专题 4 和数列与积数列问题

第一讲 和数列与积数列问题

定义：若数列$\{a_n\}$满足$a_n+a_{n+1}=f(n)$称为和数列，$a_na_{n+1}=f(n)$称为积数列.

通项公式：

①当$a_n+a_{n+1}=f(n)=An+B$时，则$a_{n-1}+a_n=A(n-1)+B$，两式相减得：$a_{n+1}-a_{n-1}=A$，故$\{a_n\}$是隔项的等差数列，公差为A；$a_n=\begin{cases}a_1+A\left(\dfrac{n+1}{2}-1\right) & n\text{为奇数}\\ a_2+A\left(\dfrac{n}{2}-1\right) & n\text{为偶数}\end{cases}$

②$a_na_{n+1}=f(n)=q^n$时，则$a_{n-1}a_n=q^{n-1}$，两式相除得：$\dfrac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=q$，故$\{a_n\}$是隔项的等比数列，公比为$q$；

$$\therefore a_n=\begin{cases}a_1\cdot q^{\left(\frac{n+1}{2}-1\right)} & n\text{为奇数}\\ a_2\cdot q^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} & n\text{为偶数}\end{cases}$$

此类型题由于a_1和a_2作为数列奇数项和偶数项首项，会使得数列一些变形出现一些计算难度，故可以采用待定系数法来求统一的通项公式，考虑首项的因素，需要在原始的待定系数的前面加上$z(-1)^n$.

【例 1】已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=a$，$a_n+a_{n+1}=3n-54$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【解析】法一：$\because a_n+a_{n+1}=3n-54$，① $\therefore a_n+a_{n-1}=3(n-1)-54$，②$\therefore$由①－②得$a_{n+1}-a_{n-1}=3$，

$\therefore a_1$，a_3，a_5，与a_2，a_4，a_6，都是$d=3$的等差数列，又$a_1=a$，$a_1+a_2=3-54=-51$，$\therefore a_2=-51-a$，

$\therefore$当n为奇数时，$a_n=a+3(\dfrac{n+1}{2}-1)=\dfrac{3n+2a-3}{2}$，当$n$为偶数时，$a_n=-51-a+3(\dfrac{n}{2}-1)=\dfrac{3n-2a-108}{2}$，

$$\therefore a_n=\begin{cases}\dfrac{3n+2a-3}{2} & n\text{为奇数}\\ \dfrac{3n-2a-108}{2} & n\text{为偶数}\end{cases}.$$

法二:待定系数法，令$a_n=xn+y+z(-1)^n$，$a_{n+1}=xn+x+y+z(-1)^{n+1}$，$a_n+a_{n+1}=2xn+x+2y=3n-54$，

对比系数得：$x=\dfrac{3}{2}$，$y=-\dfrac{111}{4}$；由于$a_1=x+y-z=-\dfrac{105}{4}-z=a\Rightarrow z=-\dfrac{105}{4}-a$，

故$a_n=\dfrac{3}{2}n-\dfrac{111}{4}-\left(\dfrac{105}{4}+a\right)(-1)^n$

【例 2】已知$a_1=1$，$a_{n+1}\bullet a_n=2^n$，求a_n.

【解析】法一：$\because a_{n+1}\bullet a_n=2^n$，$\therefore lg(a_{n+1}\bullet a_n)=lg2^n$，$\therefore lga_{n+1}+lga_n=nlg2$.

$\therefore lga_{n+1}-\dfrac{1}{2}(n+1)lg2+\dfrac{1}{4}lg2=-[lga_n-\dfrac{1}{2}nlg2+\dfrac{1}{4}lg2]$，$\because a_1=1$，$\therefore lga_1-\dfrac{1}{2}lg2+\dfrac{1}{4}lg2=-\dfrac{1}{4}lg2$.

$\therefore$数列$\{lga_n-\dfrac{1}{2}nlg2+\dfrac{1}{4}lg2\}$是以$-\dfrac{1}{4}lg2$为首项，$-1$为公比的等比数列.

$\therefore lga_n-\dfrac{1}{2}nlg2+\dfrac{1}{4}lg2=-\dfrac{1}{4}lg2\times(-1)^{n-1}$，$\therefore lga_n=\dfrac{1}{2}nlg2-\dfrac{1}{4}lg2+\dfrac{1}{4}\times(-1)^nlg2$，$\therefore a_n=2^{\frac{2n-1+(-1)^n}{4}}$，$n\in N^*$.

