专题 7　数列的本质—函数迭代

第一讲 函数迭代和数列的关系

已知函数 $y=f(x)$ 满足 $a_{n+1}=f(a_n)$，则一定有 $a_{n+1}=f(a_n)=f_2(a_{n-1})=\cdots f_n(a_1)$，故函数 $y=f(x)$ 通过反复迭代产生的一系列数构成了数列$\{a_n\}$或者记为$\{b_n\}$、$\{x_n\}$，而数列的每一项与函数迭代的关系可以如下表所示：

下面以函数 $y=2x+1$ 和数列 $a_{n+1}=2a_n+1$

数列	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	……	a_n	a_{n+1}
函数	x	$f(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	……	$f_{n-1}(x)$	$f_n(x)$
数列	1	x	7	15	31	63		2^n-1	$2^{n+1}-1$
数列	-1	-1	-1	-1	-1	-1		-1	-1
函数	x	$2x+1$	$4x+3$	$8x+7$	$16x+15$	$32x+31$	……	$2^{n-1}x+2^{n-1}-1$	$2^n x+2^n-1$

可以发现：

1．数列的递推式和函数的迭代式是有着相同的法则的，故数列的任何一项(a_n,a_{n+1})都在函数 $y=f(x)$ 上.

2．数列的通项公式是函数对 a_1 迭代 $n-1$ 次的结果，即 $a_n=f_{n-1}(a_1)$，每一次由于迭代产生出的因变量成为下一次迭代的自变量.

3．数列的首相 a_1 对整个数列有很大的影响，当迭代不断重复出现同一结果时，我们将其称为不动点.

第二讲 函数的迭代图像——蛛网图

函数的迭代图像，简称蛛网图或者折线图，函数 $y=f(x)$ 和直线 $y=x$ 共同决定.

其步骤如下：

1．在同一坐标系中作出 $y=f(x)$ 和 $y=x$ 的图像（草图），并确定不动点.（如图 1 所示）

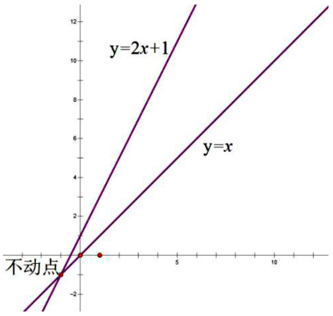


图 1

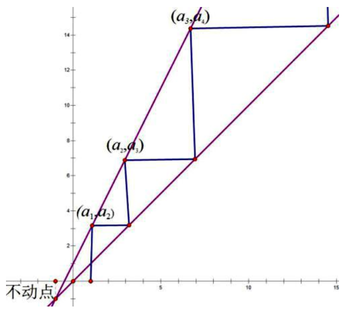


图 2

2．在找出不动点之后，确定范围，将不动点之间的图像放大，并找出起始点a_1（如图 2 所示）

3．由 a_1 向 $y=f(x)$ 作垂直于 x 轴的直线与 $y=f(x)$ 相交，并确定交点(a_1,a_2).

4．由(a_1,a_2)向 $y=x$ 作平行于 x 轴的直线与 $y=x$ 相交，并确定交点(a_2,a_2).

5．由(a_2,a_2)向 $y=f(x)$ 作垂直于 x 轴的直线与 $y=f(x)$ 相交，并确定交点(a_2,a_3).

重复 4，5，直至找到点(a_n,a_{n+1})的最终去向.

【例 1】设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1,a_{n+1}=2a_n+1$，求$\{a_n\}$的通项公式.

【解析】如上图 1、图 2 可得，函数 $y=2x+1$ 的不动点为（−1，−1），故 $y=2x+1$ 满足 $y-(-1)=2[x-(-1)]$ 即 $y+1=2(x+1)$，由数列(a_n,a_{n+1})构成的任一点均位于函数 $y=2x+1$ 上，故可知 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，

$\therefore a_n+1=2(a_{n-1}+1)=2^2(a_{n-2}+1)=2^3(a_{n-3}+1)=\cdots=2^{n-1}(a_1+1)=2^n$；$\therefore a_n=2^n-1$.

