专题 6 经典的二阶递推

第一讲 二阶递推之方程组法 $a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}$ $(a_1=a,a_2=b,n\geq 2)$

1．设 $a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$ 与 $a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}$ 比较，得 $\alpha+\beta=p,\alpha\cdot\beta=-q$，可知：$\alpha$，$\beta$ 是方程 $x^2-px-q=0$ 的两根，容易求得 α，β．

（I）当 $\alpha\neq\beta$ 时，数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ 是以 $a_2-\alpha a_1$ 为首项，β 为公比的等比数列

同时满足数列 $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ 是以 $a_2-\beta a_1$ 为首项，α 为公比的等比数列

则有 $\begin{cases}a_{n+1}-\alpha a_n=(b-\alpha a)\beta^{n-1}\\ a_{n+1}-\beta a_n=(b-\beta a)\alpha^{n-1}\end{cases}$ 两式联立，消去 a_{n+1} 得：$a_n=\dfrac{1}{\beta-\alpha}\left[(b-\alpha a)\beta^{n-1}-(b-\beta a)\alpha^{n-1}\right]$

特例：当 $p+q=1$ 时，$a_{n+1}-a_n=-qa_n+qa_{n-1}$，$\therefore\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 $b-a$ 为首项，$-q$ 为公比的等比数列

$\therefore a_{n+1}-a_n=(b-a)(-q)^{n-1}$，同时 $a_{n+1}+qa_n=a_n+qa_{n-1}$，$\therefore\{a_{n+1}+qa_n\}$ 是以 $b+qa$ 为常数的数列

故可以求出：$a_n=a+\dfrac{(b-a)\left[1-(-q)^{n-1}\right]}{1+q}$．

特征根解方程法：令 $a_n=x\cdot\alpha^n+y\cdot\beta^n$，再将 a_1,a_2 代入即可秒杀．

（II）当 $\alpha=\beta$ 时，设 $a_{n+1}-\alpha a_n=\alpha(a_n-\alpha a_{n-1})=\alpha^{n-1}(b-\alpha a)$，两边同除以 α^{n-1} 得：$\dfrac{a_{n+1}}{\alpha^{n-1}}-\dfrac{a_n}{\alpha^{n-2}}=b-\alpha a$

数列 $\left\{\dfrac{a_n}{\alpha^{n-2}}\right\}$ 是以 αa 为首项，$b-\alpha a$ 为公差的等差数列，$\therefore\dfrac{a_n}{\alpha^{n-2}}=\alpha a+(n-1)(b-\alpha a)$

特征根解方程法：令 $a_n=(xn+y)\alpha^n$，再将 a_1,a_2 代入即可秒杀．

【例 1】（2019•潮州二模）已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\dfrac{4}{3}$，$a_2=\dfrac{13}{9}$，且 $3a_n+a_{n-2}=4a_{n-1}(n\geqslant 3)$，则 $a_n=$____．

【解析】法一：由 $3a_n+a_{n-2}=4a_{n-1}(n\geqslant 3)$，可得 $a_n-a_{n-1}=\dfrac{1}{3}(a_{n-1}-a_{n-2})(n\geqslant 3)$，在数列 $\{a_n\}$ 中，由 $a_1=\dfrac{4}{3}$，$a_2=\dfrac{13}{9}$，

可得 $a_2-a_1=\dfrac{1}{9}$，由 $a_n-a_{n-1}=\dfrac{1}{3}(a_{n-1}-a_{n-2})(n\geqslant 3)$，可得 $a_n-a_{n-1}\neq 0$，$\therefore\dfrac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}-a_{n-2}}=\dfrac{1}{3}$，$(n\geqslant 3)$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n-a_{n-1}\}$ 是等比数列，$\therefore a_n-a_{n-1}=\dfrac{1}{9}\times(\dfrac{1}{3})^{n-2}=(\dfrac{1}{3})^n$，$(n\geqslant 2)$，

由 $a_2-a_1=\dfrac{1}{9}$，$a_3-a_2=(\dfrac{1}{3})^3$，…，$a_n-a_{n-1}=(\dfrac{1}{3})^n$，$(n\geqslant 2)$，以上各式相加可得