法二：待定系数法，$a_n=2^{xn+y+z(-1)^n}$，$a_{n+1}=2^{xn+x+y+z(-1)^n}$，$a_n\cdot a_{n+1}=2^{2xn+x+2y}=2^n$，对比系数得，$x=\frac{1}{2}$，

$y=-\frac{1}{4}$，$a_1=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-z}=1$，$\therefore z=\frac{1}{4}$，$\therefore a_n=2^{\frac{2n-1+(-1)^n}{4}}$，$n\in N^*$.

【例3】(2018•杭州期末)设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}•a_n=2^n(n\in N^*)$，若$S_n$为数列前$n$项和，则$S_{2018}=($　　$)$

A．$2^{2018}-1$　　B．$3\cdot 2^{1009}-3$　　C．$2^{2009}-3$　　D．$2^{2010}-3$

【解析】$\because$数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}•a_n=2^n(n\in N^*)$，$\therefore\frac{a_{n+2}a_{n+1}}{a_{n+1}a_n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}=2$，$a_2a_1=2$，解得$a_2=2$.

$\therefore$数列$\{a_n\}$的奇数项与偶数项分别成等比数列，公比都为2，首项分别为1，2.

则$S_{2018}=(a_1+a_3+\ldots+a_{2017})+(a_2+a_4+\ldots+a_{2018})=\frac{2^{1009}-1}{2-1}+\frac{2(2^{1009}-1)}{2-1}=3•2^{1009}-3$．故选$B$.

【例4】（2018•亭湖模拟）已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=a$，$a_n+a_{n+1}=2n-1$．若对$\forall n\in N^*$，且$n\geqslant 2$，不等式$(a_n-1)(a_{n+1}-1)\geqslant 2(1-n)$恒成立，则实数$a$的取值范围是________.

【解析】不等式$(a_n-1)(a_{n+1}-1)\geqslant 2(1-n)$恒成立，化为：$a_na_{n+1}-(a_n+a_{n+1})+1\geqslant 2(1-n)$，由$a_n+a_{n+1}=2n-1$.

$\therefore$不等式化为：$a_na_{n+1}\geqslant 0$，

法一：当n为奇数时，$a_n=a+(n-1)$，$a_{n+1}=-a+n$，$\therefore a_na_{n+1}=[a+(n-1)](-a+n)=-a^2+a+n(n-1)\geqslant 0$，

即$-a^2+a\geqslant -n(n-1)$对$\forall n\in N^*$，且$n\geqslant 2$恒成立．$\therefore -a^2+a\geqslant -6$，解得$-2\leqslant a\leqslant 3$.

当n为偶数时，$a_n=-a+(n-1)$，$a_{n+1}=a+n$，$\therefore a_na_{n+1}\geqslant 0$，即$-a^2+a\geqslant -n(n-1)$对$\forall n\in N^*$，且$n\geqslant 2$恒成立．

$\therefore -a^2+a\geqslant -2$，解得$-2\leqslant a\leqslant 1$．又$a>0$，可得$a$的取值范围为：$-2\leqslant a\leqslant 1$．故答案为：$[-2,\ 1]$.

法二：待定系数法，令$a_n=xn+y+z(-1)^n$，$a_{n+1}=xn+x+y+z(-1)^{n+1}$，$a_n+a_{n+1}=2xn+x+2y=2n-1$，

对比系数得：$x=1$，$y=-1$；由于$a_1=x+y-z=-z=a\Rightarrow z=-a$，故$a_n=n-1-a(-1)^n$；

$a_na_{n+1}\geq 0$对$\forall n\in N^*$，且$n\geqslant 2$恒成立，则$\begin{cases}a_2=1-a\geq 0\\ a_3=2+a\geq 0\end{cases}\Rightarrow -2\leq a\leq 1$，故答案为：$[-2,\ 1]$.

第二讲 递推中含有隔项规律的数列求和

定理：若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)^na_n=An+B$，S_n为其前n项和，则S_4，S_8-S_4，$S_{12}-S_8\cdots$成等差数列，公差为$8A$；④⑤⑥

证明：$\begin{cases}a_2-a_1=\ \ A+B & (1)\\ a_3+a_2=2A+B & (2)\\ a_4-a_3=3A+B & (3)\end{cases}$　$2\times(2)-(1)+(3)$ 得：$a_1+a_2+a_3+a_4=6A+2B$，同理