【例 2】设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a(a>0),a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$，证明：存在常数 M，使得对于任意的 $n\in N^*$，都有 $a_n\le M$.

【证明】令 $y=2\sqrt{x}$，当 $y=x$ 时，函数的不动点有 $x_0=2\sqrt{x_0}$，即 $x_0=0$或$x_0=4$，两个不动点 $(0,0),(4,4)$；

（1）如图 3 所示，当 $4>a>0$ 时，通过蛛网图发现 $4>a_{n+1}>a_n>a_{n-1}>\cdots>a_2>a_1$，故 $a_n<4$，故当 $4\le M$ 时，一定有 $a_n\le M$；

（2）当 $a=4$ 时，总有 $a_n=4$，故当 $4\le M$ 时，一定有 $a_n\le M$；

（3）如图 4 所示，当 $a>4$ 时，通过蛛网图发现 $4<a_{n+1}<a_n<a_{n-1}<\cdots<a_2<a_1=a$，故只需 $a\le M$，一定有 $a_n\le M$；

综上，存在常数 M，使得对于任意的 $n\in N^*$，都有 $a_n\le M$.

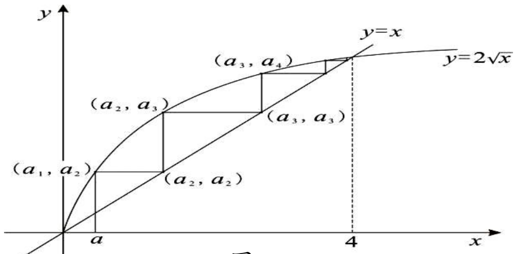


图 3

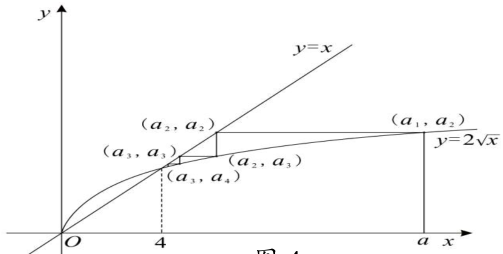


图 4

【例 3】首项为正数的数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=\dfrac{1}{4}(a_n^2+3),n\in N^*$，若对 $n\in N^*$，一切都有 $a_{n+1}>a_n$，求 a_1 的取值范围.

【解析】令 $y=\dfrac{1}{4}(x^2+3)$，当 $y=x$ 时，函数的不动点有 $x_0=1$或$x_0=3$，两个不动点 $(1,1),(3,3)$（图 5）

（1）如图 6 所示，当 $3>a_1>1$ 时，通过蛛网图发现 $1<a_{n+1}<a_n<a_{n-1}<\cdots<a_2<a_1<3$，故与题意要求不符合；（2）如图 7 所示，当 $0<a_1<1$ 时，总有 $0<a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<a_{n+1}<1$；（3）如图 8 所示，当 $a_1>3$ 时，通过蛛网图发现 $a_{n+1}>a_n>a_{n-1}>\cdots>a_2>3$，综上，$a_1>3$ 或者 $0<a_1<1$ 时，$a_{n+1}>a_n$.