$a_n-a_1=(\dfrac{1}{3})^2+(\dfrac{1}{3})^3+\ldots+(\dfrac{1}{3})^n=\dfrac{\frac{1}{9}-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{3})^n$，$\therefore a_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{3})^n$，$(n\geqslant 2)$，经检验可得 $a_1=\dfrac{4}{3}$ 满足

$a_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{3})^n$，$\therefore a_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{3})^n$．故答案为：$\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{3})^n$．

法二：构造数列特征方程 $3x^2+1=4x\Rightarrow x_1=\dfrac{1}{3},x_2=1$，故 $\begin{cases}a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{3}(a_n-a_{n-1})\\ a_{n+1}-\dfrac{1}{3}a_n=a_n-\dfrac{1}{3}a_{n-1}\end{cases}$，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以

$a_2-a_1=\dfrac{1}{9}$ 为首项，$\dfrac{1}{3}$ 为公比的等比数列，同时数列 $\left\{a_{n+1}-\dfrac{1}{3}a_n\right\}$ 是以 $a_2-\dfrac{1}{3}a_1=1$ 为常数的数列，联立方程组

得：$\begin{cases}a_{n+1}-a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\\ a_{n+1}-\dfrac{1}{3}a_n=1\end{cases}$ $\therefore a_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{3})^n$

法三：暴力特征根法：$3x^2+1=4x\Rightarrow x_1=\dfrac{1}{3},x_2=1$，$\therefore a_n=x\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+y(1)^n=x\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+y$，代入 $a_1=\dfrac{4}{3},a_2=\dfrac{13}{9}$ 得：

$x=-\dfrac{1}{2},y=\dfrac{3}{2}$，$\therefore a_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{3})^n$．

【例 2】已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=1$，$a_2=4$，且$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$，求：$\{a_n\}$通项公式.

【解析】法一：由$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$，得$\begin{cases}a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)\\a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)\end{cases}$，所以$\begin{cases}a_{n+1}-2a_n=3(a_n-a_{n-1})\\a_{n+1}-3a_n=2(a_n-a_{n-1})\end{cases}$由$a_2-2a_1=2$，$a_2-3a_1=1$，得$\begin{cases}a_{n+1}-2a_n=2\times3^{n-1}\\a_{n+1}-3a_n=2^{n-1}\end{cases}$两式联立得$a_n=2\times3^{n-1}-2^{n-1}$.

法二：暴力特征根法：$x^2=5x-6\Rightarrow x_1=2,x_2=3$，$\therefore a_n=x\cdot2^n+y\cdot3^n$，代入$a_1=1,a_2=4$得：$x=-\frac{1}{2},y=\frac{2}{3}$，$\therefore a_n=2\times3^{n-1}-2^{n-1}$.

【例 3】设p,q为实数，α，β是方程$x^2-px+q=0$的两根，数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=p$，$a_2=p^2-q$，$a_{n+2}=pa_{n+1}-qa_n$.

（1）证明：$\alpha+\beta=p,\alpha\cdot\beta=q$；

（2）求$\{a_n\}$通项公式；

（3）$p=1,q=\frac{1}{4}$，求$\{a_n\}$的前n项和S_n.

【解析】（1）α，β是方程$x^2-px+q=0$的两根，所以$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-px+q$，

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\cdot\beta=x^2-px+q$，

比较系数得$\alpha+\beta=p$，$\alpha\cdot\beta=q$.

（2）因为$a_n=pa_{n-1}-qa_{n-2}$，且$\alpha+\beta=p,\alpha\cdot\beta=q$，所以$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$ ①.

同理$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha(a_n-\alpha a_{n-1})$ ② 又因为$a_2-\alpha a_1=p^2-q-\alpha p=p(p-\alpha)-q=(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)-\alpha]-q=(\alpha+\beta)\cdot\beta-\alpha\cdot\beta=\beta^2$，由式①的数列$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$是以$a_2-\alpha a_1=\beta^2$为首项、以$\beta$为公比的等比数列. 故$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^2\cdot\beta^{n-1}=\beta^{n+1}$ ③. 由式②的数列$\{a_{n+1}-\beta a_n\}$是以$a_2-\beta a_1=\alpha^2$为首项、以α为公比 的等比数列. 故$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^2\cdot\alpha^{n-1}=\alpha^{n+1}$ ④. 联立③④得方程组，消去a_{n+1}，的$(\alpha-\beta)a_n=\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}$，故$a_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.