$\begin{cases}a_6-a_5=5A+B & (4)\\ a_7+a_6=6A+B & (5)\\ a_8-a_7=7A+B & (6)\end{cases}$　$2\times(5)-(4)+(6)$ 得：$a_5+a_6+a_7+a_8=14A+2B$，故S_4，S_8-S_4，

$S_{12}-S_8\cdots$是以$6A+2B$为首项，$8A$为公差的等差数列；此类型题可以求出通项，但花的时间太多，显然每4项为一个整体操作更简单．一些数列含有周期性，需要列举几项，发现规律后在简化．

【例 5】（2018•河南一模）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)^{n+1}a_n=2$，则其前 100 项和为（　　）

A．250　　B．200　　C．150　　D．100

【解析】$n=2k-1(k\in N^*)$时，$a_{2k}+a_{2k-1}=2$．

$\therefore$其前 100 项和$S_{100}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\ldots+(a_{99}+a_{100})=2\times 50=100$．故选$D$．

【例 6】（2019•潍坊期中）数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，则$\{a_n\}$的前 44 项和为（　　）

A．990　　B．870　　C．640　　D．615

【解析】法一：令$a_1=a$，由$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，可得$a_2=1+a$，$a_3=2-a$，$a_4=7-a$，

$a_5=a$，$a_6=9+a$，$a_7=2-a$，$a_8=15-a$，

$a_9=a$，$a_{10}=17+a$，$a_{11}=2-a$，$a_{12}=24-a$，…

可得$(a_1+a_3)+(a_5+a_7)+(a_9+a_{11})+\ldots+(a_{41}+a_{43})=2+2++2+\ldots+2=2\times 11=22$；

$a_2+a_6+a_{10}+\ldots+a_{42}=(1+a)+(9+a)+\ldots+(81+a)=11(1+a)+\frac{1}{2}\times 11\times 10\times 8=451+11a$；

$a_4+a_8+a_{12}+\ldots+a_{44}=(7-a)+(15-a)+\ldots+(87-a)=11(7-a)+\frac{1}{2}\times 11\times 10\times 8=517-11a$；

即有前 44 项和为$22+451+11a+517-11a=990$．故选：A．

法二：$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，列举前 4 项和，显然$S_4=6A+2B=12-2=10$，$S_8-S_4=10+8A=26$，故S_4，S_8-S_4，$S_{12}-S_8\cdots$是以 10 为首项，16 为公差的等差数列，故$S_{44}=11S_4+\frac{11\times 10}{2}\times 16=990$．

【例 8】(2019•太原一模)已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n-(-1)^n a_n=2n-6+\frac{1}{2^n}$，$(n\in N^*)$则$S_{100}=$（　　）

A．196　　B．200　　C．$194+\frac{1}{2^{100}}$　　D．$198+\frac{1}{2^{102}}$

【解析】$\because$数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n-(-1)^n a_n=2n-6+\frac{1}{2^n}$，$(n\in N^*)$，$\therefore S_n=(-1)^n a_n+2n-6+\frac{1}{2^n}$，$(n\in N^*)$，$a_n=S_n-S_{n-1}=(-1)^n a_n+2n-6+\frac{1}{2^n}-(-1)^{n-1}a_{n-1}-(2n-2)+6-\frac{1}{2^{n-1}}=(-1)^n a_n-(-1)^{n-1}a_{n-1}-\frac{1}{2^n}+2$，

当n为奇数时，$2a_n+a_{n-1}=2-\frac{1}{2^n}$，当$n$为偶数时，$a_{n-1}=\frac{1}{2^n}-2$，$\therefore a_1=\frac{1}{2^2}-2$，$a_3=\frac{1}{2^4}-2$，$a_5=\frac{1}{2^6}-2$，…，$a_{99}=\frac{1}{2^{100}}-2$，$a_2=2-\frac{1}{2^3}-2a_3=6-\frac{1}{2^2}$，$a_4=6-\frac{1}{2^4}$，$a_6=6-\frac{1}{2^6}$，…，$a_{100}=6-\frac{1}{2^{100}}$，

$\therefore a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=\ldots=a_{99}+a_{100}=4$，$\therefore S_{100}=50\times 4=200$．故选$B$．

达标训练

1．已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+a_n=2n-3$，若$a_1=2$，则$a_{2014}=$（　　）

A．2007　　B．2006　　C．2005　　D．2009

2．（2019•河南模拟）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_1=1$，$a_n a_{n+1}=2^n$，则$S_{20}=$（　　）

A．3066　　B．3063　　C．3060　　D．3069

3．（2017•钦州月考）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}\bullet a_n=2^n(n\in N^*)$，则$S_{2017}=$（　　）