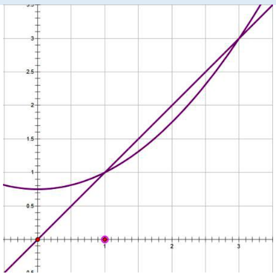


图 5

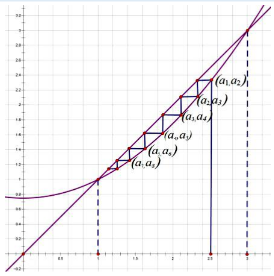


图 6

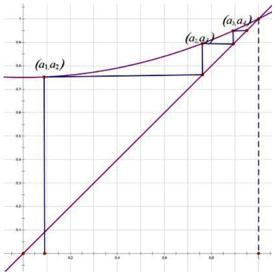


图 7

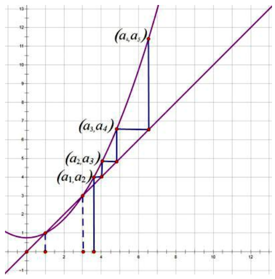


图 8

第三讲 蛛网图与数列的单调性

定理 1：$y=f(x)$ 的单调增区间存在两个不动点 x_1，x_2（$x_1<x_2$），且在两个不动点之间形成一上凸的图形时，（如图 9）则数列 $a_{n+1}=f(a_n)$ 在两个不动点之间的区间是递增的，即 $a_{n+1}>a_n$，在两不动点以外的区间则是递减的，即 $a_{n+1}<a_n$．

定理 2：$y=f(x)$ 的单调增区间存在两个不动点 x_1，x_2（$x_1<x_2$），且在两个不动点之间形成一下凹的图形时，（如图 10）则数列 $a_{n+1}=f(a_n)$ 在两个不动点之间的区间是递减的，即 $a_{n+1}<a_n$，在两不动点以外的区间则是递增的，即 $a_{n+1}>a_n$．

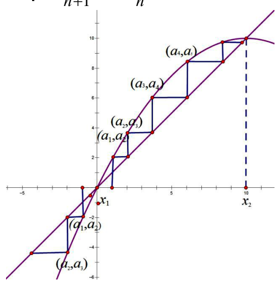


图 9

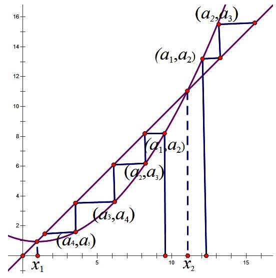


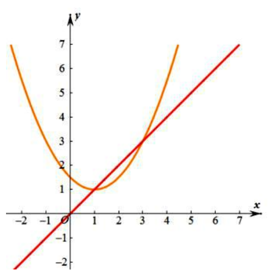
图 10

综上可得，当 $y=f(x)$ 的单调增区间位于上凸内或者下凹外时，即当迭代起点 a_1 位于此区域时，一定有 $a_{n+1}>a_n$ 同理，当迭代起点 a_1 位于单调增区间的上凸外或者下凹内时，一定有 $a_{n+1}<a_n$．

数列的极限

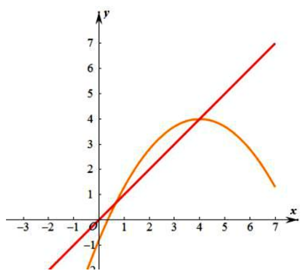
根据蛛网图可知，当一数列 $\{a_n\}$ 为单调上凸曲线时，迭代点 (a_n,a_{n+1}) 会无限靠近大的不动点 x_2，我们将这个大的不动点 x_2 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_2$；当一数列 $\{a_n\}$ 为单调下凹曲线时，迭代点 (a_n,a_{n+1}) 会无限靠近小的不动点 x_1，我们将这个小的不动点 x_1 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_1$．

几种常见的函数迭代图（未画折线）



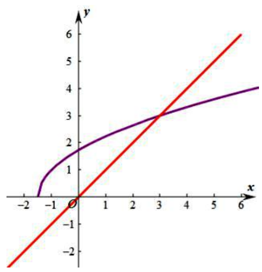
$y=a(x-h)^2+h(a>0)$

顶点为不动点抛物线



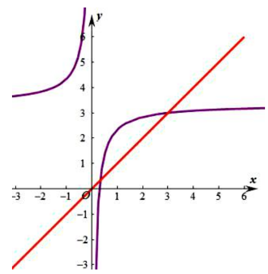
$y=a(x-h)^2+h(a<0)$

顶点为不动点的抛物线



$y=\sqrt{ax+b}(a>0,b>0)$

横着的抛物线



$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad>bc)$

二四象限反比例函数的平移函数

请思考：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=h$　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=h$　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_1$　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_2$