（3）因为$p=1$，$q=\frac{1}{4}$，所以$\alpha=\beta=\frac{1}{2}$，$a_{n+2}=a_{n+1}-\frac{1}{4}a_n\Rightarrow a_{n+2}-\frac{1}{2}a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)$，故数列$\left\{a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right\}$是以$a_2-\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{4}$为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，即$a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，$\therefore a_{n+1}\cdot2^{n+1}-a_n\cdot2^n=1\therefore\{a_n\cdot2^n\}$是以$2a_1=2$为首项，1 为公差的等差数列，$\therefore a_n\cdot2^n=n+1$，$a_n=(n+1)(\frac{1}{2})^n=\frac{n+1}{2^n}$.

$S_n=1+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n+1}{2^n}$ ⑤ $\frac{1}{2}S_n=\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}$ ⑥，⑤—⑥得

$$\frac{1}{2}S_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}$$. 故$S_n=3-\frac{n+3}{2^n}$.

此题完全按照高考给分标准作答，暴力特征根法留给读者朋友们享受！

第二讲 斐波那契数列

定义：一个数列，前两项都为 1，从第三项起，每一项都是前两项之和，那么这个数列称为斐波那契数列，又称黄金分割数列；表达式 $F_0=1,F_1=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n\in N^+)$

通项公式：$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ （又叫"比内公式"，是用无理数表示有理数的一个范例）

比较有趣的是：一个完全是自然数的数列，通项公式竟然是用无理数表示的．

证明：线性递推数列的特征方程为：$x^2=x+1$，解得：$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ， $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 则 $F_n=c_1x_1^{\ n}+c_2x_2^{\ n}$

$\because F_1=F_2=1$ $\therefore \begin{cases}1=c_1x_1+c_2x_2\\1=c_1x_1^{\ 2}+c_2x_2^{\ 2}\end{cases}$ 解得：$c_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$；$c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\therefore F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

斐波那契数列的一些性质：

求和问题：① $S_n=a_{n+2}-1$；② $a_1+a_3+a_5+\cdots a_{2n-1}=a_{2n}$；③ $a_2+a_4+a_6+\cdots a_{2n}=a_{2n+1}-1$．

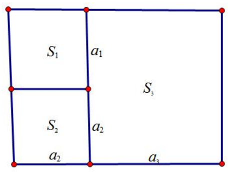
证明：① $a_{n+2}=S_{n+2}-S_{n+1}=(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_1=S_n+1$，故 $S_n=a_{n+2}-1$，此证明方法也是错位相减的一种特例．

② $a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}=a_1+(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-3}+a_{2n-2})=a_1+S_{2n-2}=a_{2n}$，此证明过程也需要利用①的结论．

③ $a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2n-2}+a_{2n-1})=S_{2n-1}=a_{2n+1}-1$．

这三个式子用数学归纳法证明也非常简单，无需强化记忆，每次列出前几项比划一下，考试中如果出现需要这些结论的，拿出前几项及时推导即可．

平方和问题：$a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}=a_na_{n+1}$（根据面积公式推导，如下图）



构造正方形来设计面积，$a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}=S_1+S_2+S_3=(a_1+a_2)(a_2+a_3)=a_3a_4$，以此类推，也可以用数学归纳法证明，知道一个大致的方向即可．

裂项问题：$\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{2n-3}a_{2n-1}}+\frac{1}{a_{2n-2}a_{2n}}=\frac{1}{a_2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}\right)+\frac{1}{a_3}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\frac{1}{a_{2n-2}}\left(\frac{1}{a_{2n-3}}-\frac{1}{a_{2n-1}}\right)$ $+\frac{1}{a_{2n-1}}\left(\frac{1}{a_{2n-2}}-\frac{1}{a_{2n}}\right)=\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}$．

