})$

2. （2019•新乡二模）已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=21$，且满足 $(2n-5)a_{n+1}=(2n-3)a_n+4n^2-16n+15$，则 $\{a_n\}$ 的最小的一项是（　　）

A．a_5　　B．a_6　　C．a_7　　D．a_8

3. （2018•辽宁期末）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=-8$，$(3n-5)a_{n+1}=(3n-2)a_n-9n^2+21n-10$，若 n，$m\in N^*$，$n>m$，则 S_n-S_m 的最大值为（　　）

A．10　　B．15　　C．18　　D．26

4. （2018•沧州期末）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2^n(n\in N^*)$，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$．设 $t\in Z$，若对于 $\forall n\in N^*$，都有 $b_n>t$ 恒成立，则 t 的最大值为（　　）

A．3　　B．4　　C．7　　D．9

5. （2018•广东二模）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=15$，且满足 $\dfrac{a_{n+1}}{2n-3}=\dfrac{a_n}{2n-5}+1$，已知 n，$m\in N$，$n>m$，则 S_n-S_m 的最小值为（　　）

A．$-\dfrac{49}{4}$　　B．$-\dfrac{49}{8}$　　C．-14　　D．-28

6. （2018春•萍乡期末）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$na_{n+1}=2(n+1)a_n$，则它的前100项和 $S_{100}=$__________.

7. （2019•深圳二模）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+2^n+2(n\in N^*)$．

（1）判断数列 $\{a_n-2^n\}$ 是否为等差数列，并说明理由；

（2）记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，求 S_n．

8. （2019•东河一模）已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2$，$na_{n+1}=(n+1)a_n+n(n+1)$．

（1）证明：数列 $\{\dfrac{a_n}{n}\}$ 是等差数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ 的前 99 项和．

9. （2018•薛城月考）在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=0$，$a_{n+1}=3a_n+4n$．

（1）若存在常数 λ，μ，使得 $\{a_n+\lambda n+\mu\}$ 是公比为 3 的等比数列，求 λ，μ 的值；

（2）对于（1）中的 λ，μ，记 $c_n=(\lambda n+\mu)(a_n+\lambda n+\mu)$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

10. 已知正数数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$\lg S_n=2\lg n+\lg a_n$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式和S_n；

（2）令$b_n=\dfrac{S_n}{n!}$，数列$\{b_n\}$的前n项和T_n，当$n\ge 2$时，证明：$\dfrac{2n}{n+1}<T_n<2$.

11. 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=a$，$a_2=p(p>0)$，其前n项和S_n，且$S_n=\dfrac{n(a_n-a_1)}{2}$.

（1）求a的值；

（2）求$\{a_n\}$的通项公式；

（3）若$b_n=\dfrac{S_{n+1}}{S_{n+2}}+\dfrac{S_{n+2}}{S_{n+1}}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$，证明：$T_n-2n<3$.

12. 已知数列$a_0,a_1,a_2\cdots$中，$a_0=a_1=0$，且$a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}=2n$，求$\{a_n\}$通项公式.

（提示：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$）

13. 设数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，若$a_1=1$，$S_n=n(5n-4)a_n$，求数列$\{a_n\}$的通项.

14. 已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=4$，$a_n=\dfrac{5n+2}{5n-8}a_{n-1}+25(n=2,3,4,\cdots)$，求$\{a_n\}$通项公式.

15. 已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=1$，满足$a_{n+1}=(n+1)a_n+(n+2)!$，求$\{a_n\}$通项公式.

16. 已知数列$a_n=\dfrac{a_{n-1}}{3+2\cdot 3^{n-1}\cdot a_{n-1}}(n=2,3,\cdots)$，$a_1=1$求$\{a_n\}$的通项公式.

17. 已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+2n+\dfrac{5}{3}$.

（1）求$\{a_n\}$通项公式；（2）求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

18. 设数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=1$，满足$a_n+a_{n+1}+n^2=0(n=1,2,\cdots)$，求$\{a_n\}$通项公式.

19. 已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{a_n\}$的前n项和S_n，对于任意的$n\in N^*$，a_n，S_n是二次方程$x^2-3n^2x+b_n=0$的两根.

（1）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$通项公式；（2）$\{a_n\}$的前n项和S_n.

20. 设数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=1$，满足$a_{n+1}=2a_n-n^2+3n(n=1,2,\cdots)$.

（1）是否存在λ，μ，使得数列$\{a_n+\lambda n^2+\mu n\}$成等比数列？若存在，求出$\lambda$，$\mu$的值，若不存在，说明理由；

（2）设数列$\{b_n\}$满足$b_n=\dfrac{1}{a_n+n-2^{n-1}}$，$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$，证明：当$n\ge 2$时，$\dfrac{6n}{(n+1)(2n+1)}\le S_n<\dfrac{5}{3}$.

21. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，对于任意的$n\in N^*$满足$4S_n=8n^2+3a_n-3$.

（1）求$\{a_n\}$通项公式；

（2）设数列$\{b_n\}$满足$b_n=(a_n-2)a_n(a_n+2)$，证明：当$\dfrac{1}{\sqrt{b_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{b_2}}+\cdots\dfrac{1}{\sqrt{b_n}}<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

22. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，对于任意的$n\in N^*$满足$S_n=n^2+\dfrac{1}{2}a_n$.

（1）求$\{a_n\}$通项公式；

（2）是否存在实数a，使得不等式$\left(1-\dfrac{1}{a_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{a_n}\right)<\dfrac{2a^2-3}{2a\sqrt{2n+1}}$对于任意的$n\in N^*$都成立？若存在，求出$a$的值，若不存在，说明理由.

23. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,对于任意的$n\in N^*$,都有$\dfrac{1}{\sqrt{a_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}=\dfrac{1}{2\sqrt{a_na_{n+1}}}$.

（1）求a_2,a_3的值；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项；

（3）证明：$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\cdots+\sqrt{a_na_{n+1}}=\sqrt{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}$.

24．已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=t$，$a_2=t^2(t\neq 0,1)$，当$x=t$时，函数$f(x)=\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1})x^2-(a_{n+1}-a_n)x(n\geq 2)$取极值．

（1）求证：$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列；

（2）若$b_n=a_n\ln|a_n|$,求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n；

（3）当$t=-\sqrt{\frac{7}{10}}$时，数列$\{b_n\}$是否存在最大项？若存在，求出最大项是第几项；如果不存在，说明理由．