第四讲 由耐克函数的迭代产生的数列

1．已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{a}{x}(a>0)$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=f(a_n)$，求不动点得，$x_0=\dfrac{1}{2}x_0+\dfrac{a}{x_0},x_0=\sqrt{2a}$，故不动点 $(\sqrt{2a},\sqrt{2a})$ 为耐克函数的顶点（图 11），思考：为什么 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{a}{x}(a>0)$ 的不动点一定是顶点？

2．已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-h)+\dfrac{a}{x-h}+h(a>0)$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=f(a_n)$，求此函数的不动点得，$x_0-h=\dfrac{1}{2}(x_0-h)+\dfrac{a}{x_0-h},x_0=\sqrt{2a}+h$，故可知不动点 $(\sqrt{2a}+h,\sqrt{2a}+h)$ 为耐克函数的顶点（图 12）．

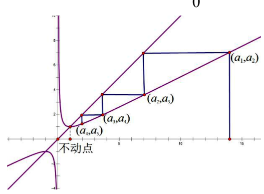


图 11

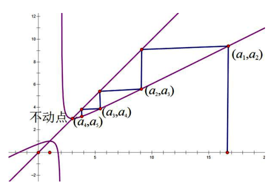


图 12

结论：耐克函数一般为收缩函数，即 $x_0<a_{n+1}<a_n<a_{n-1}<\cdots<a_2<a_1$．

【例 4】数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{4}{x_n}\right)\left(n\in N^*\right)$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A(A>0)$，则 $A=$_________.

【解析】如图 11 可得，函数 $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{x}\right)$ 的不动点为（2，2）或者（−2，−2），由蛛网图可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

【例 5】数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\left(a>0,n\in N^*\right)$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A(A>0)$，则 $A=$_________.

【解析】如图 11 可得，函数 $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$ 的不动点为 $(\sqrt{2a},\sqrt{2a})$，由蛛网图可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2a}$.

【例 6】设 $a>2$，数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=a$，$x_{n+1}=\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}\left(n\in N^*\right)$，求证：$x_n>2$，且 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$.

【解析】令 $y=\frac{x^2}{2(x-1)}=\frac{(x-1+1)^2}{2(x-1)}=\frac{\left[(x-1)+1\right]^2}{2(x-1)}=\frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{2(x-1)}=\frac{(x-1)}{2}+\frac{1}{2(x-1)}+1(x>2)$；可知 $y=\frac{(x-1)}{2}+\frac{1}{2(x-1)}+1(x>2)$ 由 $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}$ 向右移一个单位，再向上移一个单位而得到，故顶点坐标为（2，2），也是此函数的不动点。如图 12 所示，有 $2<x_{n+1}<x_n<x_{n-1}<\cdots<x_2<x_1$.

【例 7】数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}$，求证：$1<a_n<\frac{3}{2}+\frac{1}{n}$.

【证明】如图 11 可得，函数 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}$ 的不动点为 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$，由蛛网图可知 $\sqrt{2}<a_{n+1}<a_n<\cdots<a_2<a_1=2$

$a_1=2<\frac{3}{2}+1$;　　$a_2=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{2}<\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$;　　$\therefore a_n\cdots<a_4<a_3<a_2=\frac{3}{2}<\frac{3}{2}+\frac{1}{n}$.

第五讲 迭代函数与周期数列问题

已知 $a_{n+1}=\frac{aa_n+b}{ca_n+d}(ad<bc)$，求 $\{a_n\}$ 的通项可由函数 $y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ 和直线 $y=x$ 的折线图决定．函数 $y=f(x)$ 和直线 $y=x$ 一定没有交点，即函数 $y=f(x)$ 一定没有不动点.

定理 3　当 $f(x)=f^{-1}(x)$ 时，$f_{2n-1}(x)=f(x);f_{2n}(x)=x$.