注意：如果是斐波那契数列的部分项求和也可以，比如 $\frac{p}{a_ma_{m+2}}+\frac{p}{a_{m+1}a_{m+3}}+\cdots+\frac{p}{a_{m+n-2}a_{m+n}}=\frac{p}{a_{m+1}}\left(\frac{1}{a_m}-\frac{1}{a_{m+n}}\right)$ 前提就是必须隔项，否则无法裂项相消．

【例 4】已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=\frac{1}{3}$，$a_2=\frac{1}{3}$，$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}(n\in N^*,n\geqslant 2)$，则 $\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\frac{1}{a_3a_5}+\ldots+\frac{1}{a_{2019}a_{2021}}$ 的整数部分为（　　）

A． 6　　B． 7　　C． 8　　D． 9

【解析】$\frac{1}{a_3}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\frac{1}{a_{2019}}\left(\frac{1}{a_{2018}}-\frac{1}{a_{2020}}\right)+\frac{1}{a_{2020}}\left(\frac{1}{a_{2019}}-\frac{1}{a_{2021}}\right)=\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{a_{2020}}\frac{1}{a_{2021}}=9-\frac{1}{a_{2020}}\frac{1}{a_{2021}}<9$，而整数部分为 8，故选 C．

【例 5】斐波那契数列中，若 $a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\in N*)$，$S_n$ 为斐波那契数列的前 n 项和，则下列式子中成立的是（　　）

A． $S_{2019}=a_{2020}+1$　　B． $S_{2019}=a_{2021}$

C． $a_1+a_3+\cdots+a_{2019}=a_{2021}$　　D． $a_2+a_4+\cdots+a_{2018}=a_{2019}-1$

【解析】根据秘籍的公式可知选 D．

第三讲 二阶构造的周期数列

若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n(n\in N^*)$，或者$a_n=\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}(n\geqslant 3)$，则数列$\{a_n\}$是周期为 6 的数列.

证明：$a_{n+6}=a_{n+5}-a_{n+4}=a_{n+4}-a_{n+3}-a_{n+4}=-a_{n+2}+a_{n+1}=-a_{n+1}+a_n+a_{n+1}=a_n$.

【例 6】(2018•保定期末)已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n(n\in N^*)$则$\{a_n\}$前 100 项之和为(　　)

A. 5　　B. 20　　C. 300　　D. 652

【解析】$\because a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n(n\in N^*)$，$\therefore a_3=3-1=2$，$a_4=2-3=-1$，$a_5=-1-2=-3$，$a_6=-3+1=-2$，$a_7=-2+3=1$，$a_8=1+2=3$，$a_9=3-1=2$，$\dots\therefore a_n$是周期为 6 的周期函数，$\because 100=16\times 6+4$，$\therefore S_{100}=16\times(1+3+2-1-3-2)+(1+3+2-1)=5$．故选$A$．

第四讲 二阶递推式：$a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}+A(a_1=a,a_2=b,n\geq 2)$

(1) 当$p+q=1$时，$a_{n+1}-a_n=-q(a_n-a_{n-1})+A$，$\therefore a_{n+1}-a_n+\dfrac{A}{-q-1}=\left(a_{n+1}-a_n+\dfrac{A}{-q-1}\right)(-q)$，

$\therefore a_{n+1}-a_n+\dfrac{A}{-q-1}=\left(b-a+\dfrac{A}{-q-1}\right)(-q)^{n-1}$，再由迭加法求出$a_n$.

(2) 当$p+q\neq 1$时，设$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})+A$　与$a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}+A$比较，得$\alpha+\beta=p,\alpha\cdot\beta=-q$，可知，$\alpha$，$\beta$是方程$x^2-px-q=0$的两根，容易求得$\alpha$，$\beta$.

(I) 当$\alpha\neq\beta$时，数列$\left\{a_{n+1}-\alpha a_n+\dfrac{A}{\beta-1}\right\}$是以$b-\alpha a+\dfrac{A}{\beta-1}$为首项，$\beta$为公比的等比数列

同时满足数列$\left\{a_{n+1}-\beta a_n+\dfrac{A}{\alpha-1}\right\}$是以$b-\beta a+\dfrac{A}{\alpha-1}$为首项，$\alpha$为公比的等比数列

则有$\begin{cases}a_{n+1}-\alpha a_n+\dfrac{A}{\beta-1}=\left(b-\alpha a+\dfrac{A}{\beta-1}\right)\beta^{n-1}\\ a_{n+1}-\beta a_n+\dfrac{A}{\alpha-1}=\left(b-\beta a+\dfrac{A}{\alpha-1}\right)\alpha^{n-1}\end{cases}$　两式联立，消去a_{n+1}得a_n.