A．$2^{1010}-1$　　B．$2^{1010}-3$　　C．$3\bullet 2^{1008}-1$　　D．$2^{1009}-3$

4．（2018•合肥三模）若正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_n a_{n+1}=2^{2n}$ $(n\in N^*)$，则a_6-a_5的值是（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$-16\sqrt{2}$　　C．2　　D．$16\sqrt{2}$

5.（2019•杭州期中）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n \cdot a_{n+1}=2^n(n\in N^*)$．$S_n$是数列$\{a_n\}$的前$n$项和，则（　　）

A．数列$\{a_{2n-1}\}$是等差数列　　B．数列$\{a_n\}$是等比数列

C．$a_{2019}=2^{2019}$　　D．$S_{2019}=2^{1011}-3$

6.（2019•石家庄一模）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_{n+1}+S_n=\dfrac{n^2-19n}{2}(n\in N^*)$，若$a_{10}<a_{11}$，则$S_n$取最小值时$n$的值为（　　）

A．10　　B．9　　C．11　　D．12

7.（2019•赤峰期末）若数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=3n+1$，$n\in N*$，则$a_1+a_2+\ldots+a_{2n}=$________．

8.（2019•黄浦一模）已知数列$\{a_n\}(n\in N^*)$，若$a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=(\dfrac{1}{2})^n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=$________．

9. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_{n+1}+a_n=2n+1$，且$S_n=500$．若$a_2<2$，则n的最大值为________．

10.（2019•锡山区期中）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，对于任意的$n\in N^*$都有$S_n+S_{n+1}=n^2$，若$\{a_n\}$为单调递增的数列，则a_1的取值范围为（　　）

A．$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$　　B．$(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$　　C．$(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4})$　　D．$(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3})$

11.（2019•昆明模拟）数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+a_n=(-1)^n(2n-1)$，则$\{a_n\}$的前60项和为（　　）

A．-1710　　B．-1740　　C．-1770　　D．-1800

12. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+a_n=4n+4$，$n\in N^*$

（1）若$a_1=1$，试求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）是否存在a_1，使$\{a_n\}$为等差数列？

13.（2018•兴庆期末）数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，则$\{a_n\}$的前64项和为（　　）

A．4290　　B．4160　　C．2145　　D．2080

14.（2017•晋中期末）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}+(-1)^n a_n=n+2(n\in N^*)$，则$S_{20}=$（　　）

A．130　　B．135　　C．260　　D．270

15.（2018•常州期末）数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$b_n=a_{n+1}+(-1)^n a_n(n\in N^*)$，且数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$n^2$．已知数列$\{a_n-n\}$的前2018项和为1，那么数列$\{a_n\}$的首项$a_1=$________．

16.（2018•郴州月考）在等差数列$\{a_n\}$中，$a_4=5$，$a_7=11$．设$b_n=(-1)^n \cdot a_n$，则数列$\{b_n\}$的前100项之和S_{100}为（　　）

A．-200　　B．-100　　C．200　　D．100

17.（2019•龙岩期末）在数列$\{a_n\}$中，$a_{2n}=a_{2n-1}+(-1)^n \cdot n$，$a_{2n+1}=a_{2n}+n$，$a_1=1$，则$a_{101}=$________．

18.（2018•赣州期末）数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，满足$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+(-1)^n$，则$S_{2n-1}=$________．

19.（2019•衡水月考）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^k$，$a_{2k+1}=a_{2k}+2^k(k\in N^*)$，则$\{a_n\}$的前60项的和$S_{60}=$（　　）

A．$2^{31}-154$　　B．$2^{31}-124$　　C．$2^{32}-94$　　D．$2^{32}-124$

20.（2019•洪山月考）在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=3$，且数列$\{a_n+(-1)^n\}$是公比为2的等比数列，对于任意的$n\in N^*$，不等式$a_1+a_2+\ldots+a_n\geqslant\lambda a_{n+1}$恒成立，则实数$\lambda$的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,\dfrac{2}{5}]$　　B．$(-\infty,\dfrac{1}{2}]$　　C．$(-\infty,\dfrac{2}{3}]$　　D．$(-\infty,1]$

21.（2019•湖北月考）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n(n+2)}$，则数列$\{(-1)^n a_n\}$的前40项的和为（　　）

A．$\dfrac{19}{20}$　　B．$\dfrac{325}{462}$　　C．$\dfrac{41}{84}$　　D．$\dfrac{20}{41}$