例如：$f(x)=\pm\frac{a}{x}(a\in R)$（反比例函数，如图 13）；$f(x)=a-x$（与直线 $y=x$ 垂直的直线，如图 14）

$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$，当 $a+d=0$（将反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 向右向上移动相等的距离得到的图像，如图 15）

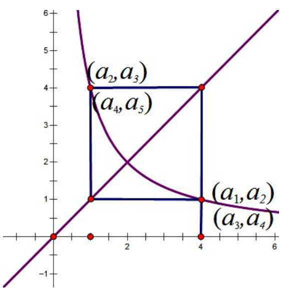


图 13

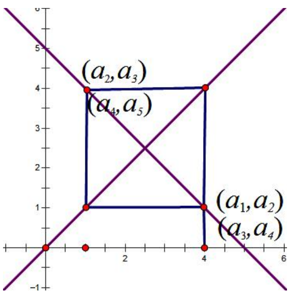


图 14

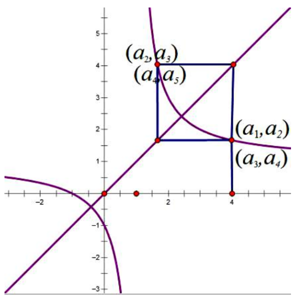


图 15

定理 4　函数 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$，当 $(a+d)^2=ad-bc$ 时，$f_{3n-2}(x)=f(x);f_{3n-1}(x)=f_2(x);f_{3n}(x)=x$

（将反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$ 仅向右或者向上移动相同单位得到的图像，如图 16，图 17）。

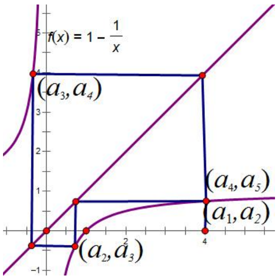


图 16

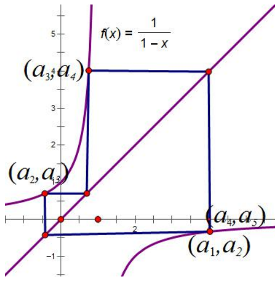


图 17

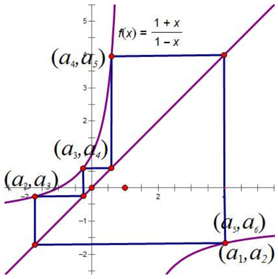


图 18

定理 5　函数 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$，当 $(a+d)^2=2(ad-bc)$ 时，$f_{4n-3}(x)=f(x)$；$f_{4n-2}(x)=f_2(x)=-\frac{1}{x}$；$f_{4n-1}(x)=f_3(x)$；$f_{4n}(x)=x$（将反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$ 向右向下移动相等的距离得到的图像，如图 18）.

*定理 6　函数 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$，当 $(a+d)^2=3(ad-bc)$ 时，每迭代六次为一周期；当 $(a+d)^2\ge 4(ad-bc)$，则不会出现迭代周期.

【例 8】设 S 是实数集 R 的真子集，且满足下列两个条件：①$1\notin S$；②若 $a\in S$.则 $1-\frac{1}{a}\in S$，问：

（1）若 $2\in S$，则 S 中一定还有哪几个数？（2）集合 S 中能否只有一个元素？说明理由.

【解析】（1）$\because 2\in S$，$\therefore 1-\frac{1}{a}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\in S$；$\therefore 1-\frac{1}{a}=1-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-1\in S$；$\therefore 1-\frac{1}{a}=1-\frac{1}{-1}=2\in S$；故 S 中共有 $2,-1,\frac{1}{2}$ 三个数（图 16、17）其中点 (a_1,a_2) 表示点 $\left(2,\frac{1}{2}\right)$，点 (a_2,a_3) 表示点 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$，点 (a_3,a_4) 表示点 $(-1,2)$.

（2）当集合 S 只有一个元素时，$1-\frac{1}{a}=a$，$a^2-a+1=0$，$\Delta=(-1)^2-4=-3<0$，无解，故不存在这样的集合 S.（图 16、17 中，$y=f(x)$ 与直线 $y=x$ 无交点）

【例 9】已知集合 A 的元素全为实数，且满足：若 $a\in A$，则 $\frac{1+a}{1-a}\in A$.