暴力特征根解法：$a_n=x\cdot\alpha^n+y\cdot\beta^n+z$，代入$a_1$，$a_2$，$a_3$即可解得.

(II) 当$\alpha=\beta$时，设$a_{n+1}-\alpha a_n+\dfrac{A}{\alpha-1}=\alpha\left(a_n-\alpha a_{n-1}+\dfrac{A}{\alpha-1}\right)\Rightarrow a_{n+1}-\alpha a_n+\dfrac{A}{\alpha-1}=\alpha^{n-1}\left(b-\alpha a+\dfrac{A}{\alpha-1}\right)$，数列$\left\{a_{n+1}-\alpha a_n+\dfrac{A}{\alpha-1}\right\}$是以$b-\alpha a+\dfrac{A}{\alpha-1}$为首项，$\alpha$为公比的等比数列，将上式子两边同除以$\alpha^{n-1}$得：$\dfrac{a_{n+1}}{\alpha^{n-1}}-\dfrac{a_n}{\alpha^{n-2}}+\dfrac{A}{(\alpha-1)\alpha^{n-1}}=b-\alpha a+\dfrac{A}{\alpha-1}$，令$\dfrac{a_{n+1}+x}{\alpha^{n-1}}-\dfrac{a_n+x}{\alpha^{n-2}}=b-\alpha a+\dfrac{A}{\alpha-1}$通过以上两式子比较得：$\dfrac{x}{\alpha^{n-1}}-\dfrac{x}{\alpha^{n-2}}=\dfrac{A}{(\alpha-1)\alpha^{n-1}}\Rightarrow x=-\dfrac{A}{(\alpha-1)^2}$，数列$\left\{\dfrac{a_n-\dfrac{A}{(\alpha-1)^2}}{\alpha^{n-2}}\right\}$是以$\left(a-\dfrac{A}{(\alpha-1)^2}\right)\alpha$为首项，$b-\alpha a+\dfrac{A}{\alpha-1}$为公差的等差数列.

暴力特征根法：$a_n=(xn+y)\alpha^n+z$，代入a_1，a_2，a_3即可解得.

【例 7】已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=1$，$a_2=5$，且$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+8$，求：$\{a_n\}$通项公式.

【解析】$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+8$，$a_2-a_1=4$，所以数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以 4 为首项，8 为公差的等差数列.
所以$a_{n+1}-a_n=8n-4$，则$a_n-a_{n-1}=8n-12$，$a_{n-1}-a_{n-2}=8n-20\cdots\cdots a_2-a_1=4$

以上相加得$a_n-a_1=\dfrac{4+8n-12}{2}(n-1)=4(n-1)^2$，所以$a_n=4(n-1)^2+1$.

【例 8】已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=8$，$a_{n+1}=6a_n-9a_{n-1}+4(n\ge 2)$

（1）是否存在实数 p,r，使数列$\{a_{n+1}+pa_n+r\}$为等比数列？若存在，求出实数 p,r 若不存在，说明理由；

（2）是否存在实数λ，使数列$\left\{\dfrac{a_n+\lambda}{3^{n-2}}\right\}$为等差数列？若存在，求出实数$\lambda$和$\{a_n\}$的通项公式，若不存在，说明理由.