（1）若 $a=-3$，求出 A 中其它所有元素；

（2）0 是不是集合 A 中的元素？请你设计一个实数 $a\in A$，再求出 A 中的所有元素？

（3）根据（1）（2），你能得出什么结论.

【解析】（1）$\because -3\in S$，$\therefore \frac{1+a}{1-a}=-\frac{1}{2}\in S$；$\therefore \frac{1+a}{1-a}=\frac{1}{3}\in S$；$\therefore \frac{1+a}{1-a}=2\in S$；$\therefore \frac{1+a}{1-a}=-3\in S$。故 S 中共有 $-3,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},2$ 四个数（图 18）其中点 (a_1,a_2) 表示点 $\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$，点 (a_2,a_3) 表示点 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，点 (a_3,a_4) 表示点 $\left(\frac{1}{3},2\right)$，点 (a_4,a_5) 表示点 $(2,-3)$，点 (a_5,a_6) 表示点 $\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$.（2）0 不是.（3）略.

【例 10】已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2, a_n=\frac{1+a_{n-1}}{1-a_{n-1}}$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【解析】$\because a_1=2$，$\therefore a_2=\frac{1+a_1}{1-a_1}=-3$，$\therefore a_3=\frac{1+a_2}{1-a_2}=-\frac{1}{2}$，$\therefore a_4=\frac{1+a_3}{1-a_3}=\frac{1}{3}$，…故 $a_n=\begin{cases}2(n=4k-3)\\-3(n=4k-2)\\-\frac{1}{2}(n=4k-1)\\\frac{1}{3}(n=4k)\end{cases}$

第六讲 摆动数列以及由求导构造函数单调性来解决数列问题

由反比例（递减函数）函数迭代构成的摆动数列，如图 19 所示，当 $f(x)$ 在区间为减函数时，和直线 $y=x$ 相交于不动点，那么由此函数迭代构成的数列为摆动数列，即奇数项和偶数项构成相反的单调性，但都螺旋靠近不动点，极限也是不动点。如图 19 所示 $a_1<a_3<a_5<\cdots<a_{2n-1}$，同时 $a_2>a_4>a_6>\cdots>a_{2n}$；如图 20 所示 $a_1>a_3>a_5>\cdots>a_{2n-1}$，同时 $a_2<a_4<a_6<\cdots<a_{2n}$.

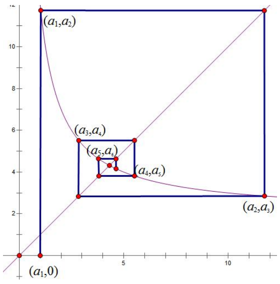


图 19

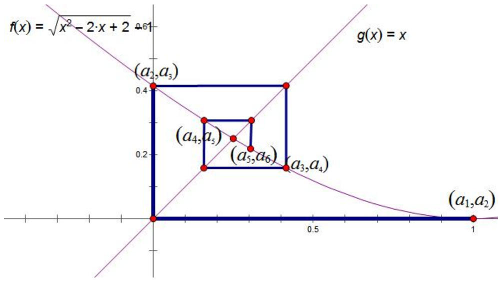
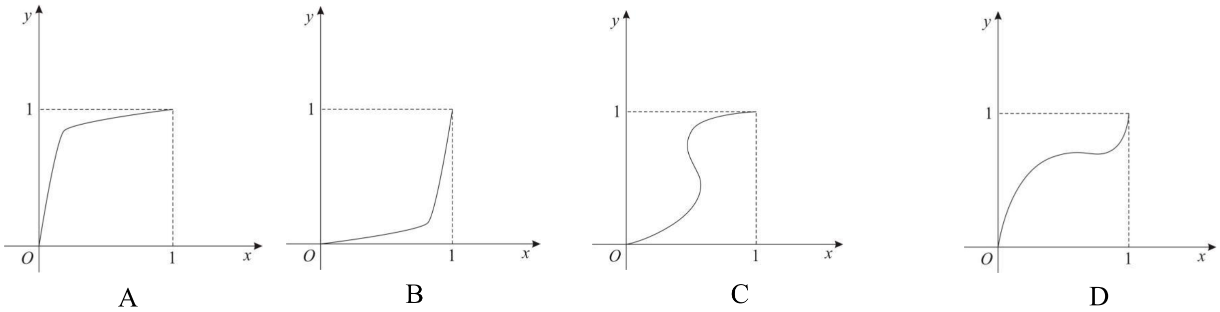