【解析】(1) 由 $a_{n+1}=6a_n-9a_{n-1}+4$ 得 $a_{n+1}-3a_n+2=3(a_n-3a_{n-1}+2)$，又 $a_2-3a_1+2=7$，所以当 $p=-3,r=2$ 时，数列$\{a_{n+1}-3a_n+2\}$是以 7 为首项，3 为公比的等比数列，所以 $a_{n+1}-3a_n+2=7\times 3^{n-1}$

（2）由（1）得 $a_{n+1}-1=3(a_n-1)+7\times 3^{n-1}$，所以 $\dfrac{a_{n+1}-1}{3^{n-1}}=\dfrac{3(a_n-1)}{3^{n-1}}+7$，即 $\dfrac{a_{n+1}-1}{3^{n-1}}=\dfrac{a_n-1}{3^{n-2}}+7$，又 $\dfrac{a_1-1}{3^{-1}}=0$ 所以当 $\lambda=-1$ 时，数列$\{\dfrac{a_n-1}{3^{n-2}}\}$是以 0 为首项，7 为公差的等差数列．所以 $\dfrac{a_n-1}{3^{n-2}}=7(n-1)$，即 $a_n=7(n-1)\cdot 3^{n-2}+1$．

【例 9】已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+1}=3a_n+10a_{n-1}+1(n\ge 2)$，，求$\{a_n\}$通项公式.

【解析】法一：令 $x^2-3x-10=0$，解得 $x=-2或x=5$，所以有 $\begin{cases}a_{n+1}+2a_n+\dfrac{1}{4}=5(a_n+2a_{n-1}+\dfrac{1}{4})\\ a_{n+1}-5a_n-\dfrac{1}{3}=-2(a_n-5a_{n-1}-\dfrac{1}{3})\end{cases}$

所以数列$\{a_{n+1}+2a_n+\dfrac{1}{4}\}$是 $a_2+2a_1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{25}{4}$ 为首项，5 为公比的等比数列，

则 $a_{n+1}+2a_n+\dfrac{1}{4}=\dfrac{25}{4}\times 5^{n-1}$　　①

数列$\{a_{n+1}-5a_n-\dfrac{1}{3}\}$是 $a_2-5a_1-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{4}{3}$ 为首项，-2 为公比的等比数列.

$a_{n+1}-5a_n-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{4}{3}\times(-2)^{n-1}$　　②

①-②得 $7a_n+\dfrac{7}{12}=\dfrac{5^{n+1}}{4}+\dfrac{(-2)^{n+1}}{3}$，化简得 $a_n=\dfrac{3\cdot 5^{n+1}+4\cdot(-2)^{n+1}-7}{84}$.

法二：暴力特征根法：令 $x^2-3x-10=0$，解得 $x=-2或x=5$，故令 $a_n=x\cdot(-2)^n+y\cdot 5^n+z$，代入 a_1，a_2，a_3，得 $\begin{cases}-2x+5y+z=1\\4x+25y+z=4\\-8x+125y+z=23\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=\dfrac{-2}{21}\\ y=\dfrac{5}{28}\\ z=-\dfrac{1}{12}\end{cases}$ $\therefore a_n=\dfrac{3\cdot 5^{n+1}+4\cdot(-2)^{n+1}-7}{84}$.

达标训练

1.（2019•浙江期中）若数列$\{a_n\}$满足 $a_1=l$，$a_2=2$，$a_na_{n-2}=a_{n-1}(n\geqslant 3)$，记数列$\{a_n\}$的前 n 项积为 T_n，则下列说法错误的是（　　）

A．T_n 无最大值　　B．a_n 有最大值　　C．$T_{2019}=4$　　D．$a_{2019}=2$

2.（2018•云阳期末）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=1$，$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}(n\in N^*,n\geqslant 2)$，则 $\dfrac{1}{a_1a_3}+\dfrac{1}{a_2a_4}+\dfrac{1}{a_3a_5}+\ldots+\dfrac{1}{a_{2018}a_{2020}}$ 的整数部分为（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

3.（2018•济宁一模）设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_2=2$，且 $2na_n=(n-1)a_{n-1}+(n+1)a_{n+1}(n\geqslant 2$ 且 $n\in N^*)$，则 $a_{18}=$（　　）

A．$\dfrac{25}{9}$　　B．$\dfrac{26}{9}$　　C．3　　D．$\dfrac{28}{9}$

4.（2019•双台子期末）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$，则$a_2+a_4+\ldots\ldots+a_{2n}=$（　　）

A．0　　B．a_n　　C．a_{2n+2}　　D．a_{2n+1}

5.（2018•蚌埠三模）数列$\{a_n\}$的前n项和记为S_n，$a_{n+1}=a_n-a_{n-1}(n\in N^*,n\geqslant 2)$，$a_1=2018$，$a_2=2017$，则$S_{100}=$（　　）

A．2016　　B．2017　　C．2018　　D．2019

6.（2019•济南模拟）在数列$\{a_n\}$中，若$a_1=a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n(n\in N^*)$，则$\log_2(a_{2019}+a_{2020})=$_________.

7.（2016•南阳期中）裴波那契数列的通项公式为$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$，又称为“比内公式”，是用无理数表示有理数的一个范例，由此，$a_5=$（　　）

A．3　　B．5　　C．8　　D．13

8.（2019•广东模拟）历史上数列的发展，折射出许多有价值的数学思想方法，对时代的进步起了重要的作用，比如意大利数学家列昂纳多•斐波那契以兔子繁殖为例，引入“兔子数列”：即 1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，….即F（1）$=F$（2）$=1$，$F(n)=F(n-1)+F(n-2)(n\geqslant 3$，$n\in N^*)$．此数列在现代物理、准晶体结构及化学等领域有着广泛的应用，若此数列被 4 整除后的余数构成一个新的数列$\{b_n\}$，又记数列$\{c_n\}$满足$c_1=b_1$，$c_2=b_2$，$c_n=b_n-b_{n-1}(n\geqslant 3,n\in N^*)$，则$c_1+c_2+c_3+\ldots+c_{2019}$的值为_________.

9.（2019•唐山二模）各项均为正数的数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n\bullet a_{n+2}=3a_{n+1}(n\in N^*)$，则$a_5\bullet a_{2019}=$__________.

10.（2019•内江一模）设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=9$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}(n\in N^*,n\geqslant 4)$，则$a_{2018}=$______.

11.（2019•通州期中）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+1}+\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}=\frac{2n}{n+1}a_n(n\geqslant 2$且$n\in N^*)$，则满足不等式$a_{n+1}-a_n>0.02$的正整数$n$的最大值为_________.

12.（2019•赤峰模拟）若数列$\{a_n\}$满足$a_1=-1,a_2=-\frac{1}{2},2a_{n+1}=4a_n-2a_{n-1}+3(n\geqslant 2)$，则$na_n$的最小值为________.

13.（2018•太原期末）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n+2(n\in N^*)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$_________.

14. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=4$，且各项均满足$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

15. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n$，求$a_n$.

16.（2019•浙江模拟）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=a(a\neq 1$且$a\neq -3)$，$a_2=3$，$a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}(n\geqslant 3)$.

（1）求$\{a_{n+1}+a_n\}$和$\{a_{n+1}-3a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{a_n\}$单调递增，求a的取值范围.

17. 已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=a_2=2$，且$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$，

（1）求：$\{a_n\}$通项公式；

（2）当$n\geq 2$时，求证：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<3$；

（3）若函数$f(x)$满足$f(1)=2$，$f(n+1)=[f(n)]^2+f(n)$，$n\in N^*$，求证：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)+1}<\frac{1}{2}$.

18. 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=7$，$a_{n+1}=10a_n-21a_{n-1}+6(n\geq 2)$，，求$\{a_n\}$通项公式

19. 已知$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=-2$，$a_{n+1}=5a_n-6a_{n-1}+2^{n+1}$，

（1）试求实数p,q，使数列$\{a_{n+1}+pa_n+q2^{n+1}\}$为等比数列；

（2）是否存在实数λ，使数列$\left\{\frac{a_{n+1}+\lambda a_n}{2^{n+1}}\right\}$为等差数列？若存在，求出实数$\lambda$和$\{a_n\}$的通项公式，若不存在，说明理由.

20.（2018•江苏期中）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=a$，且$a_{n+1}=k(a_n+a_{n+2})$对任意正整数n都成立，数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.

（1）若$k=\dfrac{1}{2}$，且$S_{18}=171$，求a；

（2）是否存在实数k，使数列$\{a_n\}$是等比数列，且公比不为1，且任意相邻三项a_m，a_{m+1}，a_{m+2}按某顺序排列后成等差数列，若存在，求出所有k的值；若不存在，请说明理由；

（3）若$k=-\dfrac{1}{2}$，求S_n.（用a，n表示）.