图 20

达标训练

1. 一给定函数 $y=f(x)$的图像如图所示，并且对任意$a_1\left(\in 0,1\right)$，由关系式 $a_{n+1}=f\left(a_n\right)$得到的数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_{n+1}>a_n\left(n\in N^*\right)$，则该函数的图像是（　　）



2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{ax+1}(a>0)$，当 $x>0$ 时，那么 $f_n\left(x\right)$ 与 $f_{n+1}\left(x\right)$ 的大小关系是（　　）

A．$f_{n+1}\left(x\right)=f_n\left(x\right)$　　B．$f_n\left(x\right)>f_{n+1}\left(x\right)$　　C．$f_n\left(x\right)<f_{n+1}\left(x\right)$　　D．不能确定

3. 数列$\left\{x_n\right\}$满足 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n{}^2-2x_n+4\left(n\in N^*\right),x_1=3$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A(A>0)$，则 $A=$__________.

4. 数列$\left\{x_n\right\}$满足 $x_{n+1}=-\dfrac{1}{2}x_n{}^2+2x_n\left(n\in N^*\right),x_1=1$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A(A>0)$，则 $A=$__________.

5. 数列$\left\{x_n\right\}$满足 $x_{n+1}=\dfrac{ax_n+1}{x_n-3}$，且无论 x_1 为何值，数列$\left\{x_n\right\}$只有两个值，则实数 a 的值为（　　）

A．-3　　B．-1　　C．3　　D．1

6. （2019•绍兴一模）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\dfrac{1}{2},a_{n+1}=f(a_n)$，$n\in N^*$，$S_n$ 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且满足 $S_{100}<100$，则 $f(x)$ 不可能是（　　）

A．$f(x)=x^2$　　B．$f(x)=x+\dfrac{1}{x}-2$　　C．$f(x)=e^x-x-1$　　D．$f(x)=lnx+x+1$

7. （2018•杭州期末）设 $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-2}$，记 $f_1(x)=f(x)$，$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))(k=1$，2，3，$\dots)$，则（　　）

A．当 $x\geqslant 2$ 时，不等式 $f_{2018}(x)\geqslant 2$ 恒成立　　B．当 $0<x\leqslant 2$ 时，$f_{2018}(x)$ 单调递增

C．当 $0<x\leqslant 2$ 时，$f_{2018}(x)$ 单调递减　　D．当 $x\leqslant 0$ 时，不等式 $f_{2018}(x)>0$ 有解

8. （2018•洮北期末）已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}(n=1$，$2$，$3$，$\dots)$，则 a_{2008} 等于（　　）

A．0　　B．$\sqrt{3}$　　C．$-\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{2}$

9. （2019•福州期中）已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}(n\in N^*)$，则使 $a_1+a_2+\dots+a_k<100$ 成立的最大正整数 k 的值为（　　）

A．199　　B．200　　C．201　　D．202

10. （2019•福清期中）已知 S_n 为数列$\{a_n\}$前 n 项和，若 $a_1=\dfrac{1}{2}$，且 $a_{n+1}=\dfrac{2}{2-a_n}(n\in N^*)$，则 $6S_{100}=$（　　）

A．425　　B．428　　C．436　　D．437

11. （2018•杨浦期中）若数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\dfrac{1}{2}$ 且 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})a_n}$，则 a_{2018} 为（　　）

A．$\dfrac{5\sqrt{3}-6}{3}$　　B．$\dfrac{1+3\sqrt{2}}{5}$　　C．0　　D．1

12. （2016•泉州二模）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=t$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{2}{a_n}$，若$\{a_n\}$为单调递减数列，则实数 t 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-2)$　　B．$(-2,0)$　　C．$(0,2)$　　D．$(2,+\infty)$

13.（2019•东城一模）已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=a$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}(n\in N^*)$，则下列关于 $\{a_n\}$ 的判断正确的是（　　）

A．$\forall a>0$，$\exists n\geqslant 2$，使得 $a_n<\sqrt{2}$　　B．$\exists a>0$，$\exists n\geqslant 2$，使得 $a_n<a_{n+1}$

C．$\forall a>0$，$\exists m\in N^*$，总有 $a_m<a_n$　　D．$\exists a>0$，$\exists m\in N^*$，总有 $a_{m+n}=a_n$

14.（2016•温州二模）数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，且满足 $a_{n+1}=f(a_n)$，$a_1\in(0,1)$，则 $f(x)$ 不可能是（　　）

A．$f(x)=\sqrt{x}$　　B．$f(x)=2^x-1$　　C．$f(x)=\sqrt{2x-x^2}$　　D．$f(x)=\log_2(x+1)$

15.（2016•长宁三模）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2a_n+\dfrac{2}{a_n}-3$，首项 $a_1=a$，若数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(0,\dfrac{1}{2})\cup(2,+\infty)$　　B．$(0,1)\cup(2,+\infty)$　　C．$(0,1)$　　D．$(2,+\infty)$

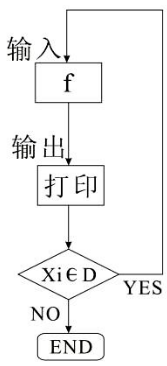
16. 已知数列 $\{a_n\}$满足 $a_1=1$ 且 $a_{n+1}=\dfrac{1+2a_n}{1+a_n}\left(n\in N^*\right)$. 求证：$a_n<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

17. 已知数列 $\{x_n\}$满足 $x_{n+1}=-\dfrac{1}{10}x_n^{\ 2}+2x_n\left(n\in N^*\right),x_1=1$，求证：$10>x_{n+1}>x_n$.

18. 对任意函数 $f(x),x\in D$，可按图示构造一个数列发生器，其工作原理如下：

①输入数据 $x_0\in D$，经数列发生器输出 $x_1=f(x_0)$；

②若 $x\notin D$，则数列发生器结束工作；若 $x_1\in D$，则将 x_1 反馈回输入端，再输出 $x_2=f(x_1)$，并依此规律继续下去，如图所示，现定义 $f(x)=\dfrac{4x-2}{x+1}$；



（1）若输入 $x_0=\dfrac{49}{65}$，则由数列发生器产生数列 $\{x_n\}$，请写出 $\{x_n\}$的前三项；

（2）若要数列发生器产生一个无穷的常数列，试求输入的初始数据 x_0 的值；

（3）若输入 x_0 时，产生的无穷数列 $\{x_n\}$，满足对任意正整数 n 均有 $x_n<x_{n+1}$，求 x_0 的取值范围.

19.（2010•全国卷）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,a_{n+1}=c-\dfrac{1}{a_n}$. 求使得不等式 $a_n<a_{n+1}<3$ 成立的 c 的取值范围.

20.（2007•广东）已知函数 $f(x)=x^2+x-1$，α，β 是方程 $f(x)=0$ 的两个根 $(\alpha>\beta)$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数，设 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}(n=1，2，\ldots)$.

（1）求 α，β 的值；

（2）证明：对任意的正整数 n，都有 $a_n>\alpha$；

（3）记 $b_n=ln\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}(n=1，2，\ldots)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

21.（2009•陕西）已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}$，$n\in N^*$.

（1）猜想数列 $\{x_{2n}\}$ 的单调性，并证明你的结论；

（2）证明：$|x_{n+1}-x_n|\leqslant\dfrac{1}{6}(\dfrac{2}{5})^{n-1}$.